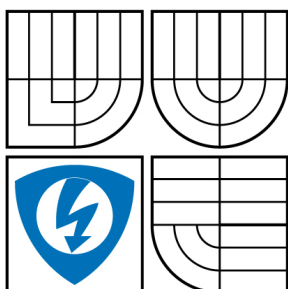




VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH
TECHNOLOGIÍ

ÚSTAV AUTOMATIZACE A MĚŘICÍ TECHNIKY

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION
DEPARTMENT OF CONTROL AND INSTRUMENTATION

ANALYZA HYBRIDNÍCH DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

HYBRID DYNAMIC SYSTEMS- ANALYSIS AND MODELING

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

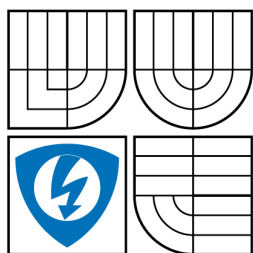
Bc. LIBOR HOLUB

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. Ing. PETR VAVŘÍN, DrSc.

BRNO 2009



VYSOKÉ UČENÍ
TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta elektrotechniky
a komunikačních technologií

Ústav automatizace a měřicí techniky

Diplomová práce

magisterský navazující studijní obor
Kybernetika, automatizace a měření

Student: Bc. Libor Holub

ID: 83744

Ročník: 2

Akademický rok: 2008/2009

NÁZEV TÉMATU:

Analyza hybridních dynamických systémů

POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

Cílem práce je přispět k optimalizaci výběru metod pro řešení hybridních regulačních systémů. Dále by bylo vhodné zabývat se obecnými otázkami stability, říditelnosti a pozorovatelnosti hybridních systémů. Výsledky ukažte na vzorových příkladech.

Porovnejte možnosti různých metod pro popis a analýzu hybridních dynamických systémů.

DOPORUČENÁ LITERATURA:

Automatizace, Automation (IFAC), Automa, Štecha J.: Teorie dynamických systémů, ČVUT web skripta.

Termín zadání: 9.2.2009

Termín odevzdání: 25.5.2009

Vedoucí práce: prof. Ing. Petr Vavřín, DrSc.

prof. Ing. Pavel Jura, CSc.

Předseda oborové rady

UPOZORNĚNÍ:

Autor diplomové práce nesmí při vytváření diplomové práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.

ABSTRAKT

V této práci je řešena problematika popisu, modelování a analýzy hybridních dynamických systémů. Cílem práce je vybrat vhodnou metodu pro řešení hybridních dynamických systémů a zaměřit se na řešení otázek stanovení říditelnosti, pozorovatelnosti a stability hybridních dynamických systémů. Práce se zabývá dvěma typy hybridních systémů. V první části je uveden popis a modelování hybridních systémů složených ze spojité části a diskrétní části tvořené systémem diskrétních událostí. Pro popis a modelování těchto hybridních systémů jsou použity hybridní automaty a hybridní Petriho sítě. Uvedené možnosti popisu a modelování jsou ukázány na jednoduchých vzorových příkladech. Druhá část práce je zaměřena na popis, modelování a analýzu hybridních dynamických systémů, které jsou tvořeny spojením spojitého dynamického systému a diskrétního dynamického systému. Pro popis, modelování a analýzu hybridních dynamických systémů je použito stavového prostoru. Jsou zde uvedeny obecné stavové rovnice, pomocí nichž je možné provést popis hybridního systému, a jim odpovídající obecné struktury matic A , B , C , D . Dále zde jsou odvozeny vztahy a základní postupy pro analýzu hybridních dynamických systémů. Z hlediska analýzy se jedná o obecné postupy, jakými je možné rozhodnout o říditelnosti, pozorovatelnosti, stabilitě a ustálených stavech hybridních dynamických systémů. Pro veškeré uvedené postupy a vztahy jsou řešeny vzorové příklady hybridních regulačních systémů. Pokud je to možné, tak jsou rovněž výsledky získané výpočtem ověřeny pomocí simulace v prostředí MATLAB Simulink.

KLÍČOVÁ SLOVA

Spojité systémy, diskrétní systémy, hybridní systémy, stavový prostor, říditelnost, pozorovatelnost, stabilita.

ABSTRACT

In this thesis the issue with the description, modeling and analysis of hybrid dynamic systems is solved. The main goal is to select appropriate method for solving hybrid dynamic systems and to aim to question on solving controllability, observability and stability of these systems. Two types of hybrid systems are covered in this work. In the first part, the description and simulation of hybrid systems that are compiled of continuous and discrete parts with the systems of discrete affair are specified. For the description and modeling of hybrid automata and hybrid Petri nets have been used. The possibilities mentioned above are showned on the simple examples. Second part of this work covers the description, modeling and analysis of hybrid systems that are compiled of links continuous and discrete dynamic system. The state space has been used. The universal state equations are mentioned and have been used for the description of the hybrid system and the structure of the matrixes A , B , C , D . The relation and basic method are spin off for the analysis of hybrid dynamic systems. From the analysis point of view, these are general methods for the controllability, observability, stability and steady state of hybrid dynamic systems. The examples of hybrid control systems for mentioned methods are specified. If it is allowed, the results are verified by the simulation in MATLAB Simulink background.

KEY WORDS

Continuous systems, discrete systems, hybrid systems, state space, controllability, observability, stability.

PROHLÁŠENÍ

„Prohlašuji, že svou diplomovou práci na téma Analýza hybridních dynamických systémů jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené diplomové práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této diplomové práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.“

V Brně dne: **25. května 2009**

.....

podpis autora

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji vedoucímu diplomové práce prof. Ing. Petrovi Vavřínovi, DrSc. za účinnou metodickou, pedagogickou a odbornou pomoc a další cenné rady při zpracování mé diplomové práce.

V Brně dne: **25. května 2009**

.....

podpis autora

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

HOLUB, L. *Analýza hybridních dynamických systémů*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2009. 92 s.
Vedoucí diplomové práce prof. Ing. Petr Vavřín, DrSc.

OBSAH

ÚVOD	11
1. HYBRID SYSTEMS (HYBRIDNÍ SYSTÉMY)	12
1.1 Hybridní automaty	12
1.1.1 Definice hybridního automatu podle [3], [4], [6]	12
1.1.2 Vývoj stavů v hybridním automatu	13
1.1.3 Příklad 1	14
1.1.4 Definice hybridní časové množiny [4]	16
1.1.5 Hybridní trajektorie a řešení hybridního automatu.....	17
1.2 Hybridní Petriho síť	19
1.2.1 Definice diskrétní Petriho sítě a základní terminologie.....	20
1.2.2 Pravidla pro změnu stavu Petriho sítě	21
1.2.3 Spojité Petriho síť.....	21
1.2.4 Příklad 2 [2]	23
1.2.5 Příklad 3 [2]	25
1.2.6 D – elementární hybridní Petriho síť (HPS _D)	26
1.2.7 Příklad 4 [2]	27
1.2.8 Hybridní Petriho síť – s T – časovanou sítí pro modelování diskrétní části (HPS)	28
1.2.9 Příklad 5 [2]	29
2. HYBRIDNÍ DYNAMICKÉ SYSTÉMY	30
2.1 Popis hybridních dynamických systémů.....	30
2.1.1 Základní pojmy stavové teorie hybridních systémů	30
2.1.2 Stavové rovnice	32
2.1.3 Příklad 6.....	34
2.2 Řešení stavových rovnic hybridního systému.....	37
2.2.1 Generátory spojitých vstupních signálů.....	37
2.2.2 Generátory diskrétních vstupních signálů	39
2.2.3 Základní vztahy pro řešení stavových rovnic hybridního systému	41
2.2.4 Řešení stavových rovnic hybridního systému mezi okamžiky vzorkování..	42

2.2.5 Řešení stavových rovnic hybridního systému v okamžicích vzorkování.....	43
2.2.6 Podrobnější rozbor řešení vývoje stavů v hybridních systémech v okolí okamžiku vzorkování.....	45
2.2.7 Příklad 7.....	45
3. ANALÝZA HYBRIDNÍCH SYSTÉMŮ	57
3.1 Určení říditelnosti (dosažitelnosti) stavů hybridních systémů.....	57
3.1.1 Definice říditelnosti systému [10]	58
3.1.2 Definice dosažitelnosti systému [10].....	58
3.1.3 Stanovení říditelnosti (dosažitelnosti) hybridního systému.....	59
3.1.4 Příklad 8.....	61
3.1.5 Příklad 9.....	64
3.2 Určení pozorovatelnosti (rekonstruovatelnosti) stavů hybridních systémů	67
3.2.1 Definice pozorovatelnosti systému [10]	67
3.2.2 Definice rekonstruovatelnosti systému [10]	67
3.2.3 Stanovení pozorovatelnosti (rekonstruovatelnosti) hybridního systému.....	68
3.2.4 Příklad 10.....	70
3.2.5 Příklad 11.....	72
3.3 Stabilita hybridních systémů.....	73
3.3.1 Určení stability hybridního systému	74
3.3.2 Pomocí výpočtu vlastních čísel matice E	74
3.3.3 Pomocí výpočtu charakteristické rovnice	75
3.3.4 Příklad 12.....	76
3.4 Ustálené stavy hybridních systémů.....	79
3.4.1 Zjištění ustálených stavů spojitého systému.....	79
3.4.2 Zjištění ustálených stavů diskrétního systému.....	79
3.4.3 Zjištění ustálených stavů hybridních systémů	80
3.4.4 Příklad 13.....	81
ZÁVĚR.....	85
SEZNAM LITERATURY	87
SEZNAM ZKRATEK A SYMBOLŮ	89
SEZNAM PŘÍLOH.....	92

SEZNAM OBRÁZKŮ

<i>Obrázek 1: Systém vodních nádrží z Příkladu 1</i>	14
<i>Obrázek 2: Hybridní automat popisující systém nádrží z Příkladu 1</i>	16
<i>Obrázek 3: Příklad hybridní časové množiny $\tau = \{\{\tau_i, \tau'_i\}\}_{i=0}^3$</i>	17
<i>Obrázek 4: Příklad konečného řešení (výsledku).....</i>	18
<i>Obrázek 5: Příklad nekonečného řešení (výsledku).....</i>	18
<i>Obrázek 6: Příklad Zeno řešení (výsledku).....</i>	19
<i>Obrázek 7: Základní prvky Petriho sítě</i>	21
<i>Obrázek 8: Systém tří nádrží z Příkladu 2</i>	23
<i>Obrázek 9: Spojitá PN pro systém nádrží z Příkladu 2</i>	24
<i>Obrázek 10: Spojitá Petriho síť s konstantní rychlostí aktivace přechodu – Příklad 3</i>	25
<i>Obrázek 11: D – jednoduchá hybridní Petriho síť z Příkladu 4</i>	28
<i>Obrázek 12: Hybridní Petriho síť – s T – časovanou sítí pro modelování diskrétní části – pro Příklad 5.....</i>	29
<i>Obrázek 13: Blokové schéma stavového popisu hybridních systémů</i>	34
<i>Obrázek 14: Blokové schéma hybridního systému z Příkladu 6 a Příkladu 7</i>	36
<i>Obrázek 15: Stavové schéma hybridního systému z Příkladu 6.....</i>	36
<i>Obrázek 16: Generátor konstantního spojitého signálu</i>	37
<i>Obrázek 17: Generátor lineárně proměnného signálu</i>	38
<i>Obrázek 18: Generátor exponenciálního průběhu</i>	38
<i>Obrázek 19: Generátor harmonického signálu</i>	38
<i>Obrázek 20: Generátor konstanty.....</i>	39
<i>Obrázek 21: Generátor lineárně narůstajícího signálu.....</i>	39
<i>Obrázek 22: Generátor exponenciální funkce</i>	40
<i>Obrázek 23: Generátor harmonického průběhu</i>	40
<i>Obrázek 24: Stavové schéma hybridního systému z Příkladu 7.....</i>	48
<i>Obrázek 25: Stavové schéma hybridního systému z Příkladu 7 pro zjištění hodnot stavů v daných časech</i>	54
<i>Obrázek 26: Průběhy jednotlivých stavů ze simulačního schématu na Obrázku 25..</i>	56

<i>Obrázek 27: Grafické znázornění definice říditelnosti systému</i>	58
<i>Obrázek 28: Grafické znázornění definice dosažitelnosti systému</i>	58
<i>Obrázek 29: Stavové schéma hybridního systému z Příkladu 9 a Příkladu 11</i>	64
<i>Obrázek 30: Definice pozorovatelnosti a rekonstruovatelnosti</i>	68
<i>Obrázek 31: Stavové schéma hybridního systému z Příkladu 13 včetně simulačních prvků</i>	82
<i>Obrázek 32: Průběhy a hodnoty ustálených stavů ze simulace k Příkladu 13</i>	84

ÚVOD

Tato práce je zaměřena na dva typy různých hybridních systémů. Ve své první části je zaměřena na hybridní systémy vytvořené spojením spojité dynamiky a systému diskrétních událostí. Pro tyto hybridní systémy jsou ukázány možnosti jejich popisu a modelování dvěma způsoby a to sice pomocí hybridních automatů a hybridních Petriho sítí. Porovnání těchto metod je uvedeno v závěru. Ve druhé části je řešena problematika hybridních dynamických systémů vytvořených spojením spojitěho dynamického systému a diskrétního dynamického systému, tímto systémem může být například hybridní regulační obvod tvořený spojitou regulovanou soustavou a diskrétním regulátorem.

Cílem práce je vybrat vhodnou metodu pro popis modelování a analýzu hybridních dynamických systémů. Na základě požadavku provedení analýzy těchto hybridních dynamických systémů, jež se skládá z otázky říditelnosti, pozorovatelnosti a stability, je zvolena metoda popisu hybridního systému ve stavovém prostoru. Žádná jiná metoda neumožňuje analyzovat požadované vlastnosti hybridních dynamických systémů. Dále je z hlediska analýzy řešena otázka ustálených stavů hybridních dynamických systémů, která je rovněž provedena ve stavovém prostoru. V jednotlivých částech analýzy hybridních dynamických systémů jsou uvedeny příklady, které jsou vypočteny podle uvedených postupů a vztahů pro danou problematiku analýzy. Hybridní systémy řešené v příkladech v práci jsou SISO (zkratka z anglického *single input – single output*) systémy, což jsou systémy s jedním vstupem a jedním výstupem. Nicméně uvedené vztahy a postupy je možné rovněž použít na MIMO (z anglického *multi input – multi output*) systémy, což jsou systémy s více vstupy a více výstupy.

1. HYBRID SYSTEMS (HYBRIDNÍ SYSTÉMY)

Pod pojmem hybridní systémy (pro odlišení se systémy uvedenými v dalších kapitolách, zde bude používáno označení hybrid systems) jsou především v anglicky psané literatuře uváděny takové systémy, kde na sebe vzájemně působí spojitá dynamika, která je popisována vývojem spojitých stavů, a diskrétní dynamika (ve smyslu systému diskrétních událostí), která je popisována vývojem stavů pomocí automatů nebo jinými numerickými modely. Diskrétní dynamika je v tomto případě dána podmínkami, za kterých systém přechází mezi svými různými režimy činnosti. Možnosti modelování a řešení těchto hybrid systems (hybridních systémů) je možné provádět mimo jiné pomocí hybridních automatů (například v [1], [3], [4], [5], [6]) nebo pomocí hybridních Petriho sítí (například v [2]). Souhrnně se problematikou těchto hybrid systems (hybridních systémů) zabývá [14].

1.1 HYBRIDNÍ AUTOMATY

Problematika použití hybridních automatů pro popis a modelování hybrid systems (hybridních systémů) je řešena ve velkém množství prací (například [1], [3], [4], [5], [6]), které se zabývají těmito systémy. Z důvodu tohoto velkého zájmu o tyto systémy vyplývá i různorodost definic hybridních automatů používaných pro popis těchto systémů. Tyto definice jsou si však při bližším porovnání podobné a popisují obdobným způsobem chování těchto hybrid systems (hybridních systémů). Zde je uvedena definice hybridního automatu uváděná v obdobném smyslu ve [3], [4], [6].

1.1.1 Definice hybridního automatu podle [3], [4], [6]

Hybridní automat lze definovat jako soubor $H = (Q, X, f, Init, Dom, E, G, R)$,
kde

- $Q = \{q_1, q_2, \dots\}$ je množina diskrétních stavů,
- $X = \mathbf{R}^n$ je množina spojitých stavů,
- f je vektorové pole; je to funkce, která přiřazuje každou dvojici spojitěho a diskrétního stavu $q \in Q, x \in X$ k prvku vektorového pole $f(q, x) \in \mathbf{R}^n$,

- $Init \subseteq Q \times X$ je množina počátečních stavů,
- Dom je doména; je to funkce, která přiřazuje každý diskretní stav $q \in Q$ k prvku domény $Dom(q) \in P(X)$,
- $E \subseteq Q \times Q$ je množina označení přechodů,
- G je množina přechodových podmínek; je to funkce, která přiřazuje každou kombinaci možných přechodů diskretních stavů $(q_i, q_j) \in E$ k prvku množiny podmínek přechodu $G(q_i, q_j) \in P(X)$,
- R je resetovací mapa (prostor obsahují hodnoty „resetů“ spojitých proměnných); je to funkce, která přiřazuje pro všechny možné kombinace přechodů diskretních stavů $(q_i, q_j) \in E$ a každý spojitý stav $x \in X$ k prvku resetovací mapy $R(q_i, q_j, x) \in P(X)$.

Doména Dom je někdy označována rovněž jako invariantní (neměnná) množina. Dom přiřazuje množinu spojitých stavů $Dom(q) \subseteq \mathbf{R}^n$, ke každému diskretnímu stavu $q \in Q$. $P(X)$ označuje množinu všech podmnožin z množiny spojitých stavů X . $(q, x) \in Q \times X$ je stav hybridního automatu.

1.1.2 Vývoj stavů v hybridním automatu

Vývoj stavů v hybridním automatu začíná z počátečních hodnot stavů $(q_0, x_0) \in Init$. Spojitý stav x se mění shodně s diferenciální rovnicí

$$\dot{x} = f(q_0, x) \text{ s počáteční podmínkou } x(0) = x_0,$$

oproti tomu diskretní stav q zůstává konstantní, což popisuje následující rovnice

$$q(t) = q_0.$$

Vývoj spojitého stavu pokračuje tak dlouho, dokud diskretní stav zůstává v $Dom(q_0)$. Pokud spojitý stav x dosáhne hodnoty, kdy splní podmínku přechodu $G(q_0, q_1) \subseteq \mathbf{R}^n$ pro přechod $(q_0, q_1) \in E$, tak se diskretní stav změní na hodnotu q_1 .

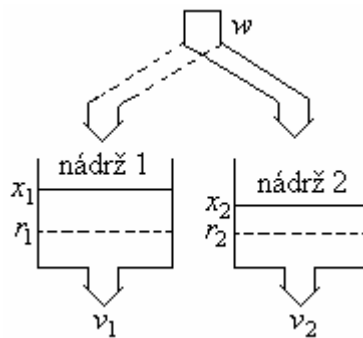
V stejném časovém okamžiku provede spojité stav svůj „reset“ do nějaké hodnoty definované jako $R(q_0, q_1, x) \subseteq \mathbf{R}^n$. Po proběhnutí resetu a přechodu se spojité stav x opět začne vyvíjet podle diferenciální rovnice $\dot{x} = f(q_1, x)$, dokud nenastane další diskretní přechod. Celý děj se pak opakuje.

1.1.3 Příklad 1

Systém vodních nádrží

Propojení vodních nádrží je naznačeno na *Obrázku 1*. Obě nádrže vypouští vodu konstantní rychlostí. Do nádrží voda přitéká rovněž konstantní rychlostí pomocí přívodní hadice, která přivádí vodu buď do jedné, nebo do druhé nádrže (nikdy ne do obou nádrží zároveň). Předpokládá se, že doba trvání přesunu hadice od jedné nádrže k druhé nádrži je nulová.

x_1 označuje objem vody v nádrži 1 a x_2 označuje objem vody v nádrži 2. v_1 označuje konstantní rychlost odtoku vody z nádrže 1 a v_2 označuje konstantní rychlost odtoku vody z nádrže 2. w označuje konstantní přítok vody z hadice (buď do nádrže 1, nebo do nádrže 2).



Obrázek 1: Systém vodních nádrží z Příkladu 1

Dále je podle *Obrázku 1* snaha udržovat objem vody v nádržích nad úrovněmi r_1 a r_2 pro jednotlivé nádrže. Před spuštěním systému se předpokládá, že jsou splněny počáteční podmínky $x_1 > r_1$ a $x_2 > r_2$. Přívod vody do nádrže 1 se přepne, kdykoliv je splněna podmínka $x_1 \leq r_1$ a obdobně přívod vody do nádrže 2 se přepne, kdykoliv je splněna podmínka $x_2 \leq r_2$.

Na *Obrázku 2* je hybridní automat popisující tento systém nádrží. Prvky charakterizující tento hybridní systém podle výše uvedené definice jsou následující:

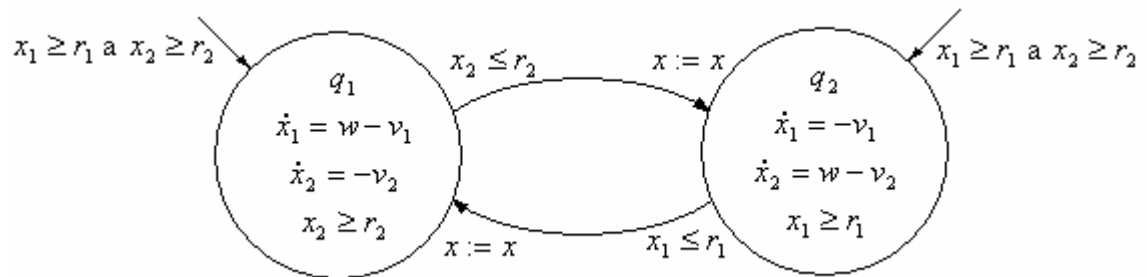
- $Q = \{q_1, q_2\}$, dva diskrétní stavy, přítok vody je buď do pravé, nebo do levé nádrže,
- $X = \mathbf{R}^2$, dva spojité stavy – úrovně hladiny v jednotlivých nádržích.

