



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

OPTIMALIZACE PRO INŽENÝRSKÝ NÁVRH

OPTIMIZATION FOR ENGINEERING DESIGN

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Tomáš Fedorko

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

RNDr. Pavel Popela, Ph.D.

BRNO 2017

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	Tomáš Fedorko
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	RNDr. Pavel Popela, Ph.D.
Akademický rok:	2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Optimalizace pro inženýrský návrh

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Student si prohloubí znalosti problematiky optimalizačních modelů a metod v návaznosti na své znalosti matematické analýzy, lineární algebry, diferenciálních rovnic a numerických metod. Student se zaměří na základní modelování a numerické řešení úloh matematického programování s omezeními ve tvaru diferenciálních rovnic. V aplikační části se zaměří na možné příklady inženýrských aplikací. Dále prokáže osvojené znalosti při implementaci modelů a algoritmů a při řešení úloh s testovacími daty.

Cíle bakalářské práce:

1. Pro vybranou třídu inženýrských problémů optimálního návrhu parametrů bude prezentován přehled souvisejících matematických poznatků.
2. Zvolená třída optimalizačních modelů bude zkoumána a prezentována z pohledu jejich vlastností a řešitelnosti.
3. Dále budou analyzovány, implementovány a testovány vhodné algoritmy řešící vybrané úlohy.
4. Pozornost bude věnována efektivitě výpočtů a interpretaci výsledků.

Seznam doporučené literatury:

KLAPKA, Jindřich, Jiří DVOŘÁK a Pavel POPELA. 2001. Metody operačního výzkumu. Vyd. 2. Brno: VUTIUM. ISBN 8021418397.

PARDALOS, P. M. a Mauricio G. C. RESENDE (eds.). 2002. Handbook of applied optimization. Oxford: Oxford University Press. ISBN 0195125940.

BAZARAA, Mokhtar S., Hanif D. SHERALI a C. M. SHETTY. 1993. Nonlinear programming: theory and algorithms. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons. ISBN 0471599735.

NASH, Stephen a Ariela SOFER. 1995. Linear and nonlinear programming. McGraw-Hill. ISBN 978-0070460652.

BETTS, John T. 2001. Practical methods for optimal control using nonlinear programming. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics. ISBN 0898714885.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Táto bakalárska práca sa zaoberá problematikou optimálneho chladenia týče vzhladom k nákladom spojeným s chladením. Popisuje problém vedenia tepla, jeho analytické riešenie, numerické riešenie okrajového problému a jeho implementáciu vo výpočtovom softvéri MATLAB funkciou FMINCON, kde jednotlivé výsledky sú graficky i výpočtovo zhrnuté a interpretované.

Abstract

This bachelor's thesis concerns the problem of finding an optimal cooling solution in respect to cooling costs. It describes the problem of heat transfer, its analytical solution, numerical solution of the boundary values problem and its implementation in MATLAB using the FMINCON function. Individual results are presented graphically, as well as, summarized in calculations and interpreted.

Klíčové slová

Vedenie tepla, obyčajné diferenciálne rovnice, okrajový problém obyčajných diferenciálnych rovníc, diskretizačná metóda, optimalizácia, FMINCON.

Keywords

Heat transfer, ordinary differential equations, boundary value problem of ordinary differential equation, discretization method, optimization, FMINCON.

Prehlasujem, že som bakalársku prácu *Optimalizace pro inženýrský návrh* vypracoval samostatne pod vedením RNDr. Pavla Popelu, Ph.D. s použitím materiálov uvedených v zozname literatúry.

Tomáš Fedorko

Rád by som poďakoval vedúcemu práce RNDr. Pavlovi Popelovi, Ph.D. za odborné vedenie a pomoc pri jej tvorbe. Poďakovanie patrí aj p. Ing. Lukášovi Kokrdovi za mnohé užitočné rady a pripomienky, ktorými usmerňoval moje myšlienky a nápady, ako aj za čas, ktorý mi bol ochotný venovať.

Tiež by som chcel poďakovať svojim rodičom, súrodencom a priateľke, ktorí ma podporovali v celom bakalárskom štúdiu.

Tomáš Fedorko

Obsah

1	Motivácia a ciele	2
2	Optimalizácia	3
2.1	Úvod	3
2.2	Teória	5
2.3	Konvexná optimalizácia	7
3	Termomechanika	11
3.1	Základné definície	11
3.2	Prenos tepla	12
4	Analytické odvodenie všeobecného modelu	14
4.1	Odvodenie rovníc	16
4.2	Podmienky	17
5	Numerické riešenie okrajového problému	20
5.1	Diferenčná metóda	21
6	Matlab	23
7	Riešený projekt	24
8	Záver	30
	Literatúra	31
	Zoznam príloh	33

1 Motivácia a ciele

Žijeme v dobe, kedy sa snáď v každej oblasti ľudskej činnosti očakáva maximálne využitie potenciálu. Veľa z nás sa snaží vynaložiť čo najmenej úsilia, energie a zdrojov pre dosiahnutie čo najlepšieho výsledku. To nás privádza do nádherného prostredia optimalizácie. Ale čo predstavuje optimalizácia? Optimalizácia z ang. *optimize* znamená spraviť niečo tak efektívne, perfektne a užitočne ako sa len dá. Optimalizovať v matematike znamená nájsť minimum, popri prípade maximum zo sústavy, resp. množiny prvkov. A keďže sa v technickej praxi stretávame s veľkou škálou problémov, ktoré chceme „optimalizovať“, resp. nájsť pre ne optimálne riešenie, predstavuje táto oblasť nekonečné možnosti na riešenia najrôznejších problémov a odvetvie ako také, má veľký potenciál.

V tejto bakalárskej práci venujeme pozornosť problému optimálneho chladenia tyče a zameriavame sa na s tým spojenú problematiku optimalizácie vedenia tepla, jeho analytického a numerického riešenia a nakoniec implementáciou riešenia do výpočtového softvéru.

Po úvodnom uvedení do témy sa v druhej kapitole čitateľ dozvie ako správne sformulovať optimalizačnú úlohu, optimalizačný problém, čo všetko je k tomu potrebné, dozvie sa čo je to globálne a lokálne minimum, maximum, niečo o konvexnej optimalizácii a prečo je výhodná.

V tretej kapitole sa čitateľ dozvie základné poznatky z termomechaniky, vzťahy a zákony, ktoré sú platné pri prenose tepla a nakoniec si tiež môže v stručnosti prečítať o základných formách prenosu tepla.

V štvrtej kapitole sa bližšie oboznámi s analytickým odvodením modelu vedenia tepla v tyči. Dočíta sa ako sa dostaneme k rovnici $\frac{\partial u}{\partial t} = -\kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f^*$ a aké poznáme i akú úlohu plnia okrajové podmienky.

V piatej kapitole sa čitateľ dozvie ako sa numericky riešia obyčajné diferenciálne rovnice s okrajovými podmienkami a konkrétne si bližšie rozoberieme diferenčnú metódu.

V šiestej kapitole sa čitateľ oboznámi so softvérom MATLAB a optimalizačnou funkciou FMINCON.

V siedmej kapitole sú využité poznatky z predošlých katitol, čitateľ sa dozvie výsledky riešenej optimalizačnej úlohy a zhodnotenie samotných výsledkov.

2 Optimalizácia

2.1 Úvod

Na to, aby sme matematické poznatky, numerické metódy a optimalizačné teórie aplikovali na skutočné inžinierske problémy je nevyhnutné si definovať hranice inžinierskeho problému, ktorý sa chystáme optimalizovať (riešiť), definovať si kvalitatívne kritérium, na základe ktorého sú kandidáti hodnotení tak, aby sme našli toho „najlepšieho“, vybrať si systém premenných, ktorý bude charakterizovať, identifikovať kandidátov a definovať si model, ktorý vyjadruje spôsob, akým sú premenné navzájom prepojené. Takýmto postupom získavame základnú formuláciu optimalizačného problému. Informácie sú ďalej čerpané z [10].

Definícia hraníc systému

Systémové hranice sú jednoducho limity, ktoré slúžia na oddelenie systému od jeho okolia. Pre účely analýzy uvažujeme, že systém so svojim okolím na určitých vybraných, reprezentatívnych úrovniach spolu vôbec neinteraguje. Ale pretože interakcie vždy existujú, je definovanie hraníc prvým krokom v procese aproximácie reálneho systému.

Môže sa nám stať, že počiatočný výber hraníc je príliš obmedzujúci, preto je nevyhnuté rozšíriť systémové hranice o subsystemy, ktoré výrazne ovplyvňujú daný skúmaný systém, čo vedie k zvýšeniu rozsahu, veľkosti a komplexnosti systému. Avšak pri veľmi komplexných a zložitých problémoch sa nám môže stať, že so systémom bude ťažké pracovať, poprípade ho študovať. Keďže prirodzene chceme aby naša práca bola prehľadná, jednoduchá a zvládnuteľná, je pre nás potom mnohokrát výhodnejšie rozložiť zložitý, komplexný systém na podsystémy, s ktorými môžeme pracovať individuálne. Nesmieme však zabudnúť, že pri komplexných úlohách môže takéto rozloženie viesť k neželaným riešeniam a predstavovať potencionálne nechcené zjednodušenie reality.

Rozhodovacie kritériá

Práve sme si určili systém a definovali hranice. Ďalej si určíme rozhodovacie kritériá, na základe ktorých vieme návrh špecifikovať, spočítať a určiť najlepší. Vo veľa inžinierskych problémoch sa preferuje ekonomické kritérium, ako napr. maximálny zisk, minimálne náklady atď. V iných aplikáciách môže byť rozhodovacie kritérium založené na technologickom postupe napr. minimalizuj výrobný čas, maximalizuj počet výrobkov, minimalizuj hmotnosť, minimalizuj krútiaci moment atď. Vidíme, že rozhodovacie kritériá v optimalizácii založené na hľadaní „najlepšieho“ kandidáta znamenajú najst maximálnu alebo minimálnu hodnotu u daných kandidátov.

Uvedomíme si, že v rámci optimalizačných metód, ktorými sa budeme zaoberať v bakalárskej práci, budeme používať iba jedno kritérium na definovanie optima. Nebudeme hľadať viackritériálne riešenia, ktoré súčasne napr. minimalizujú teplotu a maximalizujú spoľahlivosť výrobku atď. a to preto, lebo sme si realitu zjednodušili. Samozrejme v praktických úlohách sa nám môže stať, že je dobré a žiadúce dostať riešenie, ktoré vyhovuje viacerým odlišným kritériám.

Jednou z možností, ako uvedené docielime je vybrať jedno kritérium za hlavné a ostatné za sekundárne. Hlavné kritérium je použité v samotnej optimalizácii, zatiaľ čo sekundárnym kritériám sú priradené prijateľné maximálne alebo minimálne hodnoty, ktoré sú potom v samotnej optimalizácii zohľadnené ako *obmedzenia*. Viacej o možnostiach viackritériálnej optimalizácii sa zvedavý čitateľ môže dozvedieť tu [3].

Nezávislé premenné

Významným hľadiskom vo formulácii optimalizačného problému je výber nezávislých premenných, ktoré adekvátne charakterizujú možných kandidátov alebo podmienky systému. Je tu viacero faktorov, ktoré ovplyvňujú výber nezávislých premenných.

- Po prvé je dôležité rozlíšiť medzi premennými, ktoré môžeme meniť, resp. sú prístupnejšie k zmenám a premennými, ktorých hodnota je pevne daná určitými vonkajšími faktormi a leží mimo hraníc nami vybraného systému. Okrem toho je veľmi dôležité rozlišovať medzi systémovými parametrami, ktoré môžeme považovať za pevné a tými, ktoré podliehajú výkyvom, ktoré sú spôsobené vonkajšími a nekontrolovateľnými faktormi.
- Po druhé je dôležité zahrnúť formuláciu všetkých dôležitých premenných, ktoré majú vplyv na fungovanie systému alebo návrh produktu.
- Po tretie je nevyhnutné vo výbere premenných brať do úvahy aj mnohé detaily, ktoré sú pre systém podstatné. Aj keď je dôležité, aby sme spracovali všetky kľúčové nezávislé premenné, je rovnako potrebné a významné nepresýtiť úlohu zahrnutím veľkého počtu jemných detailov druhoradého významu.

