



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

HMOTOVÉ MODELY HLASIVEK BUZENÉ HARMONICKY

MASS MODELS OF THE VOCAL FOLDS UNDER HARMONIC EXCITATION

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Ivana Řeřuchová

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Petr Hájek, Ph.D.

BRNO 2022

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Studentka:	Ivana Řeřuchová
Studijní program:	Strojírenství
Studijní obor:	Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce:	Ing. Petr Hájek, Ph.D.
Akademický rok:	2021/22

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Hmotové modely hlasivek buzené harmonicky

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Lidské hlasivky se dají na nejnižší úrovni modelovat pomocí diskrétních hmot spojených pružnými a tlumícími členy. Jejich nastavení potom ovlivní odezvu hlasivek na harmonické buzení. Cílem práce bude sestavení hmotového modelu lidských hlasivek a analýza jeho vynuceného kmitání.

Cíle bakalářské práce:

1. Proved'te rešerši literatury týkající se hmotových modelů hlasivek a metod jejich řešení.
2. Vytvořte hmotový model hlasivky podle literatury.
3. Proved'te analýzu vynuceného kmitání vytvořeného modelu.
4. Formulujte závěry.

Seznam doporučené literatury:

TITZE, Ingo R. Principles of Voice Production. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1994. ISBN 0-13-717893-x.

TITZE, Ingo R. The Myoelastic Aerodynamic Theory of Phonation. Denver and Iowa City: National Centre for Voice and Speech, 2006. ISBN 978-0-87414-156-6.

FLANAGAN, James L. a Lorinda L. LANDGRAF. Self-Oscillating Source for Vocal-Tract Synthesizers. IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics [online]. 1968, 16(1), 57–64. ISSN 0018-9278. Dostupné z: doi:10.1109/TAU.1968.1161949

ISHIZAKA, K. a J. L. FLANAGAN. Synthesis of Voiced Sounds From a Two-Mass Model of the Vocal Cords. Bell System Technical Journal [online]. 1972, 51(6), 1233–1268 [vid. 2015-05-19]. ISSN 00058580. Dostupné z: doi:10.1002/j.1538-7305.1972.tb02651.x

JULIŠ, Karel a Rudolf BREPTA. Mechanika II. díl Dynamika. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1987. Dynamika – Díl II. Dynamika.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2021/22

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Bakalářská práce náleží do oblasti bioakustiky a biomechaniky hlasu. Zabývá se modelováním jednoduchých analytických modelů hlasivek, konkrétně jejich vynuceným kmitáním pomocí budících sil s harmonickým průběhem. Součástí práce je i anatomie dýchacího a hlasového ústrojí a popis základních teorií tvorby hlasu, na kterou navazuje přehled hmotových výpočtových modelů hlasivek.

Klíčová slova

Hlasivky, analytický model hlasivek, vynucené kmitání, amplitudo-frekvenční charakteristika, biomechanika hlasu.

Abstract

This bachelor's thesis belongs to the branch of bioacoustics and biomechanics. It deals with the modelling of simple analytic models of vocal folds, specifically with their forced oscillation caused by a harmonic excitation force. The thesis also includes an anatomy of the respiratory tract and the vocal system, a description of the principal theories of voice production, and an overview of the vocal folds' mass models.

Keywords

Vocal folds, analytic model of vocal folds, forced oscillation, amplitude-frequency characteristics, biomechanics of voice.

Bibliografická citace

ŘEŘUCHOVÁ, Ivana. *Hmotové modely hlasivek buzené harmonicky*. Brno, 2022. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/138081>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Petr Hájek.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně pod vedením Ing. Petra Hájka, PhD. na základě vlastních znalostí a s použitím uvedené literatury.

V Brně dne 12. 5. 2022

Ivana Řeřuchová

Poděkování

Ráda bych poděkovala svému vedoucímu Ing. Petru Hájkovi, PhD. za cenné rady, trpělivost, ochotu a nadšení při zpracování této práce. Děkuji také všem, kteří mě inspirovali a byli mi během studia oporou. Mezi ně patří rodina, spolužáci, kamarádi a také moji známí z hudebního prostředí, bez kterých by se můj život nejspíš ubíral jiným směrem než směrem spojeným s hudbou, zpěvem a fungováním hlasu.

Obsah

Úvod	15
1 Anatomie hlasového ústrojí.....	17
1.1 Struktura hrtanu	17
1.1.1 Kostra hrtanu	17
1.1.2 Svalstvo hrtanu	18
1.1.3 Dutina hrtanu	19
1.2 Hlasivky	20
2 Funkce hrtanu, tvorba hlasu	23
2.1 Dýchání.....	23
2.2 Tvorba lidského hlasu	23
2.2.1 Teorie zdroje a filtru	24
2.2.2 Myoelasto-aerodynamická teorie	24
2.2.3 Pohyby hlasivek při fonaci	26
2.3 Vlastnosti hlasu.....	27
3 Přehled hmotových výpočtových modelů.....	29
3.1 Ewaldova píšťala	29
3.2 Jednohmotový model.....	29
3.3 Dvouhmotový model	30
3.4 Tříhmotový model	32
3.5 Tříhmotový model body-cover	32
3.6 Vícehmotové modely	33
3.7 Model slizniční vlny	34
3.8 Aeroelastický model	35
3.9 Časová posloupnost modelů hlasivek	35
4 Analytické modely hlasivek buzené harmonicky	37
4.1 Jednohmotový model.....	37
4.1.1 Odvození pohybové rovnice.....	37
4.1.2 Parametry modelu.....	39
4.1.3 Analytické řešení amplitudo-frekvenční charakteristiky.....	39
4.1.4 Analytické řešení průběhu výchylky	41
4.1.5 Numerické řešení průběhu výchylky	42
4.2 Dvouhmotový model	43
4.2.1 Odvození pohybových rovnic.....	43

4.2.2	Parametry modelu	44
4.2.3	Numerické řešení průběhu výchylky	45
4.3	Tříhmotový model body-cover.....	46
4.3.1	Odvození pohybových rovnic	46
4.3.2	Parametry modelu	47
4.3.3	Model pohybu slizniční vlny.....	48
4.3.4	Model falzetu	49
Závěr		51
Seznam použitých zdrojů		53
Seznam použitých zkratk a symbolů		57

Úvod

Lidská řeč je ve společnosti jedním ze základních dorozumívacích prostředků. Hlas je pro každého jedince charakteristickým znakem a lze díky němu projevit různé pocity a emoce, jako například smích, pláč, zděšení nebo údiv. Jeho nejdůležitější funkcí je nicméně schopnost sloužit pro vzájemnou komunikaci a předávání informací.

Důležitost hlasu si většina lidí uvědomí až ve chvíli, kdy o něj přijde v důsledku nachlazení nebo jiných respiračních onemocnění. Někteří lidé bohužel ztratí vlivem nemoci nebo nehody hlas úplně. Například po totální laryngektomii, čili odstranění hrtanu kvůli nádorovému onemocnění, je odstraněn i hlasový orgán a pro obnovení hlasu je proto nutné dodání jiného alternativního zdroje. Dnes existuje několik možností, kterými lze původní hlas nahradit, žádná z nich ale není dostatečně kvalitní a nedokáže zatím vytvořit takový hlas, který by byl ekvivalentní k hlasu původnímu.

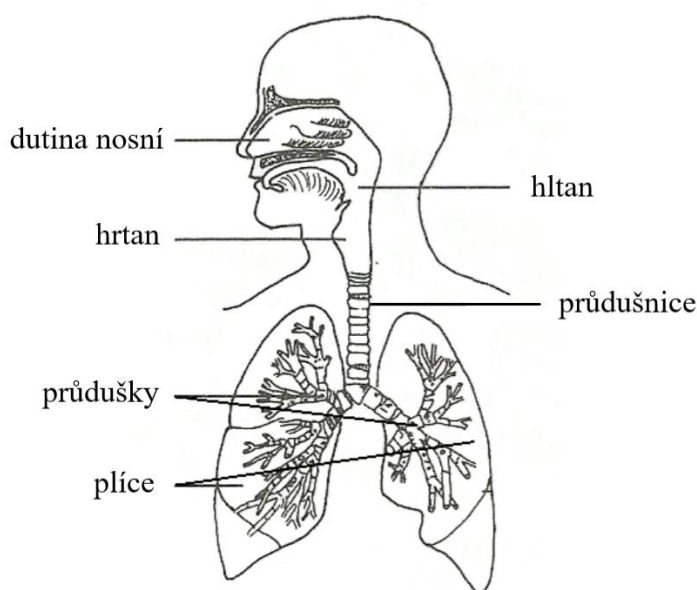
Základem tvorby hlasu jsou hlasivky, skrze které proudí z plic vzduch a rozkmitává je. Rozvibrovaný vzduchový sloupec kolem hlasivek je pomocí vokálního traktu, horních cest dýchacích a mluvidel filtrován do výsledného hlasu. Ten je typický pro každého jedince svou barvou, intenzitou a výškou. Vliv na výsledný hlas má proto nejen charakter kmitání hlasivek, ale i tvar vokálního traktu a jeho elastické vlastnosti.