Jestliže přitéká voda do nádrže 1, tak hladina vody v nádrži 2 klesá a hladina vody se v nádrži 1 zvyšuje. Totéž platí i obráceně. Tento vývoj lze popsat rovnicemi

$$f(q_1, x) = \begin{bmatrix} w - v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix} \text{ a } f(q_2, x) = \begin{bmatrix} -v_1 \\ w - v_2 \end{bmatrix}.$$

Jednotlivé prvky popisující hybridní automat H podle definice jsou následující:

- $Init = \{q_1, q_2\} \times \{x \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 \geq r_1 \wedge x_2 \geq r_2\}$, na začátku jsou obě úrovně hladiny nad úrovněmi r_1 a r_2 ,
- $Dom(q_1) = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid x_2 \geq r_2\}$ a $Dom(q_2) = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 \geq r_1\}$, dopouští vodu v aktuální nádrži tak dlouho, dokud neklesne úroveň ve druhé nádrži pod mezní hodnotu r_1 nebo r_2 ,
- $E = \{(q_1, q_2), (q_2, q_1)\}$ přítok je možné přepnout od nádrže 1 k nádrži 2 a naopak,
- $G(q_1, q_2) = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid x_2 \leq r_2\}$ a $G(q_2, q_1) = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 \leq r_1\}$, přechodové podmínky pro přepnutí od nádrže 1 k nádrži 2 a naopak,
- $R(q_1, q_2, x) = R(q_2, q_1, x) = \{x\}$, spojité stavy se mění v důsledku provedení každého přepnutí od nádrže 1 k nádrži 2 a naopak. Pro tento příklad by nemuselo být, protože tento reset nechává poslední hodnotu dané spojité veličiny shodnou s hodnotou nové stavové veličiny po přechodu automatu (to je i logické, jelikož hladina vody v nádrži ve stejném časovém okamžiku nemůže mít dvě rozdílné hodnoty).



Obrázek 2: Hybridní automat popisující systém nádrží z Příkladu 1

1.1.4 Definice hybridní časové množiny [4]

Hybridní časové množiny se používají pro definování časového rozmezí, ve kterém se vyvíjejí hybridní stavy. Dále je možné díky této definici hybridní časové množiny definovat řešení hybridního automatu.

Hybridní časovou množinu je možné definovat jako množinu intervalů $\tau = \{I_0, I_1, \dots, I_N\} = \{I_i\}_{i=0}^N$, která může být buď konečná, nebo nekonečná.

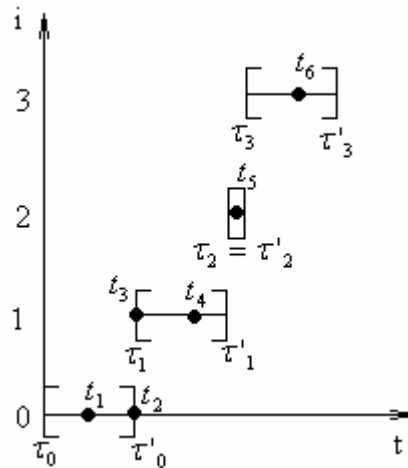
Hybridní časová množina musí splňovat následující podmínky:

- $I_i = [\tau_i, \tau'_i]$ pro všechny $i < N$,
- pokud je $N < \infty$, pak je I_N uzavřený interval $I_N = [\tau_N, \tau'_N]$ nebo je I_N zprava otevřený interval $I_N = [\tau_N, \tau'_N)$,
- $\tau_i \leq \tau'_i = \tau_{i+1}$ pro všechna i .

Ukázka možné hybridní časové množiny je zobrazena na *Obrázku 3*. Z *Obrázku 3* je patrné, že se koncový bod τ'_i nějakého intervalu I_i z množiny τ shoduje s počátečním bodem τ_{i+1} intervalu I_{i+1} (například $t_2 = t_3$). V těchto časech se uskutečňují přechody hybridního automatu. τ'_i je časový okamžik těsně před proběhnutím diskrétního přechodu a τ_{i+1} je časový okamžik těsně po diskrétním přechodu. Tyto diskrétní přechody probíhají nekonečnou rychlostí, a proto platí

$\tau'_i = \tau_{i+1}$. Díky tomu se může pro vícenásobný diskretní přechod psát

$\tau'_{i-1} = \tau_i = \tau'_i = \tau_{i+1}$ (interval I_2 na Obrázku 3).



Obrázek 3: Příklad hybridní časové množiny $\tau = \{[\tau_i, \tau'_i]\}_{i=0}^3$

1.1.5 Hybridní trajektorie a řešení hybridního automatu

Hybridní trajektorie (τ, q_f, x_f) je definována pomocí hybridní časové množiny. Je to funkce spojitých stavů v dané části hybridní časové množiny a funkce diskretních stavů v dané části hybridní časové množiny.

Řešení hybridního automatu je hybridní trajektorie (τ, q_f, x_f) , která splňuje následující podmínky:

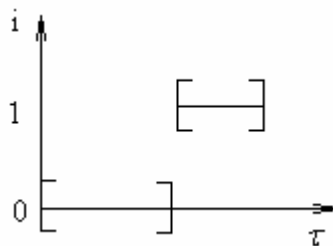
- počáteční podmínku: řešení by mělo začínat v počátečním stavu v $Init$,
- vývoj diskretních stavů: Je dán podmínkami pro splnění daného přechodu mezi stavy. Jakmile je splněna podmínka přechodu, tak je přechod uskutečněn, přičemž se provede „reset“ (změna) spojitého stavu, který je dán resetovací mapou R ,
- vývoj spojitého stavů:
 - diskretní stav je v době mezi přechody konstantní,

- x_f je řešení diferenciální rovnice v daném časovém intervalu hybridní časové množiny, ve které se právě automat nachází. Diferenciální rovnice je závislá na aktuálním diskrétním stavu $q_i(t)$, ve kterém se systém právě nachází. Obecně lze pro časový interval i napsat diferenciální rovnici v této formě:

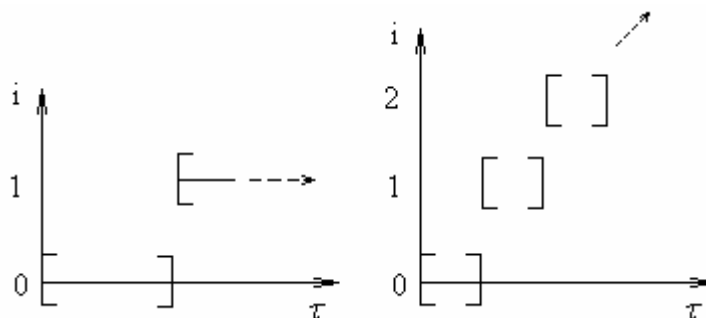
$$\frac{dx_i}{dt} = f(q_i(t), x_i(t)).$$

Řešení (τ, q_f, x_f) lze rozdělit do následujících skupin:

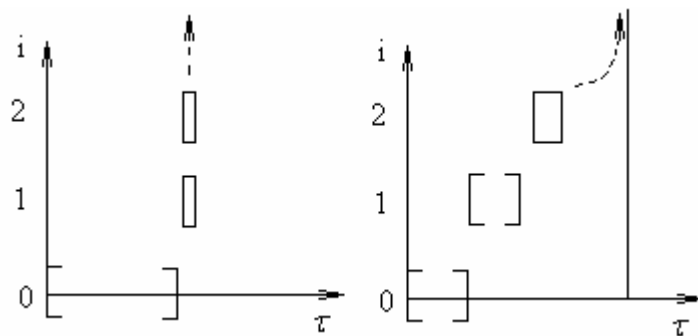
- konečné, pokud τ je konečná množina a poslední interval v τ je uzavřený (viz. *Obrázek 4*),
- nekonečné, pokud τ je nekonečná množina nebo pokud součet časových intervalů v τ je nekonečný $\sum_{i=0}^N (\tau'_i - \tau_i) = \infty$ (*Obrázek 5*),
- Zeno, pokud je nekonečné, ale součet časových intervalů v τ je konečný $\sum_{i=0}^N (\tau'_i - \tau_i) < \infty$ (viz. *Obrázek 6*).



Obrázek 4: Příklad konečného řešení (výsledku)



Obrázek 5: Příklady nekonečného řešení (výsledku)



Obrázek 6: Příklady Zeno řešení (výsledku)

Obecnější, rozsáhlejší a matematicky precizně provedený popis řešení hybridního automatu je uveden ve [4].

1.2 HYBRIDNÍ PETRIHO SÍTĚ

Další možností popisu hybrid systems (hybridních systémů) je využití hybridních Petriho sítí ([2]). Jelikož Petriho sítě obecně slouží výhradně k popisu systémů diskrétních událostí ([7], [8], [9]), je zapotřebí nejprve rozšířit Petriho sítě na Petriho sítě umožňující popis spojitéch dynamických systémů ([2]) a dále je možné tuto definici upravit pro popis hybrid systems (hybridních systémů, [2]).

Spojité Petriho sítě je možné použít pro modelování spojitéch dynamických systémů. Tyto modely však neumožňují modelovat logické podmínky nebo diskrétní systémy. Z důvodu rozšíření možnosti modelování diskrétních stavů jsou vytvořeny hybridní Petriho sítě. Níže budou uvedeny dvě možnosti, jakým způsobem je možné modelovat hybridní Petriho sítě.

Jelikož existuje velké množství používaných českých pojmenování různých částí Petriho sítí, které jsou ekvivalentní anglických pojmenováním, tak je česká terminologie pro Petriho sítě použitá v této práci převzata z [7], [8], [9].

1.2.1 Definice diskrétní Petriho sítě a základní terminologie

Petriho síť je složena z uzlů, které jsou propojeny spojnicemi (hranami, vazbami mezi uzly). Uzly se dále dělí na místa a přechody. Spojnice nikdy nespojuje místo s místem nebo přechod s přechodem, ale spojuje pouze přechod s místem nebo místo s přechodem. Z toho vyplývá, že Petriho síť je biparitní graf. Pokud je Petriho síť orientovaná, znamená to, že hrany grafu jsou orientované.

1.2.1.1 Definice označené Petriho sítě uváděná v [7]

Označená Petriho síť je definována následujícími prvky pěti prvků (P, T, A, w, m) , kde

- P je konečná množina míst,
- T je konečná množina přechodů,
- $A \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ je množina hran (spojnic), žádná hrana nespojuje dvě místa nebo dva přechody,
- $w: A \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$ je váhová funkce přiřazující váhy jednotlivým hranám,
- $m = [m(p_1), m(p_2), \dots, m(p_n)] \in \mathbf{N}^n$ je vektor označení jednotlivých míst Petriho sítě.

Dále označuje:

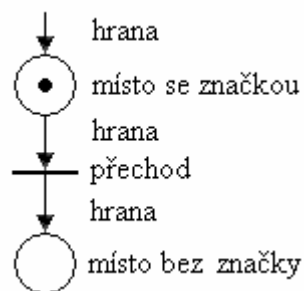
${}^{\circ}T_J$ je množina vstupních míst přechodu T_J ,

T_J° je množina výstupních míst přechodu T_J .

Jednotlivé prvky tvořící Petriho síť jsou uvedeny na *Obrázku 7*, přičemž platí, že:

- místo může obsahovat nezáporný celý počet značek (v anglické literatuře označováno jako token), toto platí pouze pro klasické diskrétní Petriho sítě,
- v okamžiku aktivace („pálení“) přechodu jsou odebrány značky ze vstupních míst přechodu,

- počáteční označení (umístění značek v místech před prvním přeskokem) popisuje počáteční stav systému,
- vývoj systému je reprezentován přesunem značek v síti na základě aktivace přechodů,
- každé nové označení reprezentuje nový stav systému.



Obrázek 7: Základní prvky Petriho sítě

1.2.2 Pravidla pro změnu stavu Petriho sítě

Každý přechod může mít jedno nebo více vstupních a výstupních míst. Proto se musí definovat, za jakých podmínek dochází k přesunu značek v síti (tj. za jakých podmínek dochází k aktivaci přechodů). Přechod je umožněný, pokud každé jeho vstupní místo obsahuje značky v počtu větším nebo rovném váze hrany, která spojuje vstupní místo a přechod. Umožnění přechodu je nezbytnou (nikoliv postačující) podmínkou pro jeho aktivaci. Po aktivaci přechodu musí být ještě splněny další podmínky, které se liší podle daného typu Petriho sítě. Uvolněné značky nesmějí být spotřebovány jiným přechodem. Při aktivaci přechodu jsou odebrány značky ze vstupních míst a jsou zapsány do výstupních míst. Počet odebraných (nebo zapsaných) značek odpovídá váze vstupní (nebo výstupní) hrany.

1.2.3 Spojité Petriho sítě

Spojitá Petriho síť je vytvořena rozšířením klasické diskrétní Petriho sítě, kde označení (marking) je spojitá veličina. Aktivace přechodu je spojitý proces a díky

tomu se stává stavová rovnice rovnicí diferenciální. Spojitá Petriho síť je vhodná pro popis spojitých systémů, ovšem používá se rovněž pro modelování systémů diskretních událostí, jelikož počet působících událostí ve spojitě Petriho síti je mnohem menší než pro odpovídající klasickou diskretní Petriho síť. Z toho plyne menší náročnost na výpočet.

Autonomní spojitá Petriho síť (PS_{AS}) je definována podle [2] jako struktura charakterizovaná jako $PS_{AS} = (P, T, Pre, Post, M_0)$, kde:

- $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ je konečná množina n míst,
- $T = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ je konečná množina m přechodů,
- $Pre: P \times T \rightarrow \mathbf{R}^+$ je matice popisující souhrn vah pro všechny hrany vycházející z míst do přechodů, má rozměr $n \times m$,
- $Post: P \times T \rightarrow \mathbf{R}^+$ je matice popisující souhrn vah pro všechny hrany vycházející z přechodů do míst, má rozměr $n \times m$,
- $M_0: P \rightarrow \mathbf{R}^+$ je vektor počátečních označení.

\mathbf{R}^+ značí, že jde o reálná nezáporná čísla.

Označení (marking) je definováno jako $\forall P_i \in P; M(P_i) = m_i, m_i \in \mathbf{R}^+$. To znamená, že každému místu P_i je přiřazeno reálné nezáporné číslo $M(P_i)$ pro $i = 0, \dots, n$.

U spojitých Petriho sítí se zavádí pojem makro – označení (macro – marking). Tento pojem se zavádí z toho důvodu, že u spojitých Petriho sítí může označení dosáhnout nekonečné hodnoty, jelikož se jedná o modelování spojitých systémů.

Makro – označení je definováno takto:

je dána autonomní spojitá Petriho síť a M_k je její označení v čase k . M_k dělí množinu míst P na dvě podmnožiny:

$P^+(M_k)$ – podmnožina míst s kladným označením,

$P^0(M_k)$ – podmnožina míst, jehož označení je nulové.

Makro – označení je možné charakterizovat pomocí booleovského vektoru

$V: P \rightarrow \{0, 1\}$

$$P_i \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{pro } P_i \in P^+ \\ 0 & \text{pro } P_i \in P^0 \end{cases}$$

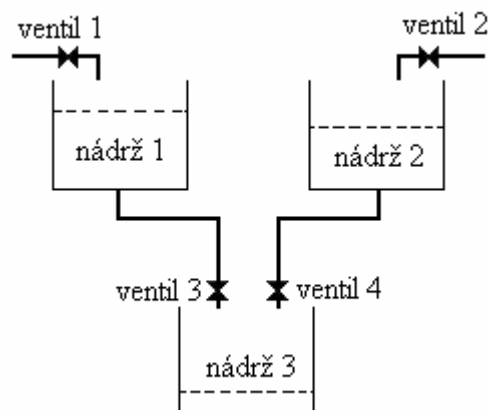
Makro – označení se značí m^*_j .

1.2.4 Příklad 2 [2]

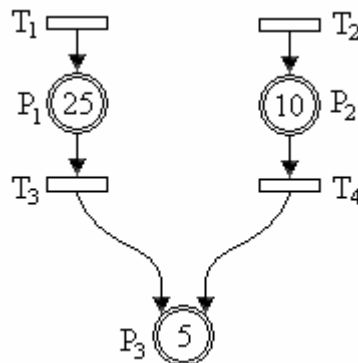
Systém tří nádrží

Uvažuje se systém tří vzájemně propojených nádrží z *Obrázku 8*. Nádrž 1 a nádrž 2 jsou plněné pomocí ventilů 1 a 2. Z nádrže 1 je pomocí ventilu 3 plněna nádrž 3 a současně je plněna z nádrže 2 pomocí ventilu 4. Na začátku nádrž 1 obsahuje 25 litrů kapaliny, nádrž 2 obsahuje 10 litrů kapaliny a nádrž 3 obsahuje 5 litrů kapaliny.

Spojité Petriho síť pro tento případ je uvedena na *Obrázku 9*. Z důvodu odlišení od klasické diskrétní Petriho sítě jsou místa značena dvojicí kružnicí a přechody jsou značeny obdélníkem namísto jednoduché čáry. Aktivace přechodů T_1 , T_2 , T_3 a T_4 představuje protékající kapalinou ventilem 1, ventilem 2, ventilem 3 a ventilem 4. Označení míst P_1 , P_2 a P_3 reprezentuje množství kapaliny v nádrži 1, nádrži 2 a nádrži 3.



Obrázek 8: Systém tří nádrží z Příkladu 2



Obrázek 9: Spojitá PN pro systém nádrží z Příkladu 2

Spojité Petriho sítě lze dále rozdělit na sítě:

- s konstantní rychlostí aktivace přechodu,
- s proměnlivou rychlostí aktivace přechodu.

1.2.4.1 Spojité Petriho sítě s konstantní rychlostí aktivace přechodu

Spojité Petriho sítě s konstantní rychlostí aktivace přechodu (PS_{KS}) lze definovat jako $PS_{KS} = (PS_{AS}, V)$, kde

- PS_{AS} je autonomní spojitá Petriho síť,
- $V: T \rightarrow \mathbf{R}^+$
 $T_j \rightarrow V_j$.

V je funkce, která definuje každému přechodu T_j jeho maximální a rychlost aktivace přechodu V_j . Okamžitá rychlost aktivace přechodu T_j je označována $v_j(t)$.

Přechod PS_{KS} může mít dva možné stavy:

- první stav je povolený, jestliže
 $\forall P_i \in {}^\circ T_j, P_i \in P^+$.

V tomto případě je přechod T_j aktivovaný svou maximální rychlostí aktivace v_j ,

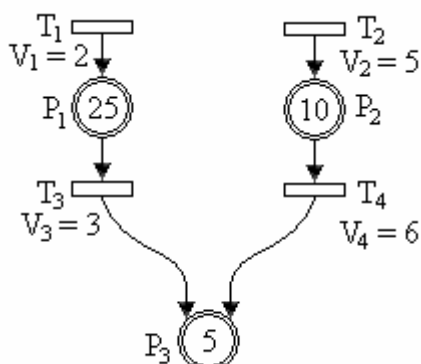
- druhý stav povolený, jestliže
 $\exists P_i \in {}^\circ T_j, P_i \in P^0$.

V tomto případě je přechod T_j aktivovaný s rychlostí aktivace v_j nižší, než je jeho maximální rychlost aktivace.

1.2.5 Příklad 3 [2]

Jedná se opět o systém tří nádrží z Příkladu 2. Zadání je rovněž stejné, pouze je rozšířeno o následující údaje: ventil 1 má rychlost průtoku kapaliny 2 litry za minutu, ventil 2 má rychlost průtoku kapaliny 5 litrů za minutu, ventil 3 má rychlost průtoku kapaliny 3 litry za minutu a ventil 4 má rychlost průtoku kapaliny 6 litrů za minutu.

Spojité Petriho síť s konstantní rychlostí aktivace přechodu pro tento příklad je uvedena na *Obrázku 10*. Při porovnání *Obrázku 9* a *Obrázku 10* je patrné, že jediný rozdíl mezi tímto modelem a modelem autonomní spojité Petriho sítě je, že každá aktivace přechodu probíhá maximální rychlostí aktivace přechodu.



Obrázek 10: Spojitá Petriho síť s konstantní rychlostí aktivace přechodu – Příklad 3

1.2.5.1 Spojité Petriho sítě s proměnnou rychlostí aktivace přechodu

Tento typ spojité Petriho sítě se liší od 1.2.4.1 Spojité Petriho sítě s konstantní rychlostí aktivace přechodu tím, že aktivace přechodu probíhá proměnnou rychlostí aktivace přechodu. Okamžitá rychlost aktivace přechodu $v_j(t)$ je určena na základě vztahu:

$$v_j(t) = V_j \min(m_i),$$

kde V_j je maximální rychlost aktivace přechodu,

$\min(m_i)$ je funkce, která je závislá na aktuálním označení m_i a v podstatě její hodnota určuje okamžitou rychlost aktivace přechodu.

Bližší rozbor těchto spojitých Petriho sítí je uveden v [2].

Na základě výše definovaných spojitých Petriho sítí je nyní možné definovat hybridní Petriho síť vytvořenou spojením klasických diskrétních Petriho sítí a spojitých Petriho sítí. Jsou zde uvedeny dva typy hybridních Petriho sítí, které jsou uváděny v [2].

1.2.6 D – elementární hybridní Petriho síť (HPS_D)

Tento typ hybridní Petriho sítě je možné použít, pokud je požadováno tuto hybridní Petriho síť dále převést na jí odpovídající hybridní automat. Postup tohoto převodu na hybridní automat je ukázán v [2]. Nevýhoda tohoto typu hybridní Petriho sítě spočívá v tom, že nedokáže modelovat vliv spojitě části hybridního systému na diskrétní část.

1.2.6.1 Definice D – elementární hybridní Petriho síť (HPS_D)

HPS_D lze definovat jako $HPS_D = (P_H, T_H, Pre_H, Post_H, h_P, S, V, M_{0H})$, kde

- $P_H = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ je konečná množina n míst,
- $T_H = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ je konečná množina m přechodů.

Dále je možné provést označení takové, že $P^D = \{P_1, P_2, \dots, P_r\}$ jako množina r diskrétních míst a $T^D = \{T_1, T_2, \dots, T_s\}$ jako množinu s diskrétních přechodů. Pak pro množinu spojitých míst P^C musí platit vztah $P^C = P_H - P^D$ a pro množinu spojitých přechodů T^C platí vztah $T^C = T_H - T^D$.

- $Pre_H: P_H \times T_H \rightarrow \mathbf{N}$ je matice popisující souhrn vah, pro všechny spojnice vycházející z míst do přechodů a $Post_H: P_H \times T_H \rightarrow \mathbf{N}$ je matice popisující souhrn vah, pro všechny spojnice vycházející z přechodů do míst. Tyto matice splňují podmínky:

$$\forall (P_i, T_j) \in P^C \times T^D, Pre_H(P_i, T_j) = Post_H(P_i, T_j) = 0$$

$$a \forall (P_i, T_j) \in P^D \times T^C, Pre_H(P_i, T_j) = Post_H(P_i, T_j)$$

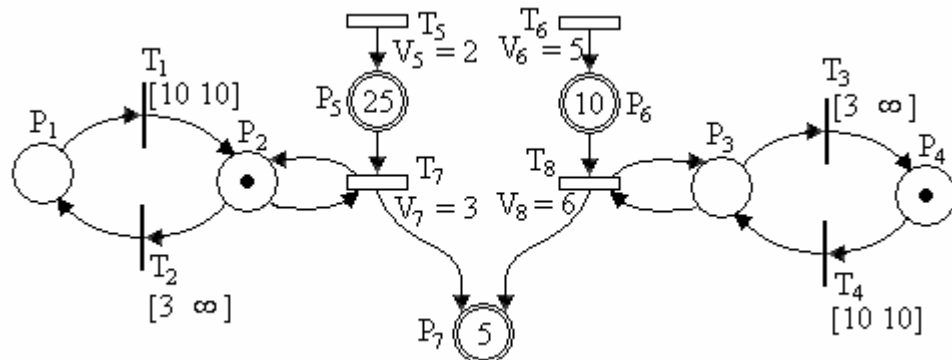
To znamená, že neexistuje žádná spojnice mezi spojitými místy a diskrétními přechody. Pokud je diskrétní místo P_i připojeno spojnici ke spojitému přechodu T_j , tak musí existovat i propojovací spojnice z T_j do P_i . Ve schématu se to jeví jako smyčkové spojení mezi diskrétními místy a spojitými přechody. Z těchto podmínek vyplývá, že v HPS_D může pouze diskrétní část ovlivňovat chování spojitě části, kdežto spojitá část diskrétní část ovlivnit nemůže.