Model

Akonáhle máme vybrané rozhodovacie kritérium a nezávislé premenné je načas formulovať náš model, ktorý presne popisuje v akom vzťahu sú jednotlivé premenné skúmaného problému a spôsob, akým sú rozhodovacie kritériá ovplyvnené nezávislými premennými.

Model je v podstate zložením rovníc energetickej bilancie, materiálových rovníc, vzťahmi v inžinierskom návrhu a fyzikálnymi rovnicami popisujúcimi vzťahy v našom systéme. Tieto rovnice sú zvyčajne ešte doplnené o nerovnice, ktoré definujú dovolený rozsah (obor hodnôt), špecifikujú minimum alebo maximum prevádzkových požiadaviek alebo nastavujú hranice dostupných zdrojov. V skratke, model obsahuje všetky elementy, ktoré musíme normálne zahrnúť pri počítaní návrhu alebo predpokladaní chovania inžinierskeho systému. Je zrejmé, že zostaviť model je veľmi časovo náročné a vyžaduje dôkladné pochopenie celého systému. Pri jeho zostavovaní nám môže výrazne pomôcť aj týchto 10 otázok, ktoré čitateľ nájde v [6]:

1. Koľko máme rozhodovateľov ?
2. Sú rozhodnutia distribuované v priestore alebo čase ?
3. Máme v modeli nejakú neurčitost' ?
4. Máme viac rozhodovacích kritérií ?
5. Ako modelujeme rozhodnutia ?
6. Aké sú obory hodnôt rozhodovacích premenných ?
7. Musíme rozlišovať medzi lokálnymi a globálnymi premennými ?
8. Je daná úloha nelineárna, konvexná, diferencovateľná ?
9. Je úloha lineárna ?
10. Je úloha lineárna a ešte aj sieťová ?

2.2 Teória

Uvedieme si pár pojmov, ktoré budeme ďalej potrebovať, teória je prebratá z [9], [1].

Definícia 2.1. (*Matematický program*)

Nech $S \subset \mathbb{R}^n$ a $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Potom matematický program (ďalej len MP) je definovaný ako:

$$\min_x \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in S\}. \quad (2.1)$$

Máme viacero špeciálnych možností všeobecného MP ako napríklad lineárny MP:

Definícia 2.2. (*Lineárny MP*)

Nech $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, kde množina prípustných riešení $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ je polyedrická množina, $\mathbf{0}$ je nulový vektor a \mathbf{A} je matica $m \times n$. Potom lineárny matematický program (LP) je definovaný ako:

$$\min_x \{\mathbf{c}^\top \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}. \quad (2.2)$$

Popríklad nelineárny MP:

Definícia 2.3. (*Nelineárny MP*)

Nech $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a $X \subset \mathbb{R}^n$. Naviac $\star \in \{\geq, \leq, =\}^m$ Potom nelineárny MP (NLP) je definovaný ako:

$$\min_x \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \star \mathbf{0}, \mathbf{x} \in X\}. \quad (2.3)$$

Teraz sme si takzvaným *deskriptívnym prístupom* uviedli ako MP vyzerá a ďalej si tzv. *normatívnym prístupom* uvedieme, čo by sme mali robiť, aby sme dosiahli požadované optimum.

Definícia 2.4. (*max, min, inf, sup*)

Nech $A \subset \mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ kde $+\infty$ a $-\infty$ sú také elementy, pre ktoré platí $\forall x \in \mathbb{R} : -\infty \leq x \leq +\infty$. Potom definujeme:

$$A_{\min} = \min A \iff (a_{\min} \in A) \wedge (\forall a \in A : a_{\min} \leq a), \quad (2.4)$$

$$A_{\max} = \max A \iff (a_{\max} \in A) \wedge (\forall a \in A : a_{\max} \geq a), \quad (2.5)$$

$$\inf A = \max\{y \mid (y \in \mathbb{R}^*) \wedge (\forall a \in A : y \leq a)\}, \quad (2.6)$$

$$\sup A = \min\{y \mid (y \in \mathbb{R}^*) \wedge (\forall a \in A : y \geq a)\}. \quad (2.7)$$

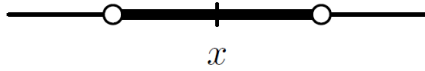
Minimum a maximum môže byť dvojaké, a to lokálne alebo globálne. K tomu aby sme si uviedli, čo je lokálne minimum, maximum si musíme definovať čo je *rýdže ε -okolie* bodu.

Definícia 2.5. (*ε -okolie bodu*)

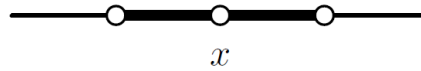
ε -okolie bodu $x \in \mathbb{R}$ je definované ako interval $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ a budeme ho značiť $O_\varepsilon(x)$.

Definícia 2.6. (*rýdže ε -okolie bodu*)

Rýdže ε -okolie bodu $x \in \mathbb{R}$ definujeme ako $\overline{O}_\varepsilon(x) = O_\varepsilon(x) - \{x\}$.



(a) Epsilon okolie bodu.

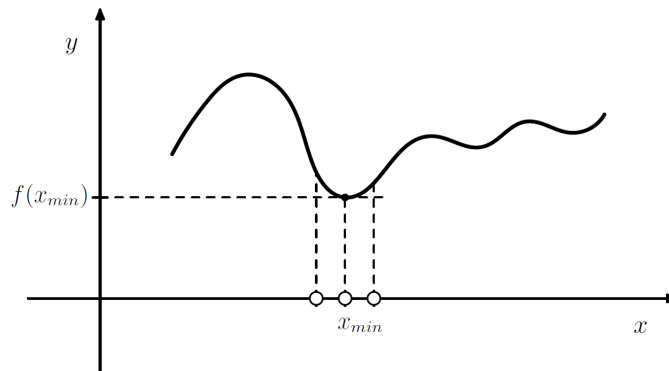


(b) Rýdze epsilon okolie bodu.

Obr. 1: Okolia bodu

Definícia 2.7. (*lokálne minimum/maximum*)

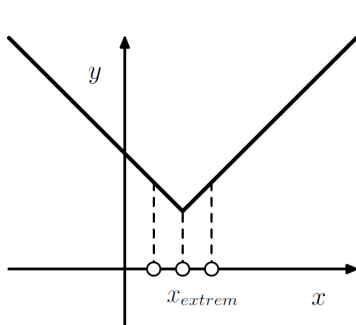
Nech $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia s definičným oborom S , ktorá má v bode x_{min}/x_{max} ostré (neostré) lokálne minimum/maximum $\iff \exists \overline{O}_\varepsilon(x_{min})/\exists \overline{O}_\varepsilon(x_{max})$ tak, že pre $\forall x \in \overline{O}_\varepsilon(x_{min})/\forall x \in \overline{O}_\varepsilon(x_{max})$ platí : $f(x) > (\geq) f(x_{min})/f(x) < (\leq) f(x_{max})$.



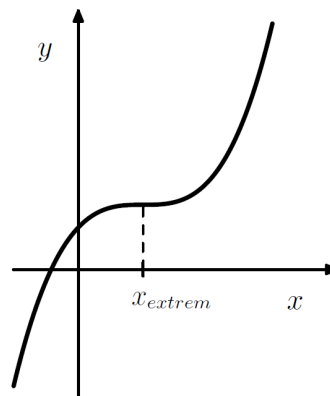
Obr. 2: Predstava lokálneho minima

Pamätajte na to, že aby funkcia vôbec mala lokálny extrém, tak musí byť splnená *nutná* podmienka, ktorá hovorí, že prvá derivácia v bode x_{extrem} je rovná 0. Táto podmienka ale nie je postačujúca, pretože:

1. v bode, kde nastáva extrém, nemusí byť derivácia vôbec definovaná
2. samotná prvá derivácia v bode rovná nule nezaručuje existenciu lokálneho extrému



(a) Prípád 1



(b) Prípád 2

Obr. 3: V prvom prípade extrém existuje ale derivácie nie, v druhom je prvá derivácia nulová ale extrém neexistuje

Postačujúcou podmienkou lokálneho extrému je, aby niektorá párna derivácia bola kladná pre minimum, záporná pre maximum a všetky predchádzajúce derivácie boli nulové.

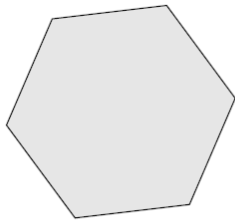
Definícia 2.8. (*globálne minimum/maximum*)

Nech $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ je funkcia s definičným oborom S , ktorá má v bode x_{min}/x_{max} ostré (neostré) globálne minimum/maximum $\iff \forall x \in S$ platí : $f(x) > (\geq) f(x_{min})/f(x) < (\leq) f(x_{max})$.

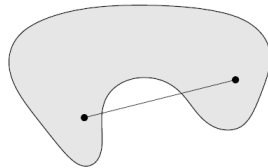
2.3 Konvexná optimalizácia

Definícia 2.9. (*konvexná množina*)

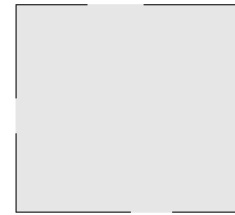
Nech $S \subset \mathbb{R}^n$. Povieme, že S je konvexná množina $\iff \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \forall \lambda \in \langle 0, 1 \rangle$: $\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2 \in S$.



(a) Konvexná množina



(b) Nekonvexná množina



(c) Nekonvexná množina

Obr. 4: Príklad konvexnej a nekonvexných množín. Šesťuholník, ktorý obsahuje svoje hranice je konvexný, množina „ľadvinovitého“ tvaru nie je konvexná, pretože úsečka spájajúca dva body neleží celá v „ľadvinovitej“ množine a takisto nie je konvexný ani štvorec, ktorý neobsahuje všetky svoje hranice.

Laicky povedané je konvexná množina taká množina, kde sa neschováte. Je to množina, ktorá obsahuje všetky konvexné kombinácie bodov v nej obsiahnutých.

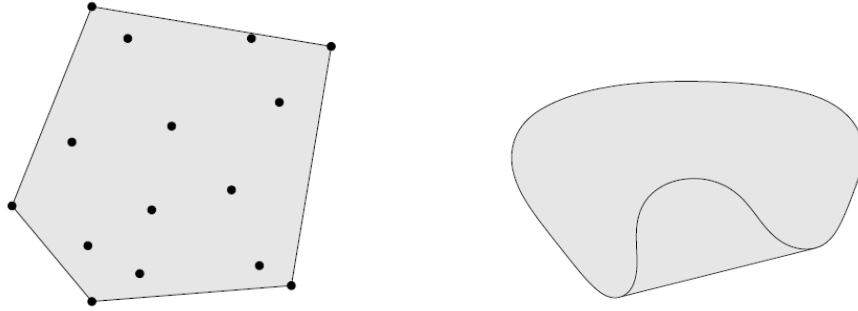
Definícia 2.10. (*konvexná kombinácia bodov*)

Nech $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$. Potom \mathbf{x} vyhovuje rovnici $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{x}_j$ kde $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$ a $\forall j \in \{1, \dots, k\} : \lambda_j \geq 0$ je nazývané konvexná kombinácia bodov $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$.

Odtiaľ teda vyplýva, že bod $\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2$ je konvexnou kombináciou bodov \mathbf{x}_1 a \mathbf{x}_2 .

Definícia 2.11. (*konvexný obal*)

Nech $S \in \mathbb{R}^n$ a povieme, že $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ patrí do konvexného obalu S ($\mathbf{x} \in \text{conv}S$) $\iff \exists k \in \mathbb{N}, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0, \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \exists \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in S : \mathbf{x} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{x}_j$.



(a) Konvexný obal 15 bodov vyznačených bodkami (b) konvexný obal množiny „ľadvinovitého“ tvaru

Obr. 5: Konvexný obal dvoch množín v \mathbb{R}^2

Ďalej si uvedieme pár významných vlastností konvexných množín a konvexných obalov.

Vlastnosti konvexných množín:

Nech $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$ sú konvexné množiny, potom:

1. $S_1 \cap S_2$ je konvexná množina
2. $S_1 \oplus S_2 = \{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_1 \in S_1, \mathbf{x}_2 \in S_2\}$ je konvexná množina
3. $S_1 \ominus S_2 = \{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_1 \in S_1, \mathbf{x}_2 \in S_2\}$ je konvexná množina.