Chování hlasivek se lidé snaží matematicko-fyzikálně vysvětlit pomocí výpočtových modelů. Dosud vytvořené modely hlasivek lze rozdělit na analytické a numerické. Analytické (hmotové) modely jsou snadno matematicky formulovatelné a slouží k základnímu fyzikálnímu popisu hlasivek. Numerické modely řeší výpočty pomocí numerických metod a svým charakterem se více podobají skutečným hlasivkám. Cílem vědců je vytvořit takový model hlasivek, který by se svými vlastnostmi co nejvíce přiblížil chování reálných hlasivek a zároveň byl matematicky a numericky řešitelný. Takto vytvořený model by mohl být velkou pomocí pro obnovení hlasu, o který zmínění pacienti přišli.

K pochopení funkce hlasivek a vytvoření komplexního modelu by mohla přispět i tato bakalářská práce, která popisuje základní hmotové modely hlasivek, konkrétně jejich vynucené kmitání způsobené harmonickými budícími silami. Tyto síly modelují proud vzduchu, který proudí z plic a rozechvívá hlasivky při fonaci. Modely ukázané v této práci demonstrují kmitání hlasivek v čase a jejich odezvu na různé druhy harmonického buzení.

1 Anatomie hlasového ústrojí

Dýchací systém, *systema respiratorium*, je soustava orgánů, která zajišťuje přenos dýchacích plynů mezi krví a vnějším prostředím [1]. Dýchací proces lze rozdělit na dvě základní fáze – nádech (inspiraci), kdy vzduch proudí směrem dovnitř do plic, a výdech (expiraci), při kterém vzduch proudí naopak ven do okolí [1]. Dýchací soustava se skládá z dýchacích cest a z centrálního orgánu, plic. Dýchací cesty se rozdělují na horní a dolní. Hranice mezi nimi je v hltanu, kde se kříží s cestami polykacími [1]. Do horních cest dýchacích patří dutina nosní a na ni navazující nosohltan. Mezi dolní cesty dýchací se řadí hrtan, na něj se napojuje průdušnice, která se poté větví na dvě průdušky [2]. Ty vstupují do plic a rozdělují se na menší průdušinky, na jejichž koncích jsou plicní sklípky (alveoly). V alveolách dochází k přenosu kyslíku do krve. Plice slouží jako zásobárna vzduchu pro hlasovou produkci. Dýchací systém je popsán na Obr. 1.



Obr. 1: Dýchací systém [3]

1.1 Struktura hrtanu

Prvním oddílem dolních cest dýchacích je hrtan, *larynx*, dutý nepárový orgán. Má tvar trojbokého jehlanu obráceného základnou směrem nahoru [1]. Shora se napojuje na hrtanovou část hltanu a směrem dolů na něj plynule navazuje průdušnice. Hrtan je také orgán, ve kterém je uloženo hlasové ústrojí.

Strukturu hrtanu lze obecně rozdělit na tvrdou tkáň, čili chrupavčitou kostru, a měkkou tkáň, kterou tvoří svalstvo, vazy a sliznice [4].

1.1.1 Kostra hrtanu

Skelet hrtanu tvoří tři nepárové chrupavky a chrupavky párové. Mezi nepárové patří chrupavka štítná, chrupavka prstencová a chrupavka příklopky hrtanové. K párovým se řadí chrupavka hlasivková a několik dalších drobných chrupavek [2]. Chrupavky hrtanu jsou ilustrovány na Obr. 2.

Nejobjemnější chrupavkou je **chrupavka štítná**, *cartilago thyroidea* (TC). Je tvořena dvěma ploténkami, které se ve předu sbíhají v *prominentia laryngea*, tzv. „ohryzek“, který je na krku hmatatelný především u mužů [2, 4]. Jak je vidět na Obr. 2, z okrajů plotének vybíhají

na každé straně nahoru i dolů rohy štítné chrupavky, *cornua superiora* a *cornua inferiora*. Horní rohy jsou vazivově spojeny s jazylkou. Dolní rohy jsou kratší a tvoří kloubní spojení s chrupavkou prstencovou [1].

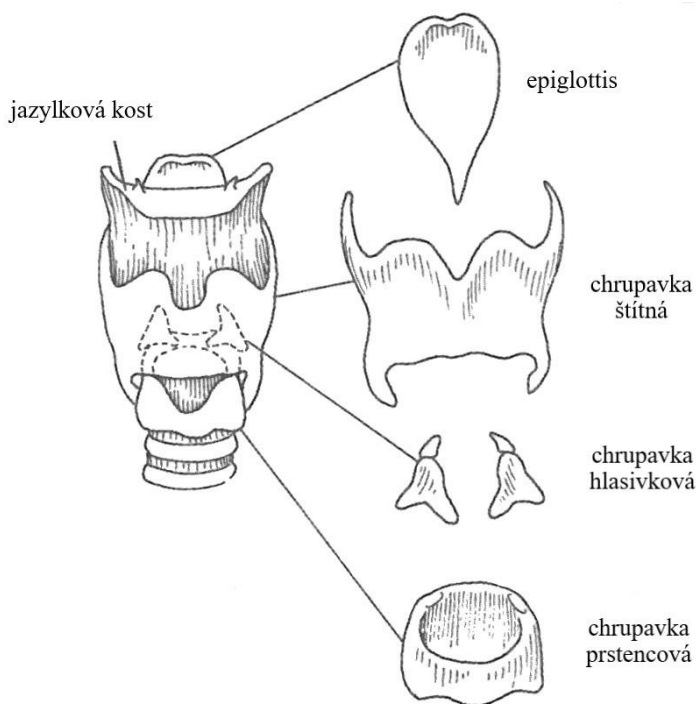
Jazylka, *os hyoideum*, je kost, která se evolučně řadí ke kostem hlavy a nebývá tedy přímou součástí hrtanu. Je ale důležitým prvkem, na který se upíná mnoho hrtanových svalů, a slouží pro pohyblivé uložení a zavěšení ostatních částí hrtanu [4].

Chrupavka prstencová, *cartilago cricoidea* (CC), tvarově připomíná vodorovně položený pečtní prsten s rozšířenou částí obrácenou dozadu [1], viz Obr. 2. Na přechodu mezi ploténkou a zúženým obloukem se nachází párová kloubní ploška, pomocí které je spojena s chrupavkou štítnou. V horní části ploténky je napojena druhou párovou kloubní ploškou na párovou chrupavku hlasivkovou [2]. Ve spodní části je prstencová chrupavka napojena na průdušnici.

Chrupavka hlasivková, *cartilago arytenoidea* (AC), je na rozdíl od předešlých chrupavek párová. Má tvar trojbokého jehlanu, jehož základna je skloubena s prstencovou chrupavkou [1]. Ze základny vybíhají dva výběžky – na *processus vocalis* je upnut hlasový vaz a na *processus muscularis* jsou upnuty svaly [2].

Poslední větší chrupavkou je **chrupavka příklopky hrtanové**, *cartilago epiglottica*. Jedná se o nepárovou elasticickou chrupavku tvarově připomínající lžici na boty nebo rostlinný list [2], jak je patrné na Obr. 2. Tvoří podklad pro hrtanovou příklopku, *epiglottis*, která odděluje hrtan od hltanu a při polykání brání vdechnutí potravy nebo tekutin do dolních cest dýchacích.

Chrupavky jsou vzájemně pohyblivě propojeny klouby, vazy a membránami. Společně tak tvoří uzavřený trubicovitý tvar [2].



Obr. 2: Kostra hrtanu – přední pohled; upraveno a převzato z [5]

1.1.2 Svalstvo hrtanu

Pohyby chrupavek hrtanu jsou zajištěny hrtanovým svalstvem. Všechny svaly hrtanu jsou párové a řadí se ke svalům příčně pruhovaným [2]. Lze je rozdělit podle polohy na přední, postranní a zadní nebo podle funkce na svaly vnější a vnitřní. Vnější svaly propojují hrtan s okolím, především s hrudní kostí a jazylkou, zatímco vnitřní svaly navzájem spojují

chrupavky hrtanu – ovládají postavení hrtanové příklopky a ovlivňují tvar hlasivkové štěrbin, *glottis*, čímž zodpovídají za respirační a fonační polohu hlasivek, jejich tvar a napětí [1, 5]. Svaly ovládající hlasové vazy dále dělíme na adduktory, které hlasivkovou štěrbinu zužují, a abduktory, které ji naopak rozevírají [1]. Hrtanové svalstvo je vyobrazeno na Obr. 3.