- $h_P: P_H \cup T_H \rightarrow \{C, D\}$ definuje soubor spojitých uzlů a diskrétních uzlů,
- $S: T^D \rightarrow \mathbf{R}^+ \times (\mathbf{R}^+ \cup \{\infty\})$ přiřazuje ke každému diskrétnímu přechodu T_j jeho interval aktivace přechodu $[\alpha_j, \beta_j]$,
- $V: T^C \rightarrow \mathbf{R}^+$ přiřazuje maximální rychlost aktivace přechodu V_j ke každému spojitému přechodu T_j ,
- M_{OH} je vektor počátečního označení, kde spojitá místa obsahují nezáporné reálné hodnoty a diskrétní místa obsahují nezáporná celá čísla.

1.2.7 Příklad 4 [2]

Zadání obdobné jako v Příkladu 2 a Příkladu 3. Dále je zadání doplněno o následující informace: ventily 3 a 4 mohou mít dva stavy – otevřeno a zavřeno, doba mezi otevřením ventilů a uzavřením ventilů trvá 3 minuty, ale může trvat až nekonečně dlouho, doba mezi přechodem od zavřených ventilů k otevřeným ventilům trvá 10 minut od posledního otevření ventilů.

D – elementární hybridní Petriho síť pro tento systém je na *Obrázku 11*. V něm jsou spojitá místa značena dvojitými kružnicemi, spojitě přechody jsou značeny obdélníkem, diskrétní místa jsou značena jednou kružnicí a diskrétní přechody jsou značeny čarou.



Obrázek 11: D – jednoduchá hybridní Petriho síť z Příkladu 4

1.2.8 Hybridní Petriho sítě – s T – časovanou sítí pro modelování diskretní části (HPS)

Tuto hybridní Petriho síť lze použít pro modelování větší množiny hybridních systémů než HPS_D . Tato hybridní Petriho síť se odlišuje od HPS_D tím, že diskretní část je modelována pomocí T – časované Petriho sítě.

1.2.8.1 Definice HPS

Tato síť se dá definovat jako $HPS = (P_{HS}, T_{HS}, Pre_{HS}, Post_{HS}, h_{HS}, S_{HS}, V_{HS}, M_{0HS})$, kde

- $P_{HS} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ je konečná množina n míst, pro množinu spojitých míst P^C a pro množinu diskretních míst P^D platí $P_{HS} = P^D \cup P^C$,
- $T_{HS} = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ je konečná množina m přechodů, pro množinu spojitých přechodů T^C a množinu diskretních přechodů T^D platí vztah $T_{HS} = T^D \cup T^C$,
- $Pre_{HS}: P_{HS} \times T_{HS} \rightarrow \mathbf{N}$ je matice popisující souhrn vah pro všechny spojnice vycházející z míst do přechodů a $Post_{HS}: P_{HS} \times T_{HS} \rightarrow \mathbf{N}$ je matice popisující souhrn vah pro všechny spojnice vycházející z přechodů do míst. Tyto matice splňují podmínku:

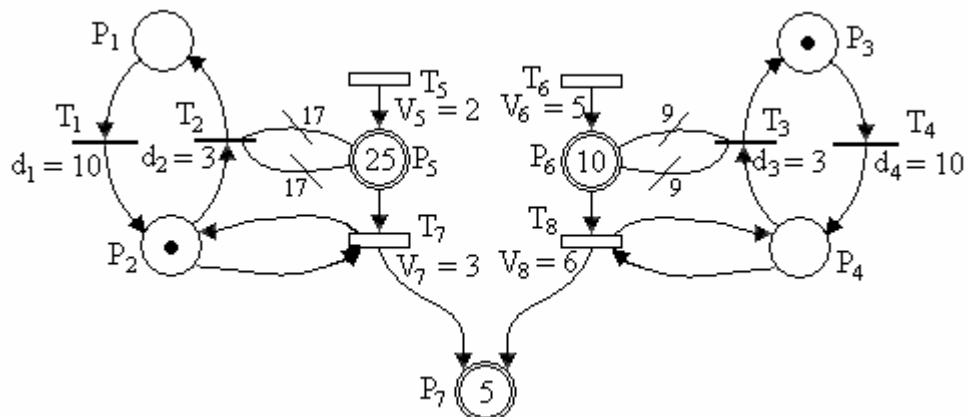
$$\forall (P_i, T_j) \in P^D \times T^C, Pre_{HS}(P_i, T_j) = Post_{HS}(P_i, T_j),$$

- $h_{HS}: P_{HS} \cup T_{HS} \rightarrow \{C, D\}$ definuje soubor spojitých uzlů a diskretních uzlů,
- $S_{HS}: T^D \rightarrow \mathbf{Q}^+$ přiřazuje ke každému diskretnímu přechodu T_j dobu trvání d_j ,
- $V_{HS}: T^C \rightarrow \mathbf{R}^+$ přiřazuje maximální rychlost aktivace přechodu V_j ke každému spojitému přechodu T_j ,
- M_{OHS} je vektor počátečního označení, kde spojitá místa obsahují nezáporné reálné hodnoty a diskretní místa obsahují nezáporná celá čísla.

1.2.9 Příklad 5 [2]

Je předpokládán stejný systém jako v Příkladu 4. Předpokládá se následující strategie řízení: v nádrži 1 nesmí klesnout úroveň kapaliny pod 20 litrů a v nádrži 2 pod 12 litrů.

Hybridní systém popsaný HPS pro tento příklad je na *Obrázku 12*. Váhy 17 a 9 v tomto obrázku odpovídají minimálním hranicím uvedeným v zadání Příkladu 5 při předpokládaném zpoždění 3.



Obrázek 12: Hybridní Petriho síť – s T – časovanou sítí pro modelování diskretní části – pro Příklad 5

2. HYBRIDNÍ DYNAMICKÉ SYSTÉMY

V této kapitole jsou řešeny hybridní systémy složené ze spojitého dynamického systému a z diskrétního dynamického systému. To znamená, že některé stavy ve výsledném hybridním systému jsou spojité a některé jsou diskrétní. Tento typ hybridních systémů je uváděn v [10]. Příkladem těchto hybridních systémů může být hybridní regulační obvod. Popis těchto hybridních systémů a jejich následná analýza se provádí výhradně ve stavovém prostoru. Pro výpočty je používán především program MATLAB a pro vytvoření modelů ve stavovém prostoru a simulačních schémat je používán Simulink – součást programu MATLAB.

Dále jsou v podkapitolách této kapitoly podrobně řešeny otázky popisu hybridních dynamických systémů pomocí stavových rovnic, jejich řešení a ve třetí kapitole je uvedena analýza těchto systémů.

2.1 POPIS HYBRIDNÍCH DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

Pro popis hybridních systémů se využívá výhradně popis ve stavovém prostoru. Hybridní systém může být rovněž zadán operátorovými přenosy spojité a diskrétní části a jejich vzájemným propojením (tato možnost zadání je využívána v některých příkladech v rámci této práce). Následně je možné takto zadaný hybridní systém převést na popis ve stavovém prostoru a provést jeho analýzu.

2.1.1 Základní pojmy stavové teorie hybridních systémů

Pro uvedení stavového popisu hybridních systémů je třeba zavést některé pojmy.

Stav systému

Je nejmenší počet stavových proměnných, které plně určují chování systému.

Hybridní čas

Pro zavedení hybridního stavového vektoru a dalších vektorů sloužících pro stavový popis hybridních systémů je nutné definovat hybridní čas. Jelikož jsou

hybridní systémy tvořeny z části systémy spojitými a z části systémy diskrétními, tak je hybridní čas takový čas, který v sobě zahrnuje oba tyto časy.

Spojité čas

Spojité čas se označuje t a je definován jako $t \in \mathbf{R}$, kde \mathbf{R} jsou reálná čísla. V tomto čase pracují spojitě systémy a rovněž i spojitě části hybridních systémů.

Diskrétní čas

Diskrétní čas se označuje kT , kde $k = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$ a T je perioda vzorkování. V tomto čase pracují diskrétní, diskretizované systémy a rovněž i diskrétní části hybridních systémů. Při zápisu dále v práci je využíváno skutečnosti, že perioda vzorkování T je konstantní a tudíž je pro zjednodušení zápisů možné pro diskrétní čas použít označení $k \equiv kT$.

Na základě takto daných spojitých a diskrétních časů je možné definovat hybridní čas označovaný h , kde libovolná funkce f_i v hybridním čase h je funkcí jak spojitěho času t , tak i diskrétního času k , což je možné zapsat jako $f_i(h) \equiv f_i(t, k)$.

Hybridní stavový vektor

Hybridní stavový vektor \mathbf{x}_v je sloupcový vektor, jehož složky jsou stavové proměnné (jak spojitě stavové proměnné tak i diskrétní stavové proměnné). Existuje více možností, jakým způsobem je možné tento vektor sestavit. Například je možné definovat hybridní stavový vektor způsobem uvedeným v (1). Sestavení stavového vektoru podle (1) je využíváno pro zápis všech hybridních vektorů v této práci.

$$\mathbf{x}_v(h) = [\mathbf{x}(t) \mathbf{d}(k)]^T = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t) \ d_1(k) \ d_2(k) \ \dots \ d_m(k)]^T, \quad (1)$$

kde $\mathbf{x}(t)$ je vektor spojitých stavových proměnných v hybridním systému, jejich počet je n ,

$\mathbf{d}(k)$ je vektor diskrétních stavových proměnných v hybridním systému, jejich počet je m .

Stavový prostor

Ze stavového vektoru $\mathbf{x}_v(h)$ vyplývá i rozměr výsledného stavového prostoru. Stavový prostor je $n+m$ rozměrný prostor \mathbf{R}^{n+m} , ve kterém se nachází stav hybridního systému.

Vstupní vektor

Pokud má systém celkem r vstupů, z nichž je i spojitých vstupů a j diskretních vstupů, pak je vektor vstupů hybridního systému $\mathbf{u}(h)$ možné definovat jako:

$$\mathbf{u}(h) = [u_1(h) \ u_2(h) \ \dots \ u_r(h)]^T = [u_{S1}(t) \ u_{S2}(t) \ \dots \ u_{Si}(t) \ u_{D1}(k) \ u_{D2}(k) \ \dots \ u_{Dj}(k)]^T. \quad (2)$$

Výstupní vektor

Pokud má systém celkem l výstupů, z nichž je a spojitých výstupů a b diskretních výstupů, pak je vektor výstupů $\mathbf{y}(h)$ možné definovat jako:

$$\mathbf{y}(h) = [y_1(h) \ y_2(h) \ \dots \ y_l(h)]^T = [y_{S1}(t) \ y_{S2}(t) \ \dots \ y_{Sa}(t) \ y_{D1}(k) \ y_{D2}(k) \ \dots \ y_{Db}(k)]^T. \quad (3)$$

2.1.2 Stavové rovnice

Nyní je možné na základě výše definovaných vektorů sestavit stavové rovnice hybridního systému. Stavové rovnice jsou rovnice popisující chování hybridního dynamického systému. Výhradně se používá maticového zápisu stavových rovnic.

První stavová rovnice

První stavovou rovnici je v obecném tvaru možné zapsat jako $\dot{\mathbf{x}}_v(h) = \mathbf{g}_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, h)$. Tuto rovnici je možné zapsat v maticové formě uvedené v (4).

$$\dot{\mathbf{x}}_v(h) = \mathbf{A}\mathbf{x}_v(h) + \mathbf{B}\mathbf{u}(h), \quad (4)$$

kde $\dot{\mathbf{x}}_v(h)$ je vektor, který je definován jako $\dot{\mathbf{x}}_v(h) = [\dot{\mathbf{x}}(t) \ \mathbf{d}(k+1)]^T$, v němž $\dot{\mathbf{x}}(t)$ je vektor derivací spojitých stavových proměnných hybridního systému, který má rozměr n a $\mathbf{d}(k+1)$ je vektor nových stavů v kroku $k+1$ diskretních stavových proměnných, má rozměr m .

Druhá stavová rovnice

Druhou stavovou rovnici je v obecném tvaru možné zapsat jako $y(h) = g_2(x, u, h)$. Tuto rovnici je možné zapsat v maticové formě uvedené v (5).

$$y(h) = Cx_v(h) + Du(h) \quad (5)$$

Ve stavových rovnicích (4) a (5) mají matice A , B , C , D následující význam:

- matice A je matice vnitřních vazeb systému o rozměru $(n+m) \times (n+m)$,
- matice B je matice vazeb systému na vstup o rozměru $(n+m) \times r$,
- matice C je matice vazeb výstupu na stav o rozměru $l \times (n+m)$,
- matice D je matice přímých vazeb výstupu na vstup o rozměru $l \times r$.

Blokové schéma stavového popisu hybridních systémů je uvedeno na *Obrázku 13*. Toto schéma vychází ze stavových rovnic uvedených v (4) a (5).

U matic A , B , C lze strukturu jejich vnitřního uspořádání z hlediska spojitých a diskrétních stavových proměnných blíže popsat níže uvedenou charakteristikou jednotlivých matic. Strukturu matice D nemá cenu blíže rozebírat, jelikož se jedná pouze o matici, která vyjadřuje vazby mezi vstupy a výstupy systému.

Matice A má následující strukturu:

$$A = \begin{bmatrix} A_S & M_{DS} \\ M_{SD} & E_D \end{bmatrix}, \quad (6)$$

kde A_S je submatice popisující vzájemné vztahy spojitých stavových proměnných, E_D je submatice popisující vzájemné vztahy diskrétních stavových proměnných,

M_{DS} je submatice popisující vliv diskrétních stavových proměnných na spojitě stavové proměnné,

M_{SD} je submatice popisující vliv spojitých stavových proměnných na diskrétní stavové proměnné.

Matice B má následující strukturu:

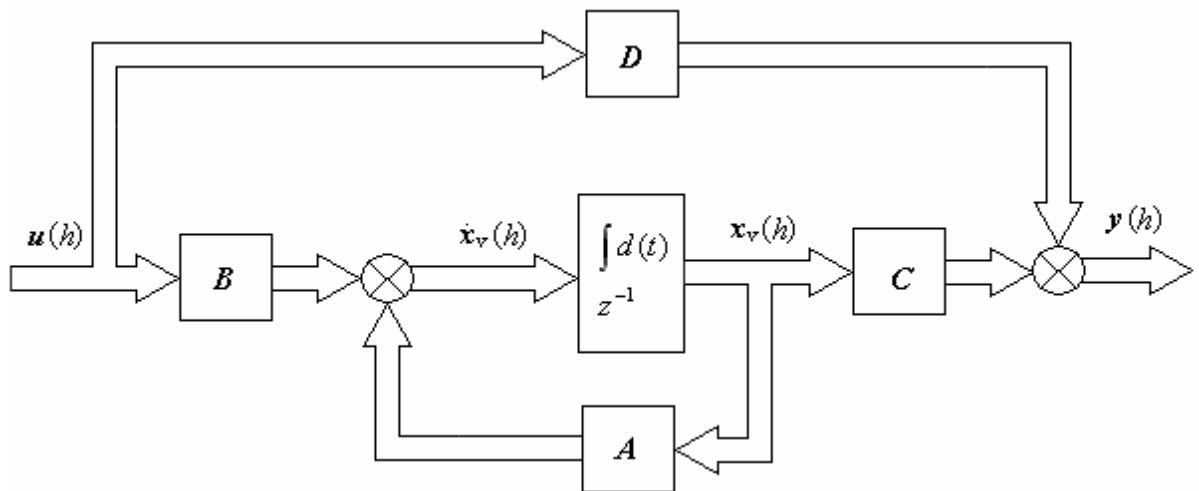
$$B = \begin{bmatrix} B_S \\ B_D \end{bmatrix}, \quad (7)$$

kde B_S je submatice vazeb spojitého stavu na vstupy hybridního systému,
 B_D je submatice vazeb diskretních stavů na vstupy hybridního systému.

Matice C má následující strukturu:

$$C = [C_S \quad C_D], \quad (8)$$

kde C_S je submatice vazeb výstupů na spojité stavy,
 C_D je submatice vazeb výstupů na diskretní stavy.



Obrázek 13: Blokové schéma stavového popisu hybridních systémů

2.1.3 Příklad 6

Je dán hybridní SISO systém, jehož přenos spojité části je dán přenosem $F_S(p)$ a přenos diskretní části je $F_D(z^{-1})$. Hybridní systém je tvořen jako regulační obvod s jedním vstupem a jedním výstupem (Obrázek 14, T označuje periodu vzorkování). Zadané přenosy jsou:

$$F_S(p) = \frac{6p^3 + 10p^2 + 5,5p + 1}{p^4 + 1,9p^3 + 1,14p^2 + 0,26p + 0,02}, \quad (9)$$

$$F_D(z^{-1}) = \frac{z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4}}{1 - z^{-1} + 0,25z^{-2} + 0,5z^{-3} + 0,25z^{-4}}, \quad (10)$$

$$T = 0,01 \text{ s.}$$

Cílem je vytvořit stavový model zadaného hybridního systému a provést jeho popis pomocí stavových rovnic hybridního systému.

Řešení

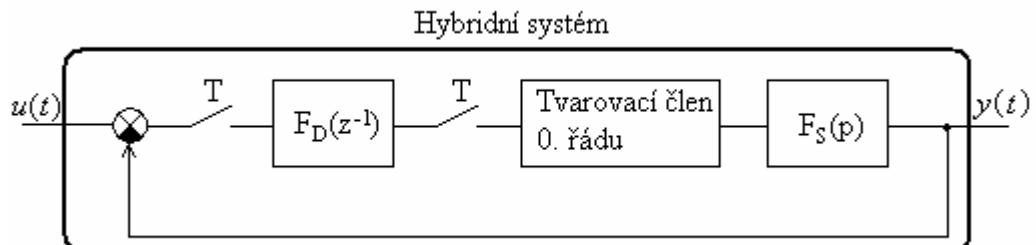
Sestavený hybridní vektor stavů je $\mathbf{x}_v(h) = [\mathbf{x}(t) \mathbf{d}(k)]^T = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t) \ x_5(t) \ d_1(k) \ d_2(k) \ d_3(k) \ d_4(k)]^T$, přičemž $x_5(t)$ je stavová proměnná, která reprezentuje tvarovací člen nultého řádu na vstupu spojitě části hybridního systému. Jelikož se jedná o SISO systém, tak má vektor vstupů pouze jeden prvek a to sice $\mathbf{u}(h) = [u(t)]$. Obdobně i vektor výstupů je jednorvkový $\mathbf{y}(h) = [y(t)]$. Pro stavové rovnice uvedené v (4) a (5) je popis hybridního systému pomocí matic \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} získán z *Obrázku 15*, kde je model zadaného hybridního systému ve stavovém prostoru.

Získané matice ze stavového modelu hybridního systému z *Obrázku 15* jsou následující:

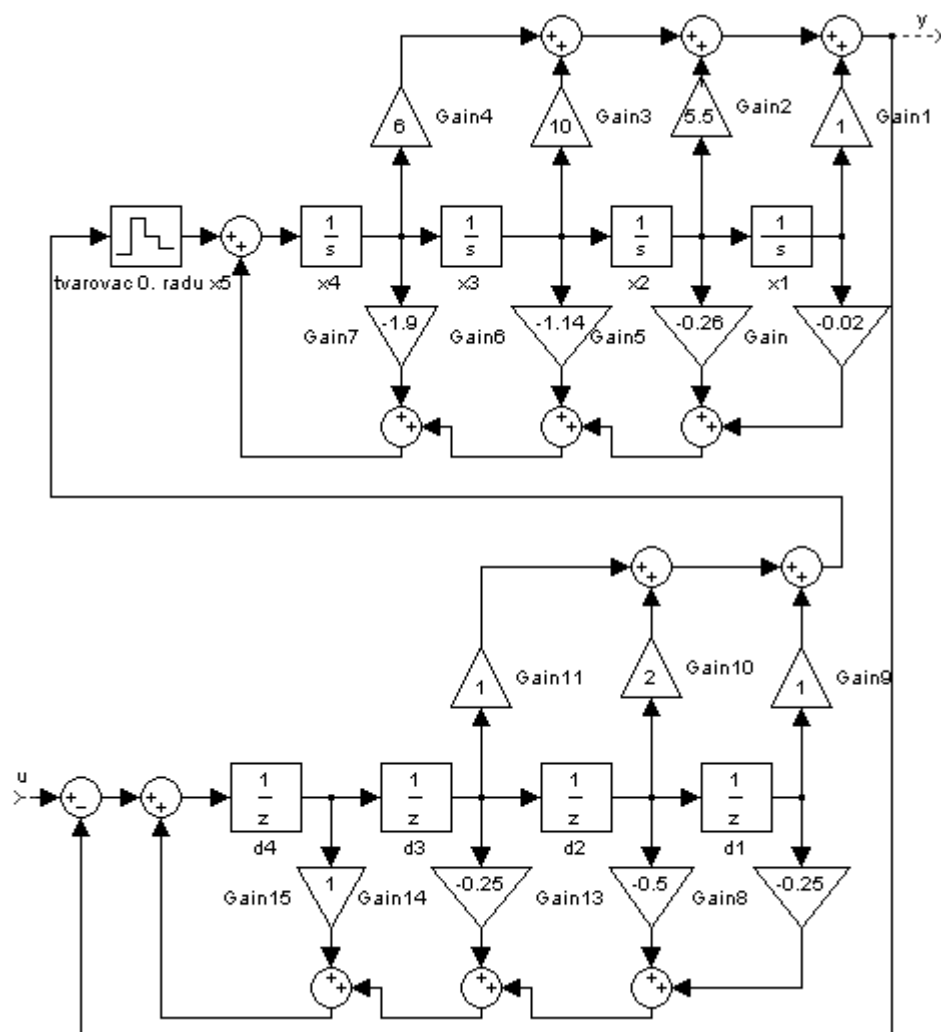
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,02 & -0,26 & -1,14 & -1,9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5,5 & -10 & -6 & 0 & -0,25 & -0,5 & -0,25 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [1 \ 5,5 \ 10 \ 6 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad \mathbf{D} = [0].$$

Rozdělení jednotlivých matic naznačené čárkovanými čarami naznačuje rozdělení na jednotlivé submatice, jak je uvedeno výše v (6), (7), (8).