Vlastnosti konvexných obalov množín:

Nech $S \subset \mathbb{R}^n$, potom:

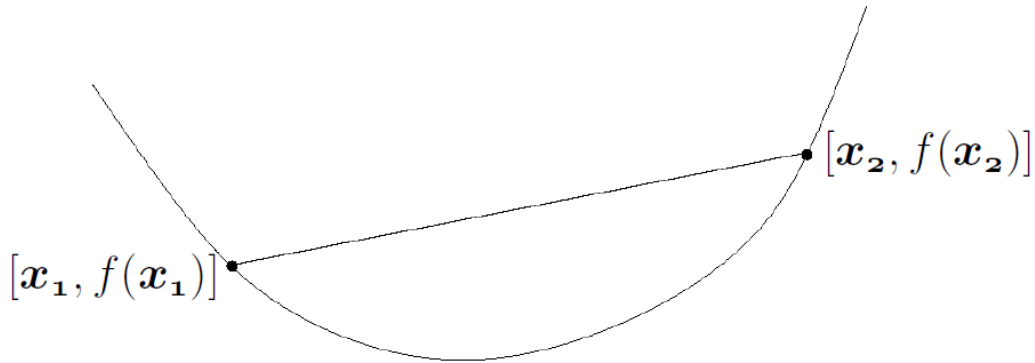
1. $\text{conv } S$ je najmenšia konvexná množina obsahujúca S
2. $\text{conv } S$ je prienik všetkých konvexných množín obsahujúcich S
3. $\text{conv } S$ je množina všetkých konvexných kombinácií z S .

Definícia 2.12. (konvexná funkcia)

Funkcia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexná, ak definičný obor funkcie f ($D(f)$) je konvexná množina a ak $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D(f)$ a $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$, potom máme:

$$f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) \leq \lambda f(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda) f(\mathbf{x}_2). \quad (2.8)$$

Funkcia by bola striktne konvexná, ak by sme v (2.8) uvažovali ostrú nerovnosť kedykoľvek sa $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ a $\lambda \in (0, 1)$.



Obr. 6: Graf konvexnej funkcie. Úsečka medzi dvoma bodmi \mathbf{x}_1 a \mathbf{x}_2 leží nad grafom.

Povieme, že funkcia je konkávna, ak $-f$ je konvexná funkcia a striktné konkávna, ak $-f$ je striktné konvexná.

Funkcia je teda konvexná $\Leftrightarrow \forall \mathbf{x} \in D(f)$ a $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$ je funkcia $g(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$ konvexná na svojom $D(f)$ ($\{t | \mathbf{x} + t\mathbf{v} \in D(f)\}$). Toto je veľmi užitočná vlastnosť, ktorá nám dovoľuje kontrolovať či je funkcia konvexná, tým že ju obmedzíme iba na úsečku.

Často je výhodné rozšíriť konvexné funkcie na celé \mathbb{R}^n , teda o hodnotu ∞ mimo jej $D(f)$. Ak je f konvexná, tak rozšírenú konvexnú funkciu definujeme takto:

Definícia 2.13. (*rozšírená konvexná funkcia*)

Nech máme $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$ potom:

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in D(f) \\ \infty & \mathbf{x} \notin D(f) \end{cases} \quad (2.9)$$

Pôvodný $D(f)$ originálnej funkcie f dostaneme z $D(\tilde{f})$ ako $D(f) = \{\mathbf{x} | \tilde{f}(\mathbf{x}) < \infty\}$. Toto rozšírenie zjednodušuje zápis, pretože nemusíme popisovať definičný obor. Konkávne funkcie rozširujeme podobným spôsobom, len definujeme $-\infty$ mimo ich definičný obor.

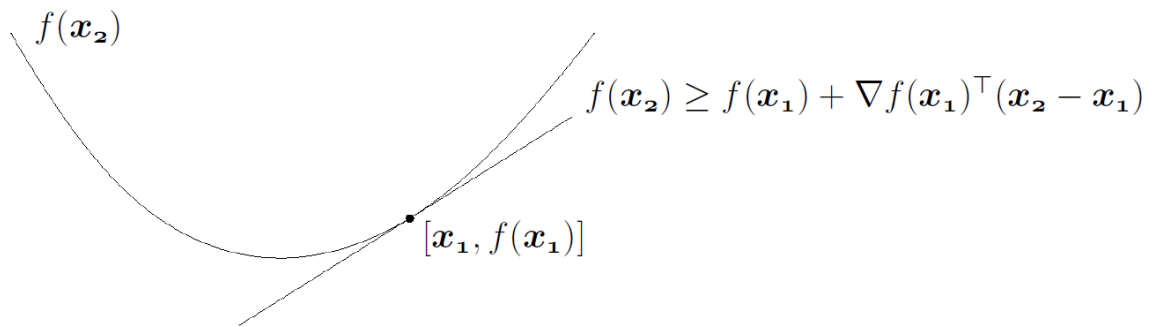
Predpokladajme, že f je diferencovateľná, to znamená, že jej gradient ∇f existuje v každom bode $D(f)$, ktorý je otvorený. Potom f je konvexná $\Leftrightarrow D(f)$ je konvexná a:

$$f(\mathbf{x}_2) \geq f(\mathbf{x}_1) + \nabla f(\mathbf{x}_1)^\top (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1), \quad (2.10)$$

pre každé $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D(f)$.

Afinná funkcia premennej \mathbf{x}_2 , ktorá je zadaná ako $f(\mathbf{x}_2) \geq f(\mathbf{x}_1) + \nabla f(\mathbf{x}_1)^\top (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$ je aproximácia f , Taylorovým polynómom prvého stupňa, blízko x . Nerovnosť (2.10) hovorí, že pre konvexné funkcie je aproximácia Taylorovým polynómom prvého stupňa v skutočnosti *globálny najnižší odhad funkcie*. Opačne, ak je aproximácia Taylorovým polynómom vždy globálne najnižší odhad funkcie, tak potom je funkcia konvexná.

Ďalej nám nerovnosť (2.10) dokazuje asi najdôležitejšiu vlastnosť konvexných funkcií a to, že z lokálnej informácie o konvexnej funkcie (t.j. funkčná hodnota a derivácia v bode) môžeme odvodiť globálnu informáciu (t.j. globálny najnižší odhad), pretože keď $\nabla f(\mathbf{x}_1) = 0$ potom $\forall \mathbf{x}_2 \in D(f)$, $f(\mathbf{x}_2) \geq f(\mathbf{x}_1)$ a preto je \mathbf{x}_1 *globálne minimum*.



Obr. 7: Ak je funkcia konvexná a diferencovateľná, potom $f(\mathbf{x}_2) \geq f(\mathbf{x}_1) + \nabla f(\mathbf{x}_1)^\top(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1), \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in D(f)$

3 Termomechanika

3.1 Základné definície

Termodynamická sústava je súhrn látok v priestore účelne obmedzený od okolia skutočnou alebo myšlenou kontrolnou plochou. V sústave môžu prebiehať termodynamické zmeny. Rozlišujeme sústavy:

- Uzavretú a otvorenú, kde pri uzavretej sústave je hmotnosť prechádzajúca kontrolnou plochou nulová a pri otvorenej sústave nenulová.
- Izolovanú a neizolovanú, kde pri izolovanej sústave je výmena tepla Q [J] medzi okolím a sústavou blokována kontrolnou plochou a u neizolovanej je výmena tepla možná.
- Homogénnu a heterogénnu, kde homogénna sústava je taká, pri ktorej sú vlastnosti všetkých častíc sústavy rovnaké alebo sa spojito menia a heterogénna sústava je sústava zložená z dvoch alebo viacerých homogénnych oblastí.

Ak u sústav dochádza k deformácii kontrolnej plochy, tak sústavy môžu konať, poprípade spotrebúvať prácu A [J], informácie sú čerpané z [8].

Energia [J] je to stavová veličina, ktorá vyjadruje schopnosť sústavy konať prácu, vykonávať fyzikálne, chemické či iné zmeny a to buď vo vnútri alebo vonku sústavy. Jednotkou energie je joule [J]. Joule je práca vykonaná silou jedného newtona [N] po dráhe jeden meter [m] v smere sily.

Tepelná energia, označovaná často ako **vnútorná energia** U [J], je stavová veličina, ktorá je daná súčtom energií neusporiadaných pohybov častíc, molekúl alebo atómov, z ktorých sa sústava skladá. Je dobré si pripomenúť, že pohyb týchto častíc a ich vzájomné silové pôsobenie je neusporiadané, čo je zásadný rozdiel oproti ostatným druhom energií, ktoré sú vyvolané usporiadaným pohybom častíc.

Teplo Q [J] je forma prenosu energie medzi sústavou s okolím a preto nie je stavovou veličinou. Pre odovzdávané teplo platí kalorimetrická rovnica:

$$Q_{12} = m \cdot c \cdot (T_2 - T_1), \quad (3.1)$$

kde Q_{12} je teplo, ktoré prechádza medzi počiatočným bodom (1) a koncovým bodom (2), m [kg] je hmotnosť, T_1 a T_2 [K] sú teploty sústavy na začiatku a na konci sústavy a $c \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right]$ je merná tepelná kapacita látky.

Teplota T [K], t [°C] je stavová fyzikálna veličina (nie je definovaná pomocou iných veličín), ktorá vyjadruje mieru strednej energie tepelného pohybu molekúl. Pripomeňme si, že poznáme rôzne druhy stupníc, z ktorých najvýznamnejšia je *Kelvinova* [K] a *Celziová* [°C]. Kelvinov stupeň je definovaný ako 273,15-tá časť termodynamickéj teploty trojného bodu vody (0,01 °C). Celziov stupeň je definovaný ako jedna stotina rozdielu teplôt varu vody (100°C) a teploty tuhnutia vody (0°C) pri tlaku 101 325 [Pa].

Pri meraní teploty nesmieme zabudnúť na jednu zrejmu skutočnosť, a tou je *nultý zákon termodynamiky*, ktorý hovorí:

Zákon 3.1. (*Nultý zákon termodynamiky*)

Ak sú rôzne sústavy A, B v tepelnej rovnováhe so sústavou C, potom je aj sústava A v tepelnej rovnováhe so sústavou B.

Ak je $T_A = T_C$ a $T_B = T_C$, potom $T_A = T_B$.

Tento zákon má význam pri meraní teploty, pretože môžeme zvoliť ako tretiu sústavu štandardizovaný teplomer, pomocou ktorého môžeme porovnávať teploty iných sústav bez toho, aby boli v priamom styku.

3.2 Prenos tepla

Pre prenos tepla musí existovať teplotný gradient alebo rozdiel teplôt, inak k prenosu tepla nedôjde. Prenos tepla nám dáva odpoveď na otázky, ako môžeme preniesť požadované množstvo tepla do alebo zo sústavy, a či ho môžeme preniesť na rozumne veľkej ploche v reálnom čase.

K základným mechanizmom prenosu tepla patrí:

- vedenie tepla (cudzím slovom kondukcia)
- prúdenie (cudzím slovom konvekcia)
- žiarenie (cudzím slovom radiácia).

Pri prenose tepla musia byť splnené požiadavky na zachovanie energie pre kontrolný objem a ak sa teplota telesa alebo okolia zmení, môžeme pomocou bilancie zistiť ako rýchlo sa teleso ohrieva, či ochladzuje, než dosiahne nový rovnovážny stav s okolím. Kontrolný objem je oblasť priestoru ohraničená kontrolným povrchom, ktorým môže prechádzať ako látka, tak aj energia a je fixovaný v priestore.

Uvedieme si prvý zákon termodynamiky, ktorý hovorí:

Zákon 3.2. (*Prvý zákon termodynamiky*)

Energia sa nestráca ani nevzniká, ale jeden druh energie sa môže meniť na iný druh energie. Súčet všetkých energií v izolovanej sústave je konštantný.

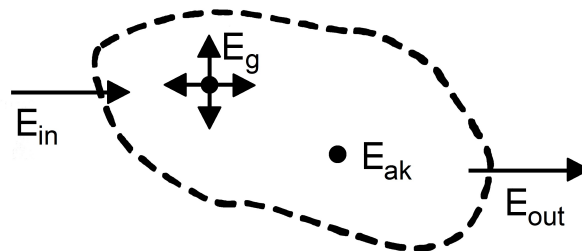
Pretože prvý zákon termodynamiky musí byť splnený v akomkoľvek časovom úseku, musí byť splnená aj rovnováha medzi množstvom tepla (v [J]) preneseného medzi okolím a telesom v určitom časovom úseku. Rovnicu bilancie energií môžeme napísať takto:

$$E_{in} + E_g - E_{out} = \Delta E_{ak} \quad [J],$$

kde E_{out} a E_{in} predstavujú energie vystupujúce a vstupujúce do kontrolného objemu. E_g je generovaná energia a E_{ak} je energia akumulovaná v danom kontrolnom objeme. Poprípade:

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g - \dot{E}_{out} = \frac{dE_{ak}}{dt} \quad [J],$$

kde je v každom okamihu splnená rovnováha medzi tokmi energie meranými vo [W].