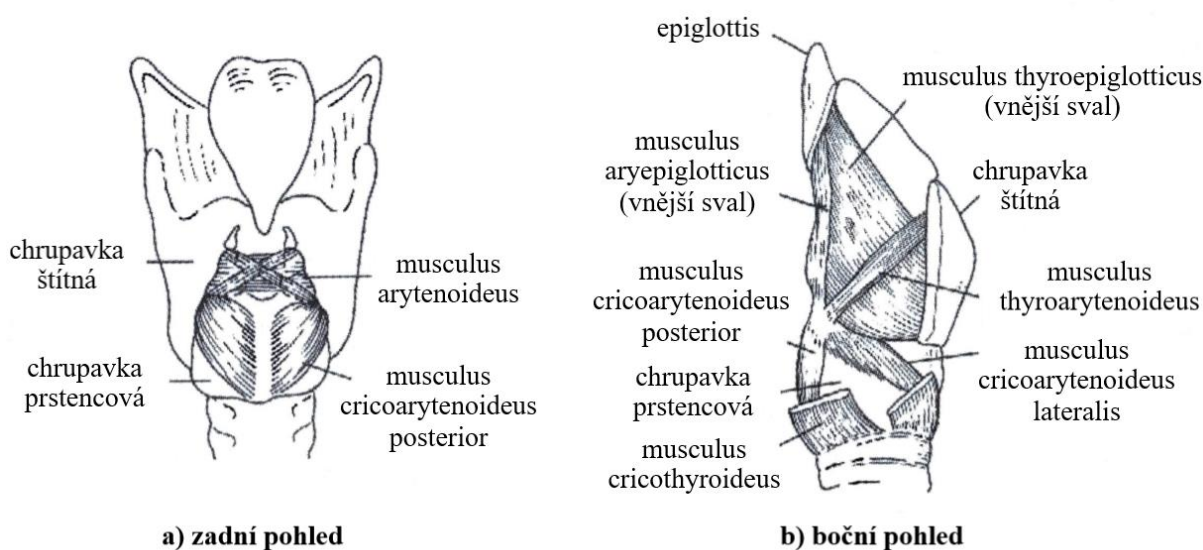
Primárním abduktorem hlasivek je ***musculus cricoarytenoideus posterior***. Upíná se z jedné strany na zadní plochu ploténky prstencové chrupavky a z druhé strany zezadu na svalový výběžek chrupavky hlasivkové. Rotuje a současně posouvá dozadu hlasivkovou chrupavku, čímž způsobuje rozevírání hlasivkové štěrbin, *glottis*, a zároveň natahování hlasových vazů. Svou kontrakcí hlasové vazy stává do polohy respirační [1, 2, 6].

Proti pohybu primárního abduktoru působí ***musculus cricoarytenoideus lateralis***, který jde od oblouku prstencové chrupavky k přední části svalového výběžku hlasivkové chrupavky. Svým smrštěním k sobě přitahuje hlasové vazy, a tedy zužuje *glottis* a dává vazy do polohy fonační [1].

Nejsilnějším adduktorem je však ***musculus arytenoideus***, sval, který na zadní straně hrtanu spojuje hlasivkové chrupavky, a tím k sobě přitahuje i hlasové vazy a uzavírá štěrbinu mezi nimi [1, 4].

Musculus cricothyroideus, tzv. vnější napínač, je sval táhnoucí se od přední části prstencové chrupavky ke chrupavce štítné. Tento sval naklání štítnou chrupavku dopředu, čímž napíná a prodlužuje hlasové vazy, a ovlivňuje tak frekvenci kmitání hlasivek [1, 2, 4].

Antagonistou předchozího svalu je hlasivkový sval, ***musculus thyroarytenoideus***, který se upíná od hlasivkové chrupavky ke chrupavce štítné. Tu naklání směrem dozadu a uvolňuje tím napětí hlasových vazů [1]. Tento sval má přímý vliv na výšku tónu hlasivek a nastavení hlasových rejstříků [4].



Obr. 3: Svalstvo hrtanu; upraveno a převzato z [5]

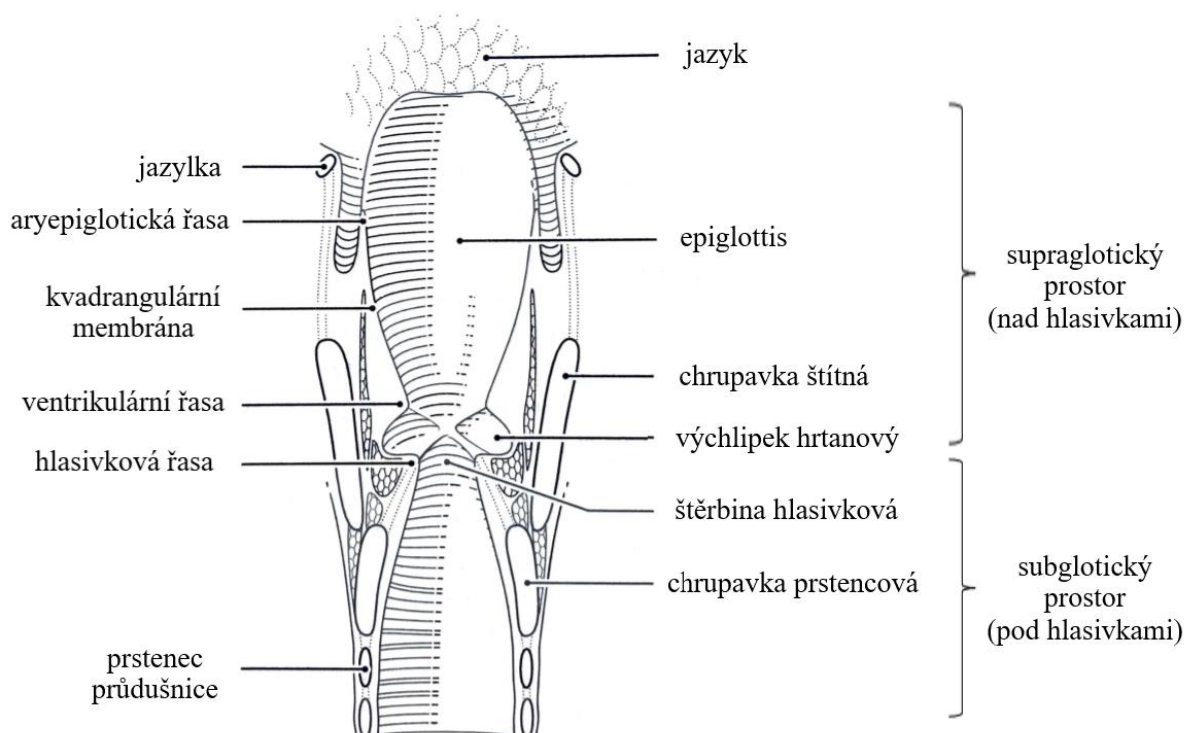
1.1.3 Dutina hrtanu

Dutina hrtanu, *cavitas laryngis*, nahoře navazuje na hrtanovou část hltanu a dole plynule pokračuje do průdušnice. Jak je vidět na Obr. 4, v řezu má dutina tvar přesýpacích hodin [1]. Je vyložena sliznicí hrtanu, která je většinou pokryta víceřadým řasinkovým epitelem. Dutina hrtanu je slizničními řasami rozdělená na tři části – hrtanovou předsíň, hlasivky a dolní část hrtanu [2].

Hrtanová předsíň, *vestibulum laryngis*, je horní část hrtanu, která se směrem dolů zužuje. Nachází se mezi vchodem a zúženou *rima vestibuli*, štěrbinou mezi nepravými hlasovými řasami, *plicae ventriculares*, někdy označované jako nepravé hlasové vazy nebo ventrikulární řasy [1, 2].

Dolní částí hrtanu je *cavitas infraglottica*, která se naopak směrem dolů rozšiřuje. Začíná hlasivkovou štěrbinou, *rima glottidis*, a končí u prstencové chrupavky, kde na ni plynule navazuje průdušnice [2].

Mezi těmito dvěma úseky hrtanu se nachází *glottis*, zúžená střední část dutiny hrtanové, ve které se nachází hlasivky [1].



