VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY
INSTITUTE OF MATHEMATICS

MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ DYNAMIKY LETU
MATHEMATICAL MODELLING OF FLIGHT DYNAMICS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

Ondřej Resl

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Mgr. Zdeněk Opluštil, Ph.D.

BRNO 2016

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	**Ondřej Resl**
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	**Mgr. Zdeněk Opluštil, Ph.D.**
Akademický rok:	2015/16

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Matematické modelování dynamiky letu

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Modely související s dynamikou letu se objevují už od poloviny dvacátého století. Spojuje se v nich problematika řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic a optimálního řízení soustav s proměnnou hmotností.

Cíle bakalářské práce:

Rozšíření znalostí z teorie obyčejných diferenciálních rovniv.
Nastudování matematického aparátu optimálního řízení soustav s proměnou hmotností.
Charakterizace a popis konkrétních modelů popisující dynamiku letu rakety. Nalezení optimálního řešení řízení zkoumaných problémů.

Seznam literatury:

Čermák, J. Matematické základy optimálního řízení, PC-DIR, Brno, 1998.

Halliday, D.- Resnick, R. - Walker, J. Fyzika, VUTIM, Brno, 2000

J. Kalas, M. Ráb, Obyčejné diferenciální rovnice, Masarykova univerzita, 1995

Krotov, V.F. Global Methods in Optimal Control Theory, Marcel Dekker Inc., 1996

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2015/16

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Práce se zabývá matematickými modely popisujícími dynamiku letu rakety. Pojednává hlavně o problému hladkého přistání za různých podmínek, ale je zde také rozebrán model pro maximální dolet rakety. Vybrané modely jsou doplněny o numerická řešení. Nechybí zde také teoretický úvod k dané problematice.

KLÍČOVÁ SLOVA

raketa, hladké přistání, diferenciální rovnice, proměnná hmotnost

ABSTRACT

This thesis deals with the mathematical models which describe flight dynamics of rocket. It mainly discusses the problem of smooth landing under different conditions, but it also deals with the range of a rocket. Certain models are provided with numerical solutions. The thesis also contains theoretical introduction to given issue.

KEYWORDS

rocket, smooth landing, differential equation, variable mass

RESL, Ondřej *Matematické modelování dynamiky letu*: bakalářská práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematického inženýrství, 2016. 32 s. Vedoucí práce Mgr. Zdeněk Opluštil, Ph.D.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma „Matematické modelování dynamiky letu“ jsem zpracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a že jsem uvedl všechny použité prameny a literaturu, ze kterých jsem čerpal.

Brno ....

(podpis autora)

PODĚKOVÁNÍ

Na tomto místě bych rád poděkoval panu Mgr. Zdeňku Opluštilovi, Ph.D. za jeho připomínky, ochotu a trpělivost při vedení mé bakalářské práce.

Ondřej Resl

OBSAH

ÚVOD

Bakalářská práce se zabývá soustavami s proměnnou hmotností. Speciálně modely dynamiky letu rakety.

Chceme-li se zabývat dynamikou letu rakety, musíme si uvědomit, že velkou část hmotnosti rakety tvoří palivo a okysličovadlo. Vlivem spalování paliva a okysličovadla dochází v průběhu letu ke změně hmotnosti rakety. Raketa je tedy typickým příkladem soustavy s promněnnou hmotností. K popisu dynamiky letu rakety můžeme využít obyčejných diferenciálních rovnic (ODR).

Vzhledem k tomu, že všechny modely zmíněné v této práci jsou popsány soustavou ODR, je první kapitola věnována základním vlastnostem ODR. Konkrétně jsou zde zmíněny diferenciální rovnice n-tého řádu a lineární diferenciální rovnice n-tého řádu (LODRn).

Druhá kapitola se věnuje odvození základní rovnice této práce, a to rovnice Meščerského pro soustavu s proměnnou hmotností.

Třetí kapitola je věnována pohybovým rovnicím, které popisují pohyb rakety. Jsou zde odvozeny pohybové rovnice pro 1D, 2D a 3D prostor.

Ve čtvrté kapitole jsou pak získané poznatky aplikovány na konkrétní modely, a to na problém hladkého přistání v 1D prostoru a na maximální dolet rakety v 2D prostoru. Problém hladkého přistání je řešen pro tři různé případy. Pro konstantní hmotnost rakety, pro proměnnou hmotnost rakety a nakonec pro konstantní hmotnost rakety s vlivem atmosféry. Některé z modelů jsou pak pomocí softwaru MATLAB vyřešeny pro konkrétní hodnoty.

1 ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI ODR

1.1 Diferenciální rovnice n-tého řádu

V rovnicích popisujících pohyb rakety vystupují diferenciální rovnice n-tého řádu. V této kapitole si proto uvedeme jejich základní vlastnosti. Kapitola byla zpracována podle [3].

Diferenciální rovnicí n-tého řádu rozumíme rovnici tvaru

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right), \tag{1.1}$$

kde f je skalární funkce n-proměnných.

Řešením rovnice (1.1) rozumíme n-krát diferencovatelnou funkci $x = \varphi(t)$ definovanou na nějakém intervalu I takovou, že $\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t))$ pro každé $t \in I$.

Úplným řešením rovnice (1.1) rozumíme řešení x, které není zúžením žádného jiného řešení.

Počátečním problémem rovnice (1.1) rozumíme úlohu najít řešení rovnice (1.1), které splňuje podmínky

$$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x'_0,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \tag{1.2}$$

Počáteční problém pro systém nelineárních diferenciálních rovnic je tvaru

$$\begin{aligned}
x'_1 &= f_1(t, x_1, \ldots, x_n),\\
x'_2 &= f_2(t, x_1, \ldots, x_n),\\
&\vdots\\
x'_n &= f_n(t, x_1, \ldots, x_n), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x_0},
\end{aligned} \tag{1.3}$$

kde tučné $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x_0}$ značí vektory.

Poznámka 1. Počáteční problém diferenciální rovnice n-tého řádu je ekvivalentní s počátečním problémem pro systém n rovnic prvního řádu.

Počáteční problém (1.1),(1.2) můžeme tedy přepsat jako

$$\begin{aligned}
x'_1 &= x_2, & x_1(t_0) &= x_0,\\
x'_2 &= x_3, & x_2(t_0) &= x'_0,\\
&\vdots & &\vdots\\
x'_{n-1} &= x_n, & x_{n-1}(t_0) &= x_0^{(n-2)},\\
x'_n &= f(t, x_1, \ldots, x_n), & x_n(t_0) &= x_0^{(n-1)}
\end{aligned} \tag{1.4}$$

a platí, že je-li x řešení počátečního problému (1.1), (1.2), je n-tice funkcí $x, x', \dots, x^{(n-1)}$ řešením (1.4). Je-li n-tice $x_1, x_2, \dots, x_n$ řešením (1.4), je funkce x_1 řešením počátečního problému (1.1), (1.2).

Nyní si uvedeme větu o existenci řešení počátečního problému (1.3).

Věta 1 (**Peanova**). *Buďte* $a, b \in \mathbb{R}^+$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$ *a označme* $I = \langle t_0, t_0 + a\rangle$, $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{x_0}| \leq b\}$. *Nechť funkce* $f : I \times D \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá. Pak existuje alespoň jedno řešení počátečního problému* (1.3), *které je definované na intervalu* $J := \langle t_0, t_0 + \alpha\rangle$, *kde* $\alpha := \min(a, bm^{-1})$, $m = \max_{[t,\mathbf{x}] \in I \times D} |f(t, \mathbf{x})|$.

Důkaz: Můžeme najít například v [3].

Dále si uvedeme větu o jednoznačnosti řešení počátečního problému (1.3).

Věta 2 (**Picardova-Lindelöfova**). *Buďte* $a, b \in \mathbb{R}^+$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$ *a označme* $J = \langle t_0, t_0+a\rangle$, $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{x_0}| \leq b\}$. *Předpokládejme, že funkce* $f : J \times D \to \mathbb{R}^n$ *je spojitá a splňuje Lipschitzovu podmínku (vzhledem k* $\mathbf{x}$*): existuje* $L \in \mathbb{R}_0^+$ *tak, že platí*

$$|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y})| \leq L\,|\mathbf{x} - \mathbf{y}|\,, \qquad [t, \mathbf{x}]\,, [t, \mathbf{y}] \in J \times D.$$

Pak existuje právě jedno řešení počátečního problému (1.3) *definované na intervalu* $\langle t_0, t_0 + \delta\rangle =: J^+$, *kde*

$$\delta = \min(a, bm^{-1}),$$

přičemž

$$m = \max_{[t,\mathbf{x}] \in J \times D} |f(t, \mathbf{x})|\,.$$

Důkaz: Nalezneme například v [3].

Díky poznámce 1 můžeme některé poznatky o systémech přenést na rovnici n-tého řádu. O existenci a jednoznačnosti počátečního problému (1.1), (1.2) pak vypovídají následující dvě věty.