Obr. 8: Kontrolný objem

Viac informácií k prenosu tepla, ako aj k termomechanike môže čitateľ získať z [8], odkiaľ boli informácie čerpané.

Vedenie tepla (kondukcia)

Vedenie tepla môžeme charakterizovať ako prenos energie od častíc s vyššou energiou k časticiam s nižšou energiou. Tieto častice môžu byť ako molekuly tak aj atómy. Uvedieme si druhý zákon termomechaniky, ktorý ďalej využívame.

Zákon 3.3. (*Druhý zákon termomechaniky*)

Druhý zákon termomechaniky má viacero formulácií, z nich vyberieme tie najznámejšie, ktoré znejú:

- nemôžeme zo sústavy neživých látok získavať prácu tým, že sústavu ochladzujeme pod teplotu najchladnejšej látky v okolí (Kelvinova formulácia)
- teplo nemôže samovoľne prechádzať z telesa s nižšou teplotou na teleso s vyššou teplotou (Clausiusova formulácia)
- nedá sa zostrojiť periodicky pracujúci stroj, ktorý by nezpôsoboval nič iné, než by odoberal teplo zo zásobníku a konal tomuto teplu ekvivalentnú prácu (Kelvinova-Planckova formulácia).

Pri vedení tepla využívame aj Fourierov zákon pre vedenie tepla, ktorý hovorí, že:

Zákon 3.4. (*Fourierov zákon pre vedenie tepla*)

Merný tepelný tok w [W/m^2] prenášaný vedením v určitej látke je priamoúmerný veľkosti teplotného gradientu a má opačné znamienko než tento gradient

$$w = -k \frac{dT}{dx} \quad ,$$

kde konštanta úmernosti k je veličina nazývaná tepelná vodivosť. Je to fyzikálna veličina, ktorá vyjadruje fyzikálne vlastnosti látok. Čím väčšiu tepelnú vodivosť teleso má, tým menší kladie odpor pri presunoch tepla z jednej strany na druhú. Znamienko mínus vyplýva z konvencie, že smer tepelného toku je totožný so smerom kladnej súradnej osi. V smere, ktorým tepelný tok „tečie“ musí teplota klesať, aby bol splnený zákon (3.3). $\frac{dT}{dx}$ je teplotný gradient, ktorý je v kladnom smere osi x záporný a s použitím znamienka mínus je tepelný tok kladný.

Prúdenie (konvekcia)

Prenos tepla konvekciou je mechanizmus, kedy je tepelný tok prenášaný medzi povrchom nejakého telesa a okolitou tekutinou. Konvekcia je zložená z dvoch mechanizmov:

- základný náhodný pohyb molekúl - *difúzia*, iným slovom KONdukcia
- druhý mechanizmus je objemový, makroskopický pohyb tekutiny - adVEKCIA.

Konvekcia teda vznikla superpozíciou týchto dvoch mechanizmov, čo sa prejavilo aj v názve pohybu. Konvekcia môže byť ďalej klasifikovaná podľa povahy prúdenia na nútenú, prirodzenú a kombinovanú, ale to nie je predmetom tejto bakalárskej práce.

Žiarenie (radiácia)

Z každého povrchu, ktorý má teplotu vyššiu než 0 [K] je emitovaná energia. Zatiaľ čo prenos tepla vedením či konvekciou vyžaduje prítomnosť hmotnej látky, žiarenie môže prebiehať aj v absolútnom vákuu. Žiarenie ako také patrí k najzložitejším mechanizmom prenosu tepla. Je to dané tým, že každý povrch, či teleso, ktoré „vidí“ iné teleso na toto teleso emituje energiu. Výsledný radiačný tok potom závisí od toho, ktoré teleso emituje viacej energie a na charakteristike materiálu telesa. U žiarenia ale nemusí platiť, že reálne teplejšie teleso emituje viac energie než reálne chladnejšie teleso.

4 Analytické odvodenie všeobecného modelu

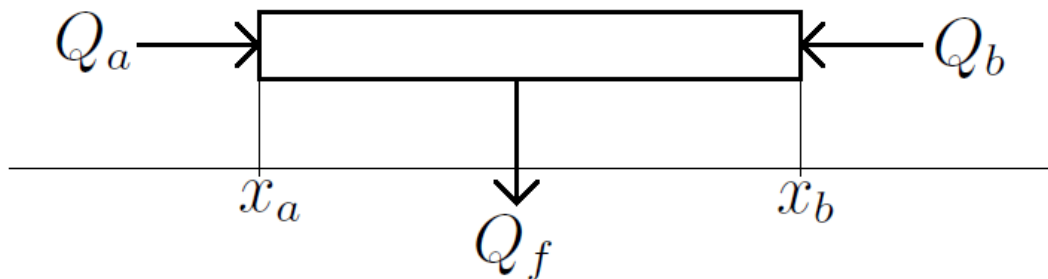
Pri vytvorení všeobecného modelu v tvare diferenciálnej rovnice budeme uvažovať materiál ako spojité prostredie so spojitým rozložením hmoty, čo je pri makroskopickom meradle úplne vyhovujúce a dáva spoľahlivé výsledky. Pri odvodení modelu popisujúceho realitu nesmieme zabudnúť, že fyzikálne veličiny sú viazané *všeobecnými princípmi* (zákon zachovania energie, zákon zachovania hmoty...) a *konštitučnými vzťahmi*, ktoré vyjadrujú vzťahy medzi rôznymi fyzikálnymi veličinami (teplota a vnútorná energia materiálu, teplota a tepelný tok...).

Je zrejmé, že funkcie a konštanty, ktoré popisujú fyzikálne deje majú svoje rozmery a jednotky a keďže je v matematickej analýze rovníc jednoduchšie pracovať s bezrozmernými veličinami, tak tieto prevedieme lineárnou transformáciou na bezrozmerné veličiny s hodnotami medzi $\langle 0, 1 \rangle$. Napríklad teplotu T pohybujúcu sa v rozmedzí medzi $\langle T_0, T_1 \rangle$ prevedieme lineárnou transformáciou $T \rightarrow (T - T_0)/(T_1 - T_0)$ do intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Uvedieme si, že informácie k analytickému odvodeniu modelu sú čerpané z [5] a [8].

Tepelná bilancia

Keďže sa v bakalárskej práci zaoberáme optimálnym vedením tepla v tyči tak budeme predpokladať, že máme tenkú tyč, čo znamená, že prierez tyče je omnoho menší ako dĺžka tyče. Polohu bodu v tyči označíme ako x a druhou premennou bude čas t . Pre potreby matematiky si vyjadríme teplotu ako funkciu $u(x, t)$, ktorá popisuje teplotu tyče v každom bode x a čase t . Tyč budeme predpokladať izolovanú na povrchu, kvôli zanedbaniu strát tepla do okolia.

Budeme uvažovať ľubovoľný úsek tyče (x_a, x_b) v ľubovoľnom časovom intervale (t_α, t_β) a spravíme preň *tepelnú bilanciu*.



Obr. 9: Predstava tyče s pritekajúcim a odtekajúcim teplom z tyče.

Dostaneme rovnicu:

$$\Delta E = Q_a + Q_b - Q_f \quad (4.1)$$

ktorá vychádza zo zákona (3.2). To znamená, že ak zanedbáme straty do okolia, tak tepelná bilancia platí.

Zavedieme si lemmy, ktoré budeme potrebovať v nasledujúcich rovniciach.

Lemma 4.1. *Nech spojitá veličina f má derivácie v intervale (x_a, x_b) . Potom platí:*

$$f(x_b) - f(x_a) = \int_{x_a}^{x_b} \frac{df}{dx}(x) dx$$

Lemma 4.2. *Nech f je spojitá veličina v okolí určitého bodu x^* . Potom platí:*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x^*, r)|} \int_{B(x^*, r)} f(x) dx = f(x^*),$$

kde $B(x^*, r)$ je guľa so stredom x^* a polomerom r .

ΔE — úbytok vnútornej energie v uvažovanom úseku (x_a, x_b) a v uvažovanom časovom okamihu (t_α, t_β) . ΔE je teda rozdiel tepelnej energie E_{t_β} v časovom okamihu t_β a energie E_{t_α} v časovom okamihu t_α .

$$\Delta E \equiv E_{t_\beta} - E_{t_\alpha} = \int_{x_a}^{x_b} e(x, t_\beta) dx - \int_{x_a}^{x_b} e(x, t_\alpha) dx$$

Ďalej s využitím lemy 4.1 môžeme úbytok vnútornej energie napísať ako:

$$\Delta E = \int_{x_a}^{x_b} \left(\int_{t_\alpha}^{t_\beta} \frac{\partial e}{\partial t}(x, t) dt \right) dx,$$

kde $e(x, t)$ je hustota vnútornej energie. Vnútrná energia sa vzťahuje na jednotkovú dĺžku tyče.

Q_a, Q_b — množstvo tepla, ktoré v časovom intervale (t_α, t_β) pritečie do tyče uvažovaného úseku cez prierezy x_a a x_b . Teplo Q_a , ktoré cez koniec x_a pritečie môžeme vyjadriť nasledovne:

$$Q_a = \int_{t_\alpha}^{t_\beta} w(x_a, t) dt$$

$w(x_a, t)$ je tepelný tok, množstvo tepla, ktoré pretečie prierezom x za jednotku času. Tepelný tok $w(x, t)$ berieme ako kladný v kladnom smere osi x , a preto teplo Q_b bude:

$$Q_b = \int_{t_\alpha}^{t_\beta} -w(x_b, t) dt$$

Tepelný tok $w(x, t)$ má záporné znamienko, pretože pôsobí proti kladnému smeru osi x . Podľa lemy 4.1 potom môžeme $Q_a + Q_b$ prepísať do tvaru:

$$Q_b + Q_a = \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \left(\int_{x_a}^{x_b} \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) dx \right) dt$$

Q_f — je známe množstvo tepla, ktoré odoberáme z tyče. Vyjadríme ho nasledovne:

$$Q_f = \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \left(\int_{x_a}^{x_b} f(x, t) dx \right) dt$$

Teplo v tyči môžeme odoberať rôzne, ako sme už spomínali v kapitole o termomechanike. V našom prípade si chladenie tyče môžeme predstaviť ako tyč čo je obalená prstencom, ktorým tečie určitá ochladzujúca látka a konštantne odoberá teplo z tyče.

Konštitučné vzťahy

Ďalej potrebujeme prepísať práve zavedené veličiny pomocou našej hľadanej veličiny u . Podľa *vzťahu vnútornej energie a teploty* je hustota vnútornej energie e závislá na teplote $e = e(u)$. Túto závislosť môžeme linearizovať, ak nebudeme uvažovať skupenské zmeny,

$$e = cu + konst. \quad , \quad (4.2)$$

kde c je „dĺžkové“ merné teplo. Je to množstvo tepla, ktoré je nutné k zvýšeniu teploty tyče jednotkovej dĺžky o jednu jednotku tepla. Ak máme tyč nekonštantného prierezu alebo časti tyče z rôznych materiálov, tak c môže závisieť na x . Teplo c môže závisieť na teplote aj podľa rozmedzí teplôt, ktoré modelujeme.

Zo *vzťahu tepelného toku a teploty*, kde si teplotu nahradíme funkciou $u(x, t)$ máme zo zákona (3.4):

$$w = -k \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (4.3)$$

Pripomeňme si, že k závisí na materiáli, priereze tyče a často aj na teplote $k = k(u)$. Vo vzťahu máme znamienko „mínus“ kvôli teplotnému spádu. Teplo „tečie“ vždy z miest s vyššou teplotou do miest s nižšou teplotou a súčiniteľ k berieme ako kladný.

