VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ENERGETICKÝ ÚSTAV

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
ENERGY INSTITUTE

STANOVENÍ FUNKČNÍ ZÁVISLOSTI KONCENTRACE VZDUCHU VE VODĚ V ZÁVISLOSTI NA TLAKU

DIPLOMOVÁ PRÁCE
MASTER‘S THESIS

AUTOR PRÁCE Bc. PETR UTTENDORFSKÝ
AUTHOR

BRNO 2009

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ENERGETICKÝ ÚSTAV

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
ENERGY INSTITUTE

STANOVENÍ FUNKČNÍ ZÁVISLOSTI KONCENTRACE VZDUCHU VE VODĚ V ZÁVISLOSTI NA TLAKU

ASSESMENT OF AIR CONCENTRATION IN WATER DEPENDING ON PRESURE

DIPLOMOVÁ PRÁCE
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR
Bc. PETR UTTENDORFSKÝ

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR
prof. Ing. FRANTIŠEK POCHYLÝ, CSc.

BRNO 2009

ABSTRAKT

Tato diplomová práce pojednává o závislosti součinitele přestupu tepla na míře koncentrace vzduchu ve vodě. Hlavní myšlenka vychází z rozpustnosti plynů v kapalinách v závislosti na tlaku, Henryho zákona, z Newtonova zákona o ochlazování. Byl proveden experiment, pro potvrzení předpokladů.

Klíčová slova: Voda, vzduch, ochlazování, součinitel přestupu tepla, tlak, koncentrace

ABSTRACT

This thesis deals with dependence of heat transfer coefficient on rate of air concentration in the water. Main idea appears from gas dissolvability in water depending on pressure, Henry's law and Newton's law of cooling. There had been an experiment made to verify the hypothesis.

Key words: Water, air, cooling , heat transfer coefficient, pressure, concentration

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

UTTENDORFSKÝ, P. *Stanovení funkční závislosti koncentrace vzduchu ve vodě v závislosti na tlaku.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009. 59 s. Vedoucí diplomové práce prof. Ing. František Pochylý, CSc.

PROHLÁŠENÍ

Tímto prohlašuji, že předkládanou diplomovou práci jsem vypracoval samostatně, s využitím uvedené literatury a podkladů, na základě konzultací a pod vedením vedoucího diplomové práce.

V Brně dne 29. 05. 2009 Bc. Petr Uttendorfský…………………………

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych poděkoval všem, kdo mi jakýmkoli způsobem pomáhali při studiu i s vypracováním diplomové práce. Hlavní díky patří panu prof. Ing. Františku Pochylému, CSc, pracovníkům laboratoře přenosu tepla a zaměstnanců laboratoře hydraulických strojů. Děkuji za jejich cenné rady, připomínky a čas.

3 INVERZNÍ ÚLOHY VEDENÍ TEPLA

Tato kapitola byla citována z [9].

3.1 CO JSOU TO INVERZNÍ ÚLOHY VEDENÍ TEPLA

Známe-li počáteční rozložení teplot uvnitř tuhého tělesa a podmínky přenosu tepla na jeho hranici, můžeme určit změny teplotního pole v čase. Tato úloha je nazývána přímá úloha. Přímá úloha postupuje z fyzikálního hlediska od příčin k důsledkům. Příčinami jsou zde průběhy podmínek přenosu tepla a důsledky jsou vyvolané změny teplotních polí. Přenos tepla je popisován okrajovými podmínkami. Okrajové podmínky jsou obvykle zadávány buď teplotou povrchu, nebo tepleným tokem na povrchu, nebo, jak je to většinou používáno v této práci, teplotu okolí a součinitelem přestupu tepla.

V technice se často setkáváme s problémem jak určit okrajové podmínky z měření průběhů teplot v jednom, nebo několika bodech tělesa. Úloha, která ze známých průběhů teplot počítá okrajové podmínky, které tyto průběhy způsobily, se nazývá inverzní úloha vedení tepla. Pokud by měla být použita terminologie naprosto přesná, měli bychom hovořit o inverzní úloze vedení tepla pro stanovení okrajových podmínek. Pokud je v této práci používán termín inverzní úloha máme na mysli úlohu stanovení průběhu součinitele přestupu tepla na základě znalosti známého průběhu teploty v bodě/bodech tělesa.

Při výpočtech teplotních polí je nutno zadat materiálové vlastnosti tělesa. Z tohoto hlediska je možno hovořit o dalším typu inverzních úloh vedení tepla. Jsou to úlohy vedení tepla pro stanovení teplot v jednom nebo několika bodech tělesa.