Obr. 4: Dutina hrtanu – přední pohled; upraveno a převzato z [7]

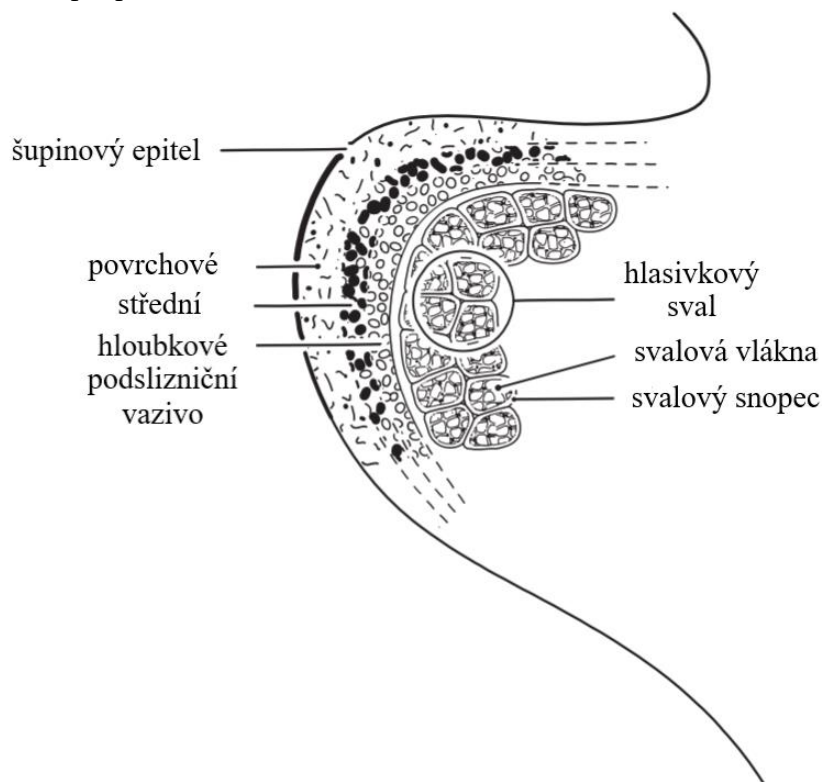
1.2 Hlasivky

Hlasivky jsou párový orgán, který je zodpovědný za tvorbu hlasu. Nachází se v nejužším místě hrtanu mezi chrupavkou štítnou a chrupavkami hlasivkovými [4]. Označují se také jako pravé hlasové vazy, *plicae vocales*, někdy jsou nazývány i jako hlasivkové řasy, mezi kterými se tvoří hlasivková štěrbina [1]. Tato štěrbina mění svou geometrii pomocí hrtanových svalů, které ovládají pohyby hrtanových chrupavek. V důsledku proudění vzduchu při výdechu jsou hlasivky rozechvěny a ve štěrbině vzniká zvuk. Ten poté získává individuální barvu lidského hlasu rezonancí v dutinách uložených nad hlasivkami [2]. Díky delším hlasovým vazům a celkově prostornějšímu hrtanu mají muži hlubší hlas než ženy [1, 2]. Těsně nad *glottis* mezi pravými a nepravými hlasovými vazy vzniká hrtanový výchlípek (viz Obr. 4), *ventriculus laryngis*, který slouží jako rezonanční dutina k zesilování hlasu [1].

Samotná hlasivka je složena z několika vrstev, viz Obr. 5. Na jejím povrchu se nachází tenký **šupinový epitel** o tloušťce 0,05–0,1 mm. Pod epitelem lze vidět měkkou tkáň, která je svými vlastnostmi podobná tekutině. Střední vrstvu hlasivky tvoří nesvalový vrstevnatý systém ***lamina propria*** o celkové tloušťce zhruba 1–2,5 mm. Lze jej obecně rozlišit na tři části (povrchovou, střední a hloubkovou), které na sebe plynule navazují [7]. **Povrchová vrstva** je složena

z neuspořádaných elastických vláken. **Střední vrstva** je tvořena také elastickými vlákny, ty jsou zde ale uspořádané a stejně orientované [8]. Elastická vlákna dovolují dostatečné prodloužení a deformaci hlasivek. Ve střední vrstvě se nachází i menší množství kolagenních vláken. Ta lze ale primárně najít v **hloubkové vrstvě** a oproti elastickým vláknům jsou téměř nepod-
dajná. Pod všemi zmíněnými vrstvami se nachází **hlasivkový sval**, *musculus thyroarytenoideus*, který byl popsán v kapitole 1.1.2. Jeho tloušťka je přibližně 7–8 mm a tvoří proto největší část hlasivky [4, 7].

Dohromady je tedy rozlišováno celkem pět vrstev hlasivky. Tyto vrstvy někdy bývají sdružovány do skupin tak, že jsou uvažovány jen vrstvy dvě nebo tři. Dvouvrstvé schéma rozlišuje *obal* a *tělo* hlasivky, kde obal tvoří epitel a první dvě vrstvy *lamina propria* a do těla se zařazuje hloubková vrstva *lamina propria* a hlasivkový sval. Třívrstvé schéma pak rozlišuje *sliznici*, kam patří epitel a povrchová vrstva *lamina propria*, *vaz*, kam se řadí střední a hloubková vrstva *lamina propria*, a *sval* [9].



Obr. 5: Frontální řez hlasivkou; upraveno a převzato z [7]

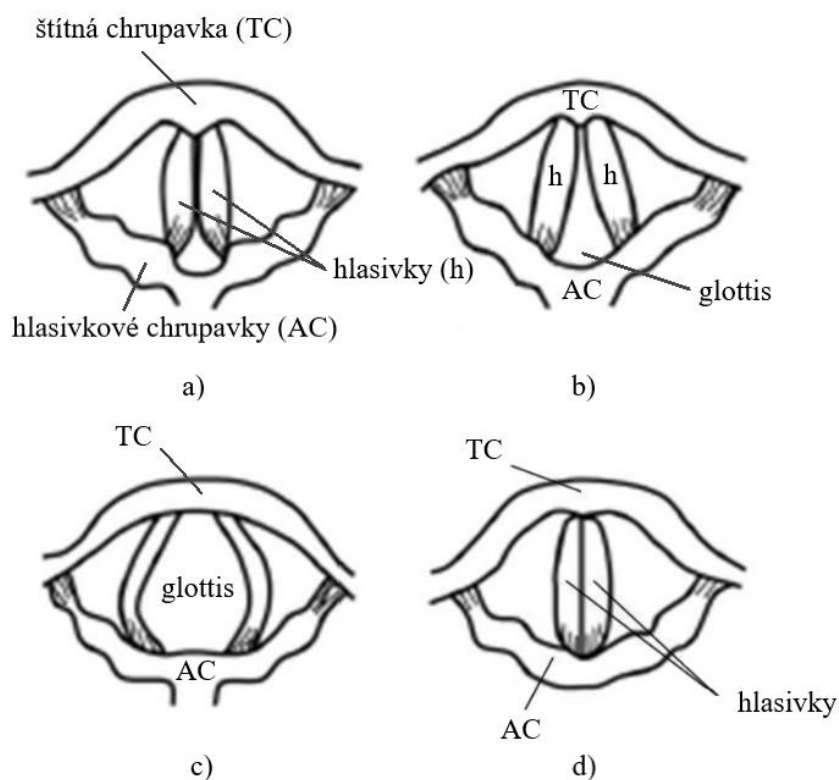
2 Funkce hrtanu, tvorba hlasu

Hrtan má několik důležitých funkcí. Je součástí dýchacích cest, proto je důležitý při dýchání (respiraci). Současně se hrtan také podílí na tvorbě hlasu (fonace). Obě tyto funkce jsou spojeny s pozicí *plicae vocales* [1, 5, 8].

Hrtan se také účastní polykání, kdy se *epiglottis* pomocí příslušných svalů reflexivně sklopí a uzavře hrtan, čímž zabrání proniknutí potravy do dýchacích cest. Pokud se ale i přesto potrava do hrtanu dostane, je vykašlána z dolních cest dýchacích ven [2, 5]. Stejně tak kašel pomáhá odstraňovat nahromaděný hlen. Jedná se o hluboký nádech, krátké uzavření hlasivkové štěrbiny a následné prudké vydechnutí, na kterém mají velký podíl břišní svaly [2].

2.1 Dýchání

Při dýchání je hlasivková štěrbina, *rima glottidis* (často zkráceně *glottis*), rozevřena. Velikost rozevření závisí na intenzitě dýchání – čím usilovnější dýchání, tím více je štěrbina otevřena. Při běžném tichém dýchání je štěrbina otevřena minimálně (Obr. 6 a)), při středně intenzivním dýchání se štěrbina rozevře po celé své délce (Obr. 6 b)) a při usilovném dýchání je štěrbina otevřena doširoka (Obr. 6 c)) [2, 5, 6].



Obr. 6: Polohy hlasivek při respiraci a fonaci [3]

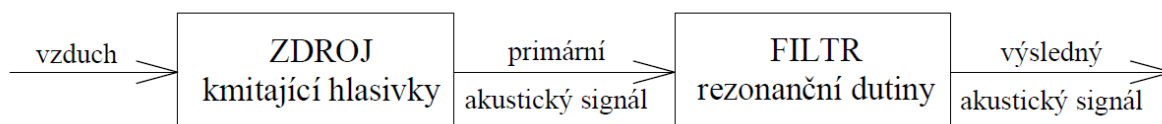
2.2 Tvorba lidského hlasu

Při tvorbě hlasu (fonaci) jsou hlasivky přitisknuty k sobě a *glottis* je uzavřena po celé své délce, viz Obr. 6 d) [2, 6]. Vznik hlasu lze demonstrovat na teorii zdroje a filtru [10], která popisuje ve dvou stupních vznik samohlásek (viz Obr. 7).