Obrázek 14: Blokové schéma hybridního systému z Příkladu 6 a Příkladu 7



Obrázek 15: Stavové schéma hybridního systému z Příkladu 6

2.2 ŘEŠENÍ STAVOVÝCH ROVNIC HYBRIDNÍHO SYSTÉMU

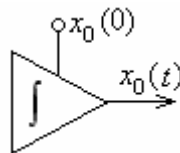
Obecné řešení stavových rovnic hybridního systému je možné získat převedením hybridního systému na systém uzavřený a následným řešením stavových rovnic popisujících tento uzavřený hybridní systém, jak je uvedeno v [15]. Řešení uzavřeného systému vychází z předpokladu, že na vstupu systému je generátor příslušné vstupní funkce, který ji nahrazuje. Jelikož vstup hybridního systému může být jak spojitý tak diskrétní, tak je nejprve potřeba uvést generátory vstupních funkcí pro oba typy vstupních signálů.

2.2.1 Generátory spojitých vstupních signálů

Pro náhradu spojitých vstupních funkcí hybridního systému jsou zde uvedeny generátory spojitých signálů, které jsou uváděné v [10].

2.2.1.1 Generátor konstantního spojitého signálu

Generátor konstantního signálu je uveden na *Obrázku 16*. Jeho hodnota je po celou dobu konstantní a je rovna hodnotě počáteční podmínky integrátoru ($x_0(t) = x_0(0)$), jenž tento generátor realizuje.

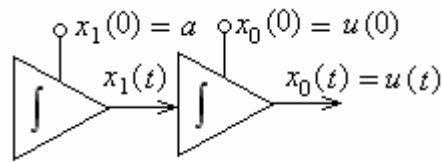


Obrázek 16: Generátor konstantního spojitého signálu

2.2.1.2 Generátor lineárně proměnného signálu

Tento generátor je uveden na *Obrázku 17*. Jeho výstup je popsán rovnicí (11). Parametr a určuje sklon přímky. Pokud je hodnota parametru $a > 0$ (počáteční podmínka prvního integrátoru), tak se jedná o generátor realizující lineárně narůstající signál. Pokud je hodnota parametru $a < 0$, tak se jedná o generátor lineárně klesajícího signálu. Počáteční podmínka druhého integrátoru určuje, jak vysoko je na ose x posazena daná přímka.

$$u(t) = at + u(0) \tag{11}$$

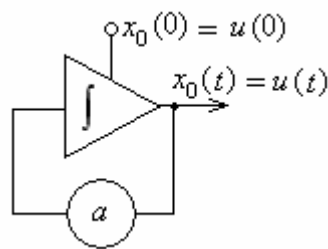


Obrázek 17: Generátor lineárně proměnného signálu

2.2.1.3 Generátor exponenciálního průběhu závislého na čase

Tento generátor je popsán rovnicí (12) a charakterizuje ho stavové schéma na *Obrázku 18*. Je-li parametr $a > 0$, pak se jedná o signál, který exponenciálně narůstá a pokud je parametr $a < 0$, tak je výstupem tohoto generátoru exponenciálně klesající signál.

$$u(t) = x_0(0) e^{at} \quad (12)$$

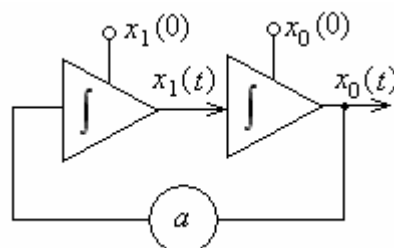


Obrázek 18: Generátor exponenciálního průběhu

2.2.1.4 Generátor harmonického signálu

Stavové schéma tohoto generátoru je uvedeno na *Obrázku 19*. Tento generátor je složen ze dvou integrátorů se zavedenou zpětnou vazbou a je charakterizován pro hodnoty $a < 0$ vztahem (13).

$$x_0(t) = x_0(0) \sin \omega t + x_1(0) \cos \omega t, \quad \text{kde } \omega = \sqrt{-a}. \quad (13)$$



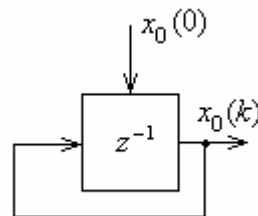
Obrázek 19: Generátor harmonického signálu

2.2.2 Generátory diskretních vstupních signálů

Rovněž pro nahrazení diskretních vstupních signálů existují generátory diskretních signálů ([10]).

2.2.2.1 Generátor konstantního diskretního signálu

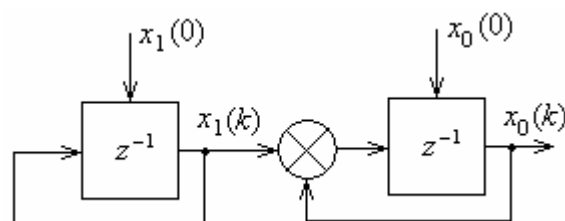
Generátor konstantního signálu je uveden na *Obrázku 20*. Amplituda konstanty je dána hodnotou počáteční podmínky $x_0(0)$. Na výstupu je v každém kroku konstantní hodnota.



Obrázek 20: Generátor konstanty

2.2.2.2 Generátor lineárně narůstajícího signálu

Generátor této funkce je na *Obrázku 21*. Tento generátor zajišťuje, že v každém kroku je hodnota signálu vyšší o konstantní hodnotu než v kroku předchozím. Velikost konstantního přírůstku je dána počáteční podmínkou prvního zpoždovacího členu. Velikost signálu na počátku určuje hodnota počáteční podmínky u druhého zpoždovacího členu.

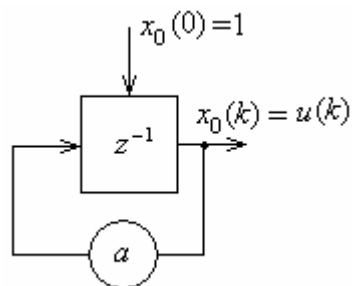


Obrázek 21: Generátor lineárně narůstajícího signálu

2.2.2.3 Generátor exponenciální funkce

Generátor exponenciální funkce je na *Obrázku 22*. Pro hodnoty $0 < a < 1$ je jedná o generátor signálu, který exponenciálně klesá a pro hodnoty $a > 1$ se jedná o signál exponenciálně rostoucí. Tento signál je popsán rovnicí (14).

$$u(k+1) = a u(k) \quad (14)$$



Obrázek 22: Generátor exponenciální funkce

2.2.2.4 Generátor oscilujících průběhů

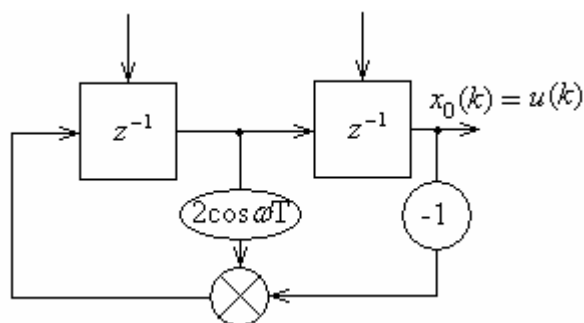
Generátor oscilujících průběhů je z hlediska svého stavového modelu stejný, jako generátor exponenciální funkce uvedený na *Obrázku 22*. Jediným rozdílem je, že hodnota $a = -1$. Tento generátor je charakterizován rovnicí (15).

$$u(k+1) = (-1)^k u(k) \quad (15)$$

2.2.2.5 Generátor harmonického průběhu

Generátor harmonického průběhu je popsán rovnicí (16) a jeho model ve stavovém prostoru je uveden na *Obrázku 23*.

$$u(k) = u_0 \sin(\omega kT + \varphi) \quad (16)$$



Obrázek 23: Generátor harmonického průběhu

2.2.3 Základní vztahy pro řešení stavových rovnic hybridního systému

Díky nahrazení vstupní funkce generátorem realizujícím tuto funkci je možné nyní považovat systém za uzavřený ($u(h) = 0$). Díky tomu je možná první stavovou rovnicí uvedenou v (4) zjednodušit na vztah (17). Obdobně se zjednoduší i druhá stavová rovnice (5) na vztah (18).

$$\dot{\mathbf{x}}_v(h) = \mathbf{A}\mathbf{x}_v(h) \quad (17)$$

$$\mathbf{y}(h) = \mathbf{C}\mathbf{x}_v(h) \quad (18)$$

Pro řešení první stavové rovnice platí následující vztah:

$$\mathbf{x}_v(h) = \boldsymbol{\phi}(h) \mathbf{x}_v(0), \quad (19)$$

kde $\mathbf{x}_v(0)$ je vektor počátečních podmínek daného hybridního systému,

$\boldsymbol{\phi}(h)$ je matice přechodů hybridního systému.

Vztah (19) je uveden bez odvození. Bližší odvození bude provedeno až níže v textu pro jednotlivé matice přechodu ve významných časových okamžicích z hlediska řešení stavových rovnic hybridního systému. Řešení druhé stavové rovnice je pouze algebraické a stanoví se tak, že se dosadí do vztahu (18) výsledek řešení první stavové rovnice.

Poznámka:

„Pro spojité systémy platí, že matice přechodu spojitěho systému $\boldsymbol{\phi}_S(t)$ je rovna matici $e^{\mathbf{A}t}$. Pro diskrétní systémy rovněž platí obdobný vztah $\boldsymbol{\phi}_D(k)$ je rovna matici \mathbf{A}^k . Odvození těchto ekvivalencí je uvedeno například v [10] nebo v [13] a dále budou tyto ekvivalence využívány při dalších úvahách.“

Vzhledem k tomu, že je hybridní systém složen jak ze spojitých stavových proměnných tak i z diskrétních stavových proměnných, tak se problém řešení stavových rovnic, který je daný obecně (19), rozděluje na problém řešení stavových rovnic mezi okamžiky vzorkování a řešení stavových rovnic v okamžicích vzorkování. Přičemž platí, že spojité stavy hybridního systému se mění mezi

okamžiky vzorkování a v časech vzorkování jsou konstantní. To je způsobeno uvažováním nekonečně krátké doby trvání vzorkování. Oproti tomu diskrétní stavy hybridního systému se mění pouze v diskrétním čase k , který je roven času vzorkování spojitého signálu vstupujícího do diskrétní části systému. Diskrétní stavy hybridního systému se tak v průběhu mezi časy vzorkování nemění.

Jak už bylo uvedeno výše, tak se problém řešení stavových rovnic hybridního systému dělí:

- na řešení stavových rovnic mezi okamžiky vzorkování a
- na řešení stavových rovnic v časech vzorkování.

2.2.4 Řešení stavových rovnic hybridního systému mezi okamžiky vzorkování

Při řešení stavových rovnic systému mezi okamžiky vzorkování se mění pouze spojité stavy hybridního systému. Pro vývoj hybridních stavů mezi okamžiky vzorkování platí pro čas $0 < h < k$ vztah (20).

$$\mathbf{x}_v(h) = e^{A(h)} \mathbf{x}_v(0), \quad (20)$$

kde $\mathbf{x}_v(h)$ značí vektor stavů v čase před vzorkováním,
 $e^{A(h)}$ značí matici přechodů pro čas před vzorkováním,
 $\mathbf{x}_v(0)$ značí vektor počátečních podmínek stavů.

Rovnici (20) lze upravit na obecnější tvar pro čas $k < h < k+1$ na rovnici (21), která popisuje vývoj hybridních stavů mezi časy vzorkování k a $k+1$.

$$\mathbf{x}_v(h) = e^{A(h-k)} \mathbf{x}_v(k), \quad (21)$$

kde $e^{A(h-k)}$ je matice přechodů pro čas mezi vzorkováním,
 $\mathbf{x}_v(k)$ je vektor stavů v čase vzorkování k .

Nyní je třeba objasnit jak matice přechodu hybridního systému $e^{A(h)}$ vypadá pro okamžiky mezi vzorkováními. To jakým způsobem je matice přechodu tvořena pro časy mezi vzorkováními vyjadřuje (22).

$$e^{A(h)} = \begin{bmatrix} e^{A_s t} & M_{DS} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix}, \quad (22)$$

kde $e^{A_s t}$ je matice přechodu spojitého stavu hybridního systému (zde figuruje již spojité čas t místo hybridního času h , jelikož se jedná o matici přechodů spojitého stavového proměnného hybridního systému a uvádění hybridního času h by bylo zbytečné; toto zaměnění je možné, jelikož jak bylo uvedeno výše v definici hybridního času tak hybridní čas „zastupuje“ jak spojité čas tak čas diskretní),

M_{DS} je část matice A hybridního systému, která popisuje vliv diskretních stavových proměnných na spojité stavové proměnné,

I je jednotková matice o rozměru počtu diskretních stavových proměnných hybridního systému,

$\mathbf{0}$ je nulová matice doplňující matici $e^{A_s t}$ na čtvercovou matici,

Matici $e^{A_s t}$ je možné stanovit pomocí vztahu (23).

$$e^{A_s t} = L^{-1} \{ (pI_s - A_s)^{-1} \}, \quad [10] (23)$$

kde p je Laplaceův operátor,

I_s je jednotková matice o rozměru $n \times n$ (za předpokladu, že n je počet spojitého stavu hybridního systému),

A_s je submatice matice A hybridního systému popisující chování spojitého stavu hybridního systému (rozměr $n \times n$),

$L^{-1} \{ \}$ označuje zpětnou Laplaceovu transformaci.

2.2.5 Řešení stavových rovnic hybridního systému v okamžicích vzorkování

Za předpokladu, že probíhá vzorkování nekonečně krátkou dobu a zcela synchronně, tak je možné uvažovat, že se v okamžicích vzorkování mění pouze diskretní stavy a spojité stavy zůstávají neměnné. Pro vývoj hybridních stavů v čase $0 < h = k$, kde k je první vzorkování ($k = 1T$, T je perioda vzorkování) platí vztah (24).

$$\mathbf{x}_{v+}(h) = e^{VZ(h)} \mathbf{x}_v(0) \Big|_{\text{po dosazení } h=k} = e^{VZ(T)} \mathbf{x}_v(0), \quad (24)$$

kde $\mathbf{x}_{v+}(h)$ značí vektor stavů v čase vzorkování,
 $e^{VZ(h)}$ značí matici přechodů hybridního systému pro čas h , který odpovídá pro
tento případ času vzorkování T ,
 $\mathbf{x}_v(0)$ značí vektor počátečních podmínek stavů.

Rovnici (24) lze upravit na obecnější tvar pro čas $k < h = k+1$ na rovnici (25),
která popisuje vývoj hybridních stavů v čase vzorkování $k+1$ (čas k odpovídá času kT
a čas $k+1$ odpovídá času $(k+1)T$).

$$\mathbf{x}_{v+}(h) = e^{VZ(h-k)} \mathbf{x}_v(k) \Big|_{\text{po dosazení } h=k+1} = e^{VZ(T)} \mathbf{x}_v(k), \quad (25)$$

kde $\mathbf{x}_v(k)$ je vektor stavů v čase k .

Nyní je třeba objasnit, jak matice přechodu hybridního systému $e^{VZ(h)}$ vypadá
v okamžiku vzorkování. To, jakým způsobem je matice přechodu tvořena pro časy
vzorkování, vyjadřuje (26).

$$e^{VZ(h)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{SD} & e^{VZ_D(T)} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

kde

\mathbf{M}_{SD} je část matice \mathbf{A} hybridního systému, která popisuje vliv spojitéch
stavových proměnných na diskrétní stavové proměnné,

$e^{VZ_D(T)}$ je matice přechodu diskrétních stavů hybridního systému v čase
rovném periodě vzorkování T ,

\mathbf{I} je jednotková matice o rozměru počtu spojitéch stavů hybridního systému,

$\mathbf{0}$ je nulová matice doplňující rozměr matice $e^{VZ(h)}$ na matici čtvercovou.

Matici $e^{VZ_D(T)}$ je možné stanovit pomocí vztahu (27).

$$e^{VZ_D(T)} = Z^{-1} \{ (\mathbf{I}_D - z^{-1} \mathbf{E}_D)^{-1} \}, \quad [10] (27)$$

kde z^{-1} je operátor Z – transformace,

\mathbf{I}_D je jednotková matice o rozměru $r \times r$ (r je počet diskrétních stavů
hybridního systému),

E_D je submatice matice A hybridního systému popisující chování diskrétních stavů hybridního systému (rozměr $r \times r$),
 $Z^{-1}\{\}$ označuje zpětnou Z – transformaci.

2.2.6 Podrobnější rozbor řešení vývoje stavů v hybridních systémech v okolí okamžiku vzorkování

Hybridní stavy se vyvíjí podle vzatu (21) až do doby těsně před okamžikem vzorkování a ihned po provedení vzorkování. V čase vzorkování se hybridní stavy vyvíjí podle vztahu (25). Pokud se zavede čas ε , pro který platí $\varepsilon \rightarrow 0$ (ε se blíží k 0), tak je možné vývoj stavů hybridního systému popsat rovnicemi (28), (29), (30).

Rovnice pro vývoj hybridních stavů těsně před okamžikem vzorkování:

$$\mathbf{x}_{v-}(T - \varepsilon) = e^{A(T - \varepsilon)} \mathbf{x}_v(0). \quad (28)$$

Rovnice pro vývoj hybridních stavů v okamžiku vzorkování:

$$\mathbf{x}_{v+}(T) = e^{VZ(T)} \mathbf{x}_{v-}(T - \varepsilon). \quad (29)$$

Rovnice pro vývoj hybridních stavů těsně po vzorkování:

$$\mathbf{x}_{v+}(T + \varepsilon) = e^{A(T + \varepsilon)} \mathbf{x}_{v+}(T). \quad (30)$$

Tento popis je uveden pro bližší vysvětlení vývoje stavů hybridního systému. Index - značí vývoj stavů těsně před vzorkováním, index +- značí vývoj stavů v okamžiku vzorkování a index + značí vývoj stavů těsně po vzorkování.

2.2.7 Příklad 7

Je dán hybridní SISO systém, jehož přenos spojitě části je dán přenosem $F_{S1}(p)$ a přenos diskrétní části je $F_{D1}(z^{-1})$. Hybridní systém je tvořen jako regulační obvod s jedním vstupem a jedním výstupem (Obrázek 14, T označuje periodu vzorkování). Zadané přenosy jsou:

$$F_{S1}(p) = \frac{p + 6}{p^2 + 15p + 50} \quad (31)$$

$$F_{D1}(z^{-1}) = \frac{z^{-1} + 0,2z^{-2}}{1 + 0,3z^{-1} - 0,1z^{-2}} \quad (32)$$

Na vstupu hybridního systému se předpokládá konstantní vstupní signál (použije se generátor konstantního spojitého signálu uvedený výše). Úkolem je určit hodnoty hybridních stavů v časech $h_1 = 0,5$ s, $h_2 = 1$ s a $h_3 = 1,2$ s. Diskrétní stavové proměnné hybridního systému pracují s periodou vzorkování $T = 1$ s. Předpokládá se vektor počátečních podmínek $\mathbf{x}_v(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ (tento vektor odpovídá níže sestavenému vektoru $\mathbf{x}_v(h)$). Na čtvrtém místě vektoru počátečních stavů je hodnota počáteční podmínky generátoru konstantního signálu. Na třetím místě počátečního vektoru je počáteční hodnota tvarovače nultého řádu, která je v dalších časech vzorkování vždy změněna podle hodnoty stavové proměnné (stavových proměnných), která do něj vstupuje, což je patrné z *Obrázku 24*. Pro tento příklad je hodnota vstupující do tvarovače rovna rovnici $x_3(h) = 0,2d_1(h) + d_2(h)$. Mění se vždy v časech vzorkování k a po celou dobu do následujícího vzorkování se nemění – drží konstantní hodnotu (to je dáno samotnou funkcí tvarovače nultého řádu). Schéma uzavřeného obvodu včetně generátoru vstupního signálu je na *Obrázku 24*.

Pro hybridní vektor stavů $\mathbf{x}_v(h)$, který je ve tvaru $\mathbf{x}_v(h) = [\mathbf{x}(t) \ \mathbf{d}(k)]^T = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t) \ d_1(k) \ d_2(k)]^T$, platí stavové rovnice pro uzavřený obvod (33) a (34). Stavová proměnná $x_3(t)$ realizuje tvarovač nultého řádu a stavová proměnná $x_4(t)$ popisuje generátor konstantního spojitého signálu.

Stavové rovnice uzavřeného obvodu:

První stavová rovnice

$$\dot{\mathbf{x}}_v(h) = \mathbf{A}\mathbf{x}_v(h) \quad (33)$$

Druhá stavová rovnice

$$\mathbf{y}(h) = \mathbf{C}\mathbf{x}_v(h) \quad (34)$$

Matice A a C pro uzavřený hybridní obvod z *Obrázku 24* jsou následující:

$$A = \left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -50 & -15 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 0 & 1 & 0,1 & -0,3 \end{array} \right]$$

$$C = [6 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Čtvrtý sloupec matice A naznačuje vztah generátoru vstupní funkce vzhledem k ostatním hybridním stavovým proměnným. Čtvrtý řádek ukazuje vliv ostatních stavových proměnných na generátor vstupní funkce, v tomto řádku jsou samé nuly, což je logické, protože do generátoru nevstupují žádné stavové proměnné. Obdobně čtvrtý prvek v matici C ukazuje vliv generátoru funkce na výstup hybridního systému.

