



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**ŘEŠENÍ VYBRANÝCH ÚLOH PRUŽNOSTI POMOCÍ
AIRYHO FUNKCE NAPĚTÍ**

SOLUTION OF CHOSEN EXERCISES OF ELASTICITY BY USING AIRY STRESS FUNCTION

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Martin Koch

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Kamil Novák

BRNO 2016

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Student: **Martin Koch**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **Ing. Kamil Novák**
Akademický rok: 2015/16

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Řešení vybraných úloh pružnosti pomocí Airyho funkce napětí

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Určení polí deformace a napětí u reálných 3D těles, za pomoci analytického přístupu, je komplikované. Již začátkem 20. stol. se proto problémy 3D těles převáděly na úlohy rovinné napjatosti a rovinné deformace. K řešení je vhodné použít tzv. Airyho funkci napětí, která redukuje počet rovnic pružnosti do jedné diferenciální rovnice s jednou proměnnou závislou na zvoleném přístupu, tj. diferenciálně deformačním nebo silovým.

Ať toto, matematicky složitější, řešení umožňuje přesně určit napětí a deformaci (například v pásu s kruhovým ale i eliptickým otvorem, u krutu tyčí nekruhového průřezu) a často se uvádí v pracích o (zobecněné) lomové mechanice, existuje jen minimum dostupné literatury, která by o tomto inverzním přístupu pojednávala nebo prakticky řešila jednotlivé „problémy“ pružnosti.

Cíle bakalářské práce:

Popsat princip (Airyho) funkce napětí
Řešit vhodně vybrané problémy/úlohy
Výsledky srovnat s klasickou teorií prosté pružnosti (zda bude možné)
Výsledky srovnat s metodou konečných prvků
Diskutovat výhody / nevýhody

Seznam literatury:

Kuba, F. (1977): Teorie pružnosti a vybrané aplikace, SNTL, Praha
Sadd., M. H. (2013): Elasticity –Theory, Applications and Numerics. Elsevier, Oxford

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2015/16

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá řešením vybraných úloh z pružnosti pevnosti pomocí Airyho funkce napětí. V práci je nejprve popsáno užití a zavedení této funkce a metody, které funkci využívají při řešení úloh. Ve výpočetní části jsou řešeny vybrané úlohy Airyho funkcí napětí a jejich řešení je srovnáno s řešením, které bychom dostali klasickou teorií pružnosti. V poslední části je provedeno řešení metodou konečných prvků a vzájemné srovnání všech řešení.

Summary

The Bachelor thesis is concerned with solving selected Mechanics of Material tasks using Airy stress function. First, a description of usage and implementation of the function and methods using the function for solving problems are provided. In the analytical part, there are selected tasks solved by using the Airy stress function and the results are compared with the ones obtained by using the standard approach. A calculation using the Finite Element Method is carried out in the last part and is followed by a final comparison of all the solutions.

Klíčová slova

Airyho funkce napětí, klasická teorie pružnosti, metoda konečných prvků, rovinné namáhání

Keywords

Airy stress function, Mechanics of Materials solution, Finite Element Method, plane stress

KOCH, M. *Řešení vybraných úloh pružnosti pomocí Airyho funkce napětí*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2016. 49 s. Vedoucí Ing. Kamil Novák.

Prohlášení

Tímto prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma "Řešení vybraných úloh pružnosti pomocí Airyho funkce napětí" jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a za použití odborné literatury a zdrojů, které jsou citovány a uvedeny v seznamu použité literatury.

Martin Koch

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce panu Ing. Kamilu Novákovi za odborné vedení mé práce, čas a rady, které mi věnoval.

Dále bych chtěl poděkovat svým rodičům a rodině, kteří mě podporovali během psaní bakalářské práce a celého studia.

Martin Koch

Obsah

1 Úvod	13
2 Cíle práce	15
3 Teoretický úvod	17
3.1 Airyho funkce napětí	17
3.1.1 Užití funkce napětí	17
3.2 Zavedení Airyho funkce napětí	17
3.2.1 Formulace funkce napětí v kartézských souřadnicích	19
3.2.2 Formulace funkce napětí v polárních souřadnicích	20
4 Metody řešení	22
4.1 Užití polynomu	22
4.2 Obecné Michellovo řešení	23
4.3 Příklad symetrie	24
5 Analytické řešení reálných úloh	25
5.1 Nosník namáhaný na prostý tah	25
5.2 Nosník namáhaný na prostý ohyb	27
5.3 Nosník zatížený líniovým zatížením	29
5.4 Zakřivený nosník zatížen momentem	32
5.5 Válcová nádoba zatížená vnitřním tlakem	35
5.6 Stěna s kruhovým otvorem namáhaná tahem	37
6 Numerická řešení pomocí MKP	40
6.1 Vznik a použití	40
6.2 MKP jako variační metoda	40
6.3 Řešení úloh	41
6.3.1 Nosník namáhaný na prostý tah	41
6.3.2 Nosník namáhaný na prostý ohyb	41
6.3.3 Nosník zatížený líniovým zatížením	42
6.3.4 Zakřivený nosník namáhan ohybem	43
6.3.5 Válcová nádoba zatížená vnitřním tlakem	44
6.3.6 Stěna s kruhovým otvorem namáhaná tahem	45
7 Závěr	46
Literatura	47
Seznam obrázků	48
8 Seznam použitých zkratk a symbolů	49

1. Úvod

Existuje mnoho metod řešení, jak určit pole napětí a deformace v pružnosti a pevnosti. Pro jednoduché úlohy se používá klasická teorie pružnosti, u těch složitějších a praktičtějších úloh se v dnešní době užívá především metoda konečných prvků (MKP). Jsou zde však další metody, bez kterých by se především v minulosti lidé neobešli. Jednou z těchto metod se zabývám ve své bakalářské práci, a to metodou řešení pomocí Airyho funkce napětí.

Bakalářská práce je rozdělena na dvě části - teoretickou a praktickou (výpočtovou) část. V teoretické části stručně popisují historii a užití Airyho funkce napětí. Dále je v práci stručně vysvětleno zavedení funkce a její formulace v souřadných systémech, a také metody řešení, ve kterých se funkce napětí používá k řešení problémů. Praktická část se věnuje již samotnému analytickému řešení vybraných úloh. Úlohy jsou vybrány tak, aby zde byly použity všechny druhy metod. Výsledkem těchto řešení jsou obecné rovnice pro výpočet napětí v tělese a také průběhy napětí vykreslené pomocí softwaru Maple. Výsledky jsou porovnávány s řešeními klasickou teorií pružnosti (pokud je to možné) a s metodou konečných prvků.

Závěr se věnuje zhodnocení výhod a nevýhod metody řešení pomocí Airyho funkce napětí s ostatními dvěma zmiňovanými.

2. Cíle práce

1. Popsat princip Airyho funkce napětí
2. Řešit vhodně vybrané problémy/úlohy
3. Výsledky srovnat s klasickou teorií pružnosti, pokud je to možné
4. Výsledky srovnat s metodou konečných prvků
5. Diskutovat výhody/nevýhody

3. Teoretický úvod

3.1. Airyho funkce napětí

Jednou z hlavních úloh, které se řeší v pružnosti a pevnosti, je určení pole napětí a deformace na různých typech tělesa. Pokud uvažujeme nějaké idealizované těleso, tj. takové, které je bez trhlin, je homogenní a má ve všech místech stejný tvar, není řešení klasickou teorií pružnosti nijak složité. Pokud ovšem chceme řešit nějaké reálné těleso, ve kterém se již objevují např. trhliny, je řešení klasickou teorií pružnosti velmi obtížné nebo nemožné.

V minulosti byl velký problém určovat pole napětí v takovýchto tělesech, proto se lidé snažili najít metody, pomocí kterých by se řešení zjednodušilo. Jedna z metod, kterou si lze zjednodušit řešení reálných těles, je metoda řešení pomocí Airyho funkce napětí, kterou si označíme Φ . Tato funkce napětí je pojmenována po britském matematikovi Georgovi Biddell Airym, který ji odvodil už v roce 1862.

Hlavní výhodou Airyho funkce je, že redukuje počet rovnic pružnosti na jednu rovnici v diferenciálním tvaru, kde právě tato funkce je jedinou neznámou. Toto je obrovské zjednodušení pro veškeré výpočty, jelikož počítat s jednou rovnicí je mnohem snazší, než kdybychom počítali s mnoha rovnicemi o mnoha neznámých. [2, 3, 6]

3.1.1. Užití funkce napětí

V tomto odstavci si uvedeme několik možností užití Airyho funkce napětí, z nichž některým se budu věnovat v následujících částech mé práce. Metoda řešení pomocí Airyho funkce se užívá při zjišťování napětí a deformací u přímých i zakřivených nosníků, na které působí různá zatížení, jako jsou např. nosník zatížený tahem, tlakem, momentem, liniovým zatížením nebo silou. Dále můžeme určit napětí u stěny, která může být s otvorem, zatížená na tah nebo tlak. Využití má také v lomové mechanice při určování intenzity napětí v tělesech s trhlinou. Při řešení složitějších úloh je již tato metoda nevýhodná díky své obtížnosti. U takovýchto úloh se využívá především metoda konečných prvků (MKP).

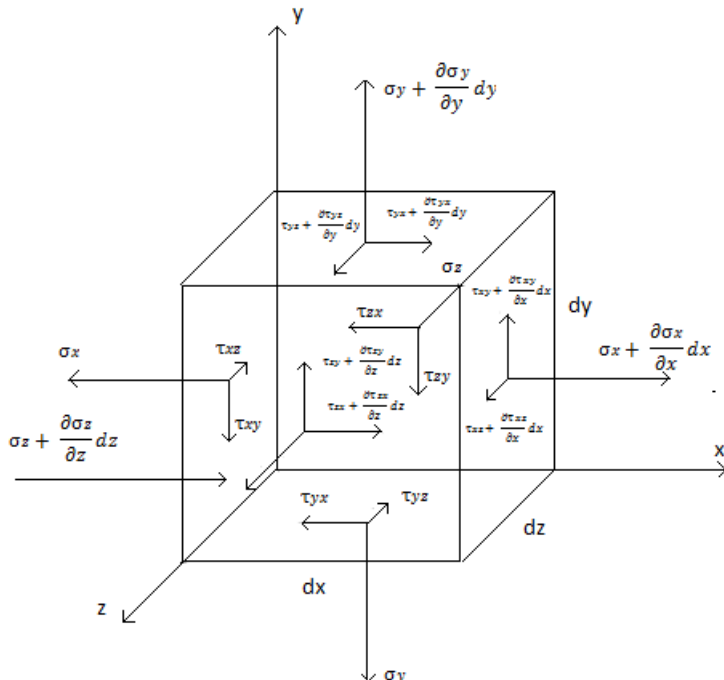
3.2. Zavedení Airyho funkce napětí

V této sekci jsem čerpal z [3].

Ukážeme si, jak lze vyjádřit rovnice pomocí diferenciálního (silového) přístupu Airyho funkcí. Diferenciální přístup je takový přístup, kde vycházíme ze silového působení na elementární prvek (předpokládáme u něj malé deformace, což nám umožňuje ho uvolnit v zatíženém stavu bez uvažování jeho deformace). Tento přístup vede na diferenciální rovnice. Odvodíme si rovnice jak pro kartézský souřadný systém, tak i pro polární. Pro zavedení bohatě postačí uvažovat rovnice pro 2D prostor. Lze to samozřejmě rozšířit i pro úlohy ve 3D, kde bychom počítali s deformacemi a posuvy ve všech směrech. To je ale již velmi složité, a proto se jimi v této práci nebudu vůbec zabývat.