4.1 Odvodenie rovníc

Do tepelnej bilancie (4.1) dosadíme jednotlivé veličiny a dostaneme:

$$\int_{x_a}^{x_b} \left(\int_{t_\alpha}^{t_\beta} \frac{\partial e}{\partial t}(x, t) dt \right) dx = \int_{x_a}^{x_b} \left(\int_{t_\alpha}^{t_\beta} \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) dt \right) dx - \int_{x_a}^{x_b} \left(\int_{t_\alpha}^{t_\beta} f(x, t) dt \right) dx$$

$$\int_{x_a}^{x_b} \left(\int_{t_\alpha}^{t_\beta} \frac{\partial e}{\partial t}(x, t) dt \right) dx = \int_{x_a}^{x_b} \left(\int_{t_\alpha}^{t_\beta} \left(\frac{\partial w}{\partial x}(x, t) - f(x, t) \right) dt \right) dx$$

$$\int_{x_a}^{x_b} \left(\int_{t_\alpha}^{t_\beta} \left(\frac{\partial e}{\partial t}(x, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) + f(x, t) \right) dt \right) dx = 0$$

keďže posledná rovnica platí pre ľubovoľný časový interval a ľubovoľný úsek tyče, tak rovnicu vydělíme $(x_b - x_a)(t_\beta - t_\alpha)$ a prejdeme k limite $(x_b - x_a) \rightarrow 0$ a $(t_\beta - t_\alpha) \rightarrow 0$, pre jednoduchosť zápisu nebudeme uvádzať na čom sú veličiny závislé.

$$\lim_{(x_b - x_a) \rightarrow 0} \lim_{(t_\beta - t_\alpha) \rightarrow 0} \int_{x_a}^{x_b} \left(\int_{t_\alpha}^{t_\beta} \left(\frac{\frac{\partial e}{\partial t}}{(x_b - x_a)(t_\beta - t_\alpha)} - \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{(x_b - x_a)(t_\beta - t_\alpha)} + \frac{f}{(x_b - x_a)(t_\beta - t_\alpha)} \right) dt \right) dx = 0$$

dvakrát použijeme lemma 4.2 a z integrálnej rovnosti dostávame rovnosť bodovú.

$$\frac{\partial e}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x} + f = 0$$

Za e a w z konštitučných vzťahov (4.2), (4.3) dosadíme:

$$\frac{\partial}{\partial t}(cu + konst) - \frac{\partial}{\partial x} \left(-k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f = 0$$

Keďže merné teplo c je na čase nezávislé, tak môžeme písať:

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - f$$

Pre homogénnu tyč súčiniteľ k nezávisí na x , takže rovnica má tvar:

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = -k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f$$

Nakoniec rovnicu vydělíme c a dostávame tvar

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f^*$$

kde $\kappa = k/c$ a $f^* = f/c$.

Pripomeňme si, že zdroje odvedenia rovníc boli hlavne *predpoklad o spojitom popise materiálu* ako aj všeobecne platný fyzikálny zákon zachovania energie, kde nie je možné model spresniť. Uvažované konštitučné vzťahy (4.2) a (4.3) sú však len určitou lineárnou aproximáciou závislostí. Zvolením lepších aproximácií konštitučných vzťahov môžeme model fyzikálneho javu zlepšiť.

Ďalej si pripomeňme, že sa jedná o rovnicu druhého stupňa, príslušná kvadratická forma tvaru $Q(x, t) = x^2$ je semidefinitná a rovnica je preto *parabolická*.

4.2 Podmienky

Počiatkové podmienky

Ak chceme modelovať vývoj teploty v tyči, tak musíme situáciu popísať v okamihu t_0 , teda v okamihu, kedy začíname dej modelovať. Často kladieme $t_0 = 0$. V prípade vedenia tepla nám teda stačí popísať rozloženie teploty v počiatkovom čase t_0 funkciou $u_0(x)$ a zadať počiatkovú podmienku:

$$u(x, t_0) = u_0(x) \quad x \in (a, b).$$

Funkciu $u_0(x)$ považujeme za danú.

Okrajové podmienky

V praxi sa stretávame s tyčou konečnej dĺžky s dvoma koncami (a, b) . Musíme preto rovnicu doplniť o informáciu, ktorá nám bude hovoriť, čo sa na konci tyče deje, či tyč zohrievame, chladíme, tepelne izolujeme apod. Túto skutočnosť popisujú *okrajové podmienky*.

Uvedieme si tri základné typy, ktoré budeme formulovať pre pravý koniec tyče $x = b$ a ľavý koniec tyče $x = a$.

1. *Dirichletova podmienka* predpisuje hodnotu teploty u na začiatku, konci tyče:

$$u(a, t) = u_a(t), \quad \text{špeciálne} \quad u(a, t) = 0 \quad \text{pre} \quad t > t_0,$$

$$u(b, t) = u_b(t), \quad \text{špeciálne} \quad u(b, t) = 0 \quad \text{pre} \quad t > t_0,$$

kde u_a, u_b sú dané funkcie, ktoré môžu byť jednak konštantné a jednak sa môžu meniť s časom $u_a = u_a(t), u_b = u_b(t)$.

Fyzikálne si túto podmienku môžeme predstaviť ako dobre tepelne vodivý kontakt tyče s telesom s predpísanou teplotou a veľkou tepelnou kapacitou, aby výmena tepla medzi telesom a tyčou túto teplotu neovplyvnila. Často sa uvádza koniec tyče ponorený do zmesi vody a ľadu $u_a = 0^\circ\text{C}, u_b = 0^\circ\text{C}$ alebo do vriacej vody, kde $u_a = 100^\circ\text{C}, u_b = 100^\circ\text{C}$. Ponúka sa nám aj iná predstava, napr. automatického termostatu, ktorý udržiava teplotu na konci tyče konštantnú. Tyč začne zohrievať, ak by mala teplota klesať, alebo ochladzovať, ak by mala teplota stúpať.

2. *Neumannova podmienka* predpisuje hodnotu tepelného toku na koncoch tyče:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = -g_a(t), \quad \text{špeciálne} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0 \quad \text{pre} \quad t > t_0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(b, t) = g_b(t), \quad \text{špeciálne} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) = 0 \quad \text{pre} \quad t > t_0,$$

kde g je daná funkcia. Skutočne, podľa Fourierovho zákona (3.4) teplotný gradient je priamoúmerný tepelnému toku w . Vynásobením podmienky číslom $-k$ dostaneme:

$$w(a, t) = -k \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = -k(-1)g_a(t) = kg_a(t) = w_a(t),$$

$$w(b, t) = -k \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) = -kg_b(t) = w_b(t).$$

Prípady:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) = 0,$$

popisujú situáciu, kedy sú konce tyče tepelne izolované. V prípade $g_a(t) > 0$ je koniec tyče x_a zahrievaný s tepelným výkonom $kg(t)$ a tepelný tok kladný, pretože teplo do tyče vstupuje. Pre $g_b(t) > 0$ je koniec x_b zahrievaný s tepelným výkonom $-kg(t)$ a tepelný tok je záporný, pretože teplo do tyče vstupuje. Ak by bolo $g_a(t) < 0, g_b(t) < 0$ tak by sa konce tyče ochladzovali a tepelné toky by mali opačné znamienka.

3. *Newtonova podmienka* je kombináciou dvoch predošlých podmienok:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, t) + \mu(t)u(a, t) = -g_a(t) \quad \text{pre} \quad t > t_0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(b, t) + \mu(t)u(b, t) = g_b(t) \quad \text{pre} \quad t > t_0,$$

kde μ, g_a a g_b sú dané funkcie. Tepelný tok tu závisí na teplote. Podmienka vznikla zovšeobecnením situácie, kedy koniec tyče s teplotou $u(a, t)$, poprípade $u(b, t)$ sa nachádza v prostredí so známou teplotou $u_a(t)$, poprípade $u_b(t)$. Tepelný tok tak závisí na rozdieli teplôt vynásobený konštantou prechodovej vodivosti k_0 :

$$w(a, t) = -k \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = k_0(u_a(t) - u(a, t)),$$

$$w(b, t) = -k \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) = k_0(u_b(t) - u(b, t)).$$

Skutočne, keď je koniec tyče x_a chladnejší než okolie, tzn. $u_a(t) > u(a, t)$, teplo tečie do tyče $w(a, t) > 0$ a gradient $\frac{\partial u}{\partial x}(a, t) > 0$. Ak je koniec tyče x_b chladnejší než okolie,

tzn. $u_b(t) > u(b, t)$ tak opäť teplo tečie do tyče $w(b, t) < 0$ a gradient $\frac{\partial u}{\partial x}(b, t) < 0$.
 V opačnom prípade, tzn. $u_a(t) < u(a, t)$, $u_b(t) < u(b, t)$ teplo vyteká z tyče von do okolia a $w(a, t) < 0$, $w(b, t) > 0$ a $\frac{\partial u}{\partial x}(a, t) < 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}(b, t) > 0$.

Všetky tri podmienky sa dajú súhrnne zapísať do jednej s parametrami α , β , $g(t)$:

$$\alpha_a \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) + \beta_a(a, t) = -g_a(t) ,$$

$$\alpha_b \frac{\partial u}{\partial x}(b, t) + \beta_b(b, t) = g_b(t) .$$

Skutočne voľbou $\alpha = 0$ a $\beta = 1$ máme Dirichletovu podmienku, pre $\alpha = 1$, $\beta = 0$ máme Neumannovu a pre $\alpha = 1$, $\beta > 0$ máme podmienku Newtonovu.

5 Numerické riešenie okrajového problému

Ukázali sme si, ako sa s modelom pracuje analyticky a teraz si ukážeme ako riešiť obyčajné diferenciálne rovnice (ODR) numericky. Je zrejmé, že určiť riešenie sa dá nielen s pomocou počiatočnej podmienky (PP) ale aj okrajových podmienok (OP), ktorým sa budeme viac venovať. OP na rozdiel od PP nemusia mať riešenie, poprípade môžu mať nekonečne veľa riešení. Predstavme si napríklad rovnicu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 25u = 0$$

Riešenie charakteristického polynómu predpokladáme v tvare:

$$\lambda = \alpha + \beta i$$

Riešenie y predpokladajme v tvare:

$$u = e^{\alpha x}(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))$$

Vyriešime charakteristický polynóm:

$$\begin{aligned}\lambda^2 + 25 &= 0 \\ \lambda &= \pm 5i\end{aligned}$$

Odtiaľ:

$$u = (c_1 \cos(5x) + c_2 \sin(5x))$$

Ak si predpíšeme okrajové podmienky ako $u(0) = 0$ a $u(\pi) = 1$ tak:

$$\begin{aligned}u(0) = 0 &= c_1 \cdot \cos(0) + c_2 \cdot \sin(0) \\ u(0) = 0 &= c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 \quad \text{odtiaľ vidíme, že } c_1 = 0 \text{ aby rovnica platila} \\ u(\pi) = 1 &= 0 \cdot \cos(5\pi) + c_2 \cdot \sin(5\pi) \\ u(\pi) = 1 &= 0 \cdot (-1) + c_2 \cdot 0,\end{aligned}$$

odtiaľ vidíme, že nech je c_2 akékoľvek, rovnica riešenie mať nebude.

Ak si predpíšeme okrajové podmienky ako $u(0) = 0$ a $u(\pi) = 0$ tak:

$$\begin{aligned}u(0) = 0 &= c_1 \cdot \cos(0) + c_2 \cdot \sin(0) \\ u(0) = 0 &= c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 \quad \text{aby rovnica platila, } c_1 = 0 \\ u(\pi) = 0 &= 0 \cdot \cos(5\pi) + c_2 \cdot \sin(5\pi) \\ u(\pi) = 0 &= 0 \cdot (-1) + c_2 \cdot 0,\end{aligned}$$

odtiaľ vidíme, že rovnica má nekonečne veľa riešení.

A na záver, ak si predpíšeme okrajové podmienky ako $u(0) = 0$ a $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ tak:

$$\begin{aligned}u(0) = 0 &= c_1 \cdot \cos(0) + c_2 \cdot \sin(0) \\ u(0) = 0 &= c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 \quad \text{pre } c_1 = 0 \text{ rovnica platí} \\ u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 &= 0 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + c_2 \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) \\ u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 &= 0 \cdot 0 + c_2 \cdot 1,\end{aligned}$$

odtiaľ vidíme, že rovnica má práve jedno riešenie $u = 1 \cdot \sin(x)$ a to pre $c_2 = 1$.