Věta 3. *Buďte* $a, b \in \mathbb{R}^+$, $D = \{(x_1, \dots, x_n) : |x_1 - x_0| + |x_2 - x_0'| + \cdots + |x_n - x_0^{(n-1)}| \leq b\}$. *Je-li funkce spojitá na množině* $\langle t_0 - a, t_0 + a\rangle \times D$, *pak má počáteční problém* (1.1), (1.2) *alespoň jedno řešení.*

Věta 4. *Nechť jsou splněny předpoklady předcházející věty a nechť funkce* f *splňuje navíc Lipschitzovu podmínku*

$$|f(t, x_1, \dots, x_n) - f(t, y_1, \dots, y_n)| \leq L\left(|x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|\right)$$

pro $(t, x_1, \dots, x_n)$, $(t, y_1, \dots, y_n) \in \langle t_0 - a; t_0 + a\rangle \times D$, *pak počáteční problém* (1.1), (1.2) *má jediné řešení definované na intervalu* $\langle t_0 - \alpha, t_0 + \alpha\rangle$, *kde* $\alpha > 0$ *je dostatečně malé.*

1.2 LODRn

V této kapitole se budeme zabývat lineární diferenciální rovnicí n-tého řádu, která se vyskytuje v řešených modelech. Kapitola byla zpracována podle [3], [4].

Lineární diferenciální rovnicí n-tého řádu rozumíme diferenciální rovnici

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = f(t), \tag{1.5}$$

kde $a_1(t), \ldots, a_n(t)$ jsou reálné funkce definované na nějakém intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$.

Řešením rovnice (1.5) rozumíme funkci $x = \varphi(t)$ definovanou na nějakém intervalu $J \subseteq I$ takovou, že $\varphi^{(n)}(t) + a_1(t)\varphi^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n(t)\varphi(t) = f(t)$ pro každé $t \in J$.

Úplným řešením rovnice (1.5) rozumíme řešení x, které není zúžením žádného jiného řešení.

Počátečním problémem rovnice (1.5) rozumíme úlohu najít řešení rovnice (1.5), které splňuje podmínky

$$x(t_0) = \xi_0,\ x'(t_0) = \xi_1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = \xi_{n-1}.$$

Je-li v rovnici (1.5) pravá strana $f(t) = 0$ pro $\forall t \in I$, mluvíme o *homogenní* LODRn. V opačném případě, kdy je $f(t) \neq 0$ pro nějaké $t \in I$, mluvíme o *nehomogenní* LODRn. Homogenní LODRn je tedy tvaru

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0. \tag{1.6}$$

Nyní si uvedeme některé specifické vlastnosti homogenních rovnic.

Věta 5. *Jsou-li funkce $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_k = x_k(t)$ řešeními homogenní rovnice* (1.6)*, poté také funkce*

$$x = C_1x_1 + C_2x_2 + \cdots + C_kx_k, \qquad C_i \in \mathbb{R}$$

je řešením rovnice (1.6)*.*

Řešení rovnice (1.6) tvoří tedy lineární prostor.

Definice 1. Nechť $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ jsou reálné, popřípadě komplexní funkce reálné proměnné t, které jsou definovány na intervalu I. Říkáme, že uvedené funkce jsou na intervalu I *lineárně nezávislé*, jestliže vztah

$$C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + \cdots + C_nx_n(t) = 0, \qquad x \in I$$

platí pouze když $C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$, kde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ jsou konstanty.

Je-li alespoň jedno $C_k \neq 0$, říkáme, že uvedené funkce jsou na intervalu I *lineárně závislé.*

K zjištění lineární závislosti či nezávislosti můžeme také využít Wronského determinant.

Definice 2. Nechť funkce $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ jsou na interval I alespoň $(n-1)$-krát spojitě derivovatelné. Poté determinant matice

$$W(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

se nazývá *Wronského determinant* funkcí $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$.

Lineární nezávislost řešení homogenní rovnice (1.6) pak posoudíme na základě následující věty.

Věta 6. *Nechť $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ jsou partikulární řešení homogenní LODRn* (1.6)*. Pak $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ jsou lineárně nezávislé na I, když a jen když*

$$\det W(t) \neq 0 \qquad \textit{pro } \forall t \in I.$$

Definice 3. Systém řešení $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ homogenní rovnice (1.6), kde řešení jsou lineárně nezávislá na I, se nazývá *fundamentální systém řešení* rovnice (1.6).

Pro obecné řešení homogenní rovnice (1.6) platí:

Věta 7. *Nechť funkce $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní LODRn* (1.6)*. Pak každé řešení x(t) této rovnice lze psát ve tvaru*

$$x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t) + \cdots + C_nx_n(t), \tag{1.7}$$

kde $C_1, C_2, \ldots, C_n$, jsou vhodné konstanty.

Chceme-li najít obecné řešení nehomogenní rovnice (1.5), využijeme následující věty.

Věta 8. *Obecné řešení rovnice* (1.5) *lze psát ve tvaru*

$$x = x_h + x_p,$$

kde x_h je obecné řešení homogenní rovnice příslušné k rovnici (1.5) *(tedy obecné řešení* (1.7)*) a x_p je libovolné partikulární řešení rovnice* (1.5)*.*

Strukturu obecného řešení homogenní rovnice jsme již stanovili. Zbývá tedy určit libovolné partikulární řešení. To můžeme získat například metodou variace konstant, jejíž princip si nyní uvedeme.

Pro jednoduchost si princip metody ukážeme na nehomogenní LODR2. Máme tedy rovnici

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t), \tag{1.8}$$

kde a_1, a_0 jsou reálné funkce proměnné t definované na nějakém intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Je-li obecné řešení příslušné homogenní rovnice $x_h(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$, partikulární řešení rovnice (1.8) budeme hledat ve tvaru

$$x(t) = C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t), \tag{1.9}$$

kde $C_1(t)$, $C_2(t)$ jsou neznámé funkce. Derivací rovnice (1.9) dostaneme

$$x'(t) = C_1'(t)x_1(t) + C_1(t)x_1'(t) + C_2'(t)x_2(t) + C_2(t)x_2'(t).$$

Položíme-li polovinu sčítanců rovnu nule

$$C_1'(t)x_1(t) + C_2'(t)x_2(t) = 0, \tag{1.10}$$

derivace rovnice (1.9) se zjednoduší na tvar

$$x'(t) = C_1(t)x_1'(t) + C_2(t)x_2'(t).$$

Opětovnou derivací obdržíme

$$x''(t) = C_1'(t)x_1'(t) + C_1(t)x_1''(t) + C_2'(t)x_2'(t) + C_2(t)x_2''(t).$$

Dosadíme-li vyjádření první a druhé derivace do rovnice (1.8), dostaneme

$$C_1'(t)x_1'(t) + C_1(t)x_1''(t) + C_2'(t)x_2'(t) + C_2(t)x_2''(t) + a_1(t)[C_1(t)x_1'(t) + C_2(t)x_2'(t)]+ \\ + a_0(t)[C_1(t)x_1(t) + C_2(t)x_2(t)] = f(t).$$

Protože funkce $x_1(t), x_2(t)$ jsou řešením příslušné homogenní rovnice, součet všech členů rovnice obsahujících $C_1(t), C_2(t)$ je roven nule. Tedy

$$C_1'(t)x_1'(t) + C_2'(t)x_2'(t) = f(t). \tag{1.11}$$

Vztahy (1.10) a (1.11) tvoří soustavu dvou rovnic pro neznámé $C_1'(t), C_2'(t)$. Determinant takovéto soustavy je Wronského determinant. Vzhledem k lineární nezávislosti funkcí $x_1(t), x_2(t)$ je Wronského determinant pro $\forall t \in I$ různý od nuly. Soustava dvou rovnic (1.10) a (1.11) má tedy jednoznačné řešení na celém intervalu I.

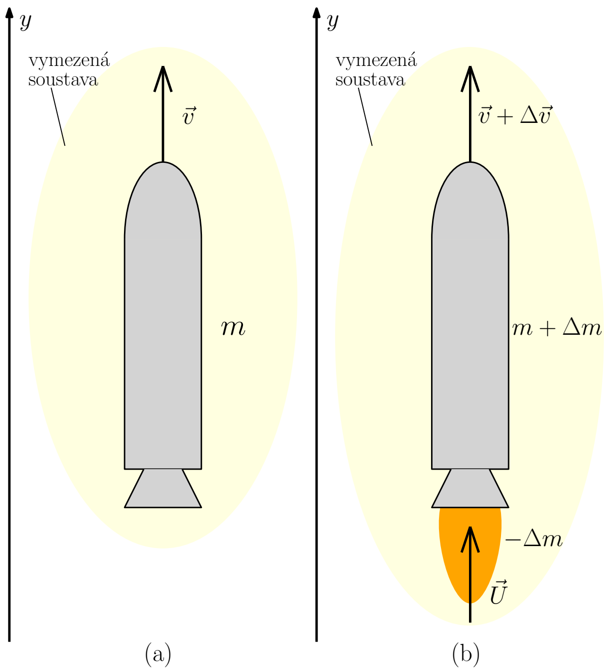
Integrací $C_1'(t), C_2'(t)$ dostaneme $C_1(t)$ a $C_2(t)$, které dosadíme do rovnice (1.9), a získáme tak partikulární řešení x_p nehomogenní rovnice (1.8). Při integraci pokládáme integrační konstanty rovny nule, protože hledáme partikulární řešení. Obecné řešení nehomogenní rovnice (1.8) získáme pak ze vztahu

$$x = x_h + x_p.$$

2 FYZIKÁLNÍ ODVOZENÍ SOUSTAVY S PROMĚNNOU HMOTNOSTÍ

Typickým příkladem soustavy s proměnnou hmotností je raketa. Hmotnost rakety je z velké části tvořena hmotností paliva a okysličovadla. Vlivem spalování paliva se tedy její hmotnost v průběhu letu mění.