Pro zavedení Airyho funkce napětí ve složkách napětí budeme potřebovat celkově 3 rovnice matematické teorie pružnosti - dvě rovnice rovnováhy pro rovinnou napjatost a dále rovnici kompatibility (podmínka kompatibility).

3.2. ZAVEDENÍ AIRYHO FUNKCE NAPĚTÍ



Obrázek 3.1: Elementární prvek. [4]

1. **Rovnice rovnováhy** - vyjadřují se jimi podmínky rovnováhy na velmi malém elementu prvku (obr. 3.1). Pokud předpokládáme malé deformace elementárního prvku a zároveň izotropii (vlastnosti jsou ve všech místech stejné), rovnice rovnováhy má pro směr x tvar

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) + F_x = 0. \quad (3.1)$$

Pro směry y a z vypadají rovnice analogicky, proto je zde nebudu uvádět.

Jelikož Airyho funkci napětí řešíme pouze pro rovinný stav namáhání, členy, které obsahují souřadnici z , budou nulové. Rovnice rovnováhy pro 2D pak mají tvar

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\right) + F_x = 0, \quad (3.2)$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right) + F_y = 0.$$

2. **Rovnice kompatibility** - rovnice jsou známé též jako Saint-Venantovy rovnice. Pro jejich určení jsou známy dva základní postupy. První je pro deformační variantu, při které si určíme složky tenzoru přetvoření na základě posuvu. Předpokládáme spojitost všech posuvů a derivací až do druhého řádu, díky čemuž u funkcí nezáleží na pořadí derivování. Tato vlastnost je potřebná při samotném odvozování rovnic. Druhý postup používáme pro řešení úlohy silovým přístupem.

- **Rovnice kompatibility ve složkách deformace** - tato rovnice má pro rovinný stav tvar

$$\left(\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}\right), \quad (3.3)$$

kde $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ jsou vektory složek deformace.

- **Rovnice kompatibility ve složkách napětí** - pokud nahradíme složky deformace v rovnici (3.3) složkami napětí za použití Hookeova zákona a následně upravíme za pomoci rovnic (3.2), získáme rovnici, kterou pomocí Laplaceova operátoru zapíšeme ve tvaru

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \mu) \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\right). \quad (3.4)$$

Rovnice v tomto tvaru se nazývá Beltrami-Michelova rovnice pro rovinnou napjatost. Pokud budeme uvažovat, že všechny objemové síly působící na těleso jsou nulové, budou složky pro rovnici (3.4) $F_x = 0$ a $F_y = 0$, a tudíž celá pravá strana rovnice bude nulová.

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (3.5)$$

Tomuto tvaru se říká **Lévyova podmínka**.

3.2.1. Formulace funkce napětí v kartézských souřadnicích

Pro řešení ve složkách napětí máme nyní k dispozici rovnice rovnováhy a Beltrami-Michelovu rovnici kompatibility (3.4). Nyní si můžeme vyjádřit složky napětí σ_x, σ_y a τ_{xy} za pomoci funkce napětí. Dostaneme rovnice

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (3.6)$$

Složky napětí vyjádřené pomocí Airyho funkce dosadíme do rovnice (3.4) a získáme tvar

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial^4 x} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial^4 y} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial^2 y \partial^2 x} = -(1 - \mu) \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\right).$$

Pokud nebudeme uvažovat měrné síly se změnou y , dostaneme pravou stranu rovnu nule. Rovnici zapíšeme ve tvaru

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial^4 x} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial^4 y} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial^2 y \partial^2 x} = 0,$$

což lze zapsat pomocí diferenciálního operátoru v jednoduchém tvaru

$$\nabla^4 \Phi = 0. \quad (3.7)$$

Získali jsme tím **biharmonickou rovnici** pro řešení rovinných úloh s nulovou objemovou silou. Při řešení rovinné napjatosti se snažíme nalézt takovou biharmonickou funkci, která musí splňovat předepsané okrajové podmínky vyjádřené v závislosti na Φ užitím rovnic (3.6). Z rovnice (3.7) plyne ještě jedna důležitá vlastnost. Neobsahuje žádnou materiálovou konstantu, tudíž toto řešení platí pro jakýkoliv druh materiálu. [1, 2, 3]

3.2. ZAVEDENÍ AIRYHO FUNKCE NAPĚTÍ

3.2.2. Formulace funkce napětí v polárních souřadnicích

V předchozím odstavci jsem uvedl tvar Airyho funkce v kartézských souřadnicích. Nyní si ukážeme, jak bude tato funkce vypadat v zakřiveném systému, tedy v polárních souřadnicích. Pro rovinnou úlohu budeme uvažovat složky $u_r, u_\theta, e_r, e_\theta, e_{r\theta}, \sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$. Airyho funkce je funkcí 2 proměnných, v polárních souřadnicích ji píšeme ve tvaru $\Phi(r, \theta)$. Abychom získali tuto funkci napětí, budeme uvažovat rovnice rovnováhy v polárních souřadnicích ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} + F_r &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

a rovnici kompatibility s nulovou pravou stranou a podmínkou, že $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_r + \sigma_\theta$

$$\nabla^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0. \quad (3.9)$$

Složky napětí v polárních souřadnicích vyjádřené pomocí Airyho funkce můžeme napsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2}, \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Tyto rovnice splňují jak rovnice rovnováhy (5.4), tak i rovnici kompatibility (3.9) pro nulové objemové síly. Když dosadíme do rovnice kompatibility složky napětí vyjádřené Airyho funkcí napětí, získáme biharmonickou rovnici v polárních souřadnicích [1, 2, 3].

$$\nabla^4 \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \Phi = 0 \quad (3.11)$$

Mezi napěťovými rovnicemi v kartézských souřadnicích a polárních existuje závislost. Vztah mezi nimi můžeme popsat pomocí následujících rovnic, které jsme odvodili z obrázku (obr. 3.2) [7]

$$p_x = \sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta, \quad p_y = \sigma_y \sin \theta + \tau_{xy} \cos \theta, \quad (3.12)$$

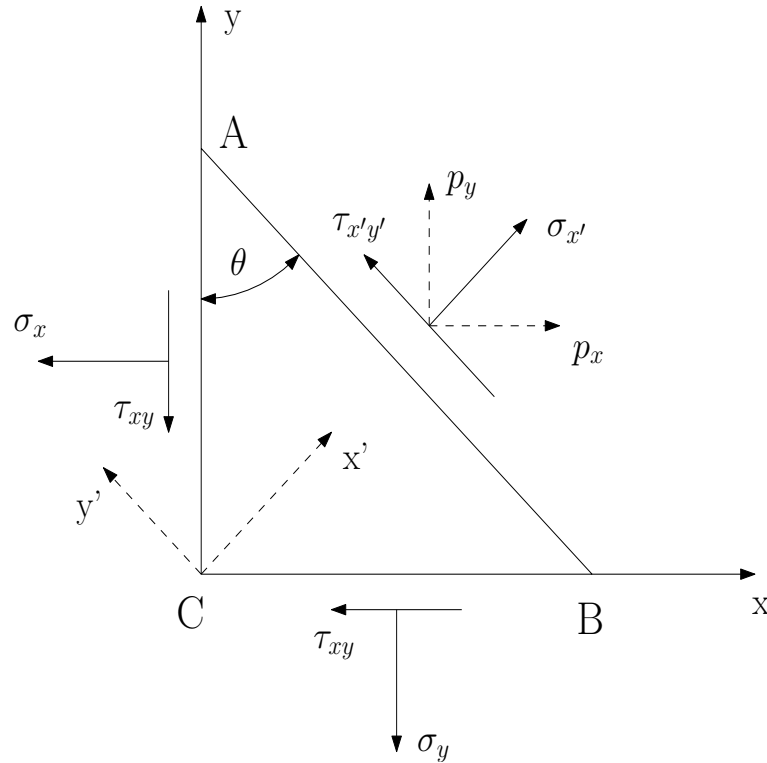
$$\sigma_{x'} = p_x \cos \theta + p_y \sin \theta. \quad (3.13)$$

Do rovnice (3.13) dosadíme vztahy pro p_x, p_y z rovnic (3.12) a položíme $x' = r$ a $y' = \theta$. Získáme rovnice pro vztah mezi napětím v polárním a kartézském systému

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \tau_{r\theta} &= (\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Pro opačný případ budou rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta + \tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta, \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta, \\ \tau_{xy} &= (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin \theta \cos \theta + \tau_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).\end{aligned}\tag{3.15}$$



Obrázek 3.2: Vztah mezi souřadnicemi v kartézském a polárním systému. [7]

4. Metody řešení

Nyní si uvedeme dvě základní metody pro řešení napětí v tělese za použití Airyho funkce napětí a to jak v kartézských souřadnicích, tak v polárních. Tyto metody nám budou sloužit v další kapitole k řešení vybraných úloh.

4.1. Užítí polynomu

Řešení hledáme v pravoúhlých souřadnicích. U rovnice

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad (4.1)$$

chceme určit, jaké problémy mohou být řešeny. Předpokládáme, že tvar pro řešení funkce napětí je dán v rovině obecným polynomem, který můžeme zapsat ve tvaru mocninné řady

$$\Phi(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} x^m y^n, \quad (4.2)$$

kde A_{mn} jsou konstanty, které chceme určit. [Formulaci uvedl Neou (1957)].

Pokud $m + n \leq 1$, tak tento člen neuvažujeme, protože nemá žádný vliv na namáhání tělesa. U členu, kde $m + n \leq 2$ je těleso zatěžováno konstantním zatížením a pro $m + n \leq 3$ je napětí na těleso rozloženo lineárně. Pro čísla větší než 3 se zvyšuje řád polynomů.

Pro podmínku $m + n \leq 3$ vyhovuje biharmonická rovnice (4.1) pro jakoukoliv volbu konstanty A_{mn} . Pro $m + n > 3$ se již A_{mn} musí volit, aby vyhovovala biharmonické rovnici. Pro obecný případ, který je odvozen v knize Martin H. Sadd, Elasticity - Theory, Application and Numerics, dosadíme do rovnice (4.1) mocninnou řadu (4.2) a zapíšeme ji jako

$$\begin{aligned} & \sum_{m=4}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} m(m-1)(m-2)(m-3) A_{mn} x^{m-4} y^n \\ & + 2 \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} m(m-1)n(n-1) A_{mn} x^{m-2} y^{n-2} \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3) A_{mn} x^m y^{n-4} = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Po vytknutí x a y a předpokladu, že rovnice musí být splněna pro všechny jejich hodnoty, můžeme rovnici napsat ve tvaru

$$\begin{aligned} & (m+2)(m+1)m(m-1)A_{m+2,n-2} + 2m(m-1)n(n-1)A_{mn} \\ & + (n+2)(n+1)n(n-1)A_{m-2,n+2} = 0. \end{aligned}$$

Tato metoda je nejčastěji aplikována na řešení úloh, kdy zatěžujeme nosník, jehož délka je mnohem větší než jeho šířka. Je to např. nosník namáhaný tahem nebo ohybem. [1]

4.2. Obecné Michellovo řešení

Nyní budeme hledat řešení úloh v polárních souřadnicích. Využijte rovnici Airyho funkce napětí (3.11). Obecné řešení této rovnice budeme hledat za předpokladu $\Phi(r, \theta) = f(r)e^{b\theta} = f(e^\xi)e^{b\theta}$, kde b je zjišťovaný parametr. Pokud tento předpoklad dosadíme do biharmonické rovnice a zbavíme se $e^{r\theta}$, získáme tvar

$$f'''' - 4f'''' + (4 - 2b^2)f'' - 4b^2f' + b^2(4 + b^2)f = 0, \quad (4.4)$$

jejíž charakteristická rovnice je tvaru

$$(a^2 + b^2)(a^2 - 4a + 4 + b^2) = 0.$$

Řešením této rovnice jsou kořeny $a = \pm ib$, $a = 2 \pm ib$.