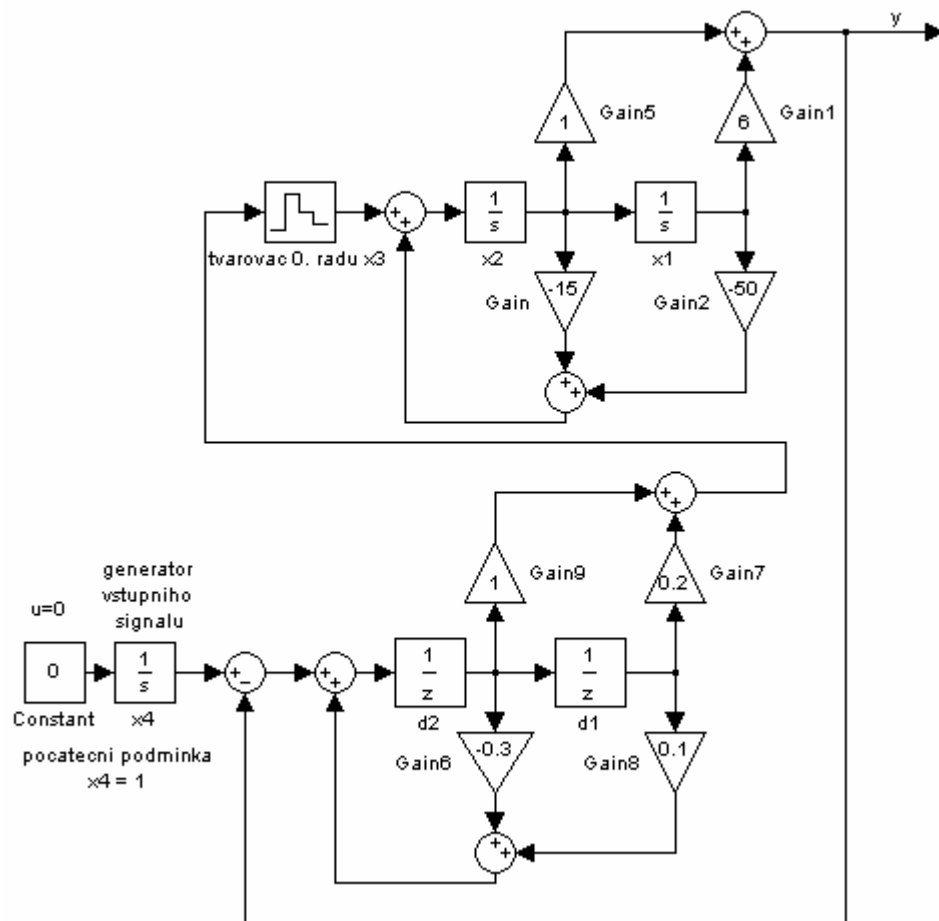
Rozdělení matice A naznačené čárkovanou čarou odpovídá vztahu (6), který naznačuje rozdělení matice A na jednotlivé submatice A_S , E_D , M_{SD} , M_{DS} . Rozdělení matice C naznačené čárkovanou čarou odpovídá vztahu (8), který naznačuje rozdělení matice C na jednotlivé submatice C_S a C_D .

Nyní jsou již známy matice A a C uzavřeného obvodu a je možné začít počítat řešení rovnic (33) a (34) pro zadané časy pomocí výše uvedeného rozboru řešení.

Řešení pro čas $h_1 = 0,5$ s

Jelikož je v zadání zadána perioda vzorkování $T = 1$ s, tak se bude počítat řešení stavové rovnice (33) podle vztahu (20). To je patrné z toho, že se hybridní systém nachází mezi okamžiky vzorkování.

Aby bylo možné vypočítat řešení první stavové rovnice pro zadaný čas, tak je nutné sestavit matici přechodů hybridního systému mezi okamžiky vzorkování $e^{A(h)}$. Sestavení matice $e^{A(h)}$ je provedeno pomocí vztahu (22).



Obrázek 24: Stavové schéma hybridního systému z Příkladu 7

Prozatím není známa matice přechodu spojitých stavů hybridního systému e^{Ast} . Ta se určí pomocí vztahu (23). Stanovená matice e^{Ast} je uvedena v (35).

$$e^{Ast} = L^{-1}\{(pI_S - A_S)^{-1}\} =$$

$$= L^{-1}\left\{ \left(p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -50 & -15 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \right\} = L^{-1}\left\{ \begin{bmatrix} p & -1 & 0 & 0 \\ 50 & p+15 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}^{-1} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1e^{-10t} + 2e^{-5t} & 0,4e^{-7,5t} \sinh(2,5t) & 0,02 - 0,04e^{-5t} + 0,02e^{-10t} & 0 \\ -20e^{-7,5t} \sinh(2,5t) & 2e^{-10t} - e^{-5t} & 0,4e^{-7,5t} \sinh(2,5t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Matice e^{Ast} byla stanovena pomocí MATLABu za použití příkazu `ilaplace(F)`, tento příkaz provádí výpočet inverzní Laplaceovi transformace. Nyní je již možné pomocí vztahu (22) stanovit matici $e^{A(h)}$. Ve vztahu (36) je již uveden hybridní čas h , jelikož je zde již sestavena matice přechodu $e^{A(h)}$ mezi okamžiky vzorkování a nejedná se již pouze o její spojitou část e^{Ast} .

$$e^{A(h)} = \begin{bmatrix} e^{Ast} & M_{DS} \\ \mathbf{0} & I \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1e^{-10h} + 2e^{-5h} & 0,4e^{-7,5h}\sinh(2,5h) & 0,02 - 0,04e^{-5h} + 0,02e^{-10h} & 0 & 0 & 0 \\ -20e^{-7,5h}\sinh(2,5h) & 2e^{-10h} - e^{-5h} & 0,4e^{-7,5h}\sinh(2,5h) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Řešení první stavové rovnice (33) pro čas $h_1 = 0,5$ s mezi časy vzorkování je uvedeno v (37).

$$\mathbf{x}_v(h) = e^{A(h)} \mathbf{x}_v(0) =$$

$$= \begin{bmatrix} -1e^{-10h} + 2e^{-5h} & 0,4e^{-7,5h}\sinh(2,5h) & 0,02 - 0,04e^{-5h} + 0,02e^{-10h} & 0 & 0 & 0 \\ -20e^{-7,5h}\sinh(2,5h) & 2e^{-10h} - e^{-5h} & 0,4e^{-7,5h}\sinh(2,5h) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

po dos. za $h = 0,5$ s

(37)

Řešení druhé stavové proměnné pro čas h_1 je již jednoduché a druhá stavová rovnice se řeší dosazením výsledku z první stavové rovnice (37) do (34). Řešení druhé stavové rovnice pro $h_1 = 0,5$ s je v (38).

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}_v(t) = \\ &= [6 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \times [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

Výsledkem je řešení první stavové rovnice pro čas h_1 uvedené v (37) a druhé stavové rovnice uvedené v (38). Z výsledků je patrné, že na výstupu hybridního systému se za čas $h_1 = 0,5$ s neobjeví žádný signál, což je logické, jelikož tento signál ani nemohl projít diskretní částí hybridního systému, protože nenastalo ještě žádné vzorkování.

Řešení pro čas $h_2 = 1$ s

V čase h_2 se systém nachází v čase vzorkování. Z toho je patrné, že hodnoty hybridních stavů v tomto čase určíme podle vztahu (24). Mění se pouze diskretní stavy a spojité stavy zůstávají konstantní.

Pro výpočet hodnot stavových proměnných v čase h_2 je potřeba stanovit matici přechodu hybridního systému v okamžicích vzorkování $e^{\mathbf{VZ}(h)}$. Aby bylo možné sestavit tuto matici, tak je potřeba stanovit nejdříve její submatici $e^{\mathbf{VZ}_D(T)}$, což je matice přechodů diskretních stavů hybridního systému. Matice $e^{\mathbf{VZ}_D(T)}$ se dá stanovit podle vztahu (27).

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{VZ}_D(T)} &= \mathbf{Z}^{-1} \{ (\mathbf{I}_D - z^{-1}\mathbf{E}_D)^{-1} \} = \\ &= \mathbf{Z}^{-1} \left\{ \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - z^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,1 & -0,3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \right\} = \mathbf{Z}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -z^{-1} \\ -0,1z^{-1} & 1+0,3z^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{7} \left(-\frac{1}{2} \right)^k + \frac{5}{7} \left(\frac{1}{5} \right)^k & -\frac{10}{7} \left(-\frac{1}{2} \right)^k + \frac{10}{7} \left(\frac{1}{5} \right)^k \\ -\frac{1}{7} \left(-\frac{1}{2} \right)^k + \frac{1}{7} \left(\frac{1}{5} \right)^k & \frac{5}{7} \left(-\frac{1}{2} \right)^k + \frac{2}{7} \left(\frac{1}{5} \right)^k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (39)$$

Nyní je již možné pomocí vztahu (26) stanovit matici $e^{VZ(h)}$.

$$e^{VZ(h)} = \begin{bmatrix} I & \mathbf{0} \\ M_{SD} & e^{VZ_D(T)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{2}\right)^h + \frac{5}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^h & -\frac{10}{7}\left(-\frac{1}{2}\right)^h + \frac{10}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^h \\ -6 & -1 & 0 & 1 & -\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{2}\right)^h + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^h & \frac{5}{7}\left(-\frac{1}{2}\right)^h + \frac{2}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^h \end{bmatrix} \quad (40)$$

Řešení rovnice (39) lze stanovit pomocí příkazu v MATLABu `iztrans(F)`, tento příkaz provádí výpočet inverzní Z-transformace. Řešení první stavové rovnice (33) pro čas $h_2 = 1 \text{ s} = T$ je uvedeno v (41).

$$\mathbf{x}_{v+}(h) = e^{VZ(h)} \mathbf{x}_v(0) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{2}\right)^h + \frac{5}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^h & -\frac{10}{7}\left(-\frac{1}{2}\right)^h + \frac{10}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^h \\ -6 & -1 & 0 & 1 & -\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{2}\right)^h + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^h & \frac{5}{7}\left(-\frac{1}{2}\right)^h + \frac{2}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^h \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{dos. } h=T=1\text{s}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Řešení druhé stavové proměnné pro čas h_2 je již jednoduché a druhá stavová rovnice se řeší dosazením výsledku první stavové rovnice (41) do (34). Řešení druhé stavové rovnice pro h_2 je v (42).

$$y(h) = Cx_v(h) = [6 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \times [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1]^T = 0 \quad (42)$$

V čase ihned po vzorkování (při nekonečně rychlém vzorkování je možné uvažovat, že v čase vzorkování) se mění hodnota stavu x_3 (stav reprezentující tvarovač 0. řádu) na hodnotu získanou přepočtem jeho počáteční podmínky. Tento přepočet je realizován v další části výpočtu.

Řešení pro čas $h_3 = 1,2$ s

Pro řešení stavových rovnic pro čas h_3 se vychází z toho, že čas se opět nachází mezi okamžiky vzorkování a díky tomu se výpočet provádí pomocí vztahu (21). Matici $e^{A(h)}$ je již známa (pouze za h se dosadí $h - k$) a je uvedena ve vztahu (36). Za vektor $x_v(k)$ se dosadí vektor vypočtený v čase posledního vzorkování, což je pro tento případ $x_v(1)$, přičemž se nesmí zapomenout, že v systému je tvarovač nultého řádu (3. spojitá stavová proměnná) a pro jeho hodnotu platí vztah uvedený v úvodu řešení úlohy. Tento vztah je $x_3(h) = 0,2d_1(h) + d_2(h)$ a lze jej zjistit ze schématu ve stavovém prostoru pro tento příklad (Obrázek 24).

Přepočet počáteční podmínky tvarovače nultého řádu pro čas T je uveden v (43).

$$x_3(h) = 0,2d_1(h) + d_2(h) \Big|_{\text{pro } h=1} = 0,2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1 \quad (43)$$

Po této úpravě stavového vektoru (dosazení hodnoty z (43) na příslušné místo stavového vektoru) pro čas $h_2 = T = 1$ s je možné stanovit pomocí (21) hodnotu stavů hybridního systému pro čas h_3 . Výpočet je uveden v (44).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_v(h) &= e^{A(h)} \mathbf{x}_v(1) = \\
 &= \begin{bmatrix} -1e^{-10h} + 2e^{-5h} & 0,4e^{-7,5h} \sinh(2,5h) & 0,02 - 0,04e^{-5h} + 0,02e^{-10h} & 0 & 0 & 0 \\ -20e^{-7,5h} \sinh(2,5h) & 2e^{-10h} - e^{-5h} & 0,4e^{-7,5h} \sinh(2,5h) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \\
 &\times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ po dosazení } h = h_3 - T = 0,2 \text{ s} = \begin{bmatrix} 0,008 \\ 0,047 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (44)
 \end{aligned}$$

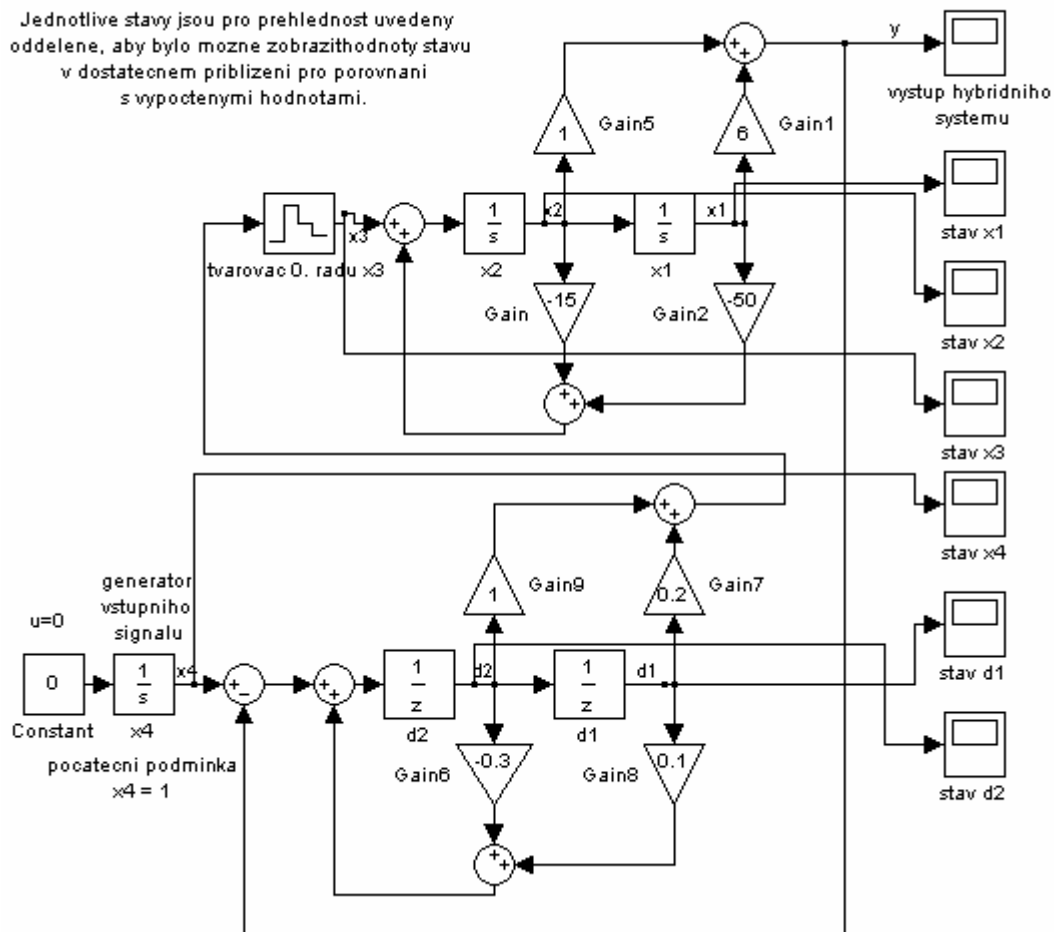
Řešení druhé stavové proměnné pro čas h_3 je již jednoduché a druhá stavová rovnice se řeší dosazením výsledku první stavové rovnice (44) do (34). Toto řešení pro h_3 je v (45).

$$\mathbf{y}(h) = \mathbf{C} \mathbf{x}_v(h) = [6 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \times \begin{bmatrix} 0,008 \\ 0,047 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0,095 \quad (45)$$

Výpočet by se tak dal počítat pro jakékoli další hodnoty časů, pro které by bylo potřeba určit hodnoty stavů hybridního systému. Výpočet pro čas h_3 byl ukázán z důvodu potřeby úpravy stavového vektoru v čase T , protože je v systému přítomen tvarovač nultého řádu. Pro výpočet při dalším vzorkování by se muselo postupovat tak, že by se zjistily hodnoty spojitých stavů těsně před tímto vzorkováním a posléze by se vypočetly hodnoty diskretních stavů v čase vzorkování, jinak by totiž neodpovídaly hodnoty spojitých stavů svým skutečným hodnotám – odůvodnění je dáno částí 2.2.6 *Podrobnější rozbor řešení vývoje stavů v hybridních systémech v okolí okamžiku vzorkování.*

Jednotlivé vypočtené hodnoty stavů v daných časech je možné ověřit pomocí simulace. Simulace byla provedena v prostředí MATLAB Simulink. Sestavené stavové schéma hybridního systému z **Příkladu 7** je uvedené na *Obrázku 25*. Grafy průběhů jednotlivých stavů jsou uvedeny na *Obrázku 26*. Na tomto obrázku jsou rovněž vyznačeny hodnoty stavů v časech h_1 , h_2 a h_3 . Hodnoty jednotlivých stavů získané ze simulace jsou zapsány pro srovnání v obdobných vektorech jako jsou vektory vypočtených stavů v **Příkladu 7**.

Schema pro overeni hodnot stavu vypoctenych v prikkladu 7



Obrázek 25: Stavové schéma hybridního systému z Příkladu 7 pro zjištění hodnot stavů v daných časech

Hodnoty stavů hybridního systému a výstupu hybridního systému v čase $h_1 = 0,5$ s získané ze simulace jsou uvedeny v (46) a (47).

$$\mathbf{x}_v(0,5) = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ d_1 \ d_2]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T \quad (46)$$

$$y(0,5) = 0 \quad (47)$$

Tyto hodnoty stavů a výstupu hybridního systému z **Příkladu 7** jsou shodné s hodnotami vypočtenými uvedenými v (37) a (38).

Hodnoty stavů hybridního systému a výstupu hybridního systému v čase $h_2 = 1$ s získané ze simulace jsou uvedeny v (48) a (49).

$$\mathbf{x}_v(1) = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ d_1 \ d_2]^T = [0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]^T \quad (48)$$

$$y(1) = 0 \quad (49)$$

Tyto hodnoty stavů a výstupu hybridního systému z **Příkladu 7** jsou shodné s hodnotami vypočtenými uvedenými v (41) a (42), za předpokladu, že je již uvažována změna počáteční podmínky tvarovače 0. řádu (stav x_3) – při nekonečně rychlém vzorkování dochází k této změně přímo v čase vzorkování.

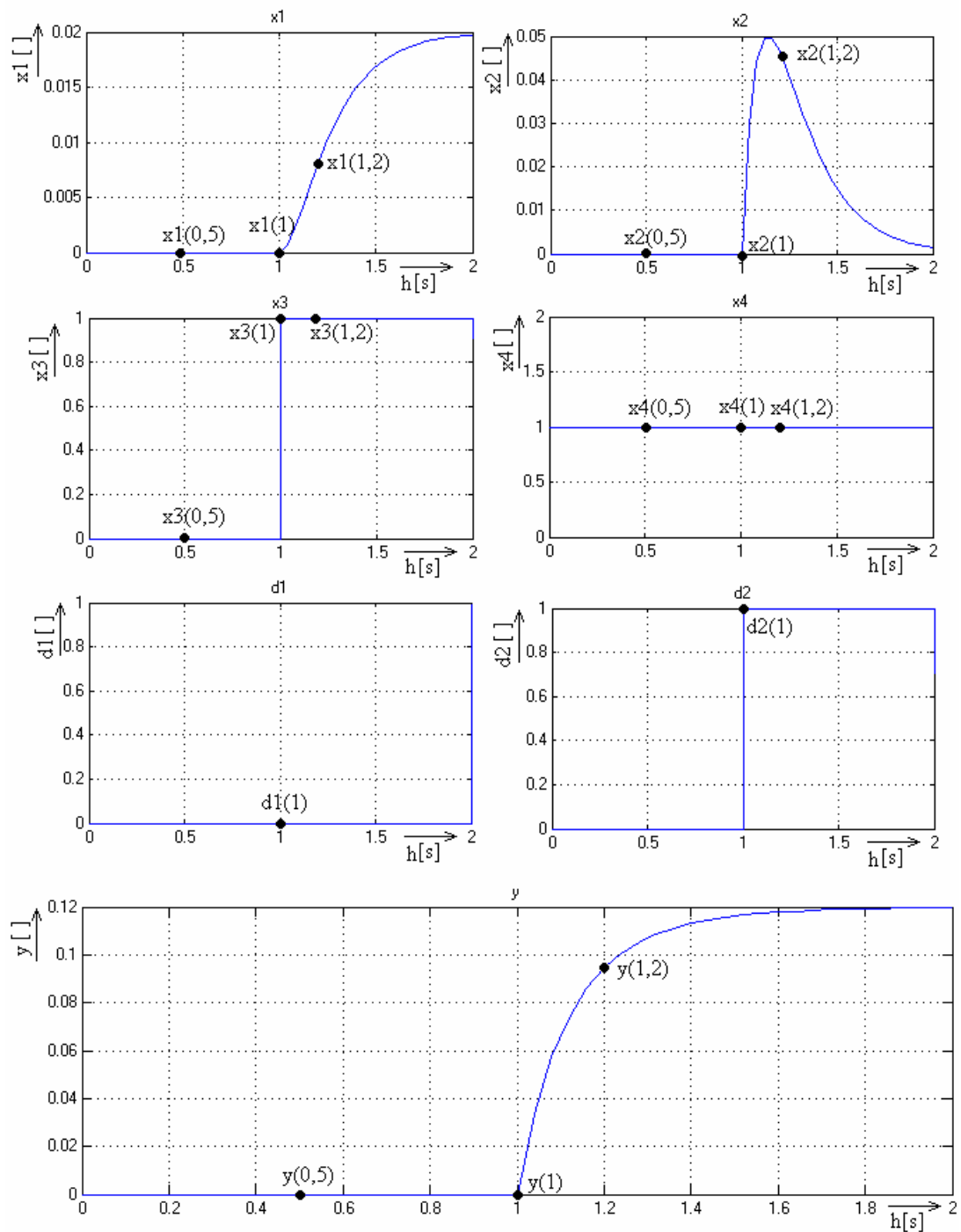
Hodnoty stavů hybridního systému a výstupu hybridního systému v čase $h_3 = 1,2$ s získané ze simulace jsou uvedeny v (50) a (51).

$$\mathbf{x}_v(0,5) = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ d_1 \ d_2]^T = [0,008 \ 0,047 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1]^T \quad (50)$$

$$y(0,5) = 0,095 \quad (51)$$

Tyto hodnoty stavů a výstupu hybridního systému z **Příkladu 7** jsou shodné s hodnotami vypočtenými uvedenými v (44) a (45) po provedení obdobného zaokrouhlení hodnot stavů a výstupu ze simulace hybridního systému z **Příkladu 7**.

Díky simulaci bylo ověřeno, že získané matice přechodů (mezi okamžiky vzorkování – (36) a v okamžicích vzorkování – (40)) jsou sestaveny správně a výpočty provedené na jejich základě jsou rovněž správné.



Obrázek 26: Průběhy jednotlivých stavů ze simulačního schématu na Obrázku 25

3. ANALÝZA HYBRIDNÍCH SYSTÉMŮ

V této kapitole jsou uvedeny možnosti analýzy hybridních systémů z kapitoly dva. Analýza je prováděna ve stavovém prostoru. Z hlediska analýzy jsou řešeny otázky stanovení říditelnosti a dosažitelnosti hybridních systémů, dále je řešena otázka pozorovatelnosti a rekonstruovatelnosti hybridních systémů, následně je proveden rozbor stability hybridních systémů a v neposlední řadě jsou stanoveny hodnoty ustálených stavů hybridního systému.