Abychom mohli popsat pohyb rakety s proměnnou hmotností, využijeme zákona o zachování hybnosti.



Obr. 2.1: Vymezení soustavy [2].

Na obrázku 2.1 (a) je zachycena raketa o hmotnosti m a rychlosti v v čase t.

Obrázek 2.1 (b) ukazuje raketu v čase $t+\Delta t$. Hmotnost rakety v důsledku úbytku paliva klesla na hodnotu $m+\Delta m$ (změna hmotnosti $\Delta m < 0$) a její rychlost vzrostla na hodnotu $v + \Delta v$. Výraz $-\Delta m$ reprezentuje hmotnost zplodin, které opouštějí raketu rychlostí U. Vymezíme-li soustavu tak, aby zahrnovala raketu i zplodiny opouštějící raketu, bude tato soustava uzavřená a izolovaná.

Uzavřená soustava je taková soustava, ve které nedochází k výměně hmoty mezi soustavou a jejím okolím.

Izolovanou soustavou rozumíme soustavu, na kterou nepůsobí žádné vnější síly.

Hybnost soustavy raketa-zplodiny se nemění a platí

$$mv = (m + \Delta m)(v + \Delta v) + (-\Delta m)U.$$

Úpravou získáme

$$m\Delta v = -\Delta m(v + \Delta v - U). \tag{2.1}$$

Zavedeme-li relativní rychlost zplodin vzhledem k raketě jako

$$u = (v + \Delta v) - U,$$

dostáváme

$$m\Delta v = -\Delta m u.$$

Vydělením této rovnice délkou časového intervalu Δt dostaneme rovnici

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = -u\frac{\Delta m}{\Delta t}. \tag{2.2}$$

Pro $\Delta t \to 0$ dostaneme z rovnice (2.2) rovnici pro okamžité hodnoty veličin

$$m\frac{dv}{dt} = -u\frac{dm}{dt}. \tag{2.3}$$

Derivaci rychlosti podle času reprezentuje okamžité zrychlení rakety. Výraz $\frac{dm}{dt}$ značí úbytek hmotnosti. Zavedeme-li rychlost spotřeby paliva $R\ \left[\frac{kg}{s}\right]$ jako

$$R = -\frac{dm}{dt} > 0,$$

rovnice (2.3) přejde na tvar

$$ma = Ru \quad \text{(rovnice Meščerského)}^1. \tag{2.4}$$

Výraz Ru v rovnici (2.4) má rozměr síly $\left(\left[\frac{kg}{s}\frac{m}{s} = N\right]\right)$ a vyjadřuje tah motoru. Tah závisí pouze na vlastnostech konkrétního motoru.

[1] Ivan Vsevolodovič Meščerskij (Archangel, 1859 - Leningrad, 1935) - ruský fyzik, jeden ze zakladatelů mechaniky těles s proměnnou hmotností [5].

3 ODVOZENÍ POHYBOVÝCH ROVNIC

V této kapitole odvodíme rovnice popisující pohyb rakety.

3.1 Pohybové rovnice v 1D prostoru

Vyjdeme z druhého Newtonova zákona

$$\sum \vec{F} = m\vec{a},$$

kde

$$\sum \vec{F} = \underbrace{\vec{F_1}}_{\text{tah motoru}} + \underbrace{\vec{F_2}}_{\text{tíhová síla}} \tag{3.1}$$

V rovnici (3.1) jsme zanedbali vliv odporové síly. V případě vlivu odporové síly by na pravé straně rovnice (3.1) vystupoval ještě vektor $\vec{F_3}$ vyjadřující vliv odporové síly.

Dosadíme-li do rovnice (3.1) za tah motoru výraz Ru, získaný z Meščerského rovnice, a za tíhovou sílu $-mg$, kde g je tíhové zrychlení, dostaneme

$$\sum \vec{F} = R\vec{u} - m\vec{g}.$$

Z druhého Newtonova zákona tedy plyne

$$m\vec{a} = R\vec{u} - m\vec{g}.$$

Hmotnost rakety m, relativní rychlost zplodin vzhledem k raketě u a rychlost spotřeby paliva $R = -\frac{dm}{dt}$ jsou obecně funkcí času. Poloha rakety v čase t je tedy dána soustavou diferenciálních rovnic

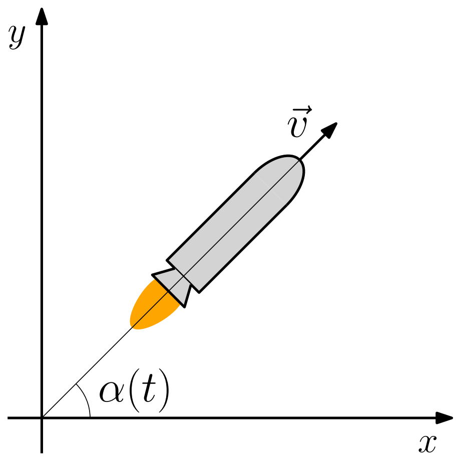
$$\begin{aligned} m(t)\ddot{y}(t) &= R(t)u(t) - m(t)g \\ \dot{m} &= -R(t), \end{aligned}$$

kde $y(t)$ označuje výšku rakety v čase t.

3.2 Pohybové rovnice v 2D prostoru

Rovnici (2.1), která vyjadřuje zákon zachování hmotnosti, přepíšeme do vektorového tvaru.

$$m\Delta\vec{v} = -\Delta m(\vec{v} + \Delta\vec{v} - \vec{U})$$



Obr. 3.1: Zobrazení úhlu $\alpha(t)$ charakterizujícího pohyb rakety.

V ose x dostaneme

$$m\Delta v_x = -\Delta m(v\cos\alpha + \Delta v\cos\alpha - U\cos\alpha). \tag{3.2}$$

Zavedením relativní rychlosti $\vec{u}$ zplodin vůči raketě

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (\vec{v} + \Delta\vec{v}) - \vec{U} \\ u\cos &= v\cos\alpha + \Delta v\cos\alpha - U\cos\alpha \quad \text{(pro osu } x\text{)} \end{aligned}$$

a podělením rovnice (3.2) délkou časového intervalu Δt dostaneme rovnici

$$m\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}u\cos\alpha,$$

kterou upravíme na tvar

$$ma_x = Ru\cos\alpha.$$

Obdobně pro osu y

$$ma_y = Ru\sin\alpha.$$

Z Newtonova druhého zákona obdržíme soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} m(t)\ddot{x}(t) &= R(t)u(t)\cos\alpha(t) \\ m(t)\ddot{y}(t) &= R(t)u(t)\sin\alpha(t) - m(t)g \\ \dot{m} &= -R(t), \end{aligned}$$

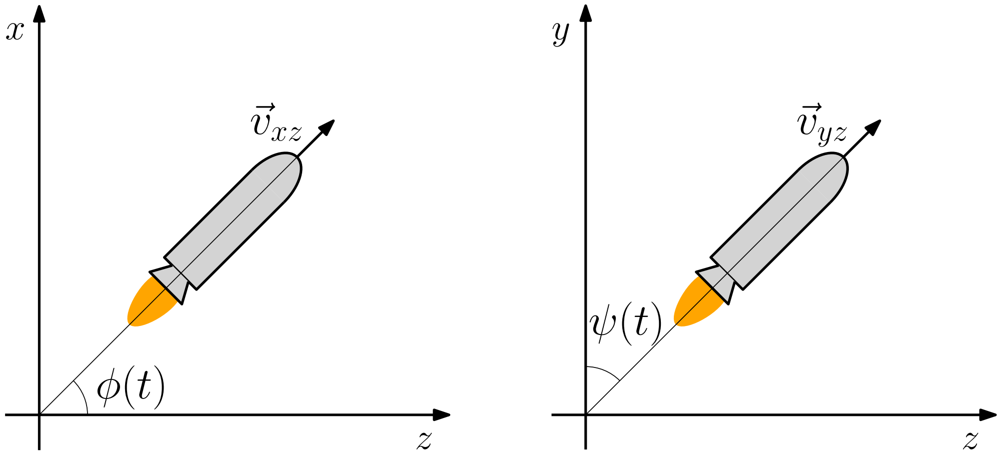
kde její řešení $x(t)$, $y(t)$ popisuje polohu rakety v čase t.

3.3 Pohybové rovnice v 3D prostoru

Budeme postupovat obdobně jako v případě dvourozměrného prostoru. Zvolíme-li úhly ϕ a ψ podle obrázku 3.2, dostaneme soustavu diferenciálních rovnic (3.3), která popisuje polohu rakety v čase t

$$\begin{aligned} m(t)\ddot{x}(t) &= R(t)u(t)\sin\psi(t)\sin\phi(t) \\ m(t)\ddot{y}(t) &= R(t)u(t)\sin\psi(t) - m(t)g \\ m(t)\ddot{z}(t) &= R(t)u(t)\sin\psi(t)\cos\phi(t) \\ \dot{m} &= -R(t), \end{aligned} \tag{3.3}$$

kde její řešení $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ popisuje polohu rakety v čase t.