Budeme se zabývat pouze periodickým řešením v θ , které získáme dosazením za $b = in$, kde n je celé číslo. Kompletní řešení Airyho funkce napětí odvodil Michell (1899) a Little (1973) a zapíšeme ho ve tvaru

$$\begin{aligned} \Phi = & a_0 + a_1 \log r + a_2 r^2 + a_3 r^2 \log r \\ & + (a_4 + a_5 \log r + a_6 r^2 + a_7 r^2 \log r) \theta \\ & + (a_{11} r + a_{12} r \log r + \frac{a_{13}}{r} + a_{14} r^3 + a_{15} r \theta + a_{16} r \theta \log r) \cos \theta \\ & + (b_{11} r + b_{12} r \log r + \frac{b_{13}}{r} + b_{14} r^3 + b_{15} r \theta + b_{16} r \theta \log r) \sin \theta \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n1} r^n + a_{n2} r^{2+n} + a_{n3} r^{-n} + a_{n4} r^{2-n}) \cos(n\theta) \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} (b_{n1} r^n + b_{n2} r^{2+n} + b_{n3} r^{-n} + b_{n4} r^{2-n}) \sin(n\theta), \end{aligned} \quad (4.5)$$

kde a_n , a_{nm} a b_{nm} jsou hledané konstanty. [1]

4.3. Případ symetrie

Pro případ rotační symetrie, tzn. pokud je rozložení napětí vzhledem k ose symetrické a vedené kolmo k rovině souřadnic (obr. 4.1), jsou složky napětí pouze funkcemi souřadnice r . V takovém případě uvažujeme pouze jednu diferenciální rovnici rovnováhy ve tvaru

$$\frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} + \frac{d\sigma_r}{dr} + R^{(0)} = 0$$

. Pokud je složka objemové síly R nulová, Airyho funkce je ve tvaru

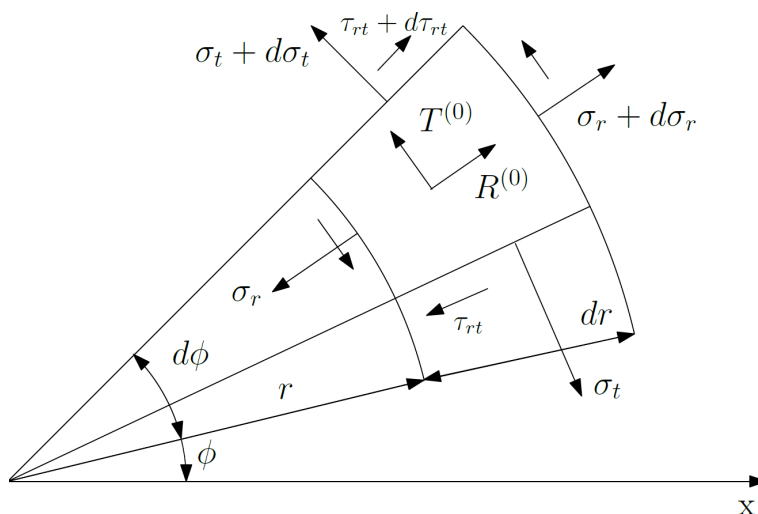
$$\frac{d^4\Phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3\Phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\Phi}{dr} = 0. \quad (4.6)$$

Pokud užijeme substituci $r = e^t$, získáme rovnici pro funkci napětí

$$\Phi = a_0 + a_1 \log r + a_2 r^2 + a_3 r^2 \log r, \quad (4.7)$$

kde a_0, a_1, a_2, a_3 jsou konstanty.

Z tohoto řešení lze provést výpočet všech rotačně symetrických problémů, pokud jsou objemové síly nulové. [1, 2]



Obrázek 4.1: Rovinný element. [2]

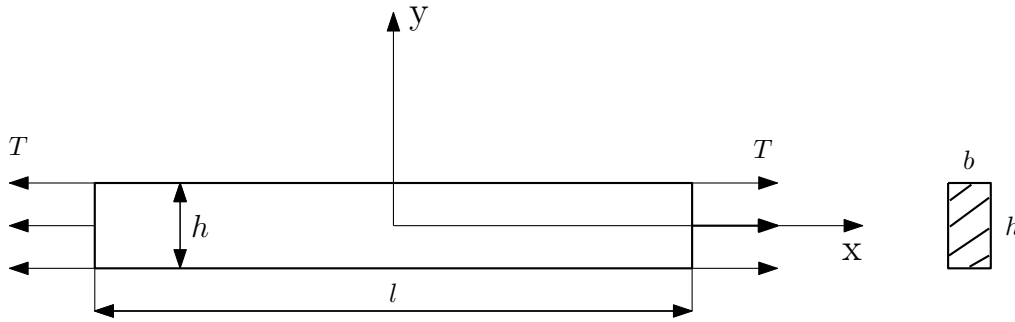
5. Analytické řešení reálných úloh

Při psaní této kapitoly jsem se inspiroval [1, 2, 5].

V této kapitole se budu zabývat numerickým řešením úloh pomocí Airyho funkce. Výsledná napětí graficky vyhodnotím v softwaru Maple a pokud to bude možné, srovnám s klasickou teorií pružnosti, jestli je řešení totožné nebo se v něm vyskytují drobné odlišnosti. Dále určím řešení metodou konečných prvků pomocí softwaru Ansys.

5.1. Nosník namáhaný na prostý tah

Budeme řešit nosník ve 2D prostoru, pro který platí $l \gg b$. Neuvažujeme objemové síly a jediné zatížení je vedeno podél osy x (viz obr. 5.1). Rozměry nosníku jsou $l = 1$ m a $h = 0,1$ m a $b = 0,001$ m.



Obrázek 5.1: Nosník namáhaný na prostý tah.

Složky napětí můžeme zapsat pomocí Airyho funkce ve tvaru

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

Pro daný případ si zvolíme okrajové podmínky pro $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ následovně

$$\sigma_x(\pm l, y) = T, \quad \sigma_y\left(x, \pm \frac{h}{2}\right) = 0,$$

$$\tau_{xy}(\pm l, y) = \tau_{xy}\left(x, \pm \frac{h}{2}\right) = 0.$$

Pro nosník zatížený tahem ve směru osy x má Airyho funkce napětí tvar

$$\Phi = A_{02}y^2. \quad (5.1)$$

Tyto funkce se nyní dosadí do vztahů pro výpočet napětí a položíme je rovny okrajovým podmínkám. Je zřejmé, že napětí bude nenulové pouze ve směru x , kde $\sigma_x = 2A$ a po dosazení okrajové podmínky získáme konečnou hodnotu napětí, a to

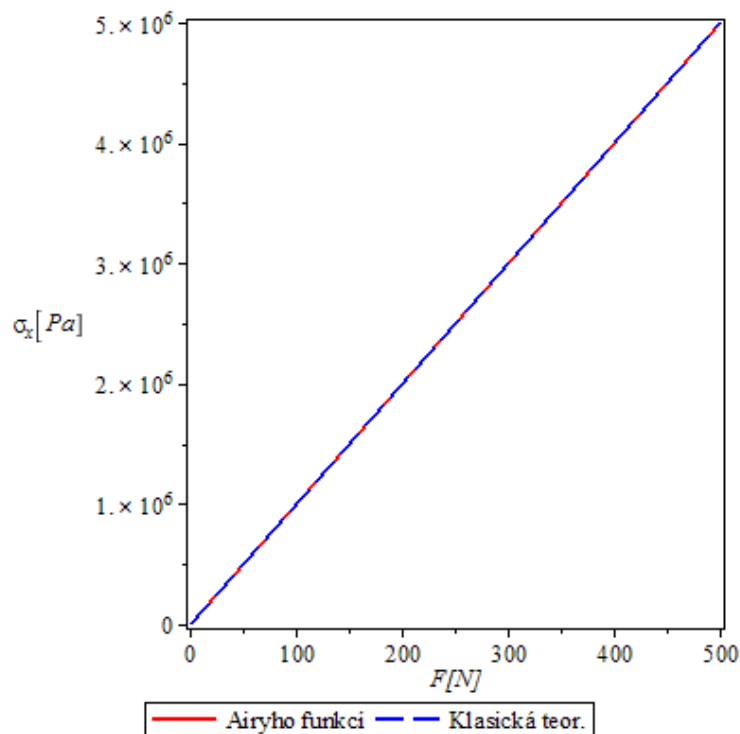
$$\sigma_x = T, \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad (5.2)$$

5.1. NOSNÍK NAMÁHANÝ NA PROSTÝ TAH

kde T je tahová síla působící na nosník. Určí se vztahem $T = \frac{F}{S}$. Z rovnic (5.2) je patrné, že napětí se rovná tahové síle. Pokud budeme zatěžovat nosník silou např. $F = 100$ N, bude normálové napětí $\sigma_x = 1$ MPa pro zadané h, b .

Pokud budeme sílu F měnit, bude se měnit také velikost napětí. Po srovnání s klasickou teorií pružnosti vyjde totožné řešení.

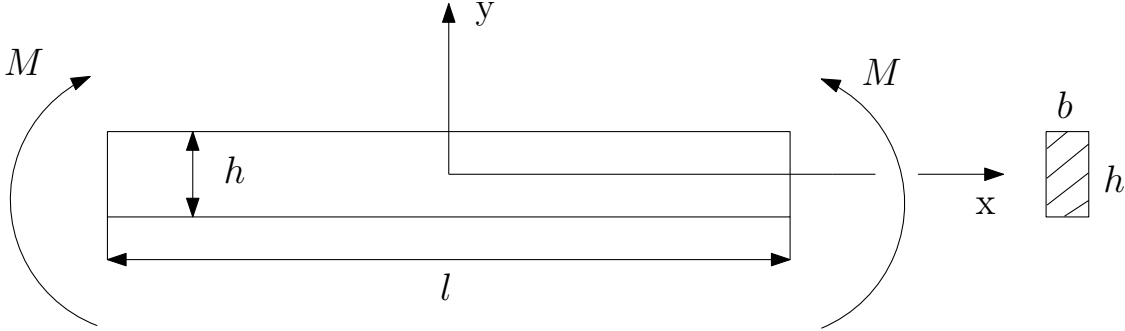
Průběh napětí σ_x je zakreslen v následujícím grafu (obr. 5.2). Můžeme vidět, že průběh napětí z klasické teorie pružnosti je totožný s průběhem určeným pomocí Airyho funkce napětí. Napětí σ_y, τ_{xy} jsou pro obě metody nulová, proto je zbytečné se graficky zabývat jejich srovnáváním.



Obrázek 5.2: Srovnání klasické metody a Airyho funkce.

5.2. Nosník namáhaný na prostý ohyb

Nyní budeme zjišťovat napětí u nosníku, který je zatěžován na čistý ohyb (viz obr. 5.2). Opět uvažujeme nosník o délce $l = 1$ m, $h = 0,1$ m a tloušťce $b = 0,001$ m.