2.2.1 Teorie zdroje a filtru

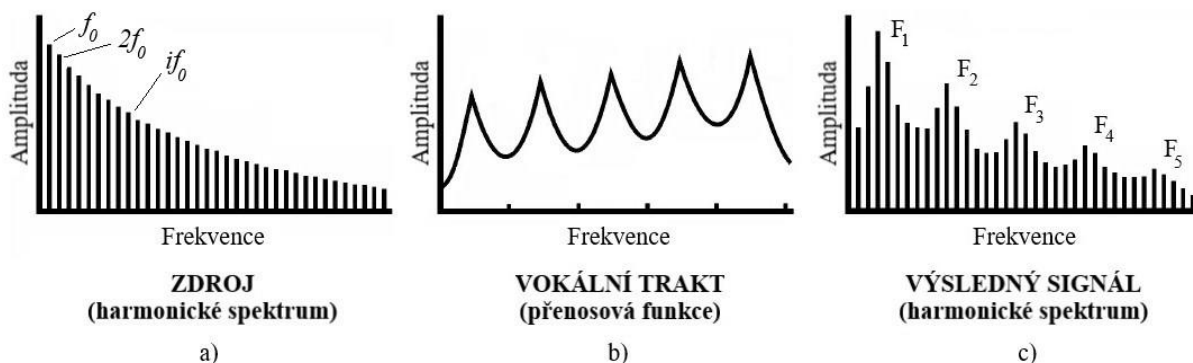
V prvním stupni proudí vzduch ze subglotického prostoru (prostoru pod hlasivkami) skrz zdroj, který představují hlasivky, a rozechvívá jej. Zde se původní statický tlak z plic a průdušnice přeměňuje na prvotní akustický tlak a vzniká tím v hrtanu primární akustický signál [4, 7].

Ve druhém stupni je tento slabý a řezavý signál [2] formován na výsledný akustický signál v rezonančních dutinách nad hlasivkami (tzv. supraglotických), které působí jako *filtr*. Zde získá hlas svou charakteristickou barvu [4]. Na samotnou řeč (artikulaci) je potom hlas přeměněn primárně v dutině ústní pomocí určitého postavení jazyka, zubů, rtů a patra specifickou kombinací souhlásek a samohlásek [1].



Obr. 7: Teorie zdroje a filtru [4]

Na Obr. 8 je znázorněno formování frekvenčního spektra. Na Obr. 8 a) je vidět harmonické spektrum hlasivek, v němž je obsažena základní frekvence kmitání f_0 a její násobky, které mají postupně klesající amplitudu. Na výsledném signálu na Obr. 8 c) mají podíl i rezonanční maxima v supraglotických dutinách (Obr. 8 b), které některé frekvence zdroje (hlasivek) zdůrazní a jiné naopak zeslabí. Ve výsledném signálu se projeví jako maxima, která se označují jako formanty F_1, F_2 atd. Každá samohláska má tato maxima jinde, protože vokální trakt je pokaždé postaven jinak, a tím pádem má každá samohláska svůj typický zvuk [4, 7].



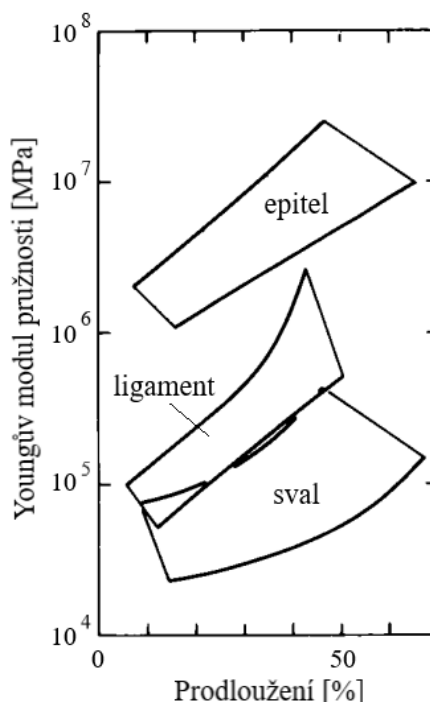
Obr. 8: Frekvenční spektrum hlasu; upraveno a převzato z [4]

2.2.2 Myoelasto-aerodynamická teorie

Aktuálně uznávaná teorie o tvorbě zvuku, který generují hlasivky, představuje myoelasto-aerodynamická teorie. Popisuje chování hlasivek ze dvou rovin (myoelastické a aerodynamické), které se navzájem doplňují [11].

V myoelastické rovině se na tvorbě zvuku, jak vyplývá z názvu, podílí elastické vlastnosti hlasivek a aktivace příslušných svalů [4]. Elastické vlastnosti jednotlivých vrstev hlasivek, které se podílí na frekvenci kmitání hlasivek a charakteru hlasu, lze v nejjednodušším přiblížení popsat pomocí Youngova modulu pružnosti a Poissonova poměru. Jak lze vidět na Obr. 9, hodnota modulu pružnosti je nejnižší v hlasivkovém svaly a směrem k povrchu hlasivky roste [9]. Svaly, které ovlivňují napínání, vyboulení a délku hlasivek, jsou především *musculus cricothyroideus*, jenž hlasivky napíná a prodlužuje, a *musculus thyroarytenoideus*, který působí

opačně a hlasivkám dává vyboulený tvar a zkracuje je [4]. Zjednodušeně si lze kmitání hlasivky představit jako kmitání struny. V momentě, kdy se hlasivka na délku zkrátí, se zároveň zesílí, a kmitá proto s nižší frekvencí. Naopak při napnutí se hlasivka prodlouží a zúží, je tudíž napjatější a kmitá s frekvencí vyšší [5].



Obr. 9: Youngův modul pružnosti jednotlivých vrstev hlasivek v závislosti na prodloužení; upraveno a převzato z [9]

Aerodynamická rovina popisuje proudění vzduchu mezi hlasivkami a ve vokálním traktu. Toto proudění poskytuje energii pro vibrace hlasivek [12]. Při výdechu začne vzduch proudit z plic do průdušnice, kde je zastaven uzavřenou hlasivkovou štěrbinou, protože před fonací jsou hlasivky přitisknuty k sobě [13]. Pod hlasivkami se začne akumulovat vzduch a nastane zde lokální přetlak. Tím vznikne zvuková vlna, která se začne šířit rychlostí zvuku zpátky od uzavřených hlasivek, na konci subglotického traktu se odrazí a putuje zpět s nižší amplitudou. Tento děj se vlivem tlumení opakuje až do chvíle, kdy se *glottis* otevře. Podobný děj založený na stejném principu se děje i v supraglotickém traktu, kde po uzavření *glottis* nastane podtlak, který se šíří opačným směrem než přetlak v subglotickém traktu [12]. Takto jsou generovány pulzy vzduchu, které se projevují jako zvuk [8].

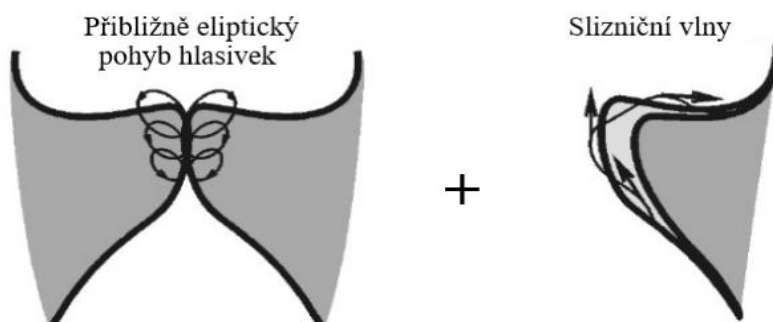
Tlakový gradient mezi průdušnicí a vokálním traktem je hnací silou pro pohyb vzduchu směrem nahoru, ale pro samobuzené kmitání je stěžejní intraglotický tlak, tedy tlak přímo mezi hlasivkami. Na něj má vliv jak subglotický, tak i supraglotický tlak a také tlak Bernoulliho. Jejich vzájemný poměr závisí na momentální geometrii *glottis*. Změnou průběhu intraglotického tlaku vzniká tzv. „push-pull efekt“, který zajišťuje přenos aerodynamické energie na pohyb hlasivek [12]. Frekvence kmitání hlasivek je zhruba 70–500 Hz u mužů a 140–1000 Hz u žen [4, 11]. Protože kmitání není způsobeno aktivním pohybem svaloviny, ale prouděním vzduchu, jedná se o pasivní děj [5].