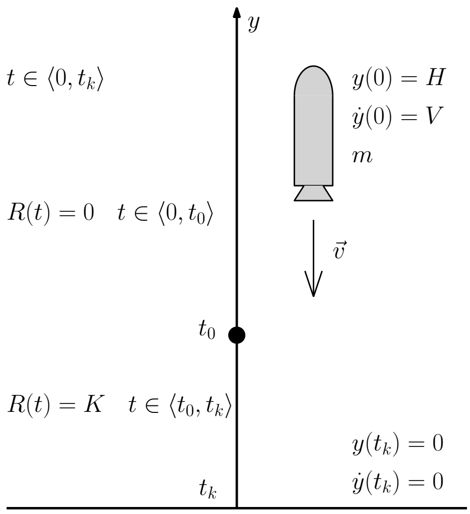


Obr. 3.2: Zobrazení úhlů $\phi(t)$, $\psi(t)$, které charakterizují pohyb rakety.

4 MODELY DYNAMIKY LETU RAKETY

4.1 Problém hladkého přistání

Pojmem hladké přistání rakety rozumíme, že raketa dosedne na povrch s nulovou rychlostí. Matematicky tedy požadujeme $y(t_k) = 0$ a $\dot{y}(t_k) = 0$, kde t_k je čas přistání rakety na povrchu.



Obr. 4.1: Hladké přistání.

Jak ukazuje obrázek 4.1, máme raketu o hmotnosti m, která má v čase $t = 0$ určitou výšku H a rychlost V. Abychom docílili nulové rychlosti při přistání, musíme v určitý čas t_0 zapnout motor rakety, který zpomalý rychlost rakety až na požadovanou nulovou rychlost při dosednutí na povrch. Vliv motoru popisuje řídící funkce $R(t)$

$$R(t) = \begin{cases} 0, & t \in \langle 0, t_0 \rangle \\ K, & t \in \langle t_0, t_k \rangle. \end{cases} \tag{4.1}$$

Tato řídící funkce je po částech spojitá. V čase $t \in \langle 0, t_0 \rangle$ je nulová a v čase $t \in \langle t_0, t_k \rangle$ nabývá určité konstantní hodnoty. V našem případě se jedná o konstantu K.

V této kapitole se budeme zabývat modely v 1D prostoru. Raketa se tedy bude pohybovat po přímce kolmé k povrchu. Konkrétně budeme řešit:

- **Hladké přistání rakety s konstantní hmotností**
  - Hmotnost rakety je po celou dobu jejího pohybu konstantní. Platí $m(t) = m_0 = konst.$
- **Hladké přistání rakety s proměnnou hmotností**
  - Hmotnost rakety je funkcí času. S přibývajícím časem hmotnost klesá (v důsledku spalování paliva).

- **Hladké přistání rakety s konstantní hmotností s vlivem atmosféry**
  – V tomto modelu na raketu působí, na rozdíl od předcházejících, ještě odporová síla.

4.1.1 Konstantní hmotnost bez vlivu atmosféry

Pohyb rakety s konstantní hmotností m_0 popisuje diferenciální rovnice druhého řádu

$$m_0\ddot{y}(t) = R(t)u(t) - m_0 g.$$

Vydělením rovnice výrazem m_0 dostáváme

$$\ddot{y}(t) = \frac{R(t)u}{m_0} - g, \tag{4.2}$$

kde

$$R(t) = \begin{cases} 0, & t \in \langle 0, t_0 \rangle \\ K, & t \in \langle t_0, t_k \rangle \end{cases}$$

je řídící funkce, m_0 je počáteční hmotnost rakety, $u = konst$ a g je tíhové zrychlení. Rovnici spočítáme pro $t \in \langle 0, t_0 \rangle$ a pro $t \in \langle t_0, t_k \rangle$.

a) $t \in \langle 0, t_0 \rangle$
Diferenciální rovnice (4.2) má tvar

$$\ddot{y}(t) = -g. \tag{4.3}$$

Její integrací dostaneme

$$\dot{y}(t) = -gt + c_1.$$

Opětovnou integrací dostaneme již obecné řešení, které je tvaru

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + tc_1 + c_2.$$

Po dosazení počátečních podmínek $y(0) = H$, $\dot{y}(0) = V$ získáme integrační konstanty $c_1 = V$, $c_2 = H$. Řešení rovnice (4.3) pak má tvar

$$y(t) = H + Vt - \frac{1}{2}gt^2.$$

b) $t \in \langle t_0, t_k \rangle$
Diferenciální rovnice má tvar

$$\ddot{y}(t) = AK - g, \tag{4.4}$$

kde $A = \frac{u}{m_0}$. Řešení homogenní rovnice (4.4) s nulovou pravou stranou je

$$\bar{y}_h = \bar{c}_1 + t\bar{c}_2.$$

Partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$\bar{y}_p = c_1(t) + tc_2(t).$$

Metodou variace konstant dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ AK - g \end{pmatrix},$$

$$c_2(t) = \int (AK - g)dt = AKt - gt,$$
$$\dot{c}_1(t) + t\dot{c}_2(t) = 0,$$
$$c_1(t) = -\int AKtdt + \int gtdt = -AK\tfrac{t^2}{2} + g\tfrac{t^2}{2}.$$

Partikulární řešení rovnice (4.4) má poté tvar

$$\bar{y}_p = \frac{1}{2}AKt^2 - \frac{1}{2}gt^2.$$

Obecné řešení rovnice (4.4) je tedy

$$\bar{y}(t) = \bar{c}_1 + t\bar{c}_2 + \frac{1}{2}AKt^2 + \frac{1}{2}gt^2.$$

Počáteční podmínky $\bar{y}(t_0) = y(t_0)$, $\dot{\bar{y}}(t_0) = \dot{y}(t_0)$ vycházejí ze spojitosti řešení v bodě t_0. Po jejich dosazení do obecného řešení obdržíme integrační konstanty $\bar{c}_1 = H + \frac{1}{2}AKt_0^2$, $\bar{c}_2 = V - AKt_0$. Řešení rovnice (4.4) pak má tvar

$$\bar{y}(t) = H + \frac{1}{2}AKt_0^2 + Vt - AKt_0t + \frac{1}{2}AKt^2 - \frac{1}{2}gt^2. \tag{4.5}$$

Abychom dosáhli hladkého přistání, požadujeme $\bar{y}(t_k) = 0$, $\dot{\bar{y}}(t_k) = 0$. Dosazením těchto podmínek do tvaru řešení (4.5) dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých t_0 a t_k.

$$V - AKt_0 + AKt_k - gt_k = 0 \tag{4.6}$$
$$H + \frac{1}{2}AKt_0^2 + Vt_k - AKt_0t_k + \frac{1}{2}AKt_k^2 - \frac{1}{2}gt_k^2 = 0 \tag{4.7}$$

Z rovnice (4.6) si vyjádříme čas t_k

$$t_k = \frac{AKt_0 - V}{B}, \tag{4.8}$$

kde $B = AK - g$. Dosadíme-li výraz (4.8) do rovnice (4.7), dostaneme kvadratickou rovnici

$$t_0^2\left(\frac{AK}{2} - \frac{(AK)^2}{B} + \frac{(AK)^3 - (AK)^2g}{2B^2}\right) + t_0\left(\frac{2VAK}{B} + \frac{2VAKg - (AK)^2V}{B^2}\right) + \\ + \left(H - \frac{V^2}{B} + \frac{AKV^2 - V^2g}{2B^2}\right) = 0. \tag{4.9}$$

Z rovnic (4.8) a (4.9) pak pro konkrétní hodnoty můžeme spočítat časy t_0 a t_k, které označují čas zapnutí motoru rakety a čas ukončení přistání. K výpočtu byl použit software MATLAB.

$u\,[m \cdot s^{-1}]$	$K\,[kg \cdot s]$	$g\,[m \cdot s^{-2}]$	$m_0\,[kg]$	$H\,[m]$	$V\,[m \cdot s^{-1}]$
1000	50	9,81	1000	11000	0

Tab. 4.1: Tabulka hodnot pro konstanty vystupující v modelu.