Obrázek 5.3: Nosník namáhaný na ohyb.

Hodnoty napětí opět určíme ze vztahů (3.6). Pro takovýto případ zvolíme Airyho funkci napětí ve tvaru

$$\Phi = A_{03}y^3. \quad (5.3)$$

Pokud tuto funkci dosadíme do vztahů (3.6), dostaneme rovnice pro napětí

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 6A_{03}y, \\ \sigma_y &= \tau_{xy} = 0, \end{aligned} \quad (5.4)$$

kde A_{03} je hledaná konstanta.

Abychom konstantu určili, zavedeme si okrajové podmínky ve tvaru

$$\sigma_y \left(x, \pm \frac{h}{2} \right) = 0, \quad \tau_{xy} \left(x, \pm \frac{h}{2} \right) = \tau_{xy}(\pm l, y) = 0,$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x(\pm l, y) dy = 0, \quad b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x(\pm l, y) y dy = -M.$$

Okrajové podmínky dosadíme do rovnic pro určení napětí a vypočítáme konstantu A_{03} . Po úpravách nám vyjde

$$A_{03} = -\frac{2M}{h^3}.$$

Nyní tuto konstantu dosadíme do rovnic (5.4) a dostaneme konečné vztahy pro výpočet napětí

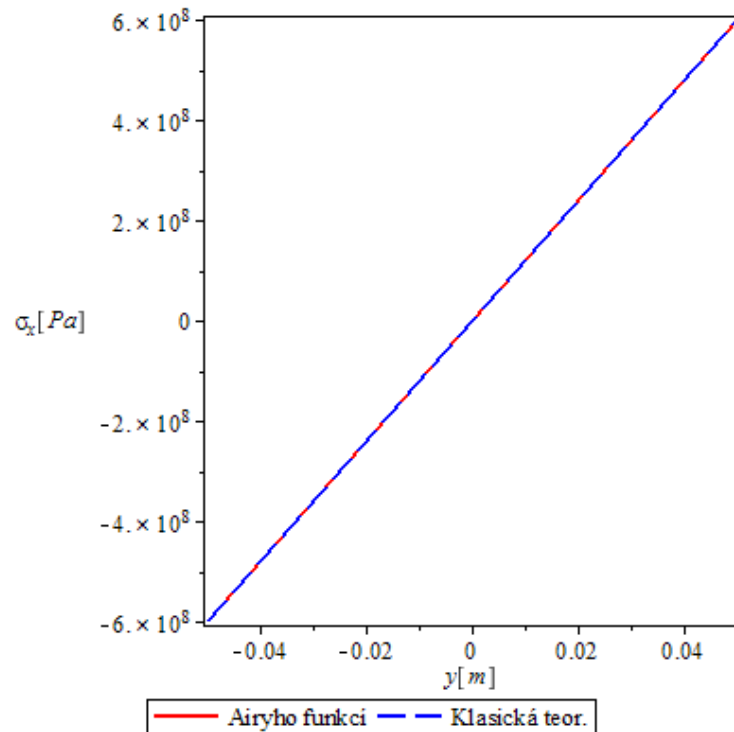
$$\sigma_x = \frac{-12M}{bh^3}y, \quad (5.5)$$

$$\sigma_y = \tau_{xy} = 0.$$

5.2. NOSNÍK NAMÁHANÝ NA PROSTÝ OHYB

Pro obdélníkový průřez je osový kvadratický moment $J = \frac{1}{12}bh^3 [m^4]$, proto můžeme výsledné napětí zapsat jako $\sigma_x = -\frac{M}{J}y$.

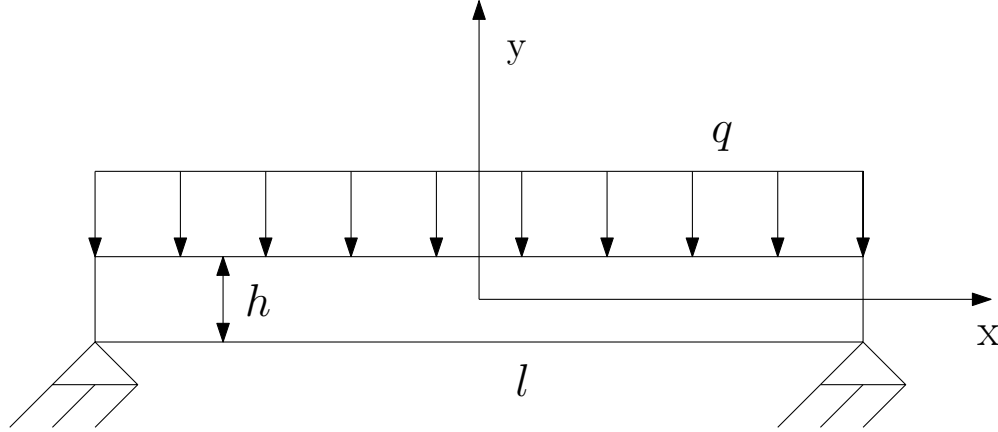
Výsledné rovnice pro výpočet napětí se shodují s rovnicemi určenými klasickou teorií pružnosti, tudíž i průběhy napětí budou totožné. Pokud budeme uvažovat zachování rovinnosti průřezu po deformaci, bude rozložení normálového napětí σ_x lineární. Pro vykreslení průběhů napětí jsem zvolili moment $M = 1000 \text{ Nm}$.



Obrázek 5.4: Srovnání klasické metody a Airyho funkce.

5.3. Nosník zatížený liniovým zatížením

Ukážeme si, jak lze určit napětí u nosníku o délce $l = 1$ m a výšce $h = 0,1$ m, který je zatížený liniovým zatížením q na horní plochu ve směru osy y (viz obr. 5.3).



Obrázek 5.5: Nosník zatížený liniovým zatížením.

Pro tento typ zatížení zvolíme Airyho funkci napětí následovně. Převzato z [1].

$$\Phi(x, y) = A_{20}x^2 + A_{21}x^2y + A_{03}y^3 + A_{23}x^2y^3 - \frac{A_{23}}{5}y^5 \quad (5.6)$$

Nyní tuto funkci napětí dosadíme do vztahů (3.6) a získáme jednotlivá napětí

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 6A_{03}y + 6A_{23}\left(x^2y - \frac{2}{3}y^3\right), \\ \sigma_y &= 2A_{20} + 2A_{21}y + 2A_{23}y^3, \\ \tau_{xy} &= -2A_{21}x - 6A_{23}xy^2, \end{aligned} \quad (5.7)$$

kde A_{20} , A_{21} , A_{23} , A_{03} jsou hledané konstanty. Nyní si určíme okrajové podmínky, abychom mohli určit všechny konstanty.

$$\tau_{xy}(x, \pm h) = 0, \quad \int_{-h}^h \sigma_x(\pm l, y) dy = 0,$$

$$\sigma_y(x, h) = 0, \quad \sigma_y(x, -h) = -q.$$

Tyto okrajové podmínky dosadíme do rovnic (5.7) a určíme všechny hledané konstanty. Po úpravách rovnic vyjdou konstanty v těchto tvarech

$$A_{03} = \frac{ql^2}{8h^3} - \frac{2q}{48h}, \quad A_{23} = \frac{-2q}{16h^3},$$

$$A_{20} = -\frac{q}{4}, \quad A_{21} = \frac{6q}{16h}$$

5.3. NOSNÍK ZATÍŽENÝ LINIOVÝM ZATÍŽENÍM

kde q je liniové zatížení, h je výška nosníku a l je jeho délka.

Po dosazení těchto konstant do rovnic (5.7) získáme konečné hodnoty jednotlivých napětí

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{q}{4h} \left(\frac{3l^2}{h^2} - 1 \right) y - \frac{q}{4h^3} (3x^2y - 2y^3), \\ \sigma_y &= -\frac{q}{2} + \frac{3q}{4h}y - \frac{q}{4h^3}y^3, \\ \tau_{xy} &= -\frac{3q}{4h}x + \frac{3q}{4h^3}xy^2.\end{aligned}\tag{5.8}$$

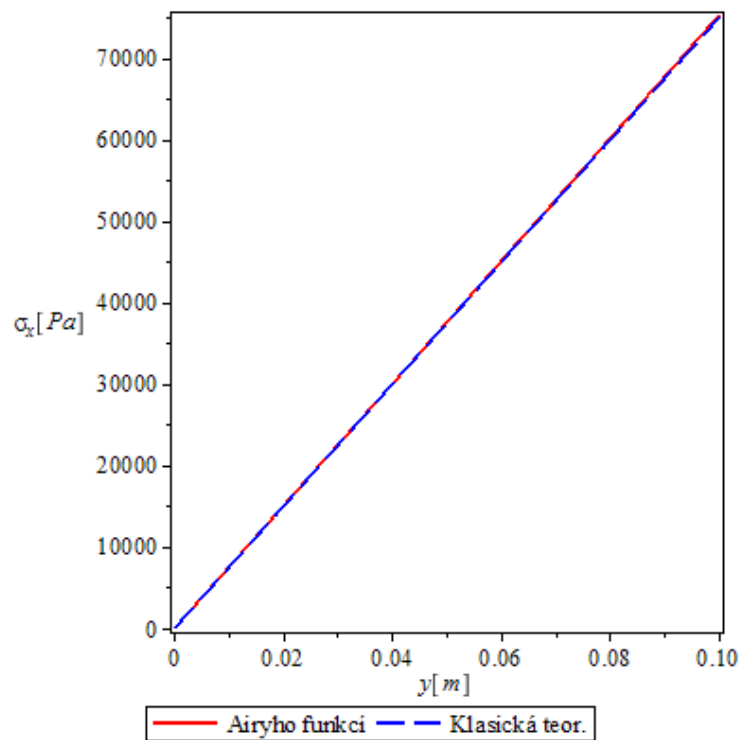
Pokud získaná napětí porovnáme s napětími určenými pomocí klasické teorie pružnosti, zjistíme, že hodnoty se výrazně liší. Tudiž i průběhy napětí se budou u obou metod lišit. Pokud srovnáme napětí σ_x (viz obr. (5.6)), můžeme říci, že jsou téměř totožná, protože člen navíc, který je obsažen u řešení Airyho funkcí nemá velký vliv na celkové napětí. Pro napětí σ_y je ale obrovský rozdíl mezi oběma řešeními (viz obr. 5.7).

Z křivky zobrazující průběh napětí určeného pomocí Airyho funkce plyne, že na spodní části nosníku je největší napětí, kdežto v místech působení je napětí nulové.