Kmitající hlasivky následně rozkmitají sloupec vzduchu v rezonančních dutinách, ve kterých se začne podélným vlněním šířit zvuk [8]. Frekvence kmitů v těchto dutinách, tedy v supraglotickém traktu, závisí na jejich tvaru a měla by odpovídat formantům samohlásek, jež jsou zmíněny v teorii zdroje a filtru v kapitole 2.2.1 a zobrazeny na Obr. 8 c). Díky formantům,

které jsou charakteristické pro každou samohlásku, můžeme od sebe jednotlivé samohlásky odlišit [12].

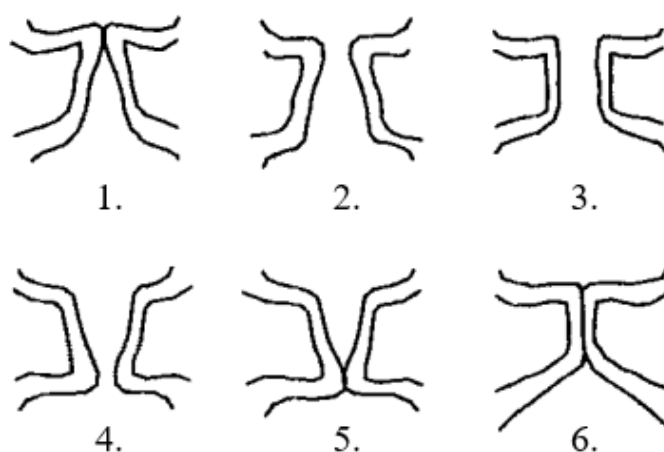
2.2.3 Pohyby hlasivek při fonaci

Při fonaci se hlasivky celkově pohybují přibližně po eliptických dráhách, které jsou doplněny o vlnitý pohyb slizničního vaziva, často označovaný jako slizniční vlna [14]. Tento vlnitý pohyb je způsoben interakcí povrchu hlasivky s proudícím vzduchem [4]. Tyto pohyby hlasivek jsou znázorněné na Obr. 10.



Obr. 10: Pohyby hlasivek [4]

Obr. 11 zobrazuje ve frontálním řezu tvar hlasivek v jednotlivých fázích periody kmitů. První dvě fáze znázorňují otvírání *glottis*, kdy se od sebe nejdříve oddálí spodní část hlasivek (fáze 1) a poté horní část hlasivek (fáze 2). Při tomto procesu mají hlasivky konvergentní tvar. Fáze 3 zobrazuje hlasivky při maximálním rozevření a *glottis* má paralelní tvar. Poté se *glottis* začne uzavírat (opět nejdříve spodní části hlasivek a teprve poté horní části), přičemž mají hlasivky tvar divergentní (fáze 4 a 5). Nakonec se *glottis* uzavře úplně (fáze 6) a celý děj se opakuje [8, 14].



Obr. 11: Poloha hlasivek v jednotlivých fázích periody kmitů; upraveno a převzato z [14]

2.3 Vlastnosti hlasu

Jak již bylo zmíněno, hlas vzniká dominantně v supraglotických dutinách (hltan, dutina ústní a nosní a vedlejší dutiny nosní), které mají pro každou hlásku charakteristické postavení [1, 4]. Vzniklý akustický signál je tedy dán fyziologií hlasového ústrojí a závisí na třech složkách – barvě, intenzitě a výšce [15].

Výška hlasu je dána základní frekvencí kmitání hlasivek f_0 , která závisí především na délce hlasivek. Čím jsou hlasivky kratší, tím vyšší je výsledný hlas [15]. U žen se délka hlasivek pohybuje okolo 13–19 mm, u mužů zhruba 17–25 mm [5].

Intenzita zvuku závisí na množství a síle vydechovaného proudu vzduchu skrz *glottis*. Čím více vzduchu je vydechováno, tím je mezera mezi hlasivkami větší a hlasivky tak kmitají s větší amplitudou. Hlasitost řeči je částečně vrozená, pravidelným cvičením ji lze ale zvyšovat [15].

Barva hlasu vzniká, jak již bylo řečeno, specifickým postavením vokálního traktu a rezonancí lebečních a lícních kostí a je možné ji ovlivňovat i nastavením jazyka a rtů [16]. Pro každého jedince je proto barva hlasu jedinečná a lze díky ní konkrétního člověka identifikovat. Vlivem proměn barvy hlasu jednotlivce je možné rozpoznat určitou náladu a rozpoložení člověka [5].

3 Přehled hmotových výpočtových modelů

V současné době je velká část výzkumu tvorby hlasu zaměřena na vytvoření vhodného výpočtového modelu hlasivek. Takový model by mohl pomoci pacientům, kteří trpí hlasovými poruchami, případně i těm, kteří o hlas přišli úplně.

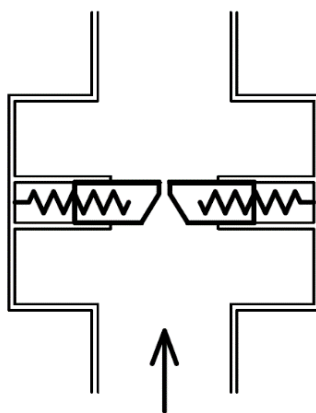
Z matematicko-fyzikálního pohledu lze dosud vytvořené modely rozdělit na analytické a numerické.

Analytické (hmotové) modely slouží k základnímu fyzikálnímu popisu pohybu hlasivek. Vyznačují se jednodušším matematickým popisem a nízkým počtem stupňů volnosti. Mají hmotné, pružné a tlumicí členy, podle jejichž počtu se dělí na jedno- až n-hmotové. Těmito modely se bude práce dále zabývat.

Pro numerické modely je typický velký počet stupňů volnosti, jejichž analytické řešení bylo obtížné a časově náročné. Výpočty se řeší numerickými metodami, nejčastěji pomocí metody konečných prvků¹ nebo metody konečných objemů².

3.1 Ewaldova píšťala

Ewaldova píšťala [17] je považována za historicky první model hlasivek. Jedná se o mechanismus se dvěma protiraznými jazýčky, které jsou k sobě v trubici přitlačovány pomocí pružin, viz Obr. 12. V důsledku narůstajícího tlaku proudícího vzduchu jsou od sebe hlasivky oddáleny a poté, co vzduchu projde skrz štěrbinu a tlak klesne, jsou díky své pružnosti (tuhost pružin na Obr. 12 je analogická napětí hlasivek) přiblíženy zpět k sobě. Tento děj se periodicky opakuje, vyvolává zhušťování a zředňování vzduchu a vzniká tím zvuk. Ewald tento model připravil fyzicky, ale nedokázal jej matematicky popsat [4, 17].



Obr. 12: Ewaldova píšťala; podle [17]

3.2 Jednohmotový model

Jednohmotový model (Obr. 13), který navrhli Flanagan a Landgraf [18], matematicko-fyzikálně popisuje chování Ewaldovy píšťaly. Využívá symetrického pohybu hlasivek, a popisuje proto chování jen jedné hlasivky, druhá hlasivka je nahrazena zrcadlovým obrazem té první. Hlasivku zastupuje jedna hmota, která kmitá pouze v jednom směru (tj. s jedním stupněm volnosti). Kmitání $x(t)$ je zajištěno jedním pružným členem, který určuje tuhost soustavy, a jedním tlumicím členem, který stanovuje intenzitu tlumicích sil [4, 18, 19].

¹ MKP, anglicky FEM – finite element method

² MKO, anglicky FVM – finite volume method

Tento model lze popsat jednou pohybovou rovnicí se třemi visko-elastickými parametry:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F, \quad (1)$$

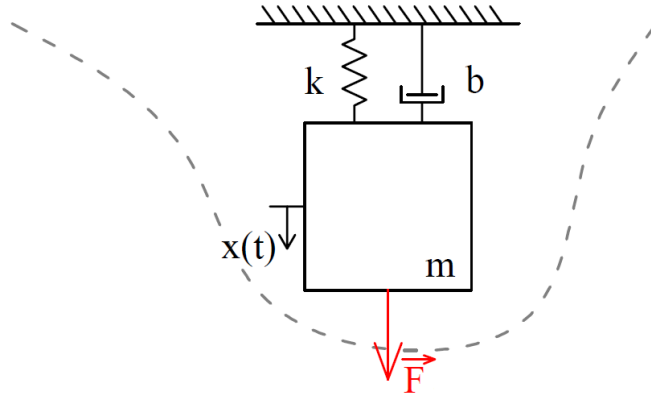
kde

m – hmotnost hmotného členu,

k – tuhost pružiny,

b – konstanta tlumení,

F – hnací síla způsobená proudem vzduchu.



Obr. 13: Jednohmotový model hlasivky

3.3 Dvouhmotový model

Jednohmotový model bohužel nedokáže popsat reálný pohyb hlasivek, protože u něj není patrný pohyb slizniční vlny [19, 20]. Z tohoto důvodu vznikl symetrický dvouhmotový model (viz Obr. 14) autorů Ishizaky a Flanagan [21], který lépe popisuje chování hlasivek.