3.2 ZPŮSOBY VÝPOČTU TEPLOTNÍCH POLÍ

Pro řešení inverzních úloh libovolným způsobem je nutné znát matematický model, který popisuje proces vedení a přenosu tepla. Základem je Fourierova diferenciální rovnice vedení tepla. Tato rovnice má pro trojrozměrnou oblast bez zdrojového členu v pravoúhlých souřadnicích tvar:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)=\rho c\frac{\partial T}{\partial \tau} \qquad (3.1)$$

$$T(x,y,z,0)=T_0(x,y,z) \qquad (3.2)$$

Rovnice (3.1) s počátečními podmínkami (3.2) musí být doplněna o popis okrajových podmínek. Pro daný bod povrchu je můžeme zapsat:

$$-\lambda\frac{\partial T(\tau)}{\partial}|_{povrch}=h\left(T_{povrch}-T_{okolí}\right) \qquad (3.2)$$

kde n je směr normály k povrchu ve zvoleném bodě.

Metody řešení rovnice (3.1) jsou všeobecně známé. Použití analytických metod prakticky ztrácí v technice význam pro omezenost okrajových podmínek. Tyto metody jsou však používány pro testování přesnosti numerických metod. Převážná většina úloh je řešena numericky metodou konečných prvků, metodou hraničních prvků nebo některou z diferenčních metod. Přes značný rozmach použití metody konečných prvků převažují pravděpodobně pro řešení teplotních úloh metody diferenční. Dále popsané inverzní úlohy mohou použít pro dopředný výpočet libovolnou numerickou metodu. Rozhodující je především přesnost, se kterou zvolená numerická metoda počítá nestacionární úlohu vedení tepla.

3.3 PROČ JSOU NĚKTERÉ INVERZNÍ ÚLOHY OBTÍŽNĚ ŘEŠITELNÉ

Inverzní úlohy patří do třídy matematicky nekorektních úloh. Znamená to, že u těchto úloh nelze obecně zaručit existenci a jednoznačnost řešení. Tento stav ukážeme na jednoduchém případu. Předpokládejme, že měříme teplotu v jednom bodě jednorozměrné tyče, která má pro jednoduchost představy jeden konec tepelně izolovaný. Každé měření má pouze omezenou přesnost. Pokud je teplosměnný konec tyče vystaven proměnným okrajovým podmínkám, pak se do měřeného bodu dostávají teplotní vlivy s určitým útlumem. Tento útlum závisí na materiálu tyče, na poloze měřeného bodu a na rychlosti změn okrajových podmínek.

Vlivem chyb můžeme dospět například k těmto stavům:

- naměřená amplituda teploty je větší než může vyvolat libovolná změna okrajové podmínky na hranici
- naměřená derivace teploty podle času je větší než může vyvolat libovolně rychlá změna okrajové podmínky

V obou uvedených případech nelze nalézt řešení inverzní úlohy. Zjednodušeně se dá říci, že obtížnost inverzní úlohy narůstá s tím, jak se velikost sledovaných změn teploty v měřeném bodě blíží k přesnosti, s níž měříme teplotu.

Další problémy vznikají při řešení úlohy. Je-li úloha lineární, pak pro jednorozměrný případ výše uvedený platí: existuje-li řešení inverzní úlohy, pak je to současně řešení jediné. Tato skutečnost však neplatí u nelineárních úloh. Všechny úlohy stanovení součinitele přestupu tepla na hranici oblasti jsou úlohy nelineární.

Výše uvedené skutečnosti je nutno vzít do úvahy již ve stádiu přípravy měření nebo experimentu. Jen tak je možné omezit problémy s řešitelností inverzních úloh.

3.4 STAV V ŘEŠENÍ PROBELMATIKY INVERZNÍCH ÚLOH V TEPELNÝCH PROCESECH

Provádění měření teplot s cílem stanovit podmínky přenosu tepla je v technice velmi časté. Méně časté je vyhodnocení získaných výsledků takovým způsobem, aby bylo získáno maximální množství co nejpřesnějších informací. V domácích odborných časopisech se můžeme s touto problematikou setkat poměrně zřídka.