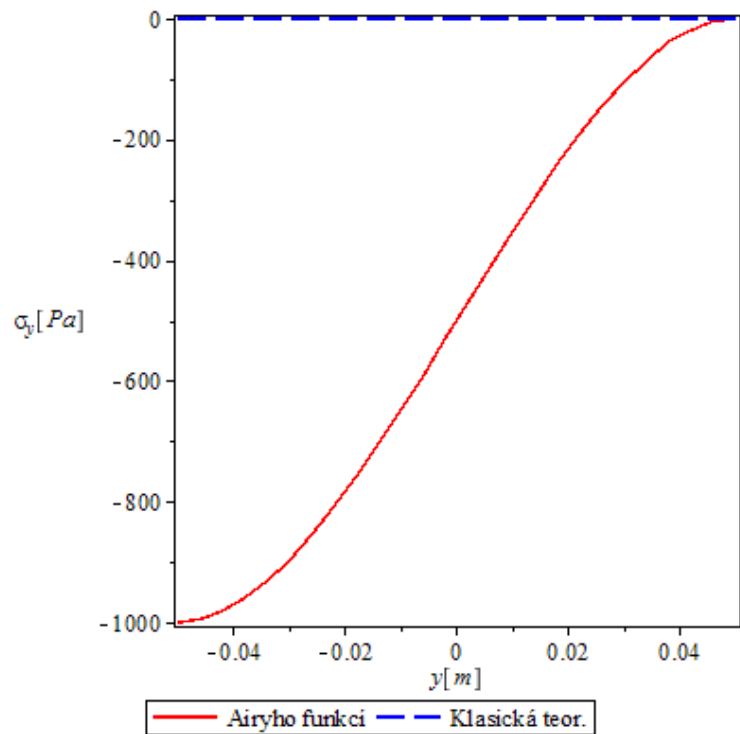
Pro vyobrazení průběhů jsme zvolili $q = 1000 \text{ N/m}$. Napětí určené klasickou teorií pružnosti mají tvar

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{3q}{4h^3}(l^2 - x^2)y, \\ \sigma_y &= 0, \\ \tau_{xy} &= -\frac{3q}{4h^3}x(h^2 - y^2).\end{aligned}\tag{5.9}$$

5. ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ REÁLNÝCH ÚLOH



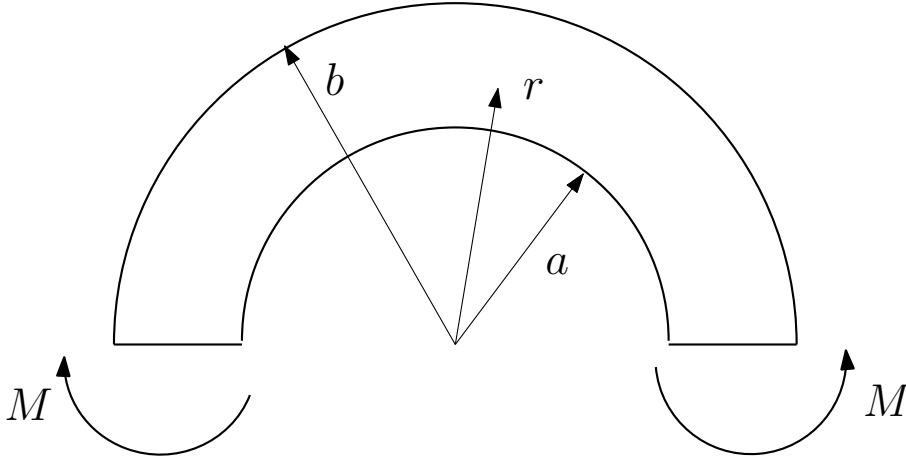
Obrázek 5.6: Porovnání napětí σ_x .



Obrázek 5.7: Porovnání napětí σ_y .

5.4. Zakřivený nosník zatížen momentem

V této části budeme počítat napětí na zakřiveném nosníku s vnitřním poloměrem a a vnějším poloměrem b (viz obr. 5.8).



Obrázek 5.8: Zakřivený nosník namáhaný ohybem.

Jelikož se jedná o symetrickou úlohu, nebudeme u Airyho funkce uvažovat souřadnice θ . Tvar funkce napětí bude tedy

$$\Phi(r) = a_0 + a_1 \log(r) + a_2 r^2 + a_3 r^2 \log(r). \quad (5.10)$$

Po dosazení Airyho funkce do rovnic(3.10) získáme napěťové rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2a_3 \log(r) + \frac{a_1}{r^2} + a_3 + 2a_2, \\ \sigma_\theta &= -\frac{a_1}{r^2} + 2a_2 + 3a_3 + 2a_3 \log(r), \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\tau_{xy} = 0.$$

Okrajové podmínky pro tento typ zatížení zakřiveného prutu jsou ve tvaru

$$\sigma_r(a) = \sigma_r(b) = 0, \quad \tau_{r\theta}(a) = \tau_{r\theta}(b) = 0,$$

$$\int_a^b \sigma_\theta dr = 0, \quad \int_a^b \sigma_\theta r dr = -M.$$

5. ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ REÁLNÝCH ÚLOH

Funkci napětí dosadíme do rovnic (3.10) a po dosazení výše uvedených počátečních podmínek získáme rovnice

$$\begin{aligned}
 2a_3 \log(a) + \frac{a_1}{a^2} + a_3 + 2a_2 &= 0, \\
 2a_3 \log(b) + \frac{a_1}{b^2} + a_3 + 2a_2 &= 0, \\
 b(2a_3 \log(b) + \frac{a_1}{b^2} + a_3 + 2a_2) - a(2a_3 \log(a) + \frac{a_1}{a^2} + a_3 + 2a_2) &= 0, \\
 a_1 \log\left(\frac{b}{a}\right) + a_3(b^2 \log(b) - a^2 \log(a)) + a_2(b^2 - a^2) &= -M,
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

kde a_1, a_2, a_3 jsou konstanty k určení.

Získali jsme čtyři rovnice o třech neznámých. Tyto rovnice vyřešíme a získáme hodnoty jednotlivých konstant.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -\frac{4M}{T} a^2 b^2 \log\left(\frac{b}{a}\right), \\
 a_2 &= \frac{M}{T} [b^2 - a^2 + 2(b^2 \log(b) - a^2 \log(a))], \\
 a_3 &= -\frac{2M}{T} (b^2 - a^2),
 \end{aligned}$$

kde $T = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 [\log\left(\frac{b}{a}\right)]$.

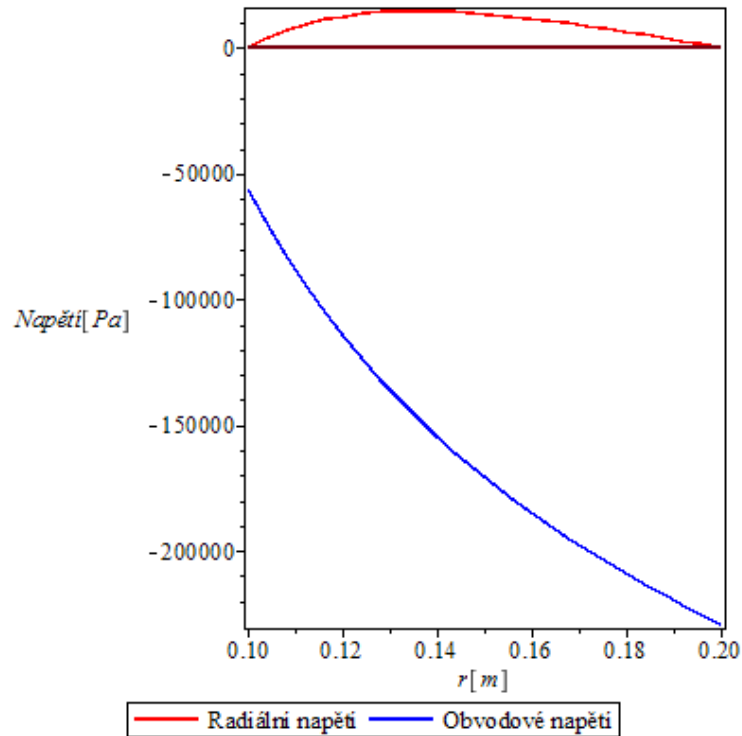
Nyní tyto konstanty dosadíme do rovnic (5.11) a získáme konečné vztahy pro výpočet napětí.

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= -\frac{4M}{T} \left[\frac{a^2 b^2}{r^2} \log\left(\frac{b}{a}\right) + b^2 \log\left(\frac{r}{b}\right) + a^2 \log\left(\frac{a}{r}\right) \right], \\
 \sigma_\theta &= -\frac{4M}{T} \left[-\frac{a^2 b^2}{r^2} \log\left(\frac{b}{a}\right) + b^2 \log\left(\frac{r}{b}\right) + a^2 \log\left(\frac{a}{r}\right) + b^2 - a^2 \right],
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\tau_{xy} = 0.$$

5.4. ZAKŘIVENÝ NOSNÍK ZATÍŽEN MOMENTEM

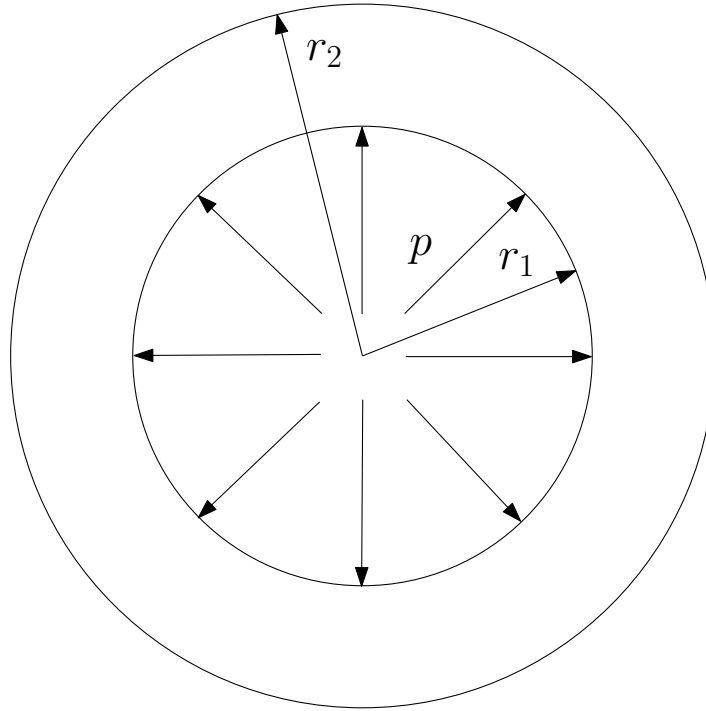
Výsledné průběhy opět vykreslíme. Radiální napětí v grafu označuje σ_r , obvodové σ_θ . Pro vykreslení průběhů jsme zvolili hodnoty $a = 0,1$ m, $b = 0,2$ m a $M = \text{Nm}$.



Obrázek 5.9: Průběh napětí zakřiveného nosníku.

5.5. Válcová nádoba zatížená vnitřním tlakem

Nyní si ukážeme řešení válcové nádoby zatížené vnitřním tlakem p o poloměrech r_1, r_2 (viz obr. 5.10).



Obrázek 5.10: Válcová nádoba zatížená vnitřním tlakem.

Opět se jedná o symetrickou úlohu, nebudeme pro řešení uvažovat souřadnici θ a Airyho funkce napětí bude mít tvar

$$\Phi(r) = a_0 + a_1 \log(r) + a_2 r^2 + a_3 r^2 \log(r). \quad (5.14)$$

Pro takto zatížené válcové těleso zvolíme okrajové podmínky ve tvaru

$$\sigma_r(r_1) = -p, \quad \sigma_r(r_2) = 0.$$

Rovnice pro výpočet napětí budou mít tvar (5.11). Pokud by se r blížilo nekonečnu, dostali bychom u rovnic nekonečné napětí, což nemůže nastat. Proto nebudeme uvažovat členy obsahující $\log(r)$, tudíž a_3 se bude rovnat 0. Pokud do těchto rovnic dosadíme zadané okrajové podmínky, získáme 2 rovnice pro normálové napětí ve směru r

$$\sigma_r(r_1) \rightarrow \frac{a_1}{r_1^2} + a_2 = -p, \quad (5.15)$$

$$\sigma_r(r_2) \rightarrow \frac{a_1}{r_2^2} + a_2 = 0.$$

5.5. VÁLCOVÁ NÁDOBA ZATÍŽENÁ VNITŘNÍM TLAKEM

Z těchto rovnic vypočítáme konstanty a_1, a_2 .