Pro tato konkrétní data obdržíme

$$t_0 = 42,4571\ s,$$
$$t_k = 52,8205\ s.$$

4.1.2 Proměnná hmotnost bez vlivu atmosféry

Pohyb rakety s proměnnou hmotností popisuje soustava diferenciálních rovnic

$$m(t)\ddot{y}(t) = R(t)u(t) - m(t)g \tag{4.10}$$
$$\dot{m}(t) = -R(t), \tag{4.11}$$

kde $R(t)$ je stejná řídící funkce jako v případě pohybu rakety s konstantní hmotností, definovaná vztahem (4.1), $u(t)$ budeme opět považovat za konstantní a dále budeme psát pouze u. Soustavu vyřešíme na časových intervalech $\langle 0, t_0\rangle$ a $\langle t_0, t_k\rangle$.

a) $t \in \langle 0, t_0\rangle$

Řešení rovnice (4.11) je konstantní, $m(t) = m_0$, kde m_0 je počáteční hmotnost rakety. Dosadíme-li toto řešení do rovnice (4.10), dostáváme

$$\ddot{y}(t) = -g. \tag{4.12}$$

Rovnice (4.12) je totožná s rovnicí (4.3). Její obecné řešení je tedy

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + tc_1 + c_2.$$

Dosazením počátečních podmínek $y(0) = H$ a $\dot{y}(0) = V$ obdržíme řešení rovnice (4.12)

$$y(t) = H + Vt - \frac{1}{2}gt^2.$$

b) $t \in \langle t_0, t_k\rangle$

Vzhledem k (4.1) je rovnice (4.11) ve tvaru

$$\dot{m}(t) = -K.$$

Její integrací získáme

$$m(t) = -Kt + c.$$

Z počáteční podmínky $m(t_0) = m_0$ plyne

$$m(t) = -Kt + Kt_0 + m_0.$$

Dosadíme-li toto řešení do rovnice (4.10), získáme diferenciální rovnici druhého řádu

$$\ddot{y}(t) = \frac{Ku}{Kt_0 - Kt + m_0} - g. \tag{4.13}$$

Řešení homogenní rovnice (4.13) s nulovou pravou stranou je

$$\bar{y}_h = \bar{c}_1 + t\bar{c}_2.$$

Partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$\bar{y}_p = c_1(t) + tc_2(t).$$

Metodou variace konstant dostáváme

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{Ku}{Kt_0 - Kt + m_0} - g \end{pmatrix},$$

tedy

$$\begin{aligned} c_2(t) &= \int \left(\frac{Ku}{Kt_0 - Kt + m_0} - g \right) dt = -u \int \frac{-K}{Kt_0 - Kt + m_0} dt - gt = \\ &= -u \ln |Kt_0 - Kt + m_o| - gt \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} c_1(t) =& u \int \frac{-K}{Kt_0 - Kt + m_o} t dt + \int gt dt = ut \ln |Kt_0 - Kt + m_o| - \\ &- u \int \ln |Kt_0 - Kt + m_0| \, dt + g\frac{t^2}{2} = ut_0 \ln |Kt_0 - Kt + m_o| + \\ &+ \frac{um_0}{K} \ln |Kt_0 - Kt + m_o| + ut - ut_0 - u\frac{m_0}{K} + g\frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

Partikulární řešení je tedy

$$\bar{y}_p = \ln |Kt_0 - Kt + m_o| \left(ut_0 + \frac{um_0}{K} \right) + ut - ut_0 - \frac{um_0}{K} - \frac{1}{2} gt^2.$$

Z homogenního a partikulárního řešení dostáváme obecné řešení rovnice (4.13).

$$\bar{y} = \bar{c}_1 + t\bar{c}_2 + \ln |Kt_0 - Kt + m_o| \left(ut_0 - ut + \frac{um_0}{K} \right) + ut - ut_0 - \frac{um_0}{K} - \frac{1}{2} gt^2. \tag{4.14}$$

Integrační konstanty $\bar{c}_1$ a $\bar{c}_2$ získáme z podmínek $\bar{y}(t_0) = y(t_0)$ a $\dot{\bar{y}}(t_0) = \dot{y}(t_0)$. Derivací rovnice (4.14) podle času t získáme

$$\dot{\bar{y}} = \bar{c}_2 - \frac{ut_0K}{Kt_0 - Kt + m_0} - u\ln|Kt_0 - Kt + m_o| + \frac{utK - um_0}{Kt_0 - Kt + m_0} + u - gt$$

a odtud pak

$$\bar{c}_2 = V + u\ln|m_o|.$$

Pro integrační konstantu $\bar{c}_1$ platí

$$\bar{c}_1 = H + \frac{um_0}{K} - \ln|m_o|\left(ut_0 + \frac{um_0}{K}\right).$$

Řešení rovnice (4.13) je

$$\begin{aligned}\bar{y} =& H - \ln|m_o|\left(ut_0 - ut + \frac{um_0}{K}\right) + Vt + \ln|Kt_0 - Kt + m_o|\left(ut_0 - ut + \frac{um_0}{K}\right) + \\ &+ ut - ut_0 - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned} \tag{4.15}$$

K dosažení hladkého přistání musí být splněny podmínky $\bar{y}(t_k) = 0$ a $\dot{\bar{y}}(t_k) = 0$. Dosazením těchto podmínek do rovnice (4.15) získáme soustavu dvou rovnic o neznámých t_0 a t_k.

$$\begin{aligned}&u\ln|m_o| + V - \frac{ut_0K}{Kt_0 - Kt_k + m_0} - \frac{um_0}{Kt_0 - Kt_k + m_0} - u\ln|Kt_0 - Kt_k + m_o| + \\ &+ \frac{ut_kK}{Kt_0 - Kt_k + m0} + u - gt_k = 0 \qquad (4.16)\\ &H - \ln|m_0|\left(ut_0 - ut_k + \frac{um_0}{K}\right) + Vt_k + \ln|Kt_0 - Kt_k + m_o|\left(ut_0 - ut_k + \frac{um_0}{K}\right) + \\ &+ ut_k - ut_0 - \frac{1}{2}gt_k^2 = 0 \qquad (4.17)\end{aligned}$$

Úpravou rovnice (4.16) dostáváme

$$\ln|Kt_0 - Kt_k + m_o| = \frac{V + u\ln|m_o| - gt_k}{u}. \tag{4.18}$$

Po odlogaritmování

$$\exp\left(\frac{V + u\ln|m_o| - gt_k}{u}\right) = Kt_0 - Kt_k + m_0.$$

Pro čas t_0 tedy platí

$$t_0 = \frac{\exp\left(\frac{V + u\ln|m_o| - gt_k}{u}\right) + Kt_k - m_0}{K}. \tag{4.19}$$

Dosazením rovnic (4.18) a (4.19) do rovnice (4.17) získáme rovnici s jedinou neznámou, kterou je t_k.

$$H - \ln|m_o| \left(u \frac{\exp\left(\frac{V+u\ln|m_o|-gt_k}{u}\right) + Kt_k - m_0}{K} - ut_k + \frac{um_0}{K} \right) + Vt_k +$$
$$+ \frac{V + u\ln|m_o| - gt_k}{u} \left(u \frac{\exp\left(\frac{V+u\ln|m_o|-gt_k}{u}\right) + Kt_k - m_0}{K} - ut_k + \frac{um_0}{K} \right) + ut_k -$$
$$- u \frac{\exp\left(\frac{V+u\ln|m_o|-gt_k}{u}\right) + Kt_k - m_0}{K} - \frac{1}{2}gt_k^2 = 0 \tag{4.20}$$

Z rovnic (4.19) a (4.20) můžeme pro konkrétní hodnoty spočítat časy t_0 a t_k, které označují čas zapnutí motoru rakety a čas ukončení přistání. Soustava rovnic (4.19), (4.20) je obecně nelineární. Budeme ji řešit numericky pomocí softwaru MATLAB.

$u\,[m \cdot s^{-1}]$	$K\,[kg \cdot s]$	$g\,[m \cdot s^{-2}]$	$m_0\,[kg]$	$H\,[m]$	$V\,[m \cdot s^{-1}]$
1000	50	9,81	1000	11000	0

Tab. 4.2: Tabulka hodnot pro konstanty vystupující v modelu.

Pro tato konkrétní data obdržíme

$$t_0 = 43,2228\ s,$$
$$t_k = 51,1089\ s.$$

Čas t_0, kdy raketa zapne motor, dosahuje oproti předcházejícímu příkladu s konstantní hmotností vyšší hodnoty. To znamená, že raketa zapne motor později, což je v souladu s naším očekáváním. Raketa totiž při chodu motoru ztrácí hmotnost a motor tak nemusí po celou dobu chodu brzdit raketu s počáteční hmotností.

4.1.3 Konstantní hmotnost s vlivem atmosféry

Nyní budeme předpokládat raketu o konstantní hmotnosti, na kterou působí, oproti předešlým případům, ještě odporová síla

$$F_D = \frac{1}{2}\rho v^2 C_D A,$$

kde ρ je hustota vzduchu, v je rychlost rakety, C_D je koeficient odporu, A je průřez rakety.