Inverzním úlohám se soustavně věnují v Ústavu termomechaniky věd v Praze. Jejich výzkum je zaměřen zejména na přenos tepla v oblasti fyziky plazmatu a na technické aplikace ve spolupráci se Škodou Plzeň. Používají vlastní přístup k inverzním úlohám, který vychází z dřívějších sovětských prací. Vyvinuté metody však v mnoha směrech překonávají práce publikované na Akademii věd Ukrajiny v Kyjevě.

4 JEDNOPARAMETRICKÁ INVERZNÍ ÚLOHA PRO STANOVENÍ SOUČINITELE PŘESTUPU TEPLA NA POVRCHU TUHÉHO TĚLESA

Tato kapitola byla citována z [9].

4.1 FORMULACE PROBLÉMU

Je řešena problematika nalezení velikosti součinitele přestupu tepla na povrchu tělesa při znalosti experimentálně zjištěného průběhu teplot v jednom nebo několika bodech uvnitř nebo na povrchu tělesa. Je-li zadána povrchová teplota nebo hustota tepleného toku na povrchu tuhého tělesa jako funkce času, může být nalezeno rozložení teploty uvnitř tělesa. Tento výpočet je nazýván přímá úloha. Známe-li naopak průběh teploty uvnitř tělesa a cílem je definovat okrajové podmínky hovoříme o inverzní úloze. Popsaný algoritmus řešení inverzní úlohy je založený na využití výpočtu teplotních polí v jedno-, dvoj-, nebo trojrozměrné oblasti.

Inverzní úlohy vedení tepla patří z matematického hlediska do třídy nekorektních úloh. Jsou nekorektní z hlediska klasického přístupu ke korektnosti a jejich opodstatněnost zformuloval v roce 1962 Lavrentěv. Nekorektnost těchto úloh prakticky znamená, že neexistují okrajové podmínky, které by zajistili, že řešení diferenciální rovnice vedení tepla se bude v daném bodě shodovat se zadaným, většinou experimentálně zjištěným průběhem teplot. Klasifikace identifikačních, inverzních nebo obrácených úloh není dosud jednotná.

Řešme úlohu nalezení součinitele přestupu tepla na hranici tuhého tělesa, známe-li experimentálně zjištěný průběh teplot v určité hloubce pod povrchem. Předpokládáme znalost počátečního rozložení teplot, průběhu okolní teploty a teplofyzikálních vlastností materiálu. Dále předpokládáme znalost metody řešení přímé úlohy – tedy schopnost výpočtu nestacionárního teplotního pole v tělese.

4.2 METODA ŘEŠENÍ

Každá inverzní úloha je založena na řešení přímé úlohy. Vedení tepla v tělesech je popsáno Fourierovou parciální diferenciální rovnicí druhého řádu. Přímá úloha bývá obvykle řešena metodou konečných prvků, metodou elementárních bilancí nebo obdobnými, dnes již rutinně používanými postupy. Navržený algoritmus je použitelný pro libovolný způsob řešení přímé úlohy. Obecně tedy požadujeme znalost funkce $T = f(h, T_{ok}, c, \rho, \lambda, \tau)$. Z hlediska volby metody řešení přímé úlohy je rozhodující její přesnost, rychlost výpočtu, schopnost respektovat nelinearity a v neposlední řadě zvyklosti jednotlivých pracovišť. Pro řešení příkladů uvedených v kapitole byla použita metoda založená na použití spline funkcí. Je využitá vysoká přesnost této metody. Algoritmus byl navržen tak, aby umožňoval respektovat nelinearity dvou druhů:

a) závislost materiálových vlastností na teplotě (závisí na metodě přímého výpočtu),
b) závislost teplotního pole na součiniteli přestupu tepla.

4.3 JEDNO MĚŘÍCÍ MÍSTO, JEDNOROZMĚRNÝ PŘÍPAD

Předpokládejme znalost experimentálně zjištěného průběhu teploty v bodě ve vzdálenosti x pod povrchem. Je možné uvažovat i bod přímo na povrchu – pak se však spíše jedná o kvazi inverzní úlohy, kdy známe okrajovou podmínku prvního druhu. Dále známe teplotní pole a velikosti součinitele přestupu tepla do časového kroku $M-1$ a hledáme h – součinitel přestupu tepla v kroku M.

V minimalizačním algoritmu je vyžadována znalost derivace teploty podle součinitel přestupu tepla $\frac{\partial T}{\partial h}$. Často používaný způsob výpočtu derivace využívá střední derivace:

$$\frac{\partial T}{\partial h} = \frac{f(h+\delta h)-f(h-\delta h)}{2\delta h} \tag{4.1}$$

Tento vztah vyžaduje opakování dvou dopředných výpočtů. Přesnost stanovení derivace ovlivňuje rychlost konvergence iteračního výpočtu. Proto je v dalším výpočtu používán přesnější postup i za cenu opakování tří dopředných výpočtů.