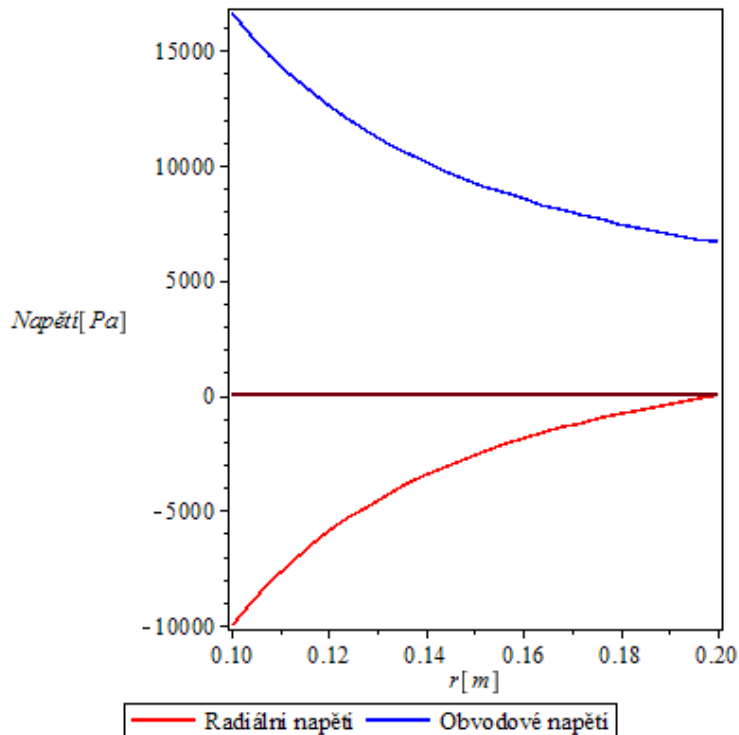
$$a_1 = - \left(\frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \right) p, \quad a_2 = \frac{r_1^2 p}{r_2^2 - r_1^2}$$

Nyní tyto konstanty dosadíme do rovnic (5.11) a pro $a_3 = 0$ získáme výsledné vztahy pro výpočet napětí válcového tělesa ve tvaru

$$\begin{aligned} \sigma_r &= - \left(\frac{r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2) r^2} \right) p + \frac{r_1^2 p}{r_2^2 - r_1^2}, \\ \sigma_\theta &= \left(\frac{r_1^2 r_2^2}{(r_2^2 - r_1^2) r^2} \right) p + \frac{r_1^2 p}{r_2^2 - r_1^2}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\tau_{r\theta} = 0.$$

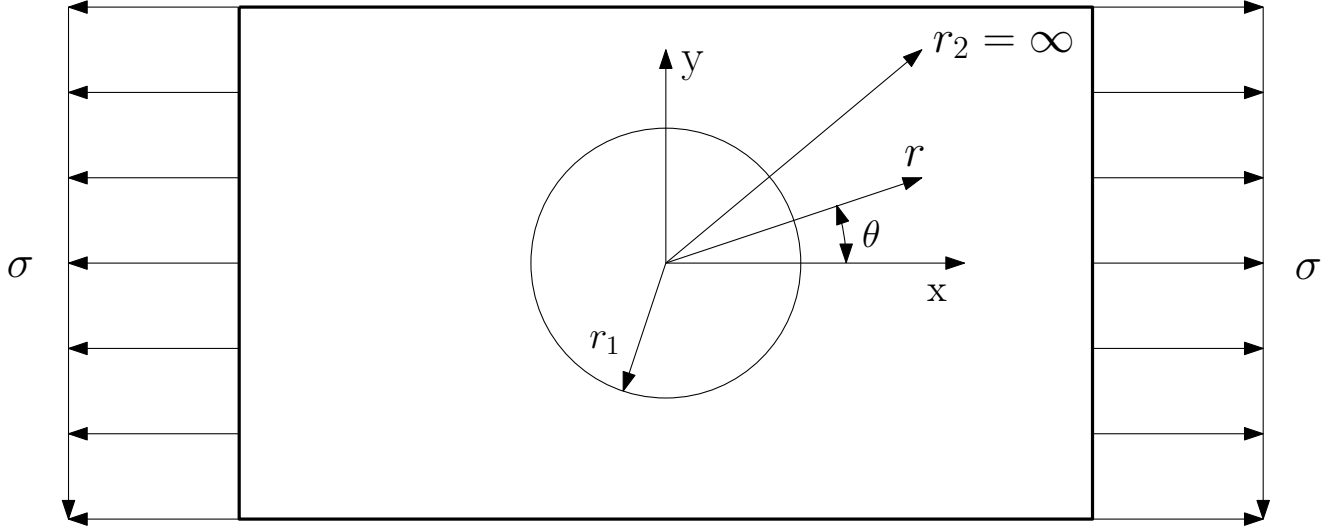
Pokud získaná napětí porovnáme s klasickou teorií pružnosti, zjistíme, že napěťové vztahy vypočítané oběma metodami jsou totožné. Zde jsou průběhy radiálního a obvodového napětí zobrazeny v grafech pro hodnoty $r_1 = 0,1$ m, $r_2 = 0,2$ m a vnitřní tlak $p = 10$ kPa.



Obrázek 5.11: Průběh radiálního a obvodového napětí.

5.6. Stěna s kruhovým otvorem namáhaná tahem

V této úloze budeme předpokládat nekonečnou stěnu s otvorem o poloměru r_1 uprostřed, $r_2 = \infty$. Stěna je namáhaná tahem na dvou protilehlých hranách (viz obr. 5.12). Pro stěnu platí, že její tloušťka je zanedbatelně malá vzhledem k jejím ostatním rozměrům.



Obrázek 5.12: Stěna namáhaná tahem.

Již se nejedná o rotačně symetrickou úlohu, protože stěna je zatížena tahem pouze na dvou stranách, tudíž se napětí nebude šířit ve všech směrech stejně. Proto budeme uvažovat Airyho funkci i se členy θ . Z Michellova řešení bude mít funkce napětí tvar

$$\Phi(r, \theta) = a_0 + a_1 \log(r) + a_2 r^2 + a_3 r^2 \log(r) + \cos(2\theta)(a_{21} r^2 + a_{22} r^4 + a_{23} r^{-2} + a_{24}). \quad (5.17)$$

Tvar Airyho funkce napětí jsem převzal od Horného (2015) v projektu II. [5]

Funkci dosadíme do rovnic (3.10), z nichž získáme rovnice pro výpočet napětí ve tvaru

$$\begin{aligned} \sigma_r &= a_3(1 + 2\log(r)) + 2a_2 + \frac{a_1}{r^2} - \left(2a_{21} + \frac{6a_{23}}{r^4} + \frac{6a_{24}}{r^2}\right) \cos(2\theta), \\ \sigma_\theta &= a_3(3 + 2\log(r)) + 2a_2 + \frac{a_1}{r^2} + \left(2a_{21} + 12a_{22}r^4 + \frac{6a_{23}}{r^4}\right) \cos(2\theta), \\ \tau_{r\theta} &= \left(2a_{21} + 6a_{22}r^2 - \frac{6a_{23}}{r^4} - \frac{2a_{24}}{r^2}\right) \sin(2\theta). \end{aligned} \quad (5.18)$$

5.6. STĚNA S KRUHOVÝM OTVOREM NAMÁHANÁ TAHEM

Nyní si určíme okrajové podmínky. Ty stanovíme z rovnic pro výpočet $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$, které získáme transformací $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ do polárních souřadnic. Budeme uvažovat rovnici

$$\sigma_r = \sigma_x \cos^2(2\theta) + \sigma_y \sin^2(2\theta) + 2\tau_{xy} \sin(2\theta) \cos(2\theta). \quad (5.19)$$

Z této rovnice za použití substitucí

$$\cos^2(2\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta)), \quad \sin^2(2\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta)), \quad 2\cos(2\theta)\sin(2\theta) = \sin(2\theta)$$

získáme rovnici

$$\sigma_r = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta). \quad (5.20)$$

Analogicky to lze určit i pro

$$\sigma_r = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) - \tau_{xy} \sin(2\theta),$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cos(2\theta).$$

Z těchto rovnic si určíme okrajové podmínky pro náš případ.

$$\sigma_r(r = r_1, \theta) = \sigma_{r\theta}(r = r_1, \theta) = 0 \quad , \quad \sigma_r(r = \infty, \theta) = \frac{\sigma}{2} + (1 + \cos(2\theta)),$$

$$\sigma_\theta(r = \infty, \theta) = \frac{\sigma}{2} (1 - \cos(2\theta)), \quad \tau_{r\theta}(r = \infty, \theta) = -\frac{\sigma}{2} \sin(2\theta)$$

Okrajové podmínky dosadíme do rovnic (5.18). Budeme uvažovat $a_3 = a_{22} = 0$, protože při dosazení za $r = \infty$ bychom dostali výraz rovný nekonečnu. Získáme pět rovnic o pěti neznámých. Po určení konstant získáme konečné vztahy pro určení pole napětí ve tvaru

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{4r_1^2}{r^2} + \frac{3r_1^4}{r^4} \right) \cos(2\theta), \\ \sigma_\theta &= \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{3r_1^4}{r^4} \right) \cos(2\theta), \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{2r_1^2}{r^2} - \frac{3r_1^4}{r^4} \right) \sin(2\theta). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Nyní toto řešení stovnáme s klasickou teorií pružnosti. Maximální napětí σ_{max} se vypočte vzorcem

$$\sigma_{max} = \alpha \sigma_{nom}, \quad (5.22)$$

kde α je součinitel koncentrace napětí a σ_{nom} je nominální napětí, které je pro tento případ přibližně 1 MPa.

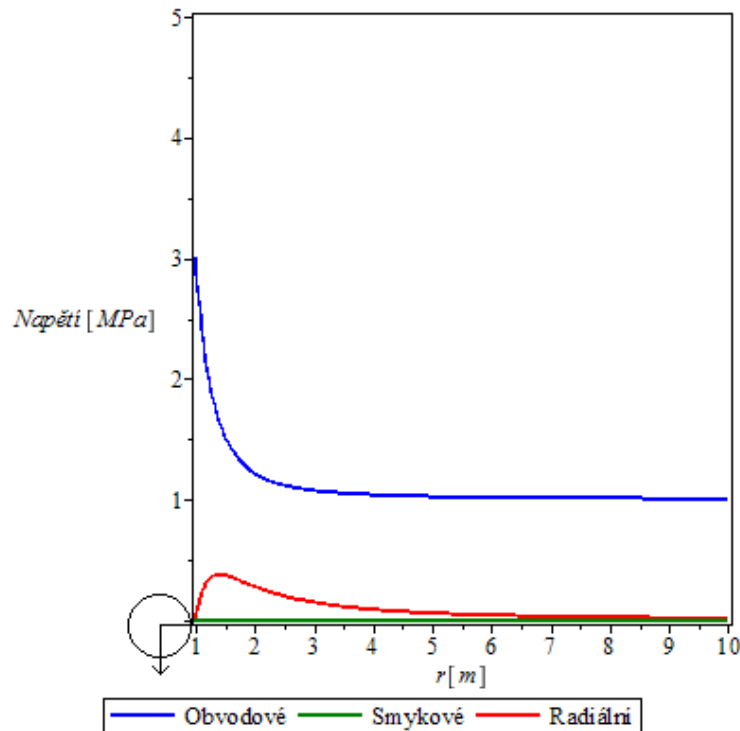
5. ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ REÁLNÝCH ÚLOH

Součinitel koncentrace napětí se určuje pomocí nomogramů nebo vzorců. Pro případ stěny o výšce $h = 10$ m s otvorem o průměru $d = 2$ m namáhané tahem má rovnice pro výpočet součinitele intenzity napětí tvar

$$3 - 3,14(d/h) + 3,667(d/h)^2 - 1,527(d/h)^3. \quad (5.23)$$

Rovnice převzata z [10]

Výsledný součinitel koncentrace napětí má velikost 2,5, z čehož vyplývá, že σ_{max} bude pro tento případ přibližně 2,5 MPa. Předpokládané napětí bylo okolo 3 MPa, tudíž řešení klasickou teorií pružnosti není zcela přesné. Pro vykreslení průběhů napětí jsem zvolil následující hodnoty veličin. Průměr $r_1 = 1$ m, úhel $\theta = \phi/2$ a tahovou složku $\sigma = -1$ MPa.