5.1 Diferenčná metóda

V našej bakalárskej práci pracujeme so stacionárnou parciálnou diferenciálnou rovnicou (PDR) v 1D, ktorú prevedieme na ODR2 a na výpočet použijeme diferenčnú metódu. Bližšie informácie k diferenčnej metóde a numerickému riešeniu okrajového problému môže čitateľ nájsť v [2], odkiaľ boli informácie pre celú kapitolu čerpané.

Predpokladáme rovnicu:

$$-\frac{\partial \left[k(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right]}{\partial x} + q(x)u(x) = f(x), \quad \text{kde } x \in (0, l) \quad (5.1)$$

S dvomi Dirichichletovými podmienkami:

$$u(0) = g_0 \quad (5.2)$$

$$u(l) = g_l \quad (5.3)$$

Ďalej budeme predpokladať, že $k(x)$, $\frac{\partial k(x)}{\partial x}$, $q(x)$ a $f(x)$ sú spojité a $k(x) > 0$, $q(x) \geq 0$. $u(x)$ nám vyjadruje teplotu, $k(x)$ predstavuje koeficient tepelnej vodivosti, $q(x)$ je koeficient, ktorý vyjadruje prestup tepla povrchom tyče do okolia, $f(x)$ nám predstavuje intenzitu vnútorných tepelných zdrojov, chladičov a g_0 a g_l sú teploty v koncových bodoch tyče.

Diferenčná metóda je jednoduchá diskretizačná metóda, ktorá sa používa na riešenie jednodimenzionálnych okrajových úloh. Uvažujme interval $\langle 0, l \rangle$, ktorý nadelíme pre jednoduchosť ekvidistantne, takže $h_i = h = \frac{l}{N}$ a $x_i = ih$ a $i = 0, 1, 2, \dots, N$. Body x_i nazveme uzly a množinu $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ nazveme sieť, a preto sa diferenčná metóda niekedy označuje aj ako metóda sietí. Splnenie rovnice (5.1) budeme vyžadovať vo všetkých vnútorných uzloch siete, teda:

$$-\frac{\partial \left[k(x_i) \frac{\partial u(x_i)}{\partial x} \right]}{\partial x} + q(x_i)u(x_i) = f(x_i) \quad \text{kde } i = 1, 2, 3, \dots, N - 1 \quad (5.4)$$

Člen $-\frac{\partial \left[k(x_i) \frac{\partial u(x_i)}{\partial x} \right]}{\partial x}$ nahradíme diferenčným podielom. Pre prípad že koeficient tepelnej vodivosti je konštantný ($k(x) = \text{konšt.}$), koeficient prestupu tepla z povrchu tyče do okolia nulový ($q(x) = 0$) a s využitím vzorca na výpočet druhej centrálnej diferencie

$$\frac{\partial^2 u(x_i)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2)$$

z (5.4) dostaneme pre aproximáciu $U(x_i)$ ¹ z hodnôt $u(x_i)$ sústavu rovníc:

$$-k \frac{U(x_{i+1}) - 2U(x_i) + U(x_{i-1}))}{h^2} = f(x_i) \quad \text{pre } i = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (5.5)$$

Z okrajových podmienok máme:

$$U_0 = g_0 \quad (5.6)$$

$$U_l = g_l \quad (5.7)$$

¹Je dôležité pripomenúť, že $U(x)$ nám neoznačuje vnútornú energiu ako to bolo v kapitole 3.1, ale označuje nám aproximáciu teplotnej funkcie $u(x)$

Označíme si:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{U}} &= (U_0, U_1, \dots, U_{N-1}, U_N)^\top \\ \tilde{\mathbf{F}} &= (f_0, f_1, \dots, f_{N-1}, f_N)^\top \\ \tilde{\mathbf{K}}_{N+1, N+1} &= \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -k & 2k & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2k & -k \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k & 2k \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Zostavíme sústavu lineárnych rovníc:

$$\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{F}},$$

keďže ale U_0 a U_l počítať nemusíme, tak nám stačí vygenerovať menšiu maticu $\mathbf{K}_{N-1, N-1}$ a člen $\frac{-kg_0}{h^2}$, $\frac{-kg_l}{h^2}$ previesť na pravú stranu. Takže dostaneme:

$$\begin{aligned}\mathbf{U} &= (U_1, \dots, U_{N-1})^\top \\ \mathbf{F} &= \left(f_1 + \frac{kg_0}{h^2}, \dots, f_{N-1} + \frac{kg_l}{h^2} \right)^\top \\ \mathbf{K}_{N-1, N-1} &= \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -k & 2k & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2k & -k \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k & 2k \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Neznáme U_1, \dots, U_{N-1} dostaneme ako riešenie sústavy lineárnych rovníc

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}. \tag{5.8}$$

Pre $k(x) > 0$, $q(x) = 0$ možno dokázať, že matica \mathbf{K} je pozitívne definitná, a preto regulárna. Preto má sústava (5.8) jediné riešenie, ktoré môžeme efektívne určiť napríklad Gaussovou eliminačnou metódou.

6 Matlab

Meno MATLAB je skratka pre *matrix laboratory*, čerpané z [7], [12], [13]. Je to vysokovýkonný jazyk používaný prevažne na technické výpočty, ktorý sa do dnešnej podoby dostal v priebehu niekoľkých rokov a prispelo k tomu viacero užívateľov. MATLAB pozostáva zo špecifických riešičov zvaných *toolboxy* (nástroje). Toolboxy sú komplexné kolekcie matlabovských funkcií, ktoré riešia špecifické oblasti problémov, ako napríklad spracovanie signálu, neutrálne siete, fuzzy logika, simulácie a mnohé ďalšie, medzi nimi je aj optimalizačný toolbox, ktorý budeme využívať aj my v našej bakalárskej práci. Tento toolbox obsahuje algoritmy používané pre štandardné úlohy, ale aj úlohy veľkého rozsahu, rieši úlohy spojité i diskkrétne, obmedzené aj neobmedzené, lineárne, nelineárne, viackriteriálne a mnohé ďalšie.

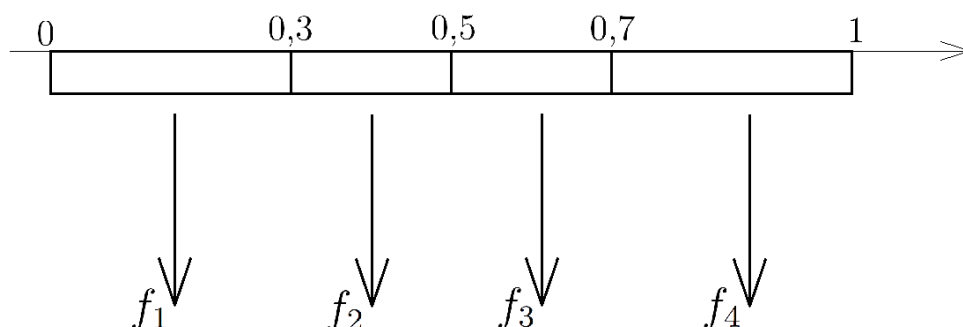
V našej bakalárskej práci budeme využívať funkciu FMINCON, ktorá hľadá minimum problémov definovaných ako:

$$\min_x f(x) \text{ tak že } \begin{cases} c(x) \leq 0 \\ ceq(x) = 0 \\ \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{Aeq} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{beq} \\ \mathbf{lb} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{ub}, \end{cases}$$

kde \mathbf{b} a \mathbf{beq} sú vektory, \mathbf{A} a \mathbf{Aeq} sú matice, $c(x)$ a $ceq(x)$ sú funkcie ktoré vracajú vektor a $f(x)$ je funkcia, ktorá vracia skalár. $f(x)$, $c(x)$, $ceq(x)$ môžu byť aj nelineárne funkcie a \mathbf{lb} , \mathbf{ub} , \mathbf{x} môžu byť buď vektory alebo matice.

7 Riešený projekt

Problém, ktorý riešime a ktorého teóriou sme sa doteraz zaoberali, je problém optimálneho chladienia tyče. Predstava je znázornená na obrázku (9), kde $Q(f)$ je teplo, ktoré z tyče odoberáme vztiahnuté na jednotku času. Odoberanie realizujeme štyrmi chladičmi, ktoré konštantne odoberajú z tyče teplo (viz. obr. 10). Tieto štyri chladiče chladia celú dĺžku tyče, každý v určitom úseku. Ak by sme si chceli tento problém reálne vizualizovať, tak by sme si chladiče mohli predstaviť ako štyri prstence, ktoré môžu meniť teplotu, a tak tyč ochladzovať.



Obr. 10: Predstava tyče so štyrmi chladičmi

Tyč sme ekvidištantne nadelili na 1000 dielikov a numericky riešili podľa kapitoly 5, kde ako okrajové podmienky sme brali podmienky Dirichletove a konkrétne $U_0 = g_0 = 50^\circ C$ a $U_l = g_l = 60^\circ C$. Ako účelovú funkciu sme zvolili funkciu cenovú, ktorú sme obmieňali:

$$z_1 = cena \cdot (f_1 \cdot 0,3 + f_2 \cdot 0,2 + f_3 \cdot 0,2 + f_4 \cdot 0,3), \quad (7.1)$$

$$z_2 = cena \cdot (f_1^2 \cdot 0,3 + f_2^2 \cdot 0,2 + f_3^2 \cdot 0,2 + f_4^2 \cdot 0,3), \quad (7.2)$$

$$z_3 = cena \cdot (|f_1| \cdot 0,3 + |f_2| \cdot 0,2 + |f_3| \cdot 0,2 + |f_4| \cdot 0,3), \quad (7.3)$$

kde *cena* nám predstavuje, koľko stojí jedna jednotka odobraného tepla (my sme si cenu určili, že bude jednotková) a funkcie f_1, f_2, f_3, f_4 vynásobené dĺžkou intervalu nám predstavujú vplyv daného chladiča na konkrétnom intervale, na ktorom pôsobí. Vodivosť našej tyče sme brali konštantnú $1 \left[\frac{W}{m \cdot C} \right]$. Obmedzenie, ktoré sme používali pri minimalizácii účelovej funkcie je teplotné a znie:

$$U(300 : 700) \leq T_{max}. \quad (7.4)$$

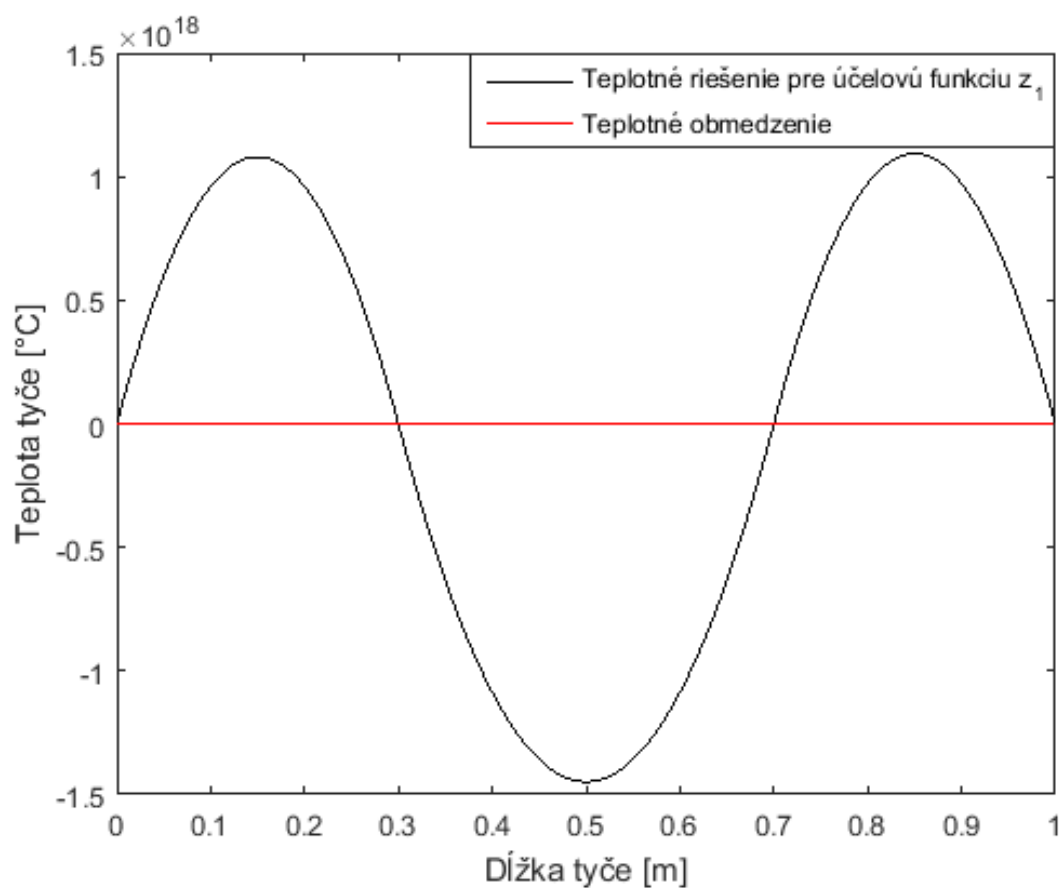
Toto obmedzenie nám hovorí, že chceme, aby teplota tyče na intervale $\langle 0,3; 0,7 \rangle$ bola menšia ako nami zvolená maximálna teplota (v našom prípade je $T_{max} = 25^\circ C$). Tento príklad sme minimalizovali pomocou funkcie FMINCON.