Základem výpočtu je stanovení schématu řešení (obr. 1). Schématem řešení se rozumí stanovení počtu větví a počtu pokračování v každé větvi pro výpočet h v čase M. Na obr. 1 jsou ve schématu tři větve. V první větvi jsou tři kroky, ve druhé dva a ve třetí jeden krok. Schéma označíme 3 – 2 – 1. Nyní provedeme přímé výpočty z počátečního bodu v čase $M-1$ pro odhadnuté hodnoty $h_j,\ j=1..k$. Výsledky výpočtu označíme $T^i_{h_j,l}$, kde horní index značí časový krok a dolní index značí součinitel přestupu tepla (obr. 1). Teploty z experimentu jsou značeny Y.

Předpokládejme, že v čase M je závislost $T-h$ popsána funkcí

$$T = a_1 + a_2 h + a_3 h^2 \tag{4.2}$$

Pro výpočet koeficientů $a_1,\ a_2,\ a_3$ použijeme teploty $T^M_{h_j,l}$, $j=1,2,3$ z přímého výpočtu. Teplotní pole v časovém kroku i může být charakterizováno Taylorovým rozvojem okolo hodnoty h_j:

$$T^i_{h,l} = T^i_{h_j,l} + (h-h_j)\frac{\partial T^i_{h_j,l}}{\partial h_j} + \frac{(h-h_j)^2}{2l}\frac{\partial^2 T^i_{h_j,l}}{\partial h_j^2} + \cdots \tag{4.3}$$

Hodnota h bude minimalizovat čtverec odchylek mezi vypočtenými teplotami $T^i_{h_j,l}$ a teplotou v místě senzoru Y^i. Popsaný inverzní algoritmus je založený na principu minimalizace čtverců odchylek. Tato myšlenka je společná pro většinu inverzních úloh a její další modifikace vedou k rozšíření třídy řešitelných problémů. Funkce, která má být minimalizována, má tvar:

$$S = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{r_j}\sum_{l=1}^{L}\left(Y^i_l - T^i_{h_j}\right)^2 \cdot w^i_{j,l} \tag{4.4}$$

Nyní derivujeme S podle h_j, nahradíme h_j hledanou hodnotou h a derivaci položíme rovnu nule:

$$O = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{r_j}\sum_{l=1}^{L}\left(Y^i_l - T^i_{h,l}\right) \cdot w^i_{j,l} \cdot D^i_{h,l} \tag{4.5}$$

kde $D^i_{h,l} = \frac{\partial T^i_{h,l}}{\partial h}$. Hodnoty D dostaneme snadno derivováním rovnice (4.2).

Sumace probíhá tak, že jsou uvažovány všechny vypočtené teploty v časovém kroku M a časových krocích následujících. V případě na obr. 1 (jedná-li se o jeden senzor, tedy $l=1$) se v sumě objeví 6 členů. Z rovnice (4.5) však není možno h počítat přímo. Hledaná hodnota součinitele přestupu tepla je obsažena implicitně v hodnotách teplot a navíc je požadována znalost derivace v bodě h.

Pro řešení rovnice (4.3) jsou použity dvě aproximace: Nejprve nahradíme derivaci $D^i_{h,l}$ derivací $D^i_{h_j,l}$ a dále pak pro vyjádření teploty použijeme Taylorova rozvoje. Po těchto úpravách dostáváme:

$$O = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{r_j} \sum_{l=1}^{L} \left[Y_l^i - T^i_{h_j,l} - (h - h_j) D^i_{h_j,l} \right] D^i_{h_j,l} \tag{4.6}$$

Ze vztahu (4.6) již přímo vypočteme velikost hledané hodnoty součinitele přestupu tepla:

$$h^+ = \frac{\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{r_j} \sum_{l=1}^{L} h_j w^i_{j,l} {D^i_{h_j,l}}^2 + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{r_j} \sum_{l=1}^{L} \left(Y_l^i - T^i_{h_j,l} \right) w^i_{j,l} D^i_{h_j,l}}{\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{r_j} \sum_{l=1}^{L} w^i_{j,l} {D^i_{h_j,l}}^2} \tag{4.7}$$

Řešená inverzní úloha je nelineární i v případě, že materiálové parametry v diferenciální rovnici vedení tepla jsou konstantní. Výpočet tedy probíhá iteračně a je ukončen, když dosáhneme předepsaného počtu iterací, nebo když změny nově počítaných hodnot h^+ splňují kritérium:

$$\frac{|h^+_{\tau+1} - h^+_\tau|}{|h^+_\tau| + \delta_1} < \delta \tag{4.8}$$

kde δ_1 je malé číslo (řádu 10^{-4}) a δ je jiné malé číslo. V tomto okamžiku je položeno $h = h^1$ a je počítán další časový krok.