V našem případě vyjádříme odporovou sílu zjednodušeně vztahem $\gamma(\dot{y})^2$, kde γ je kladná konstanta. Pohyb rakety je tedy popsán diferenciální rovnicí

$$m(t)\ddot{y}(t) = R(t)u(t) - m(t)g + \gamma(\dot{y})^2.$$

Hmotnost rakety $m(t)$ je konstantní, tedy $m(t) = m_0$. Konstantní je i relativní rychlost zplodin vůči raketě $u(t) = u$. $R(t)$ je opět řídící funkce

$$R(t) = \begin{cases} 0, & t \in \langle 0, t_0 \rangle \\ K, & t \in \langle t_0, t_k \rangle. \end{cases}$$

Rovnici tedy můžeme upravit na tvar

$$\ddot{y}(t) = \frac{R(t)u}{m_0} - g + \frac{\gamma}{m_0}(\dot{y})^2. \tag{4.21}$$

Rovnici (4.21) vyřešíme na časových intervalech $t \in \langle 0, t_0 \rangle$ a $t \in \langle t_0, t_k \rangle$.
a) $t \in \langle 0, t_0 \rangle$ Rovnice (4.21) má tvar

$$\ddot{y}(t) = -g + \frac{\gamma}{m_0}(\dot{y})^2. \tag{4.22}$$

Označíme-li $S = \frac{\gamma}{m_0}$, dostáváme

$$\dot{v}(t) = -g + Sv^2,$$

kde $v = \dot{y}(t)$. Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými, kterou upravíme na tvar

$$\frac{1}{Sv^2 - g} dv = dt.$$

Následnou integrací získáváme

$$-\frac{\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{S}{g}}v\right)}{\sqrt{Sg}} = t + c. \tag{4.23}$$

Z počáteční podmínky $v(0) = V$ vypočítáme integrační konstantu

$$c = -\frac{\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{S}{g}}V\right)}{\sqrt{Sg}}.$$

Po dosazení integrační konstanty do rovnice (4.23) dostáváme rovnici

$$-\frac{\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{S}{g}}v\right)}{\sqrt{Sg}} = t - \frac{\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{S}{g}}V\right)}{\sqrt{Sg}},$$

kterou upravíme na tvar

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{S}} \tanh\left(W\sqrt{Sg} - t\sqrt{Sg}\right), \tag{4.24}$$

kde $W = \dfrac{\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{S}{g}}V\right)}{\sqrt{Sg}}$. Integrací rovnice (4.24), která představuje rychlost rakety v čase t, dostaneme obecné řešení rovnice (4.22).

$$y(t) = -\frac{1}{S}\ln\left|\cosh\left(\sqrt{Sg}(t-w)\right)\right| + c \tag{4.25}$$

Po dosazení počáteční podmínky $y(0) = H$ získáme integrační konstantu

$$c = H + \frac{1}{S}\ln\left|\cosh\left(W\sqrt{Sg}\right)\right|.$$

Integrační konstanta a rovnice (4.25) nám dává řešení rovnice (4.22)

$$y(t) = -\frac{1}{S}\ln\left|\cosh\left(\sqrt{Sg}(t-W)\right)\right| + H + \frac{1}{S}\ln\left|\cosh\left(W\sqrt{Sg}\right)\right|, \tag{4.26}$$

které vyjadřuje polohu rakety v čase $t \in \langle 0, t_0\rangle$.

b) $t \in \langle t_0, t_k\rangle$

Rovnice (4.21) má tvar

$$\ddot{y}(t) = \frac{Ku}{m_0} - g + \frac{\gamma}{m_0}(\dot{y})^2. \tag{4.27}$$

Označením $S = \frac{\gamma}{m_0}$ a $P = \frac{Ku}{m_0} - g$ dostaneme

$$\dot{\bar{v}}(t) = P + S\bar{v}^2,$$

kde $\bar{v} = \dot{y}(t)$. Jde o rovnici se separovanými proměnnými, kterou upravíme na tvar

$$\frac{1}{P + S\bar{v}^2}d\bar{v} = dt.$$

Integrací získáme

$$\frac{\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{S}{P}}\bar{v}\right)}{\sqrt{SP}} = t + c. \tag{4.28}$$

Počáteční podmínka $\bar{v}(t_0) = v(t_0)$ plyne ze spojitosti řešení v bodě t_0. Z rovnice (4.24) dostáváme počáteční podmínku ve tvaru

$$\bar{v}(t_0) = \sqrt{\frac{g}{S}}\tanh\left(W\sqrt{Sg} - t_0\sqrt{Sg}\right).$$

Po jejím dosazení do rovnice (4.28) obdržíme integrační konstantu

$$c = \frac{\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{S}{P}}\frac{\sqrt{g}\tanh\left(\sqrt{Sg}(W-t_0)\right)}{\sqrt{S}}\right)}{\sqrt{SP}} - t_0.$$

Z integrační konstanty a rovnice (4.28) získáme rovnici

$$\frac{\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{S}{P}}\bar{v}\right)}{\sqrt{SP}} = t + \frac{\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{g}\tanh\left(\sqrt{Sg}(W-t_0)\right)}{\sqrt{P}}\right)}{\sqrt{SP}} - t_0,$$

kterou upravíme na tvar

$$\bar{v}(t)=\sqrt{\frac{P}{S}}\tan\left(t\sqrt{SP}+\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{g}\tanh\left(\sqrt{Sg}(W-t_0)\right)}{\sqrt{P}}\right)-t_0\sqrt{SP}\right). \quad (4.29)$$

Rovnice (4.29) vyjadřuje rychlost rakety v čase $t\in\langle t_0,t_k\rangle$. Její integrací dostaneme obecné řešení rovnice (4.27).

$$\bar{y}(t)=-\frac{\ln\left(\cos\left(\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{g}{P}}\tanh\left(\sqrt{Sg}(W-t_0)\right)\right)+\sqrt{SP}(t-t_0)\right)\right)}{S}+c \quad (4.30)$$

Ze spojitosti řešení v bodě t_0 a rovnice (4.26) obdržíme

$$\bar{y}(t_0)=-\frac{1}{S}\ln\left|\cosh\left(\sqrt{Sg}(t_0-W)\right)\right|+H+\frac{1}{S}\ln\left|\cosh\left(W\sqrt{Sg}\right)\right|.$$

Dosazením tohoto vztahu do rovnice (4.30) získáme integrační konstantu

$$\begin{aligned}c=&\frac{\ln\left(\cos\left(\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{g}{P}}\tanh\left(\sqrt{Sg}(W-t_0)\right)\right)\right)\right)}{S}-\frac{1}{S}\ln\left|\cosh\left(\sqrt{Sg}(t_0-W)\right)\right|+\\&+H+\frac{1}{S}\ln\left|\cosh\left(W\sqrt{Sg}\right)\right|.\end{aligned}$$

Z obecného řešení (4.25) a integrační konstanty získáme již řešení rovnice (4.27), které je tvaru

$$\begin{aligned}\bar{y}(t)=&-\frac{\ln\left(\cos\left(\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{g}{P}}\tanh\left(\sqrt{Sg}(W-t_0)\right)\right)+\sqrt{SP}(t-t_0)\right)\right)}{S}+\\&+\frac{\ln\left(\cos\left(\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{g}{P}}\tanh\left(\sqrt{Sg}(W-t_0)\right)\right)\right)\right)}{S}-\\&-\frac{1}{S}\ln\left|\cosh\left(\sqrt{Sg}(t_0-W)\right)\right|+H+\frac{1}{S}\ln\left|\cosh\left(W\sqrt{Sg}\right)\right|.\end{aligned} \quad (4.31)$$

Abychom docílili hladkého přistání, požadujeme podmínky $\bar{y}(t_k)=0$ a $\dot{\bar{y}}(t_k)=0$. Dosadíme-li tyto podmínky do (4.29) a (4.31), získáme soustavu dvou nelineárních rovnic o neznámých t_0 a t_k.

$$\sqrt{\frac{P}{S}}\tan\left(t_k\sqrt{SP}+\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{g}\tanh\left(\sqrt{Sg}(W-t_0)\right)}{\sqrt{P}}\right)-t_0\sqrt{SP}\right)=0 \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned}&-\frac{\ln\left(\cos\left(\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{g}{P}}\tanh\left(\sqrt{Sg}(W-t_0)\right)\right)+\sqrt{SP}(t_k-t_0)\right)\right)}{S}+\\&+\frac{\ln\left(\cos\left(\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{g}{P}}\tanh\left(\sqrt{Sg}(W-t_0)\right)\right)\right)\right)}{S}-\\&-\frac{1}{S}\ln\left|\cosh\left(\sqrt{Sg}(t_0-W)\right)\right|+H+\frac{1}{S}\ln\left|\cosh\left(W\sqrt{Sg}\right)\right|=0\end{aligned} \quad (4.33)$$

Z rovnic (4.32) a (4.33) můžeme pro konkrétní hodnoty spočítat časy t_0 a t_k, které označují čas zapnutí motoru rakety a čas ukončení přistání. Nelineární soustavu rovnic (4.32), (4.33) můžeme pro konkrétní data řešit například pomocí softwaru MATLAB.

$u\,[m \cdot s^{-1}]$	$K\,[kg \cdot s]$	$g\,[m \cdot s^{-2}]$	$m_0\,[kg]$	$H\,[m]$	$V\,[m \cdot s^{-1}]$	$\gamma\,[-]$
1000	50	9,81	1000	11000	0	0,03

Tab. 4.3: Tabulka hodnot pro konstanty vystupující v modelu.

Pro tato konkrétní data obdržíme

$$\begin{aligned} t_0 &= 45,7007\ s, \\ t_k &= 54,7140\ s. \end{aligned}$$

Čas t_0, kdy raketa zapne motor, dosahuje oproti příkladu s konstantní hmotností bez vlivu atmosféry vyšší hodnoty. Raketa tedy zapne motor později, což je v souladu s naším očekáváním. Na raketu totiž působí navíc odporová síla, která během přistání raketu brzdí.