Obrázek 5.13: Průběh napětí v nekonečné stěně.

6. Numerická řešení pomocí MKP

V této kapitole stručně popíši metodu konečných prvků a připojím zde řešení úloh z kapitoly 4, k jejichž řešení je použitý software Ansys.

6.1. Vznik a použití

Metoda konečných prvků je numerická metoda, která slouží k určení napětí, deformace, proudění tepla atd. Všechny tyto děje můžeme simulovat na fyzikálním modelu a získat tak přehled, jak se mění průběh těchto dějů. Je založena na diskretizaci spojitého kontinua do určitého počtu prvků. Zjišťované parametry se určují v jednotlivých uzlových bodech. [8]

Metoda vznikla v 50. letech 20. století a její další vývoj závisel hlavně na rozvoji výpočetní techniky. Na jejím rozvoji se podíleli např. Clough, Turner a mnoho dalších. Velkou zásluhu na rozvoji MKP měli také čeští matematici, a to hlavně Zlámal a Ženíšek, kteří tuto metodu korektně matematicky formulovali. [8]

6.2. MKP jako variační metoda

Metoda vychází z variačních principů. Pokud se jedná o deformační variantu, používá se **Lagrangeův variační princip**, který formulujeme následovně: ze všech funkcí posuvů, u kterých je zachována spojitost tělesa a jsou splněny geometrické okrajové podmínky, se vyberou ty, které dávají celkové potenciální energii stacionární hodnotu. [9]

$$\Phi = W - P \quad (6.1)$$

Φ označuje potenciální energii, W energii napjatosti tělesa a P potenciál vnějšího zatížení. Pro W a P platí

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T \cdot \epsilon \, dV \quad (6.2)$$

resp.

$$P = \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{o} \, dV + \int_{\Gamma_p} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{p} \, dS \quad (6.3)$$

V těchto vztazích vystupují sloupcové matice [9]:

- posuvů $u^T = [u, v, w]$,
- přetvoření $\epsilon^T = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]$,
- napětí $\sigma^T = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]$,
- objemového zatížení $o^T = [o_x, o_y, o_z]$,
- plošného zatížení $p^T = [p_x, p_y, p_z]$.

6.3. Řešení úloh

6.3.1. Nosník namáhaný na prostý tah

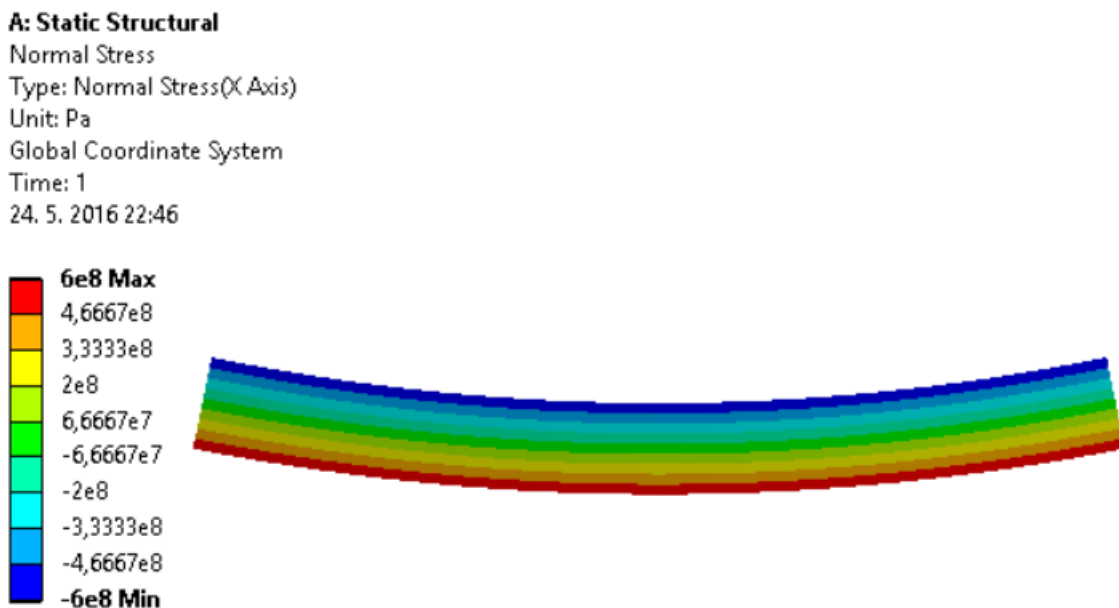
Z obr.(6.1) je patrné, že napětí je v celém profilu stejné, tudíž v žádném místě nosníku o délce $l = 1$ m a výšce $h = 0,1$ m nevznikne kritické místo, ve kterém by bylo soustředěno velké napětí. Nosník je namáhán na obou koncích silou o velikosti $F = 100$ N.



Obrázek 6.1: Nosník namáhaný tahem řešený v MKP.

6.3.2. Nosník namáhaný na prostý ohyb

Nyní si ukážeme průběh napětí v nosníku o délce $l = 1$ m a výšce $h = 0,1$ m namáhaném ohybem pomocí silových dvojic na obou stranách o velikosti momentu $M = 1000$ Nm (viz obr.5.2).



Obrázek 6.2: Nosník namáhaný prostým ohybem řešený v MKP.

6.3. ŘEŠENÍ ÚLOH

6.3.3. Nosník zatížený liniovým zatížením

U nosníku o délce $l = 1$ m a výšce $h = 0,1$ m, který je zatěžován liniovým zatížením o velikosti $q = 1000$ N/m je vidět, že největší napětí bude vznikat ve spodní části nosníku uprostřed. Naopak nejmenší bude v místě nad podpěrami. Normálová napětí σ_x resp. σ_y jsou zobrazena na obrázcích (6.3) a (6.4). Zvláštnost je napětí ve směru y, protože pokud srovnáme všechny tři metody, každá metoda nám dá jiný výsledek. Hodnota vypočtená klasickou teorií pružnosti je rovna nule, pro metodu pomocí Airyho funkce na intervalu $\langle -1000, 0 \rangle [Pa]$ v závislosti na místě v profilu. Metodou konečných prvků je napětí v rozsahu $\langle -212690, 59332 \rangle [Pa]$. Pravděpodobně je to dáno nedokonalostí analytických metod, protože MKP by měla být se všech nejpřesnější.

E: Static Structural

Normal Stress

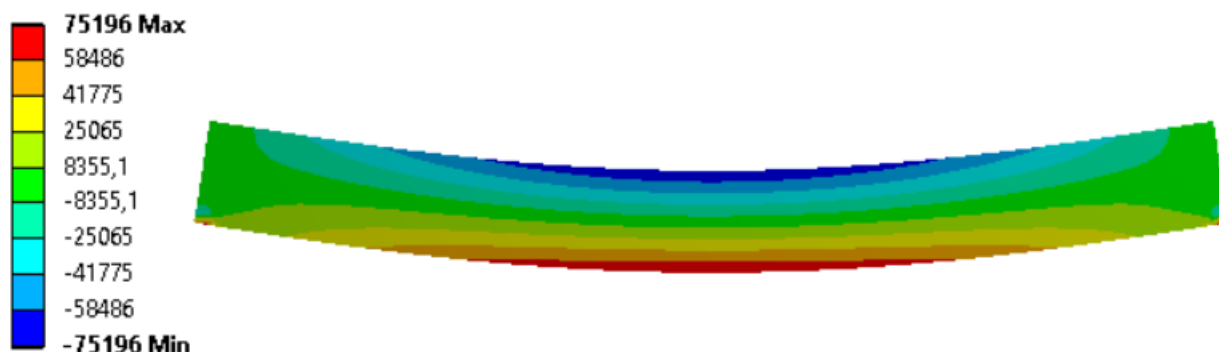
Type: Normal Stress(X Axis)

Unit: Pa

Global Coordinate System

Time: 1

22. 5. 2016 18:56



Obrázek 6.3: Napětí ve směru x řešený v MKP.

E: Nosnik_liniove_zatizeni
 Normal Stress
 Type: Normal Stress(Y Axis)
 Unit: Pa
 Global Coordinate System
 Time: 1
 24. 5. 2016 23:38

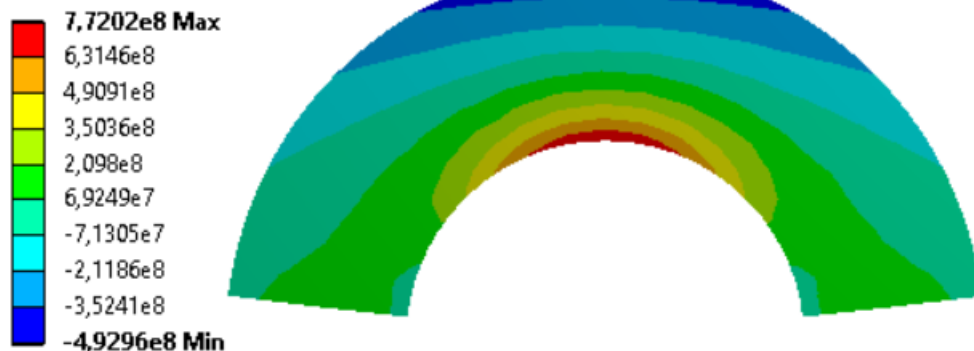


Obrázek 6.4: Napětí ve směru y řešený v MKP.

6.3.4. Zakřivený nosník namáhan ohybem

Řešíme silně zakřivený nosník o rozměrech $a = 0,1$ m a $b = 0,2$ m. Z obrázku (6.5) je patrné, že se řešení pro obvodové napětí v MKP neshoduje s řešením pomocí Airyho funkce napětí, a to velmi výrazně. Jelikož předpokládám, že řešení pomocí programu Ansys je spolehlivé, usuzuji, že chyba je pravděpodobně v analytickém řešení.