Hlasivka je zde zastoupena dvěma hmotnými prvky, které jsou navzájem spojeny pomocí lineárního pružného členu. Jejich pohyb je fázově posunut, čímž je realizován pohyb horního a dolního okraje hlasivky. Každý hmotný člen je navíc spojen (stejně jako v případě jednohmotového modelu) se základním tělesem pomocí pružného a tlumicího členu.

Model kmitá se dvěma stupni volnosti ($x_1(t)$ a $x_2(t)$) a díky pružnému členu k_3 mezi hmotnými prvky, který způsobuje fázový posun, a pružným členům k_1 a k_2 vykazuje nelineární chování. K popisu tohoto modelu jsou nutné dvě pohybové rovnice s celkem sedmi visko-elastickými parametry:

$$m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + k_1x_1 + k_3(x_1 - x_2) = F_1, \quad (2)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 + k_2x_2 + k_3(x_2 - x_1) = F_2, \quad (3)$$

kde

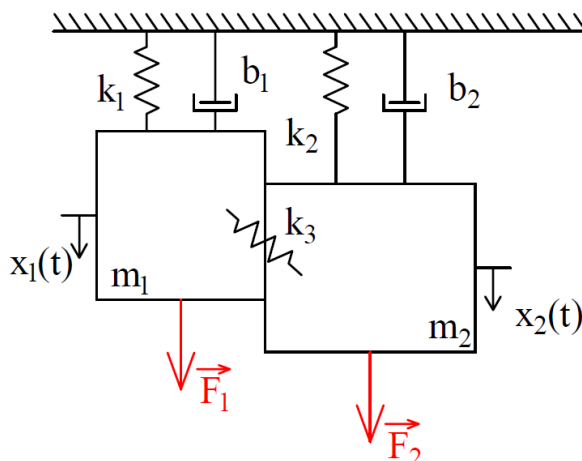
m_1, m_2 – hmotnosti hmotných členů,

k_1, k_2 – nelineární tuhosti pružin,

k_3 – lineární tuhost pružiny,

b_1, b_2 – konstanty tlumení,

F_1, F_2 – hnací síly způsobené proudem vzduchu.



Obr. 14: Dvouhmotový model hlasivky

Díky malému počtu visko-elastických parametrů a zároveň tomu, že dokáže popisovat pohyb slizniční vlny, je dvouhmotový model nejpoužívanějším analytickým modelem hlasivek od svého vzniku až do současnosti [4, 20, 22]. Pohyb slizniční vlny lze charakterizovat pomocí dvou módů, které jsou analogické s fázemi 1 a 5 na Obr. 11 z kapitoly 2.2.3. Díky nelinearitě byl model použit i pro studium jevů bifurkace, subharmonické frekvence nebo neperiodických kmitů hlasivek [4, 19].

Dvouhmotový model lze modifikovat tak, aby kmital stále symetricky, ale nelineárně. S tímto modelem přišli Lucero a Koenig [23]. Do pohybových rovnic přidali nelineární prvky K_1 , K_2 , B_1 a B_2 , které popisují dynamické vlastnosti hlasivek. Důvodem bylo omezit amplitudu kmitání hlasivek při zvyšování šířky *glottis*. Sestavené pohybové rovnice lze proto napsat ve tvaru:

$$m_1 \ddot{x}_1 + B_1(b_1, \dot{x}_1, x_1) + K_1(k_1, x_1) + k_3(x_1 - x_2) = F_1, \quad (4)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + B_2(b_2, \dot{x}_2, x_2) + K_2(k_2, x_2) + k_3(x_2 - x_1) = F_2, \quad (5)$$

kde funkce B_1 a B_2 mají tvar:

$$B_i = b_i(1 + 150|x_i|)\dot{x}_i, i = 1, 2. \quad (6)$$

Tvary funkcí K_1 a K_2 závisí na tom, zda dochází ke kontaktu mezi hlasivkami nebo ne, přičemž během vzájemného kontaktu hlasivek jejich tuhost narůstá [19, 23].

Pokud ke vzájemnému kontaktu hlasivek nedochází, mají funkce K_1 a K_2 tvar:

$$K_i = k_i x_i(1 + 100x_i^2), i = 1, 2. \quad (7)$$

Pokud ke kontaktu naopak dochází, mají funkce tvar:

$$K_i = k_i x_i(1 + 100x_i^2) + 3k_i(x_i + x_0)[1 + 500(x_i + x_0)^2], x_i < -x_0, i = 1, 2, \quad (8)$$

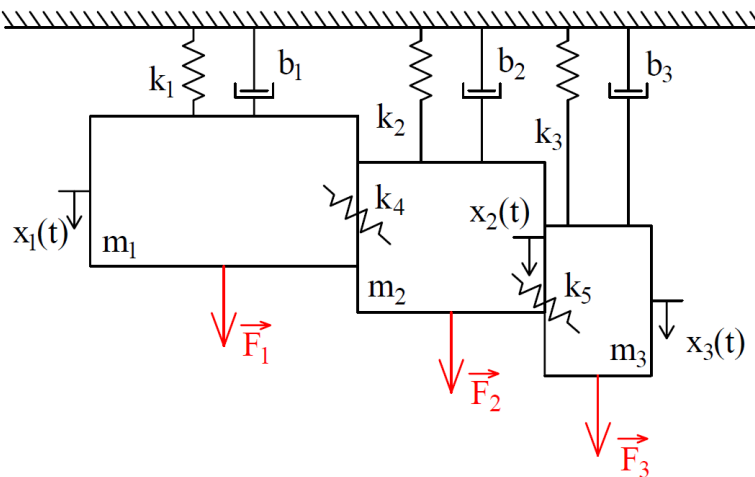
kde x_0 je neutrální poloha.

Další modifikací klasického dvouhmotového modelu je model kmitající nesymetricky. Nelineární model představili Isshiki a kol. [24], nelineární později Wurzbacher a kol. [25]. Podnětem pro vznik těchto modelů byl fakt, že asymetrie by mohla odhalit různé hlasové poruchy, což bylo později experimentálně dokázáno [7]. Na základě hlasových poruch se mění mechanické vlastnosti hlasivek, což může vyvolat asymetrické kmitání, které způsobí vytvoření jiné kvality hlasu, než mají zdravé hlasivky, které kmitají symetricky [19].

3.4 Tříhmotový model

S rozšířením dvouhmotového modelu o třetí hmotný prvek, který se stejně jako první dva hmotné prvky lineárně připojí k pevné stěně, přišli Tokuda a kol. [26]. Aby zachovali původní podstatu dvouhmotového modelu, zmenšili hmotnost přidaného prvku m_3 tak, že $m_2 = 5m_3$ a $m_1 = 5m_2$, čímž umožnili napodobení fyzických funkcí hlasivek.

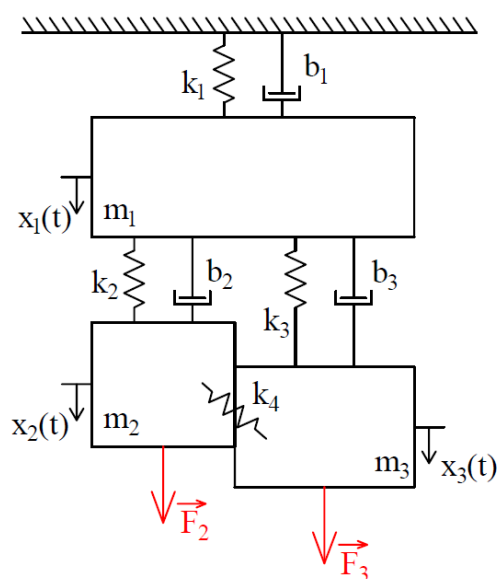
K popisu tohoto modelu na Obr. 15 je zapotřebí jedenáct visko-elastických parametrů (hmotné členy m_1 , m_2 a m_3 , tuhosti pružin k_1 až k_5 a konstanty tlumení b_1 , b_2 a b_3), které lze sepsat do tří pohybových rovnic. Model proto kmitá se třemi stupni volnosti.



Obr. 15: Tříhmotový model

3.5 Tříhmotový model body-cover

Na práci Ishizaky a Flanagan navázali také Story a Titze, kteří vytvořili jiný tříhmotový model hlasivek [27]. Tento model je rozdělen na tělo („body“) a obal („cover“) hlasivky. Obal hlasivky tvoří hmotné členy m_2 a m_3 , které jsou navzájem spojeny pomocí lineárního pružného členu. Tyto hmoty jsou s tělem hlasivky, které představuje hmotný člen m_1 , propojeny pomocí nelineárních pružných a tlumicích členů.