Výsledky, ktoré sme dostali môžeme vidieť v tabuľke (1), kde riadky z_1, z_2, z_3 predstavujú jednotlivé účelové funkcie (7.1, 7.2, 7.3), f_1, \dots, f_4 predstavujú jednotlivé vplyvy chladičov a t je čas [s], ktorý potrebovali jednotlivé účelové funkcie k výpočtu.

Tabuľka 1: Výsledky výpočtov s jedným obmedzením

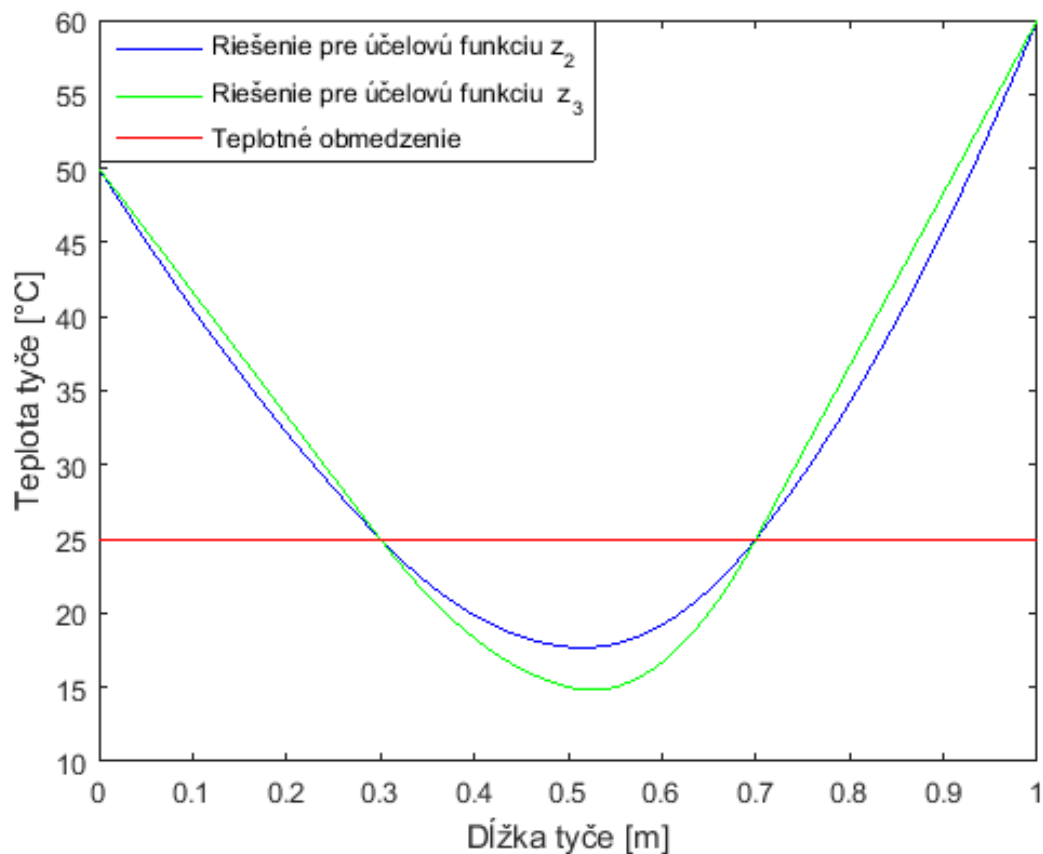
	f_1	f_2	f_3	f_4	z	t
z_1	$-9,596 \cdot 10^{19}$	$7,237 \cdot 10^{19}$	$7,248 \cdot 10^{19}$	$-9,716 \cdot 10^{19}$	$-2,897 \cdot 10^{19}$	23,207624
z_2	115,536	297,303	430,634	247,655	$7,717 \cdot 10^4$	2,805096
z_3	0,121	335,772	663,984	0,204	200,049	36,265741

Grafy jednotlivých riešení vyzerajú nasledovne:



Graf 1: Graf pre z_1

Z grafu vidíme, že pre z_1 je fyzikálne nemožné dosiahnuť dané teploty, preto sme prešli k minimalizácii z_2, z_3 , ktorých graf vyzeraá nasledovne:



Graf 2: Graf pre z_2 a z_3

K problému sme pridali ďalšie obmedzenie, tvaru:

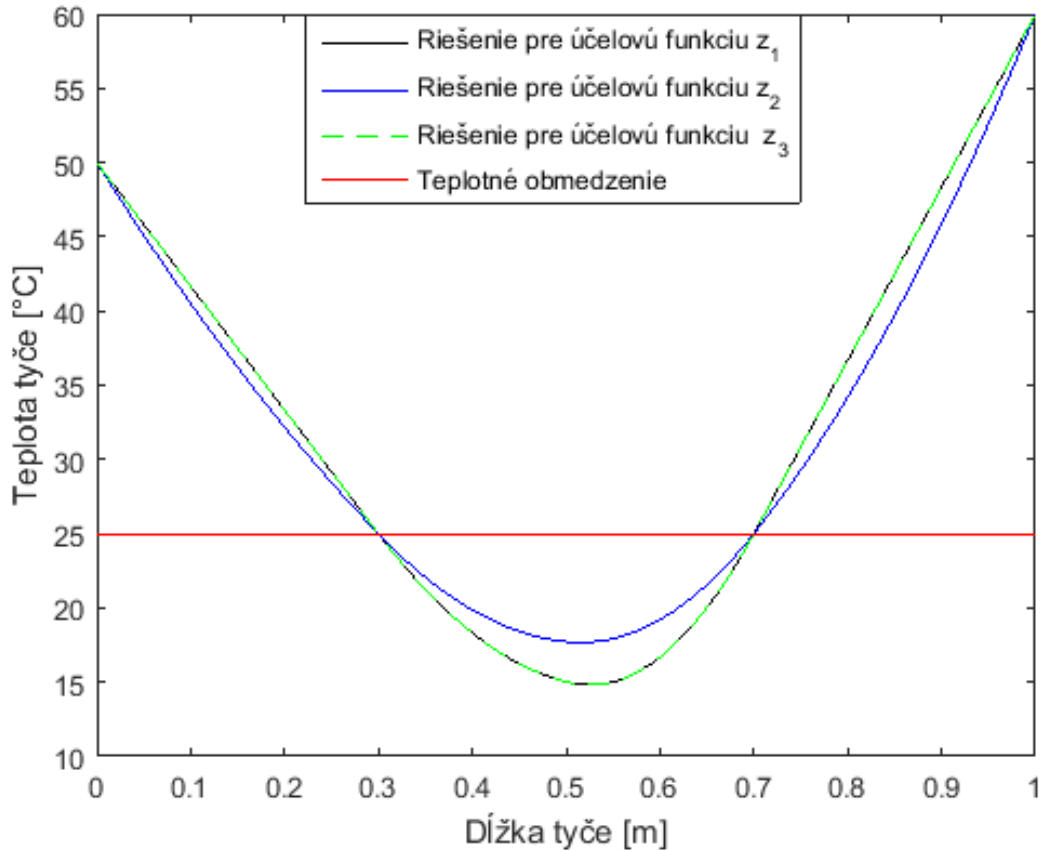
$$f_1, f_2, f_3, f_4 \geq 0 \tag{7.5}$$

ktoré nám vyjadruje nezápornosť chladičov, resp. vyjadruje, že chladiče môžu iba chladiť, nie zohrievať tyč. Výsledky môžeme vidieť v tabuľke (2).

Tabuľka 2: Výsledky výpočtov s dvomi obmedzeniami

	f_1	f_2	f_3	f_4	z	t
z_1	0,000	335,833	664,167	0,000	200,000	9,135521
z_2	115,536	297,303	430,634	247,655	$7.717 \cdot 10^4$	2,751268
z_3	0,000	335,833	664,167	0,000	200,000	9,159472

Graf riešení s pridaným obmedzením vyzerá nasledovne:

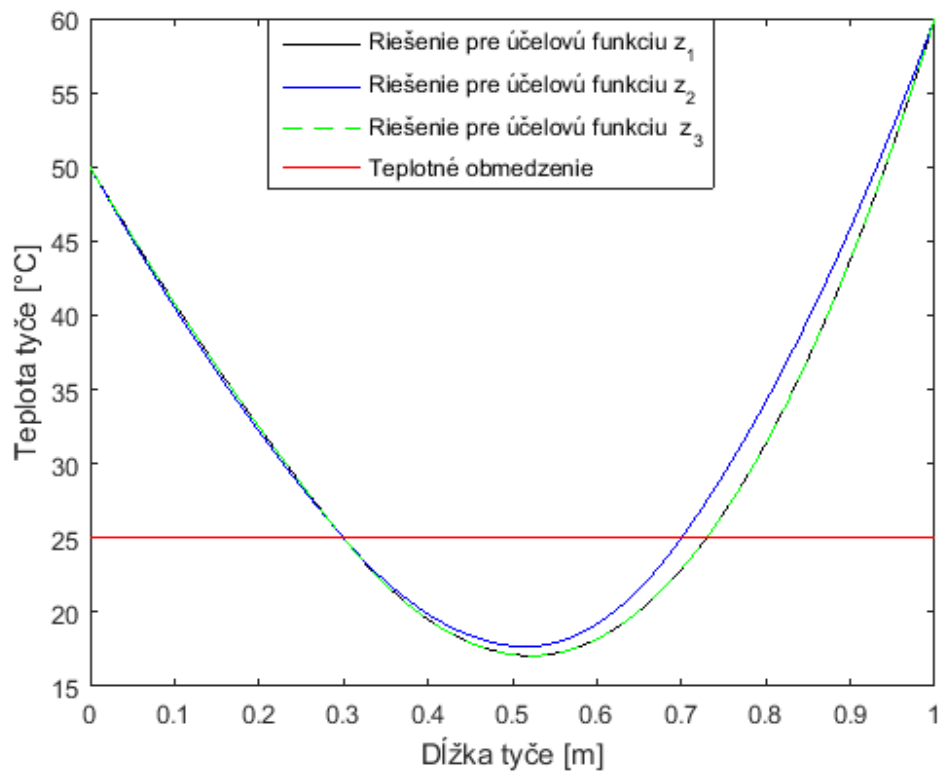


Graf 3: Graf pre z_1, z_2, z_3 s pridaným obmedzením

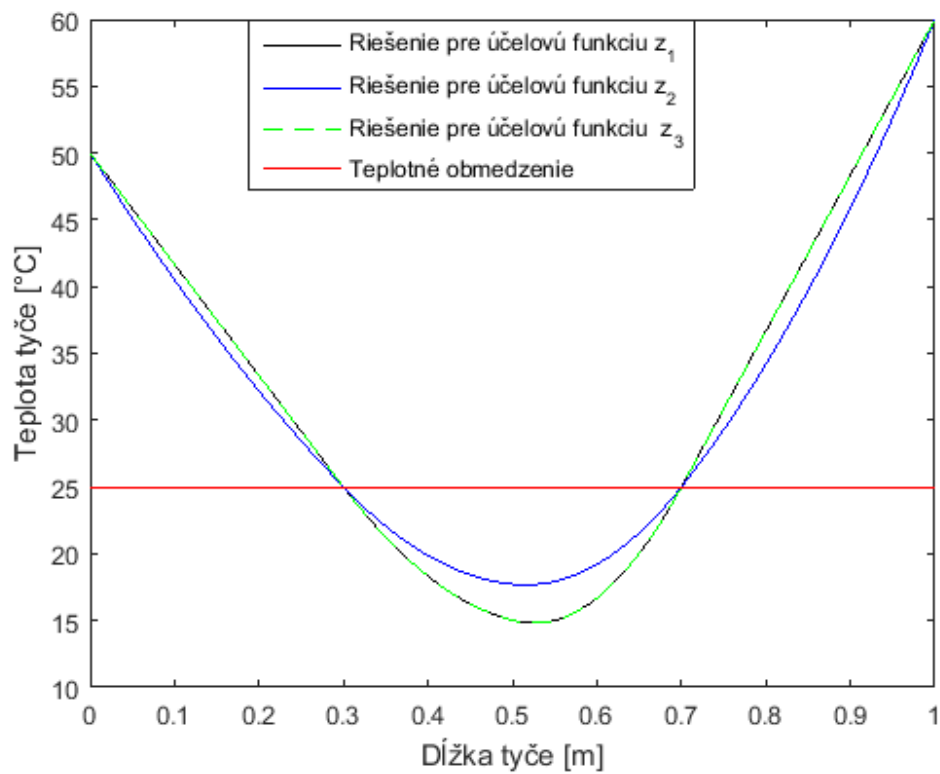
Pozorujeme aj zmeny vo vývoji chladenia, pri zmenení teplotnej vodivosti k . Vodivosť najprv výrazne zvýšime ($k = 1000$) a predpokladáme, že budeme musieť odobrať podstatne viac tepla, výsledky sú v tabuľke (3) a grafe (4). Vodivosť potom výrazne znížime ($k = 0,001$) a predpokladáme, že budeme musieť odobrať podstatne menej tepla, výsledky sú zaznamenané v grafe (5) a tabuľke (4).