4.2 Úloha o maximálním doletu rakety

V této kapitole se budeme zabývat 2D modelem, který bude představovat maximální dolet rakety.

Ve 2D prostoru je poloha rakety určena soustavou diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} m(t)\ddot{x}(t) &= R(t)u(t)\cos\alpha(t) \\ m(t)\ddot{y}(t) &= R(t)u(t)\sin\alpha(t) - m(t)g \\ \dot{m} &= -R(t). \end{aligned} \tag{4.34}$$

Budeme uvažovat raketu s počátečními podmínkami

$$\begin{aligned} x(0) &= \dot{x}(0) = 0 \\ y(0) &= \dot{y}(0) = 0 \\ m(0) &= m_0. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Chceme-li zjistit dolet rakety, musíme požadovat podmínku

$$y(t_k) = 0, \tag{4.36}$$

tedy, že poloha rakety v ose y je v čase přistání t_k nulová.
Z optimálního řízení je známa následující věta.

Věta 9. *Nechť* $\tilde{R}(t)$, $\tilde{\alpha}(t)$, *kde* $0 \le t \le t_k$, *je optimální řešení úlohy* (4.34)-(4.36),

$$x(t_k) \to \max .$$

Pak existuje t_0*,* $0 < t_0 < t_k$ *tak, že*

$$\tilde{R}(t) = \begin{cases} K, & t \in \langle 0, t_0 \rangle \\ 0, & t \in \langle t_0, t_k \rangle \end{cases}, \quad \tilde{\alpha}(t) = \begin{cases} \tilde{\alpha}, & t \in \langle 0, t_0 \rangle \\ lib., & t \in \langle t_0, t_k \rangle \end{cases},$$

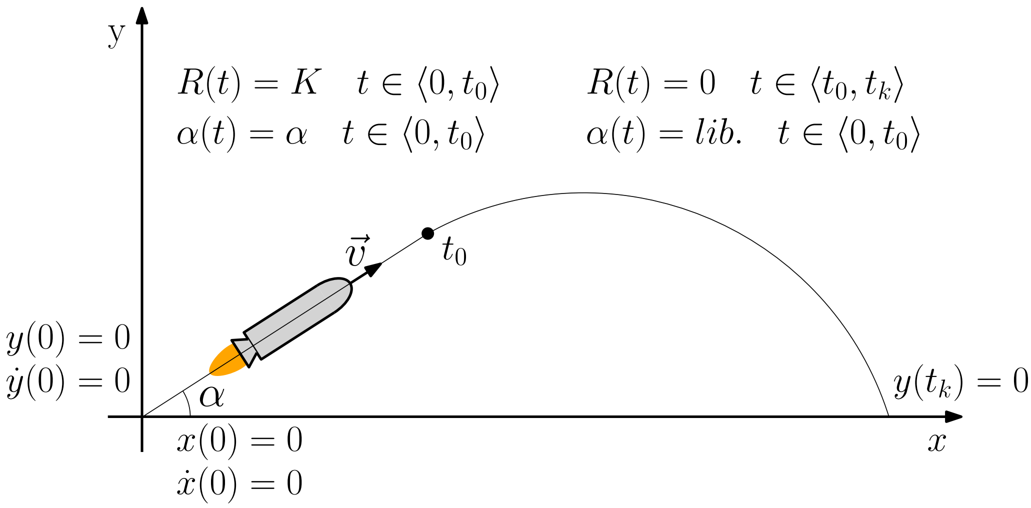
kde $\tilde{\alpha}$ *je vhodná konstanta splňující* $0 \le \tilde{\alpha} \le \frac{\pi}{2}$.

Důkaz: Lze nalézt například v [1].

Z věty 9 lze vidět, že funkce $R(t)$, $\alpha(t)$ je vhodné hledat ve tvaru

$$R(t) = \begin{cases} K, & t \in \langle 0, t_0 \rangle \\ 0, & t \in \langle t_0, t_k \rangle \end{cases}, \tag{4.37}$$

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha, & t \in \langle 0, t_0 \rangle \\ lib., & t \in \langle t_0, t_k \rangle \end{cases}. \tag{4.38}$$



Obr. 4.2: Dolet rakety.

Soustavu diferenciálních rovnic (4.34) vyřešíme tedy nejdříve na časovém intervalu $t \in \langle 0, t_0 \rangle$ a poté na intervalu $t \in \langle t_0, t_k \rangle$.

a) $t \in \langle 0, t_0 \rangle$

Pro tento časový interval platí

$$\dot{m}(t) = -K.$$

Integrací a dosazaním podmínky $m(0) = m_0$ dostaneme

$$m(t) = -Kt + m_0.$$

Dosadíme-li tento výsledek do rovnic soustavy (4.34), s ohledem na (4.37) a (4.38) obdržíme dvě diferenciální rovnice druhého řádu

$$\ddot{x}(t) = \frac{uK\cos\alpha}{-Kt+m_0}, \tag{4.39}$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{uK\sin\alpha}{-Kt+m_0} - g. \tag{4.40}$$

Nejdříve vyřešíme rovnici (4.39). Její integrací dostáváme

$$v_x(t) = \int \frac{uK\cos\alpha}{-Kt+m_0}dt = -u\cos\alpha \int \frac{-K}{-Kt+m_0}dt = -u\cos\ln|-Kt+m_0| + c.$$

Dosazením počáteční podmínky $v_x(0) = 0$ obdržíme integrační konstantu

$$c = u\cos\alpha\ln|m_0|.$$

Pro rychlost rakety v ose x tedy platí

$$v_x(t) = -u\cos\alpha\ln|-Kt+m_0| + u\cos\alpha\ln|m_0|. \tag{4.41}$$

Opětovnou integrací rovnice (4.41) získáme

$$\begin{aligned} x(t) &= \int -u\cos\alpha\ln|-Kt+m_0|\,dt + \int u\cos\alpha\ln|m_0|\,dt = \\ &= -u\cos\alpha\frac{(Kt-m_0)\ln|-Kt+m_0| - Kt}{K} + u\cos\alpha\ln|m_0|\,t + c. \end{aligned}$$

Po dosazení počáteční podmínky $x(0) = 0$ dostaneme integrační konstantu

$$c = -u\cos\alpha\frac{m_0\ln|m_0|}{K}.$$

Polohu rakety v ose x tedy určuje rovnice

$$\begin{aligned} x(t) = &-u\cos\alpha\frac{(Kt-m_0)\ln|-Kt+m_0| - Kt}{K} + u\cos\alpha\ln|m_0|\,t- \\ &-u\cos\alpha\frac{m_0\ln|m_0|}{K}. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Nyní vyřešíme rovnici (4.40). Její integrací dostáváme

$$v_y(t) = \int \frac{uK\sin\alpha}{-Kt+m_0}dt - \int gdt = -u\sin\alpha\ln|-Kt+m_0| - gt + c.$$

Dosazením počáteční podmínky $v_y(0) = 0$ obdržíme integrační konstantu

$$c = u\sin\alpha\ln|m_0|.$$

Pro rychlost rakety v ose y tedy platí

$$v_y(t) = -u\sin\alpha\ln|-Kt+m_0| - gt + u\sin\alpha\ln|m_0|. \tag{4.43}$$

Opětovnou integrací rovnice (4.43) získáme

$$\begin{aligned} y(t) &= \int -u \sin\alpha \ln|-Kt + m_0|\, dt - \int gtdt + \int u \sin\alpha \ln|m_0|\, dt = \\ &= -u \sin\alpha \frac{(Kt - m_0)\ln|-Kt + m_0| - Kt}{K} - g\frac{t^2}{2} + u\sin\alpha \ln|m_0|\, t + c. \end{aligned}$$

Po dosazení počáteční podmínky $y(0) = 0$ dostaneme integrační konstantu

$$c = -u \sin\alpha \frac{m_0 \ln|m_0|}{K}.$$

Polohu rakety v ose y tedy určuje rovnice

$$\begin{aligned} y(t) = &- u \sin\alpha \frac{(Kt - m_0)\ln|-Kt + m_0| - Kt}{K} - g\frac{t^2}{2} + u\sin\alpha \ln|m_0|\, t - \\ &- u \sin\alpha \frac{m_0 \ln|m_0|}{K}. \end{aligned} \tag{4.44}$$

b) $t \in \langle t_0, t_k \rangle$
Pro tento časový interval platí

$$\dot{\bar{m}}(t) = 0.$$

Integrací a dosazením podmínky $\bar{m}(t_0) = m(t_0)$, která plyne ze spojitosti řešení v bodě t_0, dostaneme

$$\bar{m}(t) = -Kt_0 + m_0.$$

Dosadíme-li tento výsledek do rovnic soustavy (4.34), s ohledem na (4.37) a (4.38) obdržíme dvě diferenciální rovnice druhého řádu

$$\ddot{x}(t) = 0, \tag{4.45}$$

$$\ddot{y}(t) = -g. \tag{4.46}$$

Nejdříve vyřešíme rovnici (4.45). Integrací této rovnice dostáváme

$$\bar{v}_x(t) = c.$$

Na základě spojitosti řešení v bodě t_0 získáme integrační konstantu z podmínky $\bar{v}_x(t_0) = v_x(t_0)$, kde $v_x(t_0) = -u\cos\alpha \ln|-Kt_0 + m_0| + u\cos\alpha \ln|m_0|$. Integrační konstanta je tak tvaru

$$c = -u\cos\alpha \ln|-Kt_0 + m_0| + u\cos\alpha \ln|m_0|.$$

Pro rychlost rakety v ose x tedy platí

$$\bar{v}_x(t) = -u\cos\alpha \ln|-Kt_0 + m_0| + u\cos\alpha \ln|m_0|. \tag{4.47}$$