Velikost h však může být vypočtena i přesnějším postupem. Z rovnice (4.2) jsou dostupné i druhé derivace teploty. Pokud dosadíme tři členy Taylorova rozvoje (4.3) do rovnice (4.5) dostáváme

$$O = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{r_j} \sum_{l=1}^{L} \left[Y_l^i - T^i_{h_j,l} - (h - h_j) D_j - \frac{(h-h_j)^2}{2!} 2C_j \right] D_j \tag{4.9}$$

kde C_j je druhá derivace teploty podle h_j z rovnice (4.2). Hodnotu h pak dostáváme z kvadratické rovnice:

$$-h^2 \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{r_j} \sum_{l=1}^{L} C_j D_j + h \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{r_j} \sum_{l=1}^{L} \left(2C_j D_j h_j - D_j^2 \right) + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{r_j} \sum_{l=1}^{L} \left[\left(Y_l^i - T^i_{h_j,l} \right) D_j + h_j D_j^2 - h_j^2 C_j D_j \right] = 0 \tag{4.10}$$

Ve vztazích (4.9) a (4.10) je pro přehlednost použito jednoduchého indexování u označení derivací.

4.4 NĚKOLIK MĚŘICÍCH MÍST, JEDNOROZMĚRNÝ PŘÍPAD

V případě dostupnosti údajů teplot z různých hloubek je vhodné všechny využít pro výpočet h. Postup uvedený v 3.1 souběžně provádíme pro body v místech senzorů. Dostáváme několik odhadů h^M. Do dalšího výpočtu bereme buď průměrnou hodnotu, nebo hodnotu váženého průměru, kde váha závisí na přesnosti měření daného bodu a jeho vzdálenosti od povrchu. (Z důvodů útlumu teplotní vlny předává bod nejblíže povrchu maximální množství informací.)

4.5 VÍCEROZMĚRNÉ PŘÍPADY

Z teorie inverzních úloh plyne, že pro jeden senzor můžeme vypočítat maximálně jednu hodnotu h. Teoreticky dokonce stačí pro výpočet součinitele přestupu tepla v daném místě povrchu měřit teplotu v libovolném bodu tělesa. Tato podmínka však vzhledem k útlumu teplotních vln a omezené přesnosti měření platí jen teoreticky.

Při realizaci měření je nutno měřit teplotu v „rozumné“ vzdálenosti od sledovaného bodu povrchu. Za „rozumnou“ vzdálenost je možno považovat oblast, ve které se teplotní změny způsobené změnou okrajové podmínky projeví s dostatečnou intenzitou (vzhledem k přesnosti měření). Výpočet uvedený v 3.1 a 3.2 může být použitý i pro vícerozměrné případy. Přímé výpočty se provádí současně pro celé těleso a výše uvedeným způsobem se postupně vypočtou hodnoty h v jednotlivých bodech na povrchu nad místem senzoru. Záleží na tom, jak jsme schopni s daným počtem vypočtených hodnot h na povrchu popsat (interpolovat, extrapolovat) velikost součinitele přestupu tepla ve všech povrchových bodech.

4.6 SHRNUTÍ

Řešení inverzní úlohy popsané v této části umožňuje výpočet součinitele přestupu tepla na základě změřených průběhů teplot v tělese. Algoritmus je založen na řešení přímé úlohy libovolnou numerickou metodou a následné minimalizaci čtverců odchylek vypočtených a změřených teplot. Algoritmus může plně respektovat nelinearitu úlohy, je-li přímá úloha výpočtu teplotních polí schopna pracovat jako nelineární.

Popsaný algoritmus je schopen pracovat s daty, která obsahují poměrně velké náhodné chyby. Metoda může být použita pro jedno-, dvoj- a trojrozměrné případy. Trojrozměrná úloha je ověřená na vyhodnocení laboratorního měření ochlazování ocelového kvádru vodními tryskami.