Tabuľka 3: Výsledky chladenia pre vysokú vodivosť

	f_1	f_2	f_3	f_4	z	t
z_1	$0,859 \cdot 10^5$	$3,133 \cdot 10^5$	$3,663 \cdot 10^5$	$3,891 \cdot 10^5$	$2,784 \cdot 10^5$	4,916978
z_2	$1,155 \cdot 10^5$	$2,973 \cdot 10^5$	$4,306 \cdot 10^5$	$2,477 \cdot 10^5$	$7,7170 \cdot 10^{10}$	4,898679
z_3	$0,859 \cdot 10^5$	$3,133 \cdot 10^5$	$3,663 \cdot 10^5$	$3,891 \cdot 10^5$	$2,784 \cdot 10^5$	4,944234



Graf 4: Graf z_1, z_2, z_3 pre vysokú tepelnú vodivosť



Graf 5: Gra fz_1, z_2, z_3 pre nízku tepelnú vodivosť

Tabuľka 4: Výsledky chladenia pre nízku vodivosť

	f_1	f_2	f_3	f_4	z	t
z_1	0,000	0,336	0,664	0,000	0,200	2,775520
z_2	0,116	0,297	0,431	0,248	0,077	2,753064
z_3	0,000	0,336	0,664	0,000	0,200	3,064981

8 Záver

V bakalárskej práci sme riešili problém optimálneho chladenia tyče, vzhľadom k nákladom s tým spojenými. Tyč sme konštantne chladili štyrmi chladičmi, každý na inom dĺžkovom intervale a minimalizovali sme náklady spojené s chladením tak, aby teplota tyče v určitom intervale nepresiahla maximálnu povolenú teplotu. Zhotovili sme si model okrajového problému s Dirichletovými okrajovými podmienkami, ktorý sme numericky riešili diferenčnou metódou, kde sme si druhú deriváciu teplotnej funkcie aproximovali druhou centrálnou diferenciou.

Keďže je tento typ diferenciálnych rovníc lineárny, tak množinu prípustných riešení popíšeme ako množinu, kde riešenia spĺňajú teplotnú podmienku z obmedzenia a z týchto riešení potom hľadáme také, ktoré nadobúda najnižšiu hodnotu účelovej funkcie.

V modeli sme používali tri typy účelových funkcií, aby sme mohli porovnávať rozdiely a rýchlosť výpočtu. Prvá - z_1 , nám vyjadruje vážený súčet hodnôt chladení (prípomeňme si, že záporné chladenie znamená zahrievanie). Druhá - z_2 , predstavuje vážený súčet kvadrátov chladiacich funkcií. Tretia - z_3 , nám vyjadruje vážený súčet absolútnych hodnôt chladiacich funkcií. Ako váhy sme zobrali veľkosti intervalov, na ktorých chladiče pôsobia.

Z prvej účelovej funkcie sme zistili, že riešenie problému existuje aj pre fyzikálne neinterpretovateľné výsledky a že zahrievaním tyče by sme generovali zisk. Pre z_2 sme dostali pekné výsledky, kde cena je závislá na kvadrátoch funkcií chladení a rýchlosť výpočtu je podstatne nižšia než u z_3 . Naopak u z_3 sme dostali priamo cenu v tvare, v akom ju požadujeme, ale rýchlosť výpočtu je podstatne dlhšia, čo sa ukazuje byť problémom pri komplexnejších a väčších úlohách.

Aby sme predišli fyzikálne nezmyselným výsledkom ako tomu bolo v prvej minimalizácii, tak sme k problému pridali ďalšie obmedzenie, ktoré nám lepšie vymedzilo oblasť prípustných riešení hľadaných chladiacich funkcií a ktoré hovorí, že chladiče nemôžu tyč zahrievať. Je pekne vidieť, že pre z_1 a z_3 sme našli rovnaké optimálne riešenie, kde z_3 je prakticky rovnaké ako v prípade bez pridaného obmedzenia a z_2 je totožné s výsledkom z predošlého prípadu. Z toho môžeme usudzovať, že pri kvadrátoch alebo absolútnych hodnotách funkcií chladenia môžeme vybrať optimálne riešenie z celej oblasti \mathbb{R}^4 , kdežto pre z_1 je množina prípustných riešení orezaná ďalším pridaným obmedzením.

Ako posledný sme skúmali vplyv tepelnej vodivosti na veľkosť chladenia. Overili a potvrdili sme si predpoklady, že pri veľkej tepelnej vodivosti nám tyč rýchlejšie vedie teplo z okrajov tyče do jeho stredu a z tohto dôvodu musíme chladičmi odvádzať viac tepla, aby sme tyč ochladili na požadovanú teplotu. Pri nízkej tepelnej vodivosti sme si zase potvrdili, že tyč je lepším „izolantom“, že pomalšie vedie teplo, a tak nám stačí odvádzať z tyče menej tepla.

Do budúca by bolo určite zaujímavé zaoberať sa hlbšou analýzou množiny prípustných riešení, poprípade si rozobrať problém vedenia tyče s nekonštantnou tepelnou vodivosťou, alebo tyče zloženej z viacerých materiálov.

Úlohu sme riešili matlabovskou funkciou FMINCON, ktorá používala *sqp* algoritmus na samotné riešenie.

Literatúra

- [1] BOYD, Stephen a Lieven VANDENBERGHE. *Convex Optimization*. New York: Cambridge University Press, c2004. ISBN 978-0-521-83378-3.
- [2] ČERMÁK, Libor. *Numerické metody II: diferenciální rovnice*. Vyd. 2., upr. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2010. ISBN 978-80-214-4110-1.
- [3] EHRGOTT, Matthias. *Multicriteria Optimization*. 2nd ed. New York: Springer, c2005. ISBN 3-540-21398-8.
- [4] FLOUDAS, Christodoulos A. a Panos M. PARDALOS. (Eds.) *Encyclopedia of Optimization*. 2nd ed. New York: Springer, c2009. ISBN: 978-0-387-74759-0
- [5] FRANČŮ, Jan. *Parciální diferenciální rovnice*. 4., dopl. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2011. ISBN 978-80-214-4399-0.
- [6] KLAPKA, Jindřich, Jiří DVOŘÁK a Pavel POPELA. *Metody operačního výzkumu*. Vyd. 2. Brno: VUTIUM, 2001, 165 s. ISBN 80-214-1839-7.
- [7] MATLAB fmincon. *The MathWorks, Inc* [online]. c1994-2017, [cit. 2017-05-13]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html>
- [8] PAVELEK, Milan. *Termomechanika*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2011. ISBN 978-80-214-4300-6.
- [9] POPELA, Pavel. učebný text, *Optimization I*, [.pdf dokument]. UM FSI VUT, Brno, 2017.
- [10] RAVINDRAN, A., G. V. REKLAITIS a K. M. RAGSDELL. *Engineering optimization: methods and applications*. 2nd ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley, c2006. ISBN 978-0-471-55814-9.
- [11] ROBERTS, A. Wayne a Dale E. VARBERG. *Convex functions*. New York: Academic Press, 1973. Pure and applied mathematics (Academic Press), 57. ISBN 0-12-589740-5.
- [12] The MathWorks, Inc. *Optimization Toolbox™ User's Guide* [online]. c1990-2017, [cit. 2017-05-01]. Dostupné z: https://www.mathworks.com/help/pdf_doc/optim/optim_tb.pdf
- [13] Introduction. *What is MATLAB?* [online]. 1997, [cit. 2017-05-13]. Dostupné z: <http://cimss.ssec.wisc.edu/wxwise/class/aos340/spr00/whatismatlab.htm>

Zoznam príloh

CD s matematickým modelom programu.

Zdrojový kód modelu

```
%% bakalarska prca
format long
clc;
clear;

%% model tyce
a=0; % pociatocny bod siete
b=1; % koncovy bod siete
n=[300;500;700;1000]; % pocet dielikov
h=(b-a)/n(4); % velkost dielika
x=a:h:b; % siet bodov
k=1; % parameter tepelnej vodivosti tyce
% k=1000;
% k=0.001;
%% konstanty a premenne
cena = 1;
Tmax = 25; % maximalna mozno teplota v tyci

%% okrajove podmienky urcujuce teplotu na krajoch tyce
op = [50 60];
%% priprava trojuholnikovej matice
ud(1:(n(4)-2))=-k;
ld(1:(n(4)-2))=-k;
d(1:(n(4)-1))=2*k;

%% matica pre vypocet u
K=(1/(h*h)).*(diag(d)+diag(ud,1)+diag(ld,-1));
CONDK = cond(K)

%% Optimalizacia

NonLinOmez2 = @(f) NonLinOmez(f,K,Tmax,k,h,n,op,x);
minfun2 = @(f) minfun(f,n,cena,h);

options = optimoptions('fmincon','Display','iter','Algorithm','sqp');
tic
[teplo_odoberane, cena] = fmincon(minfun2,[0 0 0 0],[[],[],[],[]],...
[0 0 0 0],[[],[],NonLinOmez2, options)
toc
```

Zdrojový kód účelovej funkcie

```
function [z] = minfun(f,n,cena,h)
z = cena*( abs(f(1))*0.3 + abs(f(2))*0.2 + abs(f(3))*0.2 + abs(f(4))*0.3 );
% z = cena*( (f(1).^2)*0.3 + (f(2).^2)*0.2 + (f(3).^2)*0.2 + (f(4).^2)*0.3 );
% z = cena*( f(1)*0.3 + f(2)*0.2 + f(3)*0.2 + f(4)*0.3 );
end
```

Zdrojový kód obmedzenia

```
%% obmedzenie
```

```
function [c,ceq,f]= NonLinOmez(f,K,Tmax,k,h,n,op,x)
```

```
for i=1:n(4)-1
if i<=n(1)
F(i,1)= -f(1);
end;
if (i>n(1)) && (i<= n(2))
F(i,1)= -f(2);
end;
if (i>n(2)) && (i<= n(3))
F(i,1)= -f(3);
end;
if (i>n(3))
F(i,1)= -f(4);
end;
if i==1
F(i,1)=F(i,1) + ((1/(h*h)) * k * op(1,1));
end;
if i==n(4)-1
F(i,1)=F(i,1) + ((1/(h*h)) * k * op(1,2));
end;
end;
U=K\F;
c = U(300:700) - Tmax;
u=[op(1,1); U; op(1,2)];

%% vykreslenie grafu
save('data_abs4.mat', 'u');

y = Tmax*[ones(1,length(x))];
plot(x,u,'green',x,y,'red')
legend('Teplotné riešenie pre účelovú funkciu z_{3}','Teplotné obmedzenie')
xlabel('Dĺžka tyče [m]')
ylabel('Teplota tyče [°C]')
ceq = [];
end
```