Při řešení hybridních systémů v této kapitole je provedena diskretizace spojitě části hybridního systému a je získán její diskrétní ekvivalent. Z toho vyplývá, že spojitá část hybridních systémů, které je možné řešit pomocí uvedených postupů v této kapitole musí splňovat Shannon – Kotelnikův teorém [10], který říká: *jestliže v procesu vzorkování nemá dojít ke ztrátě informace, musí frekvence vzorkování ω_S a maximální frekvence ω_M obsažená ve spektru vzorkované funkce vyhovovat podmínce $\omega_S \geq 2\omega_M$. Z toho vyplývá, že perioda vzorkování T musí být alespoň dvakrát menší než je nejmenší časová konstanta T_i spojitě části hybridního systému. V praxi toto však může být nedostačující a volí se vzorkování vyšší frekvencí než udává Shannon – Kotelnikův teorém (minimální požadavek). Pokud je splněn Shannon – Kotelnikův teorém, tak při vzorkování nedochází ke ztrátě informace a diskrétní ekvivalent odpovídá svému spojitému vzoru, ze kterého byl pomocí vzorkování získán.*

3.1 URČENÍ ŘIDITELNOSTI (DOSAZITELNOSTI) STAVŮ HYBRIDNÍCH SYSTÉMŮ

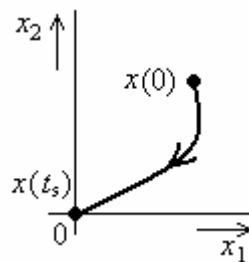
Nejprve je třeba definovat pojmy říditelnosti a dosažitelnosti stavu hybridního systému. Na základě těchto definic budou definovány vztahy pro určení říditelnosti a dosažitelnosti hybridních systémů.

3.1.1 Definice říditelnosti systému [10]

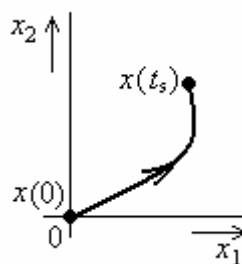
Systém je v určitém prostoru říditelný, jestliže pro každý bod v tomto prostoru, tedy stav systému $x(0)$, existuje takové řízení, které v konečném čase t_s převede systém do stavu $x(t_s) = 0$. Tuto definici ukazuje *Obrázek 27*. Pro hybridní systémy tato definice platí za předpokladu, že se zamění spojité čas t_s za hybridní čas h .

3.1.2 Definice dosažitelnosti systému [10]

Stavový prostor systému (například stav $x(t_s)$) je dosažitelný, jestliže pro každý jeho bod existuje takové řízení, pomocí něž je systém ze stavu $x(0) = 0$ do tohoto stavu $x(t_s)$ přiveden v konečném čase t_s . Tuto definici ukazuje *Obrázek 28*. Pro hybridní systémy tato definice platí za předpokladu, že se zamění spojité čas t_s za hybridní čas h .



Obrázek 27: Grafické znázornění definice říditelnosti systému



Obrázek 28: Grafické znázornění definice dosažitelnosti systému

Pokud je systém reverzibilní, tak je možné obrácením času pojmy říditelnosti a dosažitelnosti zaměnit. Reverzibilní systém je systém, jehož matice vnitřních vazeb systému A (spojité systémy) nebo matice E (diskrétní systémy) je regulární.

Regulární matice je matice, pro kterou platí $\det(A) \neq 0$, nebo z tohoto vyplývající podmínka, že existuje inverze matice A (A^{-1}). Dále jsou zde řešeny pouze systémy reverzibilní, což znamená, že je možné pojmy říditelnosti a dosažitelnosti systému zaměnit.

3.1.3 Stanovení říditelnosti (dosažitelnosti) hybridního systému

Jelikož jsou hybridní systémy ze své podstaty složeny ze spojité části a ryze diskrétní části, tak se otázka stanovení říditelnosti (dosažitelnosti) hybridních systémů musí řešit jak v časech vzorkování, tak mezi časy vzorkování.

3.1.3.1 Stanovení říditelnosti (dosažitelnosti) v časech vzorkování

V časech vzorkování se říditelnost (dosažitelnost) stanovuje tak, že se provede diskretizace spojité části hybridního systému (na shodnou periodu vzorkování jako má ryze diskrétní část hybridního systému) a provede se její spojení s ryze diskrétní částí hybridního systému. Spojení těchto částí (diskretizované spojité části a diskrétní části) se provede pomocí pravidel blokové algebry uváděných například v [10], [13]. Po získání výsledného systému vzniklého spojením diskrétní a diskretizované části se provede samotný výpočet říditelnosti (dosažitelnosti) v okamžicích vzorkování pomocí níže uvedeného vztahu. Jelikož v systému vzniklém spojením diskrétní a diskretizované části hybridního systému se již vyskytují pouze diskrétní stavové proměnné, tak je možné stanovovat říditelnost (dosažitelnost) tohoto systému pomocí vztahu pro diskrétní systémy. Vztah pro stanovení říditelnosti diskrétního systému (52) a jeho odvození je možné nalézt v různých literárních pramenech například v [10], [13].

$$H_D = [B \quad EB \quad E^2B \quad \dots \quad E^{n-1}B], \quad [10] \quad (52)$$

kde H_D je matice říditelnosti (dosažitelnosti) diskrétního systému,

B je obecné značení matice B diskrétního systému,

E je obecné značení matice E diskrétního systému.

Pokud má matice H_D hodnost n , tak je diskrétní systém říditelný (dosažitelný).

Pakliže je splněna podmínka hodnosti matice H_D , pro systém vzniklý z hybridního systému diskretizací spojité části hybridního systému a jejím spojením s diskrétní částí hybridního systému pomocí pravidel blokové algebry, tak je možné tvrdit, že hybridní systém z něhož tento systém vznikl, je v okamžicích vzorkování říditelný (dosažitelný).

3.1.3.2 Stanovení říditelnosti (dosažitelnosti) mezi okamžiky vzorkování

Jelikož je v hybridním systému obsažena ryze diskrétní část, tak není možné získávat hodnoty a informace o stavech této části hybridního systému mezi okamžiky vzorkování – hodnota diskrétních stavů je definována pouze v okamžicích vzorkování. Nicméně z hlediska říditelnosti (dosažitelnosti) je možné zkoumat spojitou část hybridního systému. Vztah pro stanovení říditelnosti (dosažitelnosti) spojitěho systému (53) a jeho odvození je možné nalézt v různých literárních pramenech například v [10], [13].

$$H_S = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B], \quad [10] \ (53)$$

kde H_S je matice říditelnosti (dosažitelnosti) spojitěho systému,
 B je obecné značení matice B spojitěho systému,
 A je obecné značení matice A spojitěho systému.

Pokud má matice H_S hodnost n , tak je spojitý systém říditelný (dosažitelný).

Pokud je splněna podmínka hodnosti matice H_S pro spojitou část hybridního systému, tak je spojitá část hybridního systému říditelná (dosažitelná) mezi okamžiky vzorkování.

3.1.4 Příklad 8

Příklad říditelného (dosažitelného) hybridního systému

Pro hybridní systém z **Příkladu 7** je úkolem stanovit, zda je tento hybridní systém říditelný (dosažitelný) v okamžicích vzorkování a mezi okamžiky vzorkování.

Důležité části ze zadání **Příkladu 7**:

$$F_{S1}(p) = \frac{p+6}{p^2+15p+50} \quad (31)$$

$$F_{D1}(z^{-1}) = \frac{z^{-1}+0,2z^{-2}}{1+0,3z^{-1}-0,1z^{-2}} \quad (32)$$

Perioda vzorkování $T = 1$ s. Schéma propojení jednotlivých částí hybridního systému je uvedeno na *Obrázku 14*.

Stanovení říditelnosti (dosažitelnosti) v okamžicích vzorkování

Aby bylo možné stanovit říditelnost (dosažitelnost) hybridního systému je zapotřebí provést diskretizaci jeho spojité části a její následné spojení s diskrétní částí hybridního systému. Ze zadaného přenosu (31) jsou získány matice A_{SS} , B_{SS} , C_{SS} a D_{SS} .

$$A_{SS} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -50 & -15 \end{bmatrix} \quad B_{SS} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_{SS} = [6 \quad 1] \quad D_{SS} = [0] \quad (54)$$

Obdobně ze zadaného přenosu (32) jsou získány matice E_{DS} , B_{DS} , C_{DS} a D_{DS} .

$$E_{DS} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,1 & -0,3 \end{bmatrix} \quad B_{DS} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C_{DS} = [0,2 \quad 1] \quad D_{DS} = [0] \quad (55)$$

Diskretizací matic popisujících spojitou část hybridního systému (54) a pomocí periody vzorkování $T = 1$ s a tvarovače 0. řádu, je získán diskretizovaný systém odpovídající spojité části hybridního systému. Pro diskretizaci spojité části

bylo využito příkazu v MATLABu $[E_{sd}, B_{sd}, C_{sd}, D_{sd}] = c2dm(A_{ss}, B_{ss}, C_{ss}, D_{ss}, T, 'zoh')$. Získané matice diskretizované spojité části jsou uvedeny v (56).

$$E_{SD} = \begin{bmatrix} 0,0134 & 0,0013 \\ -0,0669 & -0,0066 \end{bmatrix} B_{SD} = \begin{bmatrix} 0,0197 \\ 0,0013 \end{bmatrix} C_{SD} = [6 \quad 1] D_{SD} = [0] \quad (56)$$

Nyní je již možné připojit ke spojování diskretizované spojité části hybridního systému a diskrétní části hybridního systému. Podle *Obrázku 14* jsou tyto systémy spojeny tak, že první je diskrétní část a na její výstup je připojena spojité část hybridního systému. Tyto části se tedy spojí jako sériově řazené systémy. Pro spojení sériově řazených systémů platí vztahy v (57) získané z [11], za předpokladu, že stavový vektor je složen ve formě $x(k+1) = [x_{DS}(k) \quad x_{SD}(k)]^T$.

$$E_{SERIOVE} = \begin{bmatrix} E_{DS} & 0 \\ B_{SD}C_{DS} & E_{SD} \end{bmatrix}, B_{SERIOVE} = \begin{bmatrix} B_{DS} \\ B_{SD}D_{DS} \end{bmatrix}, C_{SERIOVE} = [D_{SD}C_{DS} \quad C_{SD}],$$

$$D_{SERIOVE} = [D_{SD}D_{DS}] \quad (57)$$

Matice získané po aplikaci vztahů v (57) jsou uvedeny v (58).

$$E_{SERIOVE} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & -0,3 & 0 & 0 \\ 0,0039 & 0,0197 & 0,0134 & 0,0013 \\ 0,0003 & 0,0013 & -0,0669 & -0,0066 \end{bmatrix}, B_{SERIOVE} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{SERIOVE} = [0 \quad 0 \quad 6 \quad 1], D_{SERIOVE} = [0] \quad (58)$$

Takto získané matice již téměř popisují hybridní systém z *Obrázku 14* po diskretizaci spojité části. Proto, aby takto získaný systém odpovídal systému z *Obrázku 14*, je ještě zapotřebí zahrnout do systému popsaneho (58) zpětnou vazbu, ve které je přenos roven jedné. Z matic v (58) je vidět, že záporná zpětná vazba z výstupu na vstup ovlivní druhý řádek matice $E_{SERIOVE}$ a to proto, že vstup vstupuje do systému pouze do druhé stavové proměnné a na vstup je přivedena záporná

hodnota výstupu ($-C_{SERIOVE}$). Výsledné matice popisující diskretizovanou spojitou část hybridního systému spojenou s diskretní částí hybridního systému, které jsou nutné pro výpočet říditelnosti (dosažitelnosti), jsou uvedeny v (59). Změna je pouze v matici E_V , ostatní matice jsou stejné jako v (59).

$$E_V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & -0,3 & -6 & -1 \\ 0,0039 & 0,0197 & 0,0134 & 0,0013 \\ 0,0003 & 0,0013 & -0,0669 & -0,0066 \end{bmatrix}, B_V = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C_V = [0 \ 0 \ 6 \ 1],$$

$$D_V = [0] \quad (59)$$

Nyní je již možné matice E_V a B_V dosadit do vztahu (52) a určit tak říditelnost (dosažitelnost) hybridního systému v okamžicích vzorkování (možné je i použít příkaz pro MATLAB $\text{vd}=\text{ctrb}(E_V, B_V)$). Matice říditelnosti (dosažitelnosti) v okamžicích vzorkování je uvedena v (60).

$$H_D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -0,3 & 0,0703 \\ 1 & -0,3 & 0,0703 & -0,0394 \\ 0 & 0,0197 & -0,0017 & 0,0002 \\ 0 & 0,0013 & -0,0015 & 0,0001 \end{bmatrix} \quad (60)$$

Pro určení hodnoty matice H_D byl použit příkaz pro program MATLAB, který je $\text{rank}(H_D)$ a vrací hodnotu matice H_D , další možností jak určit hodnotu matice H_D je její úprava na schodový tvar. Hodnota matice H_D je 4, a proto je hybridní systém z **Příkladu 8** říditelný (dosažitelný) v okamžicích vzorkování.

Stanovení říditelnosti (dosažitelnosti) mezi okamžiky vzorkování

Jak již byl řečeno výše, tak mezi okamžiky vzorkování je možné pouze stanovit říditelnost (dosažitelnost) spojitě části hybridního systému. Matice popisující spojitý subsystém jsou uvedeny v (54). Z těchto matic je již možné stanovit říditelnost (dosažitelnost) hybridního systému mezi okamžiky vzorkování pomocí

vztahu (53). Matice říditelnosti (dosažitelnosti) mezi okamžiky vzorkování je uvedena v (61).

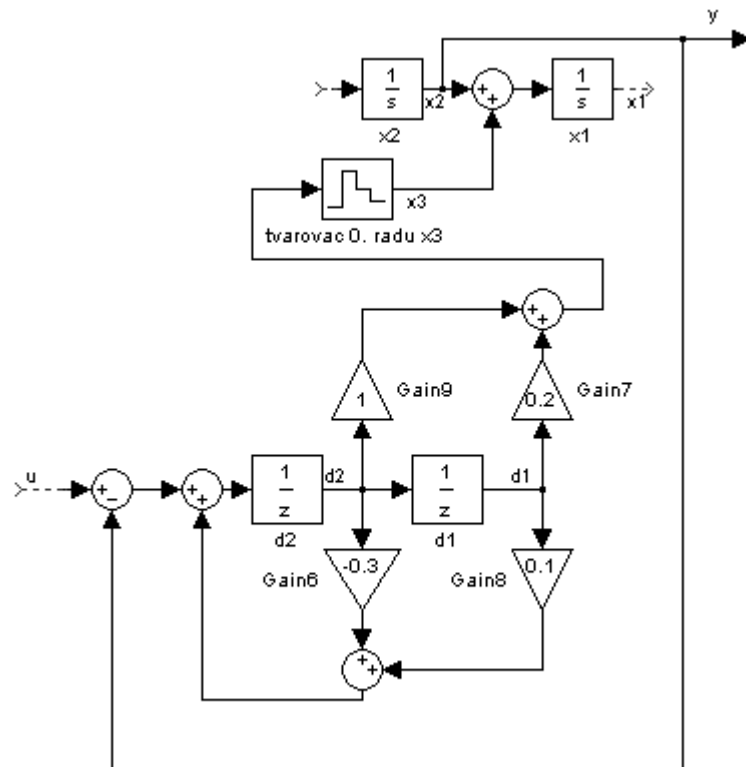
$$\mathbf{H}_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -15 \end{bmatrix} \quad (61)$$

Hodnost matice \mathbf{H}_s je přímo vidět z její struktury (schodovitý tvar) a je rovna 2. Z toho vyplývá, že spojitá část hybridního systému z **Příkladu 8** je říditelná (dosažitelná) mezi okamžiky vzorkování.

3.1.5 Příklad 9

Příklad neříditelného (nedosažitelného) systému

Stavové schéma popisující hybridní systém z **Příkladu 9** je uvedeno na **Obrázku 29**. Diskrétní část pracuje s periodou vzorkování $T = 0,1$ s.



Obrázek 29: Stavové schéma hybridního systému z **Příkladu 9** a **Příkladu 11**

Úkolem je stanovit, zda je tento hybridní systém říditelný (pozorovatelný) v okamžicích vzorkování a mezi okamžiky vzorkování.

Stanovení říditelnosti (dosažitelnosti) v okamžicích vzorkování

Aby bylo možné stanovit říditelnost (dosažitelnost) hybridního systému je zapotřebí provést diskretizaci jeho spojité části a její následné spojení s diskrétní částí hybridního systému. Ze zadaného stavového schématu na *Obrázku 29* jsou získány matice A_{SS} , B_{SS} , C_{SS} a D_{SS} popisující spojitou část hybridního systému uvedené v (62).

$$A_{SS} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B_{SS} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} C_{SS} = [0 \quad 1] D_{SS} = [0] \quad (62)$$

Ze stejného stavového schématu jsou získány matice E_{DS} , B_{DS} , C_{DS} a D_{DS} popisující diskrétní část hybridního systému – (63).

$$E_{DS} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,1 & -0,3 \end{bmatrix} B_{DS} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} C_{DS} = [0,2 \quad 1] D_{DS} = [0] \quad (63)$$

Diskretizací matic popisujících spojitou část hybridního systému (62) s periodou vzorkování $T = 0,1$ s a uvažováním tvarovače 0. řádu, je získán diskretizovaný systém odpovídající spojité části hybridního systému. Pro diskretizaci spojité části je opět využito příkazu `c2dm` pro program MATLAB. Získané matice diskretizované spojité části jsou uvedeny v (64).

$$E_{SD} = \begin{bmatrix} 1 & 0,1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} B_{SD} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix} C_{SD} = [0 \quad 1] D_{SD} = [0] \quad (64)$$

Nyní je již možné připojit ke spojování diskretizované spojité části hybridního systému a diskrétní části hybridního systému. Podle stavového schématu na *Obrázku 29* jsou tyto systémy spojeny tak, že první je diskrétní část a na její výstup je připojena spojité část hybridního systému. Tyto části se tedy spojí jako sériově řazené systémy. Vztahy pro spojení sériově řazených systémů byly již využívány v **Příkladu 8** a jsou uvedeny v (57), za předpokladu stavového vektoru ve

formě $\mathbf{x}(k+1) = [\mathbf{x}_{DS}(k) \ \mathbf{x}_{SD}(k)]^T$. Dále se ještě v systému vyskytuje záporná zpětná vazba s přenosem rovným jedné. Tato záporná zpětná vazba vstupuje do stavové proměnné d_2 . Výsledné matice popisující diskretizovanou spojitou část hybridního systému spojenou s diskrétní částí hybridního systému nutné pro výpočet říditelnosti (dosažitelnosti) jsou uvedeny v (65). Bližší popis sestavení výsledných matic je proveden v **Příkladu 8**, kde je spojitá a diskrétní část hybridního systému propojena obdobným způsobem.

$$\mathbf{E}_V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & -0,5 & 0 & -1 \\ 0,05 & 0 & 1 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_V = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_V = [0 \ 0 \ 0 \ 1], \mathbf{D}_V = [0] \quad (65)$$

Matice \mathbf{E}_V a \mathbf{B}_V je již možné dosadit do vztahu (52) a určit tak říditelnost (dosažitelnost) hybridního systému v okamžicích vzorkování. Matice říditelnosti (dosažitelnosti) v okamžicích vzorkování je uvedena v (66).

$$\mathbf{H}_D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -0,5 & 0,35 \\ 1 & -0,5 & 0,35 & -0,225 \\ 0 & 0 & 0,05 & 0,025 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (66)$$

Hodnost matice \mathbf{H}_D je přímo vidět ze své struktury (obsahuje nulový řádek a po přehození 1. a 2. řádku je ve schodovém tvaru) a je rovna 3. Proto není hybridní systém z **Příkladu 9** říditelný (dosažitelný) v okamžicích vzorkování.

Stanovení říditelnosti (dosažitelnosti) mezi okamžiky vzorkování

Mezi okamžiky vzorkování je možné stanovit pouze říditelnost (dosažitelnost) spojitě části hybridního systému. Matice popisující spojitý subsystém jsou uvedeny v (63). Z těchto matic je již možné stanovit říditelnost (dosažitelnost)

hybridního systému mezi okamžiky vzorkování pomocí vztahu (53). Matice říditelnosti (dosažitelnosti) mezi okamžiky vzorkování je uvedena v (67).

$$\mathbf{H}_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (67)$$

Hodnost matice \mathbf{H}_s je přímo vidět ze struktury a je rovna 1. Z toho vyplývá, že spojitá část hybridního systému z **Příkladu 9** není říditelná (dosažitelná) mezi okamžiky vzorkování.

3.2 URČENÍ POZOROVATELNOSTI (REKONSTUOVATELNOSTI) STAVŮ HYBRIDNÍCH SYSTÉMŮ

Nejprve je třeba definovat pojmy pozorovatelnosti a rekonstruovatelnosti stavu hybridního systému. Na základě těchto definic budou definovány vztahy pro určení pozorovatelnosti a rekonstruovatelnosti hybridních systémů.

3.2.1 Definice pozorovatelnosti systému [10]

Systém je pozorovatelný za předpokladu, že ze změřeného průběhu výstupu v daném časovém intervalu a při znalosti vstupního signálu ve stejném časovém intervalu je možné jednoznačně určit výchozí stav systému. Tato definice je znázorněna na *Obrázku 30*.

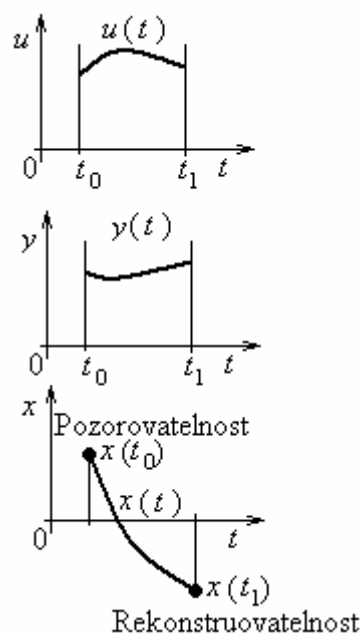
3.2.2 Definice rekonstruovatelnosti systému [10]

Systém je rekonstruovatelný za předpokladu, že ze změřeného průběhu výstupu v daném časovém intervalu a při znalosti vstupního signálu na stejném intervalu je možné jednoznačně určit konečný stav systému. Tato definice je ukázána stejně jako definice pozorovatelnosti na *Obrázku 30*.

Pokud je systém reverzibilní, tak je možné pojmy pozorovatelnosti a rekonstruovatelnosti zaměnit.