Opětovnou integrací rovnice (4.47) získáme

$$\bar{x}(t) = \int -u\cos\alpha \ln|-Kt_0 + m_0|\,dt + \int u\cos\alpha\ln|m_0|\,dt =$$
$$= -u\cos\alpha\ln|-Kt_0 + m_0|\,t + u\cos\alpha\ln|m_0|\,t + c.$$

K určení integrační konstanty využijeme opět spojitosti řešení v bodě t_0, která nám dává podmínku $\bar{x}(t_0) = x(t_0)$, $x(t_0)$ získáme z rovnice (4.42). Integrační konstanta je tak tvaru

$$c = u\cos\alpha\ln|-Kt_0 + m_0|\,t_0 - u\cos\alpha\frac{(Kt_0 - m_0)\ln|-Kt_0 + m_0| - Kt_0}{K} -$$
$$- u\cos\alpha\frac{m_0\ln|m_0|}{K}.$$

Polohu rakety v ose x tedy určuje rovnice

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) = &- u\cos\alpha\ln|-Kt_0 + m_0|\,t + u\cos\alpha\ln|m_0|\,t + \\ &+ u\cos\alpha\frac{m_0\ln|-Kt_0 + m_0| + Kt_0}{K} - u\cos\alpha\frac{m_0\ln|m_0|}{K}.\end{aligned} \tag{4.48}$$

Nyní vyřešíme rovnici (4.46). Její integrací dostáváme

$$\bar{v}_y = -gt + c.$$

Podmínka $\bar{v}_y(t_0) = v_y(t_0)$ plynoucí ze spojitosti řešení v bodě t_0, kde $v_y(t_0)$ získáme z rovnice (4.43), určuje integrační konstantu

$$c = -u\sin\alpha\ln|-Kt_0 + m_0| + u\sin\alpha\ln|m_0|\,.$$

Pro rychlost rakety v ose y tedy platí

$$\bar{v}_y(t) = -gt - u\sin\alpha\ln|-Kt_0 + m_0| + u\sin\alpha\ln|m_0|\,. \tag{4.49}$$

Opětovnou integrací rovnice (4.49) získáme

$$\bar{y}(t) = -\int gt dt - \int u\sin\alpha\ln|-Kt_0 + m_0|\,dt + \int u\sin\alpha\ln|m_0|\,dt =$$
$$= -g\frac{t^2}{2} - u\sin\alpha\ln|-Kt_0 + m_0|\,t + u\sin\alpha\ln|m_0|\,t + c.$$

Znovu využijeme spojitosti řešení v bodě t_0 a z podmínky $\bar{y}(t_0) = y(t_0)$, kde $y(t_0)$ získáme z rovnice (4.44), obdržíme integrační konstantu

$$c = u\sin\alpha\frac{m_0\ln|-Kt_0 + m_0| + Kt_0}{K} - u\sin\alpha\frac{m_0\ln|m_0|}{K}.$$

Polohu rakety v ose y tedy určuje rovnice

$$\begin{aligned}\bar{y}(t) = &- g\frac{t^2}{2} - u\sin\alpha\ln|-Kt_0 + m_0|\,t + u\sin\alpha\ln|m_0|\,t + \\ &+ u\sin\alpha\frac{m_0\ln|-Kt_0 + m_0| + Kt_0}{K} - u\sin\alpha\frac{m_0\ln|m_0|}{K}.\end{aligned} \tag{4.50}$$

Pro čas přistání t_k dostaneme z rovnic (4.48) a (4.50) rovnice

$$\begin{aligned}
\bar{x}(t_k) = &- u\cos\alpha \ln|-Kt_0 + m_0|\, t_k + u\cos\alpha \ln|m_0|\, t_k + \\
&+ u\cos\alpha \frac{m_0 \ln|-Kt_0 + m_0| + Kt_0}{K} - u\cos\alpha \frac{m_0 \ln|m_0|}{K}, \\
\bar{y}(t_k) = &- g\frac{t_k^2}{2} - u\sin\alpha \ln|-Kt_0 + m_0|\, t_k + u\sin\alpha \ln|m_0|\, t_k + \\
&+ u\sin\alpha \frac{m_0 \ln|-Kt_0 + m_0| + Kt_0}{K} - u\sin\alpha \frac{m_0 \ln|m_0|}{K}.
\end{aligned}$$

Odsud můžeme formulovat optimalizační úlohu nelineárního programování (s neznámými t_0, t_k, α) tj. maximalizovat výraz

$$\begin{aligned}
&- u\cos\alpha \ln|-Kt_0 + m_0|\, t_k + u\cos\alpha \ln|m_0|\, t_k + \\
&+ u\cos\alpha \frac{m_0 \ln|-Kt_0 + m_0| + Kt_0}{K} - u\cos\alpha \frac{m_0 \ln|m_0|}{K} \to \max
\end{aligned}$$

za omezení

$$\begin{aligned}
&- g\frac{t_k^2}{2} - u\sin\alpha \ln|-Kt_0 + m_0|\, t_k + u\sin\alpha \ln|m_0|\, t_k + \\
&+ u\sin\alpha \frac{m_0 \ln|-Kt_0 + m_0| + Kt_0}{K} - u\sin\alpha \frac{m_0 \ln|m_0|}{K} = 0
\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}
0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2} \\
0 < t_0 < t_k \\
-Kt_0 + m_0 - m_k \ge 0,
\end{aligned}$$

kde m_k je hmotnost rakety v čase t_k. Tuto úlohu pak můžeme řešit pro pevně dané parametry g, k, m_0, m_k, u pomocí nějakého systému pro řešení optimálních úloh nelineárního programování. Například pomocí GAMS.

ZÁVĚR

Cílem práce bylo matematicky popsat soustavu s proměnnou hmotností. Konkrétně jsme se zabývali raketou, jejíž hmotnost se v důsledku spalování paliva (které tvoří převážnou hmotnost rakety) během letu mění. K popisu pohybu rakety jsme využili zákona o zachování hybnosti a druhého Newtonova zákona.

Nejdříve jsme odvodili pohybové rovnice pro 1D, 2D a 3D prostor. Vycházeli jsme z druhého Newtonova zákona a z Meščerského rovnice, kterou jsme odvodili ze zákona zachování hybnosti na základě vhodně vymezené soustavy tvořené raketou a zplodinami opouštejícími raketu.

Dále jsme se zabývali problémem hladkého přistání v 1D prostoru. Postupně jsme zkoumali hladké přistání rakety s konstantní hmotností, s proměnnou hmotností a na závěr jsme případ přistání rakety s konstantní hmotností doplnili o vliv atmosféry. Teoretické poznatky jsme aplikovali na konkrétní data a obdrželi jsme očekáváné výsledky. Tedy, že v případě rakety s proměnnou hmotností dojde k pozdějšímu zapnutí motoru oproti případu s konstantní hmotností rakety a že vliv atmosféry oddálí zapnutí motoru.

Ve 2D prostoru jsme se zabývali úlohou maximálního doletu rakety. Z teorie optimálního řízení jsme získali tvar funkcí $R(t)$ a $\alpha(t)$, které daný model charakterizují.

Práci by bylo možné v budoucnu doplnit například rozšířením 2D modelu o požadavek hladkého přistání. Pro takto zvolený model lze opět využít tvrzení z optimálního řízení o existenci vhodného tvaru funkcí $R(t)$ a $\alpha(t)$. Dále by bylo například možné minimalizovat dobu letu či navrhnout model pro minimální spotřebu paliva. Také bychom mohli řešit modely v 3D prostoru, čímž se zabývá letecká dynamika.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

[1] BRUNOVSKÝ, Pavol. *Matematická teória optimálneho riadenia*. Bratislava: Alfa, 1980.

[2] HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER, DUB, Petr (ed.). *Fyzika*. 2., přeprac. vyd. Překlad Miroslav Černý. Brno: VUTIUM, c2013. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 978-80-214-4123-1.

[3] KALAS, Josef a Miloš RÁB. *Obyčejné diferenciální rovnice*. Vyd. 3. Brno: Masarykova univerzita, 2012. ISBN 978-80-210-5815-6.

[4] Lineární ODR n-tého řádu. In: *MATEMATIKA online* [online]. Brno, 2005 [cit. 2016-05-21]. Dostupné z: http://mathonline.fme.vutbr.cz/Linearni-ODR-n-teho-radu/sc-54-sr-1-a-68/default.aspx

[5] Meščerskij, Ivan Vsevolodovič. In: *Treccani - La cultura italiana* [online]. [cit. 2016-05-21]. Dostupné z: http://www.treccani.it/enciclopedia/ivan-vsevolodovic-mescerskij/