B: Zakriveny_nosnik
 Normal Stress
 Type: Normal Stress(X Axis)
 Unit: Pa
 Global Coordinate System
 Time: 1
 25. 5. 2016 23:05

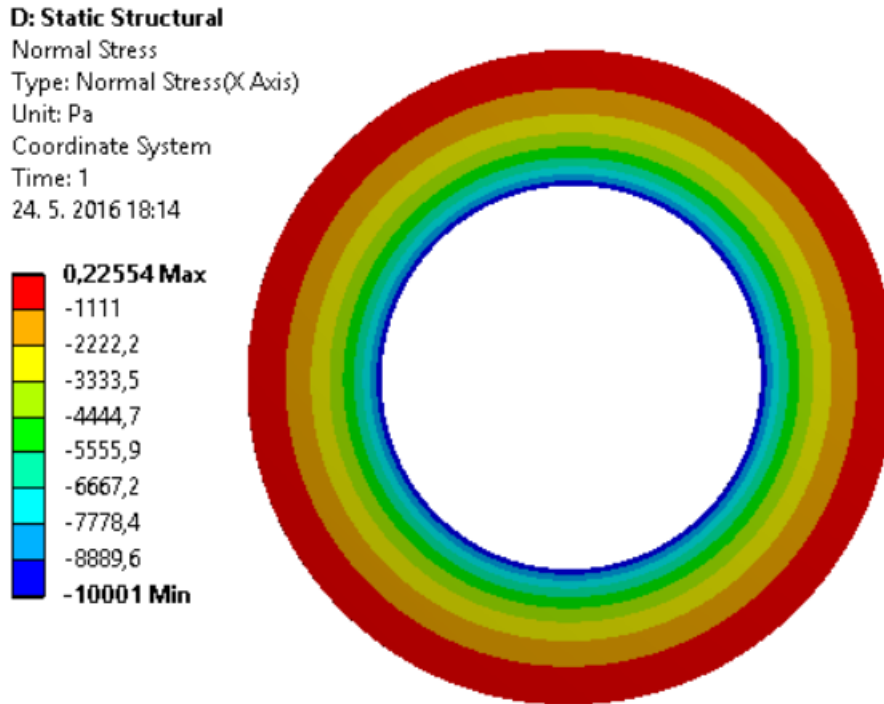


Obrázek 6.5: Zakřivený nosník namáhaný momenty řešený v MKP.

6.3. ŘEŠENÍ ÚLOH

6.3.5. Válcová nádoba zatížená vnitřním tlakem

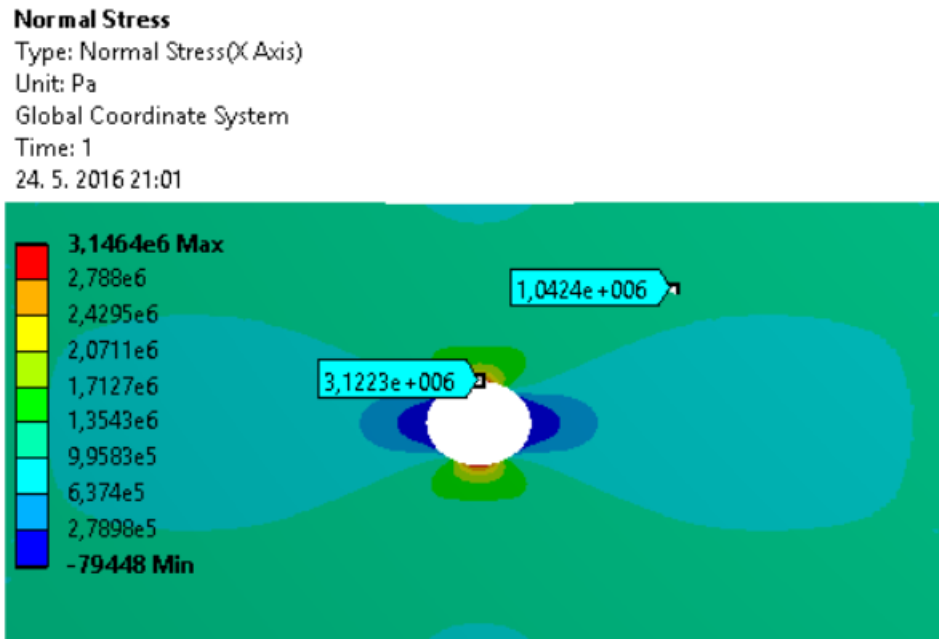
U válcové nádoby o vnitřním poloměru $r_1 = 0,1$ m a vnějším poloměru $r_2 = 0,2$ m jsem předpokládal, že největší napětí bude v oblasti působení tlaku $p = 10$ kPa uvnitř nádoby, což se i potvrdilo (viz obr.6.6).



Obrázek 6.6: Válcová nádoba namáhaná vnitřním tlakem řešená v MKP.

6.3.6. Stěna s kruhovým otvorem namáhaná tahem

U stěny jsem si zvolil délku $l = 20$ m a výšku $h = 10$ m s otvorem o poloměru $r_1 = 1$ m namáhané tahem o velikosti $\sigma = -1$ MPa se předpokládá, že největší koncentrace napětí bude v okolí otvoru, v tomto případě na horní a spodní hraně elipsy (z kruhového otvoru se vlivem tahu stane elipsovitý otvor), jak je to vidět na obrázku (6.7).



Obrázek 6.7: Nekonečná stěna namáhaná tahem řešená v MKP.

7. Závěr

Práce se zabývala řešením vybraných úloh z pružnosti a pevnosti pomocí Airyho funkce napětí.

V teoretické části bylo popsáno užití Airyho funkce, její zavedení jak pro kartézský souřadný systém, tak i pro polární. Stručně jsou vysvětleny metody řešení pro oba dva typy souřadných systémů i se speciálním typem pro symetrická tělesa v polárních souřadnicích.

V praktické části jsou tyto metody aplikovány na vybrané úlohy, jako jsou přímé nosníky, zakřivený nosník, válcové těleso a stěna s otvorem, které jsou různě namáhány a zatěžovány. Výsledné hodnoty napětí, které vychází pomocí metody Airyho funkce napětí, jsou srovnány s řešením z klasické teorie pružnosti, pokud je to možné. Hodnoty získané oběma metodami se přibližně shodují až na napětí ve směru y u nosníku s liniovým zatížením. Klasická teorie pružnosti dává jako výsledek nulové napětí, z čehož vyplývá, že je pro tento případ nevyhovující. V poslední části jsou všechny úlohy řešeny metodou konečných prvků, která je porovnávána s oběma předešlými metodami. Ve většině případů jsou výsledné hodnoty přibližně totožné, až na zakřivený nosník, kde je rozdíl velmi výrazný, již zmiňovaný nosník s liniovým zatížením, kde pro napětí ve směru y jsou hodnoty opět různé a stěnu s otvorem namáhanou tahem, kde se řešení klasickou teorií pružnosti mírně neshoduje s ostatními metodami. Předpokládám, že je to dáno nedokonalostí a nepřesností analytických metod, které pro složitější případy již nejsou příliš vhodné.

Z uvedených řešení je patrné, že analytické metody jsou vhodné a jednoduché pro základní typy těles. Pro složitější tvary a konstrukce je již nejlepší použití metody konečných prvků, protože nalezení Airyho funkce pro takováto tělesa je velmi obtížné nebo nemožné.

Literatura

- [1] M. H. Sadd: *SADD, Martin H. Elasticity: theory, applications, and numerics. 2nd ed. Boston: Elsevier/AP, c2009. ISBN 9780123744463.*
- [2] F. Kuba: *KUBA, František. Teorie pružnosti a vybrané aplikace: příručka pro vys. školy techn. směru. 2., nezm. vyd. Praha: SNTL, 1982.*
- [3] J. Lenert: *LENERT, Jiří. Základy matematické teorie pružnosti. Ostrava: VŠB-Technická univerzita, 1997. ISBN 80-7078-437-7.*
- [4] ONDRÁČEK, Emanuel: *Mechanika těles: pružnost a pevnost II. Vyd. 4., přeprac., V Akademickém nakladatelství CERM 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. ISBN 80-214-3260-8.*
- [5] HORNÝ, Lukáš: *Biomechanika a lékařské přístroje: Projekt II 2015 [online]. Praha, 2015 [cit. 2016-03-02]. Dostupné z: <http://users.fs.cvut.cz/hornyluk/files/Projekt-II-2015-Biomechanika-a-lekarske-pristroje.pdf>*
- [6] BRDIČKA, Miroslav, Ladislav SAMEK a Bruno SOPKO. *Mechanika kontinua. Vyd. 3., rev. Praha: Academia, 2005. Česká matice technická (Academia). ISBN 80-200-1344-X.*
- [7] UGURAL, A. C. a Saul K. FENSTER. *Advanced strength and applied elasticity. 4th ed. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall PTR, c2003. ISBN 0130473928.*
- [8] VRBKA, Martin a Michal, Veverka. *prednaska1MKP. [online]. [cit. 1970-01-01]. Dostupné z: http://old.uk.fme.vutbr.cz/kestazeni/MKP/prednaska1_MKP.pdf*
- [9] PETRUŠKA, Jindřich. *Počítačové metody mechaniky II. Základní veličiny a rovnice obecné pružnosti. [online]. [cit. 1970-01-01]. Dostupné z: <http://www.kvm.tul.cz/getFile/id:2499>*
- [10] PILKEY, Walter D., Deborah F. PILKEY a Rudolph Earl PETERSON. *Peter-son's stress concentration factors. 3rd ed. Hoboken, N.J.: John Wiley, c2008. ISBN 0470048247.*

Seznam obrázků

3.1	Elementární prvek. [4]	18
3.2	Vztah mezi souřadnicemi v kartézském a polárním systému. [7]	21
4.1	Rovinný element. [2]	24
5.1	Nosník namáhaný na prostý tah.	25
5.2	Srovnání klasické metody a Airyho funkce.	26
5.3	Nosník namáhaný na ohyb.	27
5.4	Srovnání klasické metody a Airyho funkce.	28
5.5	Nosník zatížený liniovým zatížením.	29
5.6	Porovnání napětí σ_x .	31
5.7	Porovnání napětí σ_y .	31
5.8	Zakřivený nosník namáhaný ohybem.	32
5.9	Průběh napětí zakřiveného nosníku.	34
5.10	Válcová nádoba zatížená vnitřním tlakem.	35
5.11	Průběh radiálního a obvodového napětí.	36
5.12	Stěna namáhaná tahem.	37
5.13	Průběh napětí v nekonečné stěně.	39
6.1	Nosník namáhaný tahem řešený v MKP.	41
6.2	Nosník namáhaný prostým ohybem řešený v MKP.	41
6.3	Napětí ve směru x řešený v MKP.	42
6.4	Napětí ve směru y řešený v MKP.	43
6.5	Zakřivený nosník namáhaný momenty řešený v MKP.	43
6.6	Válcová nádoba namáhaná vnitřním tlakem řešená v MKP.	44
6.7	Nekonečná stěna namáhaná tahem řešená v MKP.	45

8. Seznam použitých zkratek a symbolů

Φ	Airyho funkce napětí
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	normálová napětí [MPa]
$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	tečná napětí [MPa]
F	síla [N]
$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$	vektory složek deformace
∇	nabla operátor
μ	Poissonovo číslo
σ_r	radiální napětí [MPa]
σ_θ	obvodové napětí [MPa]
$\tau_{r\theta}$	smykové napětí [MPa]
l	délka [m]
h	výška [m]
T	tahová síla [MPa]
S	obsah [m^2]
M	moment [$N \cdot m$]
J	osový kvadratický moment [m^4]
q	liniové zatížení [$N \cdot m^{-1}$]
p	tlak [MPa]
σ_{nom}	nominální napětí [MPa]
α	součinitel koncentrace napětí
σ_{max}	maximální napětí [MPa]
W	energie napjatosti tělesa [J]
P	potenciál vnějšího zatížení [J]
u, v, w	posuvy [m]
o_x, o_y, o_z	složky objemového zatížení [$N \cdot m^{-3}$]
p_x, p_y, p_z	složky plošného zatížení [$N \cdot m^{-2}$]