3.2.3 Stanovení pozorovatelnosti (rekonstruovatelnosti) hybridního systému

Pozorovatelnost (rekonstruovatelnost) hybridního systému je možné určit obdobným způsobem jako říditelnost (dosažitelnost) hybridního systému. Opět se vychází z úvahy, že hybridní systémy jsou ze své podstaty složeny ze spojité části a ryze diskrétní části a díky tomu se otázka stanovení říditelnosti (dosažitelnosti) hybridních systémů musí řešit jak v časech vzorkování, tak mezi časy vzorkování.



Obrázek 30: Definice pozorovatelnosti a rekonstruovatelnosti

3.2.3.1 Stanovení pozorovatelnosti (rekonstruovatelnosti) v časech vzorkování

V časech vzorkování je možné pozorovatelnost (rekonstruovatelnost) stanovit tak, že se provede diskretizace spojité části hybridního systému (na shodnou periodu vzorkování jako má ryze diskrétní část hybridního systému) a provede se její spojení s ryze diskrétní částí hybridního systému. Spojení těchto částí (diskretizované spojité části a diskrétní části) se provede pomocí pravidel blokové algebry uváděných například v [10], [13]. Po získání výsledného systému vzniklého spojením diskrétní a

diskretizované části se provede samotný výpočet pozorovatelnosti (rekonstruovatelnosti) v časech vzorkování pomocí níže uvedeného vztahu. Jelikož se v systému vzniklém spojením diskretní a diskretizované části hybridního systému již vyskytují pouze diskretní stavové proměnné, tak je možné určovat pozorovatelnost (rekonstruovatelnost) tohoto systému pomocí vztahu pro diskretní systémy. Vztah pro stanovení pozorovatelnosti (rekonstruovatelnosti) diskretního systému (68) a jeho odvození je možné nalézt v různé literatuře zabývající se touto problematikou, například [10], [13].

$$V_D = [C \ CE \ CE^2 \ \dots \ CE^{n-1}]^T, \quad [10] \ (68)$$

kde V je matice pozorovatelnosti (rekonstruovatelnosti) diskretního systému,
 C je obecné značení matice C diskretního systému,
 E je obecné značení matice E diskretního systému.

Pokud má matice V_D hodnotu n , tak je diskretní systém pozorovatelný (rekonstruovatelný).

Pakliže je splněna podmínka hodnoty matice V_D , pro systém vzniklý z hybridního systému diskretizací spojitě části hybridního systému a jejím spojením s diskretní částí hybridního systému pomocí pravidel blokové algebry, tak je možné tvrdit, že hybridní systém, z něhož tento systém vznikl, je v okamžicích vzorkování pozorovatelný (rekonstruovatelný).

3.2.3.2 Stanovení pozorovatelnosti (rekonstruovatelnosti) mezi okamžiky vzorkování

Jelikož je v hybridním systému obsažena ryze diskretní část, tak není možné získávat hodnoty a informace o stavech této části hybridního systému mezi okamžiky vzorkování – hodnota diskretních stavů je definována pouze v okamžicích vzorkování. Obdobně jako u otázky řiditelnosti (dosažitelnosti) je i zde možné

zkoumat spojitou část hybridního systému. Vztah pro stanovení pozorovatelnosti (rekonstruovatelnosti) spojitého systému (69) a jeho odvození je možné nalézt v různé literatuře, například v [10], [13].

$$V_S = [C \ CA \ CA^2 \ \dots \ CA^{n-1}]^T, \quad [10] \ (69)$$

kde V_S je matice pozorovatelnosti (rekonstruovatelnosti) spojitého systému,
 C je obecné značení matice C spojitého systému,
 A je obecné značení matice A spojitého systému.

Pokud má matice V_S hodnost n , tak je spojitý systém pozorovatelný (rekonstruovatelný).

Pokud je splněna podmínka hodnosti matice V_S pro spojitou část hybridního systému, tak je spojitá část hybridního systému pozorovatelná (rekonstruovatelná) mezi okamžiky vzorkování.

3.2.4 Příklad 10

Příklad pozorovatelného (rekonstruovatelného) hybridního systému

Pro hybridní systém z **Příkladu 8** je úkolem stanovit, zda je tento hybridní systém pozorovatelný (rekonstruovatelný) v okamžicích vzorkování a mezi okamžiky vzorkování.

Jelikož se jedná o stejné zadání jako v **Příkladu 8**, tak budou využívány výpočty uvedené v tomto příkladu.

Stanovení pozorovatelnosti (rekonstruovatelnosti) v okamžicích vzorkování

Pro stanovení pozorovatelnosti (rekonstruovatelnosti) jsou zapotřebí matice systému vzniklého spojením diskretizovaného systému a diskrétního systému. Tyto matice jsou uvedeny v (59) – byly získány při výpočtu **Příkladu 8**. Takto získané matice E_V a C_V je již možné dosadit do vztahu (68) a určit tak pozorovatelnost

(rekonstruovatelnost) hybridního systému v okamžicích vzorkování (možné je i použít příkaz pro MATLAB $Vd=obsv(Ev, Cv)$).

Matice pozorovatelnosti (rekonstruovatelnosti) v okamžicích vzorkování je uvedena v (70).

$$V_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0,0239 & 0,1197 & 0,0137 & 0,0014 \\ 0,0120 & -0,0117 & -0,7183 & -0,1197 \\ -0,0040 & 0,0012 & 0,0686 & 0,0115 \end{bmatrix} \quad (70)$$

Pro určení hodnoty matice V_D byl použit příkaz pro program MATLAB, který je $rank(Vd)$ a vrací hodnotu matice V_D . Další možností jak určit hodnotu matice V_D je úprava na schodový tvar. Hodnota matice V_D je 4, a proto je hybridní systém z **Příkladu 10** pozorovatelný (rekonstruovatelný) v okamžicích vzorkování.

Stanovení pozorovatelnosti (rekonstruovatelnosti) mezi okamžiky vzorkování

Mezi okamžiky vzorkování je možné pouze stanovit pozorovatelnost (rekonstruovatelnost) spojitě části hybridního systému. Matice popisující spojitý subsystém jsou uvedeny v (54). Z těchto matic je již možné stanovit pozorovatelnost (rekonstruovatelnost) hybridního systému mezi okamžiky vzorkování pomocí vztahu (69). Matice pozorovatelnosti (rekonstruovatelnosti) mezi okamžiky vzorkování je uvedena v (71).

$$V_s = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -50 & -9 \end{bmatrix} \quad (71)$$

Hodnota matice V_s je možné stanovit pomocí příkazu $rank(Vs)$ pro program MATLAB, nebo úpravou matice V_s na schodovitý tvar. Hodnota matice V_s je 2 a z toho vyplývá, že spojitá část hybridního systému z **Příkladu 10** je pozorovatelná (rekonstruovatelná) mezi okamžiky vzorkování.

3.2.5 Příklad 11

Příklad nepozorovatelného (nerekonstruovatelného) systému

Pro hybridní systém z **Příkladu 9** (Obrázek 29) je úkolem stanovit, zda je tento hybridní systém pozorovatelný (rekonstruovatelný) v okamžicích vzorkování a mezi okamžiky vzorkování.

Stanovení pozorovatelnosti (rekonstruovatelnosti) v okamžicích vzorkování

Pro stanovení pozorovatelnosti (rekonstruovatelnosti) jsou zapotřebí matice systému vzniklého spojením diskretizovaného systému a diskrétního systému. Tyto matice jsou uvedeny v (65) – byly získány při výpočtu **Příkladu 9**. Matice E_V a C_V je možné dosadit do vztahu (68) a určit tak pozorovatelnost (rekonstruovatelnost) hybridního systému v okamžicích vzorkování.

Matice pozorovatelnosti (rekonstruovatelnosti) hybridního systému z **Příkladu 11** v okamžicích vzorkování je uvedena v (72).

$$V_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (72)$$

Ze struktury matice V_D vyplývá hodnota 1. Jelikož je hodnota V_D pouze 1 a ne 4 a tak není hybridní systém z **Příkladu 11** pozorovatelný (rekonstruovatelný) v okamžicích vzorkování.

Stanovení pozorovatelnosti (rekonstruovatelnosti) mezi okamžiky vzorkování

Mezi okamžiky vzorkování je možné pouze stanovit pozorovatelnost (rekonstruovatelnost) spojité části hybridního systému. Matice popisující spojité subsystém jsou uvedeny v (62) – sestaveny v **Příkladu 9**. Z těchto matic je již možné určit pozorovatelnost (rekonstruovatelnost) hybridního systému mezi okamžiky

vzorkování pomocí vztahu (69). Matice pozorovatelnosti (rekonstruovatelnosti) mezi okamžiky vzorkování je uvedena v (73).

$$\mathbf{V}_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (73)$$

Hodnost matice \mathbf{V}_s je 1 a ne 2, a proto není spojitá část hybridního systému z **Příkladu 11** pozorovatelná (rekonstruovatelná) mezi okamžiky vzorkování.

3.3 STABILITA HYBRIDNÍCH SYSTÉMŮ

Z hlediska určování stability je podstatné o jaký systém se jedná. Vzhledem k tomu, že hybridní systémy řešené v této práci jsou lineární a jejich popis je proveden ve stavovém prostoru, tak je zapotřebí stanovovat stabilitu podle pravidel pro stanovení stability ve stavovém prostoru.

Požadavky kladené na stabilitu jsou z hlediska různých typů systémů různé. Z toho vyplývají i různé druhy definic stabilit pro různé systémy. Například pro nelineární systémy se používá Ljapunovská stabilita, jejíž definice je uváděná například v [11], [13]. Zde jsou řešeny lineární hybridní systémy a tudíž je pro stanovení jejich stability postačující definice stability lineárních systémů [10], [11].

Definice stability lineárních systémů [10]

Lineární systém je stabilní tehdy, jestliže se jeho výstup po skončení budícího (vstupního) signálu a po doznění přechodného děje vrátí na původní hodnotu.

U systémů ve stavovém prostoru je nutné rozlišovat stabilitu stavu a stabilitu výstupu. Obecně nemusí být tyto dvě stability totožné. Pokud systém není pozorovatelný, tak v něm může být nepozorovatelný stav, který může být nestabilní, přičemž z hlediska výstupu se tento systém může jevit jako stabilní. Jelikož je stabilita hybridního systému stanovována na základě provedení diskretizace spojitě

části a jejího spojení s diskrétní částí, tak se pro hybridní systém využívá poznatků pro stanovení stability diskrétního systému. Stabilita stavu pro diskrétní systém se stanovuje na základě charakteristické rovnice $\det(\mathbf{I} - z^{-1}\mathbf{E}) = 0$. Pokud leží vlastní čísla charakteristické rovnice uvnitř jednotkové kružnice, tak je diskrétní systém popsany maticí vnitřních vazeb \mathbf{E} stabilní.

3.3.1 Určení stability hybridního systému

Při řešení stability hybridních systémů se vychází z obdobné úvahy jako v případě otázky řešení říditelnosti (dosažitelnosti) a pozorovatelnosti (rekonstruovatelnosti). To znamená, že se provede diskretizace spojité části hybridního systému (diskretizuje se na shodnou periodu vzorkování jako má ryze diskrétní část hybridního systému). Po získání odpovídajících diskretizovaných matic jsou za pomoci pravidel řazení dynamických systémů ve stavovém prostoru stanoveny matice výsledného systému složeného z matic diskrétní části a diskretizované části. Z takto získaných matic vede již více cest, jakým způsobem lze stanovit, zda je hybridní systém stabilní. Zde budou uvedeny dvě možnosti určení stability hybridního systému. Jedním možným způsobem je výpočet vlastních čísel matice \mathbf{E} a druhým způsobem je stanovení na základě výpočtu charakteristické rovnice.

3.3.2 Pomocí výpočtu vlastních čísel matice \mathbf{E}

Jedna z možností jak stanovit stabilitu (kratší) je vypočítat vlastní čísla matice \mathbf{E} , která popisuje systém vzniklý spojením diskrétní a diskretizované části hybridního systému pomocí pravidel blokové algebry. Pokud budou vlastní čísla ležet uvnitř jednotkové kružnice v „ z “ rovině, tak je systém popsany maticí \mathbf{E} stabilní a díky tomu je i stabilní hybridní systém, ze kterého byla matice \mathbf{E} stanovena.

3.3.3 Pomocí výpočtu charakteristické rovnice

Druhou z možností (delší a výpočtově náročnější) je z matice E , která opět popisuje systém vzniklý spojením diskrétní a diskretizované části hybridního systému pomocí pravidel blokové algebry, získat charakteristickou rovnici pomocí výpočtu $\det(\mathbf{I} - z^{-1}\mathbf{E}) = 0$. Jelikož se jedná o charakteristickou rovnici systému vzniklého z diskrétního a diskretizovaného systému, tak charakteristická rovnice bude muset splňovat podmínky stability v „ z “ rovině. Aby bylo možné aplikovat některé algebraické kritérium z oblasti spojitých systémů je nutné provést bilineární transformaci ([10],[13]).

3.3.3.1 Bilineární transformace

Je definována vztahem (74). Tato transformace převádí jednotkovou kružnici v „ z “ rovině na levou polorovinu nově vzniklé „ w “ roviny.

$$z = \frac{1+w}{1-w} \quad [10] \quad (74)$$

Bližší popis bilineární transformace je uveden v [10] nebo [13].

Po provedení bilineární transformace je možné již aplikovat některé kritérium stability pro spojitě dynamické systémy. Zde je uvedeno a následně i použito Hurwitzovo kritérium stability (další možné je například Routh-Schurovo, obě kritéria jsou uváděné v [10], [13]).

3.3.3.2 Hurwitzovo kritérium stability [10], [11], [12]

Přepokládá se charakteristický polynom ve tvaru (75). Zde je uváděno s operátorem Laplaceovy transformace p , jelikož se jedná o kritérium pro spojitě dynamické systémy.

$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 \quad (75)$$

Z koeficientů charakteristického polynomu (75) se sestaví Hurwitzova matice (76). Pomocí Hurwitzova kritéria je možné stabilitu stanovit na základě následující úvahy: pokud jsou všechny subdeterminanty D_i pro $i = 1, 2, \dots, (n-1)$ nenulové a mají stejná znaménka, tak je systém n -tého řádu stabilní. Jakým způsobem jsou získány subdeterminanty D_i je naznačeno čárkovaně ve vztahu (76).

$$M_{\text{HURWITZ}} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (76)$$

Pokud se po aplikaci Hurwitzova kritéria na polynom získaný z matice E , která popisuje systém vzniklý spojením diskrétní a diskretizované části hybridního systému pomocí pravidel blokové algebry, po provedení bilineární transformace zjistí, že je systém stabilní, tak lze na základě toho usuzovat, že i hybridní systém, ze kterého byla uvedeným postupem získána matice E , je stabilní.

3.3.4 Příklad 12

Úkolem je stanovit, zda je hybridní systém z **Příkladu 7** stabilní. Diskrétní část pracuje se vzorkovací frekvencí $T = 1$ s. Stanovení stability se má provést jak výpočtem vlastních čísel matice E , tak pomocí výpočtu charakteristické rovnice.

Jelikož se jedná o systém z **Příkladu 7**, pro který již byla řešena otázka stanovení říditelnosti, tak již byly sestaveny výsledné matice popisující systém vzniklý spojením diskrétní a diskretizované části hybridního systému pomocí pravidel blokové algebry. Tyto matice jsou uvedeny v (59) a pro přehlednost jsou zde uvedeny znovu. Postup jejich nalezení je ukázán v **Příkladu 8**. Z hlediska stability je důležitá pouze matice E_V na jejímž základě je možné usuzovat o stabilitě hybridního systému.

$$\mathbf{E}_V = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,1 & -0,3 & -6 & -1 \\ 0,0039 & 0,0197 & 0,0134 & 0,0013 \\ 0,0003 & 0,0013 & -0,0669 & -0,0066 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_V = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_V = [0 \ 0 \ 6 \ 1],$$

$$\mathbf{D}_V = [0] \quad (59)$$

Stanovení stability pomocí zjištění vlastních čísel matice \mathbf{E}

Za pomoci výpočetní techniky a programu MATLAB je možné pomocí příkazu $\text{eig}(\mathbf{E})$ vypočítat přímo vlastní čísla matice \mathbf{E}_V .

Vlastní čísla matice \mathbf{E}_V z **Příkladu 12** jsou následující:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0,4007, \\ \lambda_2 &= 0,0515 + 0,2401i, \\ \lambda_3 &= 0,0515 - 0,2401i, \\ \lambda_4 &= 0,0045. \end{aligned}$$

Vlastní čísla matice \mathbf{E}_V leží uvnitř jednotkové kružnice v „z“ rovině, a proto je hybridní systém z **Příkladu 12** stabilní.

Stanovení stability pomocí výpočtu charakteristické rovnice

Nejprve je třeba zjistit charakteristickou rovnici. Charakteristická rovnice (značena například $J(z)$) stanovená z matice \mathbf{E}_V je uvedena ve vztahu (77) a je získána dosazením do $\det(\mathbf{I} - z^{-1}\mathbf{E}_V) = 0$ – pro výpočet byl použit program MATLAB.

$$J(z) = z^4 + 0,2932z^3 + 0,01769z^2 + 0,02408z - 0,0001082 \quad (77)$$

Dalším krokem je provedení bilineární transformace pomocí (74). Díky tomu je možné na charakteristický polynom ve „ w “ rovině $J(w)$ uvedený v (78) aplikovat Hurwitzovo kritérium stability.

$$J(w) = 0,7003w^4 + 3,4622w^3 + 5,9640w^2 + 4,5387w + 1,3349 \quad (78)$$

Z charakteristického polynomu po bilineární transformaci $J(w)$ (78) je nyní již možné sestavit Hurwitzovu matici na základě (75) a (76). Hurwitzova matice sestavená pro tento příklad je uvedena v (79).

$$\mathbf{M}_{\text{HURVITZ}} = \begin{bmatrix} 3,4622 & 0,7003 & 0 \\ 4,5387 & 5,9640 & 3,4622 \\ 0 & 1,3349 & 4,5387 \end{bmatrix} \quad (79)$$

Z Hurwitzovy matice jsou získány a následně vypočteny determinanty D_1 , D_2 a D_3 uvedené v (80). Hodnoty jednotlivých determinantů jsou nenulové a mají stejná znaménka. Z toho je patrné, že hybridní systém z **Příkladu 12** je stabilní. Obě dvě kritéria pro stanovení stability dávají stejný výsledek, přičemž stanovení vlastních čísel matice \mathbf{E} je za předpokladu použití výpočetní techniky (program MATLAB) jednodušší a výrazně rychlejší.

$$D_1 = |3,4622| = 3,46, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3,4622 & 0,7003 \\ 4,5387 & 5,9640 \end{vmatrix} = 17,47$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3,4622 & 0,7003 & 0 \\ 4,5387 & 5,9640 & 3,4622 \\ 0 & 1,3349 & 4,5387 \end{vmatrix} = 63,29 \quad (80)$$

3.4 USTÁLENÉ STAVY HYBRIDNÍCH SYSTÉMŮ

Další možností analýzy hybridních systémů ve stavovém prostoru je možnost zjištění hodnot ustálených stavů hybridního systému. Hodnoty ustálených stavů hybridního systému lze stanovit na základě spojení pravidel pro výpočet ustálených hodnot spojitého systému a ustálených hodnot diskrétního systému.

3.4.1 Zjištění ustálených stavů spojitého systému

Při výpočtu ustálených stavů spojitého systému se vychází z první stavové rovnice pro spojitého systém. První stavová rovnice pro spojitého systém:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (81)$$

Pro ustálený stav platí, že vektor derivací stavů je roven nule ($\dot{\mathbf{x}}(\infty) = \mathbf{0}$). Pakliže se tato podmínka promítne do první stavové rovnice spojitého systému (81) a po provedení dalších níže naznačených úprav, tak je získána rovnice (82), na jejímž základě je možné stanovit hodnoty ustálených stavů spojitého systému.

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{A}\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\infty) & | - \mathbf{A}\mathbf{x}(\infty) \\ -\mathbf{A}\mathbf{x}(\infty) &= \mathbf{B}\mathbf{u}(\infty) & | \cdot (-\mathbf{A}^{-1}) \\ \mathbf{x}(\infty) &= -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(\infty) \end{aligned} \quad (82)$$

3.4.2 Zjištění ustálených stavů diskrétních systémů

Při výpočtu ustálených stavů diskrétního systému se vychází z první stavové rovnice pro diskrétní systém. První stavová rovnice pro diskrétní systém:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{E}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (83)$$

Pro ustálený stav diskretních stavů platí, že diskretní stavy v následujícím kroku jsou rovny diskretním stavům v kroku předchozím ($\mathbf{x}(k+1)|_{\infty} = \mathbf{x}(k)|_{\infty}$). Z této podmínky a dalších níže naznačených úpravách vyplývá rovnice (84), ze které se již dají určit ustálené hodnoty stavů diskretního systému.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\infty) &= \mathbf{E}\mathbf{x}(\infty) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\infty) & | - \mathbf{E}\mathbf{x}(\infty) \\ \mathbf{x}(\infty)(\mathbf{I} - \mathbf{E}) &= \mathbf{B}\mathbf{u}(\infty) & | \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{E})^{-1} \\ \mathbf{x}(\infty) &= (\mathbf{I} - \mathbf{E})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{u}(\infty) \end{aligned} \quad (84)$$

Na základě rovnic pro ustálené stavy spojité (82) a diskretních (84) systémů je možné sestavit vztah pro výpočet ustálených hodnot stavů hybridního systému.

3.4.3 Zjištění ustálených stavů hybridních systémů

Při výpočtu ustálených stavů hybridního systému se vychází z první stavové rovnice pro hybridní systém. První stavová rovnice pro hybridní systém je v (4), pro zjednodušení je zde znovu uvedena:

$$\dot{\mathbf{x}}_v(h) = \mathbf{A}\mathbf{x}_v(h) + \mathbf{B}\mathbf{u}(h) \quad (4)$$

Jelikož se v hybridním systému vyskytují jak spojité stavy tak diskretní stavy, tak se musí při sestavování vztahu pro výpočet ustálených stavů hybridního systému uvažovat podmínka ustálených stavů jak pro spojité systémy ($\dot{\mathbf{x}}(\infty) = \mathbf{0}$) tak pro diskretní systémy ($\mathbf{x}(k+1)|_{\infty} = \mathbf{x}(k)|_{\infty}$). Z těchto podmínek a po dalších úpravách uvedených níže je již možné stanovit vztah pro výpočet ustálených hodnot stavů hybridního systému – uveden v (85).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{VS} \\ \mathbf{x}_D(\infty) \end{bmatrix} &= \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_S(\infty) \\ \mathbf{x}_D(\infty) \end{bmatrix} + \mathbf{B}u(\infty) \quad | -\mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_S(\infty) \\ \mathbf{x}_D(\infty) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{VS} \\ \mathbf{x}_D(\infty) \end{bmatrix} - \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_S(\infty) \\ \mathbf{x}_D(\infty) \end{bmatrix} &= \mathbf{B}u(\infty) \quad | \text{za predpokladu: } \begin{bmatrix} \mathbf{0}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_S(\infty) \\ \mathbf{x}_D(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{VS} \\ \mathbf{x}_D(\infty) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_S(\infty) \\ \mathbf{x}_D(\infty) \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_D \end{bmatrix} - \mathbf{A} \right) &= \mathbf{B}u(\infty) \quad | \cdot \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_D \end{bmatrix} - \mathbf{A} \right)^{-1} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{x}_S(\infty) \\ \mathbf{x}_D(\infty) \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_D \end{bmatrix} - \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{B}u(\infty) \quad | \text{pri oznaceni: } \mathbf{x}_V(\infty) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_S(\infty) \\ \mathbf{x}_D(\infty) \end{bmatrix} \text{ a } \mathbf{0}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_D \end{bmatrix} \end{aligned}$$

kde $\mathbf{0}_{VS}$ je nulový vektor o rozměru \mathbf{x}_S .

$$\mathbf{x}_V(\infty) = (\mathbf{0}_I - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}u(\infty), \quad (85)$$

kde $\mathbf{0}_I$ je matice jejíž struktura je následující:

$$\mathbf{0}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_D \end{bmatrix}, \text{ kde } \mathbf{0}_S \text{ je nulová matice o rozměru počtu spojitých}$$

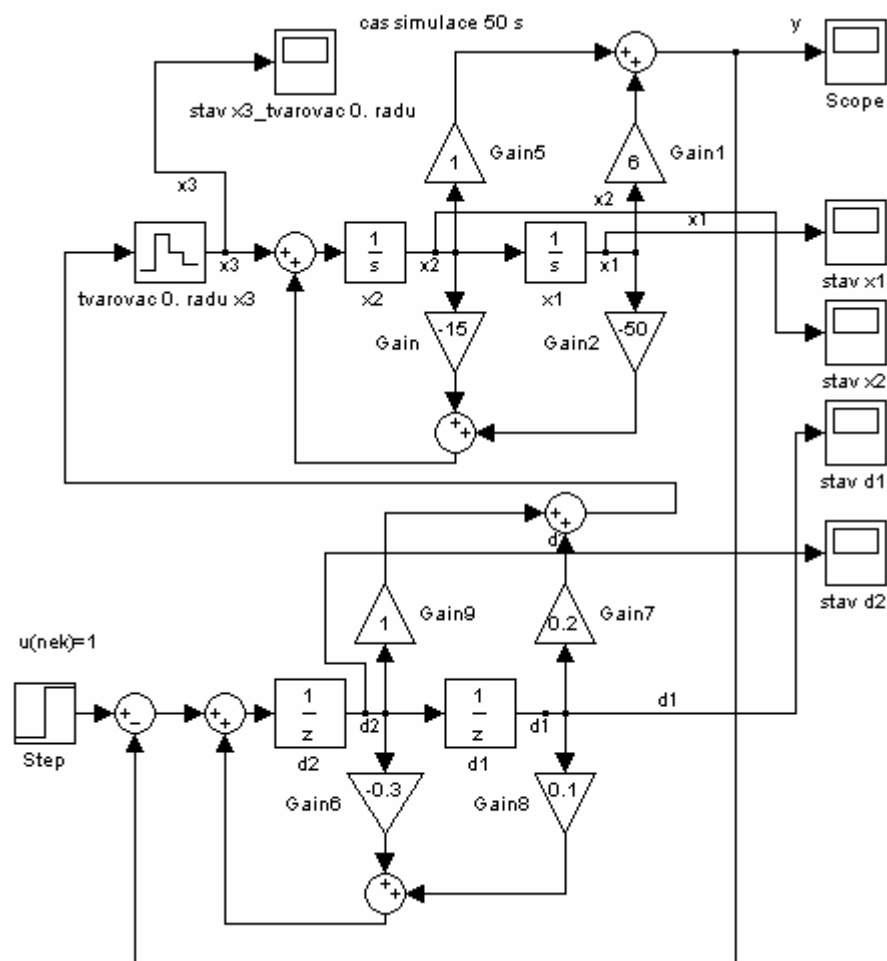
veličin hybridního systému, \mathbf{I}_D je jednotková matice o rozměru počtu diskretních stavů hybridního systému, $\mathbf{0}$ jsou nulové matice o příslušných rozměrech doplňujících matice $\mathbf{0}_S$ a \mathbf{I}_D na čtvercovou matici.

3.4.4 Příklad 13

Pro hybridní systém z **Příkladu 7** je úkolem stanovit jeho ustálené stavy. Na jeho vstupu je připojen konstantní spojitý skok s amplitudou 1, z toho vyplývá, že $u(\infty) = 1$. Stavové schéma tohoto hybridního systému je uvedeno na *Obrázku 31*.

Jelikož je v systému tvarovač nultého řádu, tak se provede popis hybridního systému bez tohoto tvarovače. Je to provedeno z důvodu, že tvarovač způsobuje singularitu matice \mathbf{A} a ve výpočtu není možné provést inverzi části $(\mathbf{0}_I - \mathbf{A})^{-1}$. Hodnotu ustáleného stavu tvarovače je možné následně dopočítat podle rovnice $x_3(h) = 0,2d_1(h) + d_2(h)$ vyplývající ze stavového schématu na *Obrázku 31*.

Matice A a B popisující zadaný hybridní systém jsou pro stavový vektor (již bez tvarovače) $x_v(h) = [x_1(h) \ x_2(h) \ d_1(h) \ d_2(h)]^T$ uvedeny v (86). Při sestavování těchto matic je zapotřebí brát v potaz, že v matici A se projeví vynechání tvarovače 0. řádu tak, že dojde k přivedení vstupů vstupujících do tvarovače přímo do stavové proměnné, do níž přes tvarovač vstupovaly. To je nutné provést z důvodu správnosti výpočtu, jelikož by při vynechání tvarovače došlo ke ztrátě propojení mezi jednotlivými částmi hybridního systému. Toto přivedení vstupů tvarovače přímo do stavové proměnné bez tvarovače se projeví v matici A . Pro tento příklad ve druhém řádku v čárkovaně naznačeném ohraničení. Vyplývá to z toho, že výstup tvarovače vstupuje do stavové proměnné x_2 a jeho vstupem jsou d_1 a d_2 násobeny danými konstantami podle stavového schématu na *Obrázku 31*.



Obrázek 31: Stavové schéma hybridního systému z Příkladu 13 včetně simulačních prvků

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -50 & -15 & 0,2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 0,1 & -0,3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (86)$$

Dosazením matic \mathbf{A} a \mathbf{B} do vztahu pro výpočet ustálených stavů hybridního systému (85) je možné stanovit hodnoty ustálených stavů.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_v(\infty) &= (\mathbf{0}_1 - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(\infty) = \\ &= \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 50 & 15 & -0,2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & -0,1 & 1,3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(\infty) = \begin{bmatrix} 0,0179 \\ 0 \\ 0,7440 \\ 0,7440 \end{bmatrix} \times 1 = \begin{bmatrix} 0,0179 \\ 0 \\ 0,7440 \\ 0,7440 \end{bmatrix} \quad (87) \end{aligned}$$

Hodnoty ustálených stavů jsou následující:

$$x_1(\infty) = 0,0179, x_2(\infty) = 0, d_1(\infty) = 0,7440, d_2(\infty) = 0,7440.$$

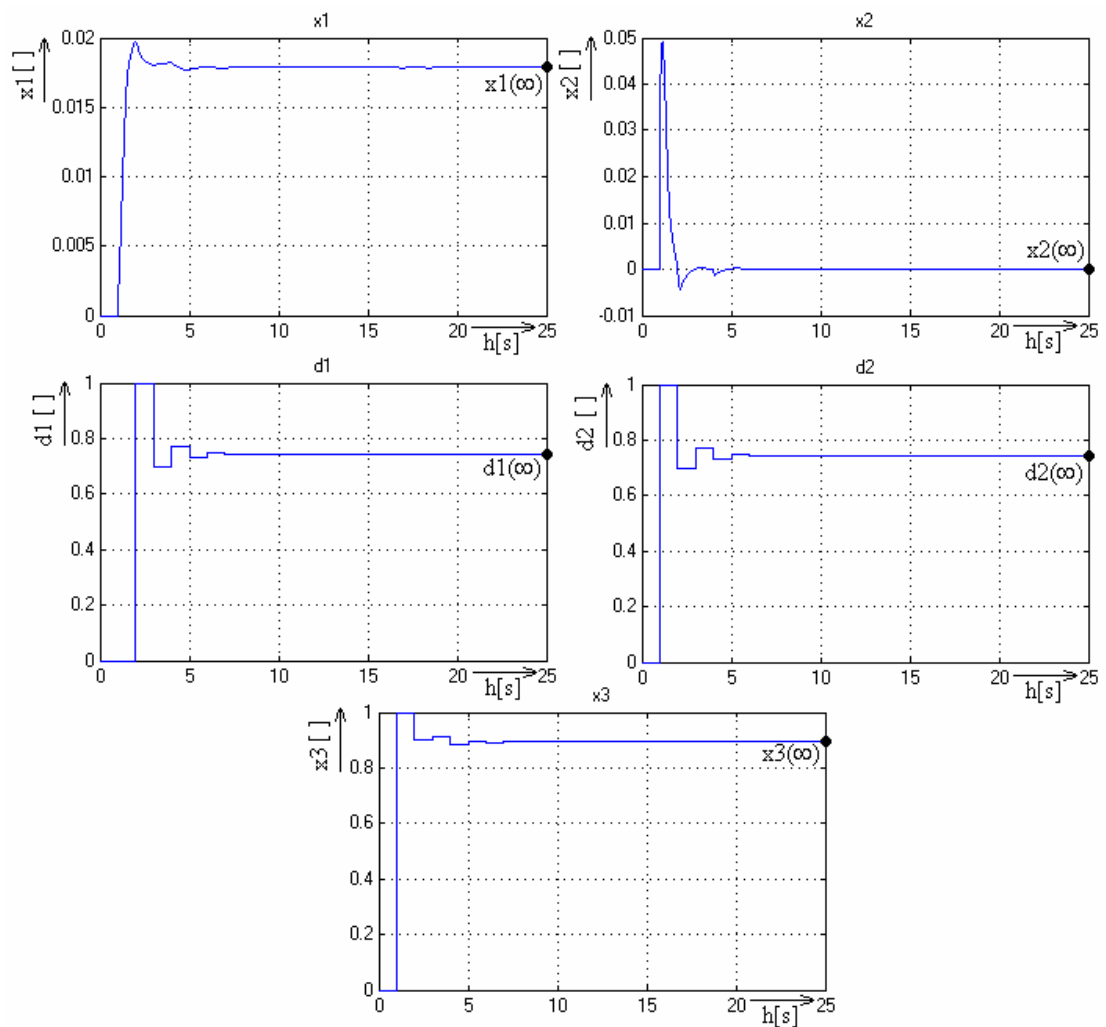
Pokud by bylo zapotřebí stanovit hodnotu tvarovače 0. řádu (stavová proměnná x_3), tak se dosadí výsledné hodnoty stavů do vztahu $x_3(\infty) = 0,2d_1(\infty) + d_2(\infty) = 0,2 \cdot 0,744 + 0,744 = 0,8928$.

Ověření výpočtu ustálených stavů pomocí simulace v prostředí MATLAB Simulink

Simulační schéma je na *Obrázku 31*. Simulace byla provedena do času 25 s. V tomto čase již byly stavy hybridního systému dostatečně ustáleny a neměnily se. Hodnoty stavů v čase 25 s jsou tedy pro tento příklad shodné s hodnotami pro čas blížící se k nekonečnu. Průběhy vývoje jednotlivých stavů a jejich vyznačená ustálená hodnota jsou uvedeny na *Obrázku 32*. Hodnota stavů byla zjištěna přiblížením průběhů vývoje jednotlivých stavů. Hodnoty ustálených stavů získaných ze simulace jsou následující:

$x_1(\infty) = 0,018$, $x_2(\infty) = 0$, $d_1(\infty) = 0,744$, $d_2(\infty) = 0,744$ a hodnota tvarovače 0. řádu $x_3(\infty) = 0,893$.

Hodnoty získané simulací odpovídají hodnotám zjištěným výpočtem, a proto jsou hodnoty získané výpočtem správné.



Obrázek 32: Průběhy a hodnoty ustálených stavů ze simulace k Příkladu 13

ZÁVĚR

V první kapitole této práce je řešena problematika popisu a modelování hybrid systems (hybridních systémů). Zde jsou uvedeny dva různé způsoby popisu a modelování těchto systémů a to sice pomocí hybridních automatů a pomocí hybridních Petriho sítí. Pro jednotlivé možnosti popisu a modelování jsou uvedeny jednoduché příklady. Při porovnání těchto možností popisu hybrid systems (hybridních systémů) se jeví z mého pohledu jako „lepší“ hybridní Petriho síť, protože je pomocí nich možné popisovat složitější systémy než pomocí hybridních automatů. Hybridní automaty se hodí spíše pro popis hybrid systems (hybridních systémů) s jednoduchou diskretní částí. Řešení totiž jinak vede na velmi složitý automat.

Ve druhé kapitole práce jsou řešeny hybridní dynamické systémy, což jsou systémy složené ze spojitého dynamického systému a diskretního dynamického systému. Pro tyto systémy je zvolen popis a modelování ve stavovém prostoru, protože umožňuje provádět požadovanou analýzu říditelnosti, pozorovatelnosti stability a ustálených stavů. Pro popis jsou uvedeny obecné stavové rovnice a struktury matic A , B , C , D popisující daný hybridní dynamický systém. Dále je provedeno řešení takto definovaných stavových rovnic v časech mezi vzorkováním a v časech vzorkování. Pro tyto jednotlivé časy jsou uvedeny obecné vztahy a postupy, pomocí kterých je možné stavové rovnice řešit. Řešení stavových rovnic je ukázáno na jednoduchém příkladu hybridního regulačního systému. Správnost výsledků tohoto příkladu je ověřena pomocí simulace v prostředí MATLAB Simulink.

V třetí kapitole je provedena analýza hybridních dynamických systémů z kapitoly dvě. Z hlediska analýzy je řešena nejprve říditelnost a pozorovatelnost. Tyto vlastnosti jsou posuzovány rovněž v časech vzorkování, kdy může být říditelný a pozorovatelný celý hybridní dynamický systém, a mezi časy vzorkování, kdy může být říditelná a pozorovatelná pouze spojitá část hybridního dynamického systému. Výsledkem jsou obecné vztahy a postupy pro určení, zda je hybridní dynamický systém říditelný a pozorovatelný. Vztahy a postupy jsou ukázány na jednoduchých příkladech. V další části této kapitoly je řešena stabilita těchto hybridních systémů,

pro kterou je rovněž uveden obecný postup jejího stanovení. Jsou zde uvedeny dvě možnosti stanovení stability. Oba způsoby jsou ukázány na příkladu hybridního regulačního systému. V poslední části kapitoly jsou řešeny ustálené stavy hybridních dynamických systémů. Jsou zde taktéž uvedeny obecné vztahy pro stanovení ustálených stavů. Tyto vztahy jsou použity pro výpočet ustálených stavů v jednoduchém příkladě a správnost výpočtu provedeného podle těchto vztahů je ověřena pomocí simulace v prostředí MATLAB Simulink.

SEZNAM LITERATURY

- [1] van der Schaft, A. – Schumacher, H. *An introduction to hybrid dynamical system*. London: Springer-Verlag, 1999. 190 s. ISBN 978-1-85233-233-4
- [2] Ghomri, L. – Alla, H. *Modeling and analysis using hybrid Petri nets*. [online]. [cit. 2008-05-05]. 15 s. Dostupné z:
<http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0706/0706.1716.pdf>
- [3] Johansson, K. H. – Lygeros, J. – Sastry, S. *Modeling of hybrid systems*. [online]. [cit. 2008-05-03]. 22 s. Dostupné z:
http://www.s3.kth.se/~kallej/papers/eolss_6.43.28.1.pdf
- [4] Lygeros, J. *Lecture notes on hybrid systems*. [online]. [cit. 2008-04-25]. 82 s. Dostupné z: <http://robotics.eecs.berkeley.edu/~sastry/ee291e/lygeros.pdf>
- [5] De Schutter, B. *Modeling & control of hybrid systems: Chapter 1 – Introduction*. [online]. [cit. 2008-04-28]. 13 s. Dostupné z:
<http://www.dsc.tudelft.nl/~sc4160/>
- [6] Tomlin, C. J. *Autonomous hybrid automata*. [online]. [cit. 2009-01-15]. 10 s. Dostupné z: <http://www.stanford.edu/class/aa278a/>
- [7] Václavek, P. *Petriho sítě*. [online]. Ver. 4. [cit. 2009-04-18]. 44 s. Dostupné z:
<http://msdu.vaclavek.net/soubory-ke-sta%C5%BEen%C3%AD>
- [8] Hanzálek, Z. Petriho sítě. *Automatizace*. červenec-srpen 2001. roč. 44. č. 7-8. s. 450-451
- [9] Hanzálek, Z. Petriho sítě (2). *Automatizace*. září 2001. roč. 44. č. 9. s. 576-577
- [10] Vavřín, P. *Teorie dynamických systémů*. Praha: VN MON. 1. vydání. 1989. 177 s.
- [11] Vavřín, P. *Teorie automatického řízení I*. Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury. 1. vydání. 1987. 214 s.
- [12] Skalický, J. *Teorie řízení*. Brno: Vysoké učení technické v Brně. 2. vydání. 2002. 98 s.
- [13] Štecha, J. – Havlena, V. *Teorie dynamických systémů*. [online]. poslední úpravy 2005. [cit. 2009-04-18]. 255 s. Dostupné z:
<http://dce.felk.cvut.cz/stecha/tds.pdf>

- [14] Holub, L. *Popis a modelování hybridních systémů*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2008. 29 s. Vedoucí semestrální práce prof. Ing. Petr Vavřín, DrSc.
- [15] Holub, L. *Analýza hybridních dynamických systémů*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2008. 42 s. Vedoucí semestrální práce prof. Ing. Petr Vavřín, DrSc.

SEZNAM ZKRATEK A SYMBOLŮ

A – množina hran (spojnic)

A – matice vnitřních vazeb systému (hybridního, spojitého systému)

A^{-1} – inverze matice A

B – matice vazeb systému na vstup (hybridního, spojitého, diskrétního systému)

C – matice vazeb výstupu na stav (hybridního, spojitého, diskrétního systému)

D_i – determinanty z Hurwitzovi matice

D – matice přímých vazeb výstupu na vstup (hybridního, spojitého, diskrétního systému)

$d(k)$ – vektor diskrétních stavů

$\det(A)$ – determinant matice A

$\det(I - z^{-1}E) = 0$ – charakteristická rovnice diskrétního (diskretizovaného) systému

Dom – doména

E – množina označení přechodů

E – matice vnitřních vazeb systému (diskrétního systému, nebo systému složeného z diskrétního a diskretizovaného systému)

$e^{A(h)}$ – matice přechodů mezi okamžiky vzorkování

e^{Ast} – matice přechodu spojitých stavů hybridního systému

$e^{VZ(h)}$ – matice přechodů v časech vzorkování

$e^{VZ_D(T)}$ – matice přechodu diskrétních stavů hybridního systému

$F()$ – označení operátorových přenosů

f – vektorové pole

G – množina přechodových podmínek

H – označení hybridního automatu

H – označení matic říditelnosti (dosažitelnosti)

h – hybridní čas

HPS – hybridní Petriho síť s T – časovanou sítí pro modelování diskrétní části

HPS_D – D – elementární hybridní Petriho síť

I – označení jednotkových matic

I_i – časový interval

Init – množina počátečních stavů

$J()$ – označení charakteristické rovnice

kT, k – diskrétní čas; pro zjednodušení zápisů $k \cong kT$

$L^{-1}\{\}$ – označuje zpětnou Laplaceovu transformaci

m – vektor označení jednotlivých míst

M_{DS} – submatice popisující vliv diskrétních stavových proměnných na spojité stavové proměnné

$M_{HURWITZ}$ – Hurwitzova matice

MIMO – zkratka z anglického *multi input – multi output*, systémy s více vstupy a více výstupy

$\min(m_i)$ – funkce závislá na aktuálním označení m_i

M_{SD} – submatice popisující vliv spojitych stavových proměnných na diskrétní stavové proměnné

M_0 – vektor počátečních označení

m^*_j – makro – označení

\mathbf{N} – celá kladná čísla

P – konečná množina míst

p – Laplaceův operátor

PS_{AS} – autonomní spojitá Petriho síť

PS_{KS} – spojitá Petriho síť s konstantní rychlostí aktivace přechodu

Post – matice popisující souhrn vah pro všechny hrany vycházející z přechodů do míst

Pre – matice popisující souhrn vah pro všechny hrany vycházející z míst do přechodů

Q – množina diskrétních stavů

\mathbf{R} – reálná čísla

R – resetovací mapa

S – funkce přiřazující ke každému diskrétnímu přechodu T_j jeho interval aktivace přechodu $[\alpha_j, \beta_j]$

SISO – zkratka z anglického *single input – single output*, systémy s jedním vstupem a jedním výstupem

T – perioda vzorkování

T – konečná množina přechodů

t – spojitý čas

T_J° – množina výstupních míst přechodu T_J

$\mathbf{u}(h)$ – vektor vstupů

V – funkce definující každému přechodu T_j jeho maximální a rychlost aktivace přechodu V_j

V – označení matic pozorovatelnosti (rekonstruovatelnosti)

v_j – okamžitá rychlost aktivace přechodu

w – váhová funkce

X – množina spojitých stavů

$\mathbf{x}(t)$ – vektor spojitých stavů

$\mathbf{x}_v(h)$ – hybridní stavový vektor

$\mathbf{x}_v(0)$ – vektor počátečních podmínek daného hybridního systému

$\mathbf{y}(h)$ – vektor výstupů

\mathbf{Z} – celá čísla

$Z^{-1}\{\}$ – označuje zpětnou Z – transformaci

z^{-1} – operátor Z – transformace

${}^\circ T_J$ – množina vstupních míst přechodu T_J

$\dot{\mathbf{x}}_v(h)$ – vektor, který je definován jako $\dot{\mathbf{x}}_v(h) = [\dot{\mathbf{x}}(t) \mathbf{d}(k+1)]^T$, v němž $\dot{\mathbf{x}}(t)$ je vektor derivací spojitých stavových proměnných hybridního systému a $\mathbf{d}(k+1)$ je vektor nových stavů v kroku $k+1$ diskretních stavových proměnných

$\mathbf{0}$ – označení nulových matic (kromě $\mathbf{0}_I$)

ε – čas, pro který platí $\varepsilon \rightarrow 0$

$\Phi(h)$ – matice přechodů hybridního systému

λ_i – vlastní čísla matice

τ – hybridní časová množina

ω – úhlová frekvence

SEZNAM PŘÍLOH

- [P1] Příložené CD obsahující kompletní text diplomové práce a programy používané při výpočtech a simulacích v programu MATLAB a jeho součásti Simulink.