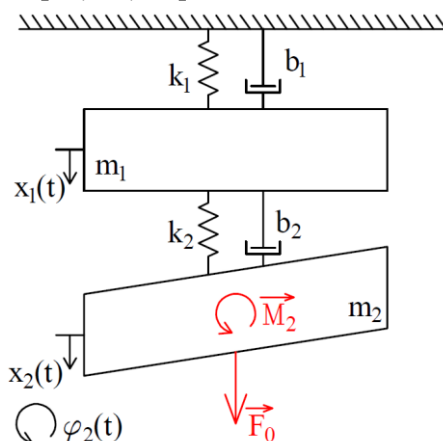


Obr. 16: Tříhmotový model body-cover

Z Obr. 16 je patrné, že se v podstatě jedná o dvouhmotový model, který k pevné stěně (chrupavce) není připojen přímo, nýbrž nepřímo skrz třetí hmotný prvek. Jedná se tedy o zobrazení dvouvrstvého schématu hlasivky, které bylo zmíněno v kapitole 1.2.

K úplnému popisu tohoto modelu je potřeba opět tří pohybových rovnic, které obsahují deset visko-elastických parametrů. Model, stejně jako Tokudův tříhmotový model, kmitá se třemi stupni volnosti.

Titze tento model později modifikoval i na model, který je složen pouze ze dvou hmot [28]. Tělo hlasivky („body“) je zachováno, ale obal hlasivky („cover“), který na Obr. 17 představují hmoty m_2 a m_3 , byl zredukován na jednu hmotu („plate“, čili desku), která může rotovat. Model má proto zachován tři stupně volnosti. Titze model vytvořil pro zkoumání regulace proudu vzduchu skrz *glottis* tak, aby byl aplikován co největší přenos hnací síly při zachování co nejmenšího počtu hmotných prvků [11, 28, 29].

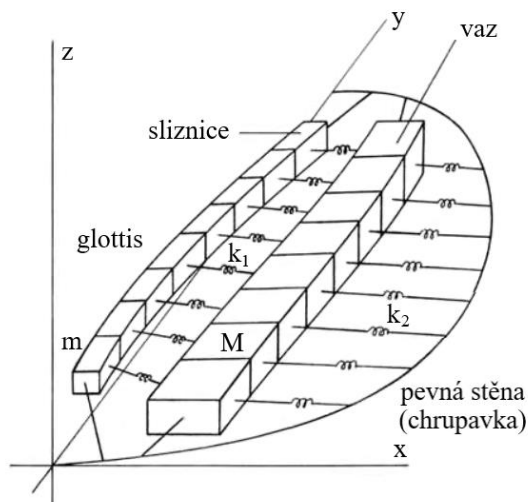


Obr. 17: Dvouhmotový body-plate model

3.6 Vícehmotové modely

Obecně platí, že zvyšováním počtu hmotných prvků lze získat model, který se přibližuje reálné anatomii a fyziologii hlasivek.

Prvním modelem, který se skládal z více než tří hmot, byl 16-hmotový model vycházející z modelu Ishizaky a Flanagan [21], se kterým přišel Titze [30, 31]. Hmoty jsou rozděleny do dvou řad, které jsou navzájem propojeny pomocí pružných členů k_1 a k_2 , viz Obr. 18.



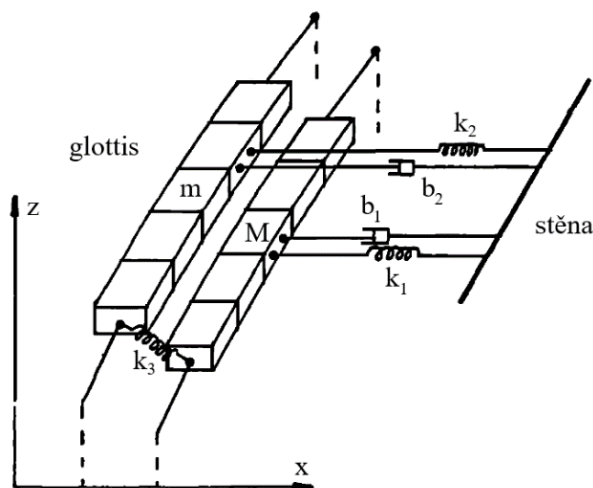
Obr. 18: 16-hmotový model; upraveno a převzato z [30]

Každá řada má dva stupně volnosti – je možná translace v ose x (kolmo k vektoru proudění vzduchu) a v ose y (ve směru proudění vzduchu). Řada blíže *glottis* (na Obr. 18 hmota m) znázorňuje sliznici hlasivky a řada blíže k pevné stěně (na Obr. 18 hmota M) znázorňuje hlasivkový vaz. Osm hmot v každé řadě umožňuje dostatečnou flexibilitu modelu, ale zároveň lze model analyticky formulovat [30].

Titze dokázal pomocí tohoto modelu vytvořit kmitající soustavu, která zvládla vytvořit dva hlasové rejstříky a demonstrovat i některé patologické jevy [31]. Nevýhodou modelu je ale větší počet rovnic, které jsou náročnější na výpočet a které se v dnešní době nahrazují numerickými modely. Titze nicméně vytvořil model, na který později navázala spousta dalších autorů.

Jednu z modifikací tohoto modelu vypracoval Kob [32]. Jeho model byl schopný simulovat různé druhy hlasů jako např. soprán, baryton nebo bas.

Další modifikací Titzeho modelu v kombinaci s dvouhmotovým modelem Ishizaky a Flanagan [21] je desetihmotový model (viz Obr. 19), se kterým přišel Wong a kol. [33]. Model má na výšku hlasivky dvě hmoty, které jsou po své délce rozděleny na pět částí. Tento model je využíván pro studium hlasových poruch.



Obr. 19: 10-hmotový model; upraveno a převzato z [33]

Dalšími modely, které se více blíží reálným hlasivkám, jsou také 3D modely hlasivek. Mezi ně patří např. šestihmotové modely, které vytvořili Schwarz a kol. [34] a Wurzbacher a kol. [35], nebo 25-hmotový model Yanga a kol. [36], či dokonce Titzeho 175-hmotový model [11].

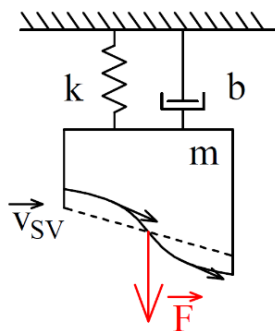
Za zmínku stojí i modely [37, 38], které se věnují fonaci s nedovřenou *glottis*. Tato fonace je typická u žen a dětí nebo při hlasových poruchách [29]. *Glottis* je u těchto modelů uzavřena jen na části své délky na rozdíl od ostatních výše zmíněných modelů, které uvažují vždy *glottis* buď zcela otevřenou, nebo zcela zavřenou.

3.7 Model slizniční vlny

Model slizniční vlny na Obr. 20 vychází ze dvouhmotového modelu Ishizaky a Flanagan, od kterého se svým chováním příliš neliší [4]. Tento model zrealizoval a popsal ve své práci opět Titze [39].

Výhodou oproti modelu Ishizaky a Flanagan je redukce původních sedmi visko-elastických parametrů na pouhé čtyři (hmotný člen m , tuhost pružiny k , konstantu tlumení b a rychlost slizniční vlny v_{sv}). Fázový posun pohybu horního okraje vůči pohybu dolního okraje je při

kmitání způsoben rychlostí slizniční vlny v_{sv} , což odpovídá šíření slizniční vlny zespoda nahoru.

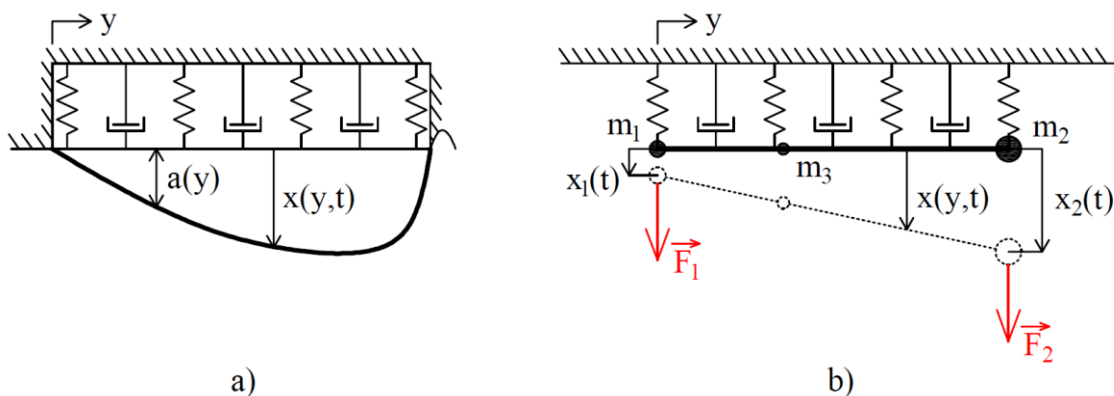


Obr. 20: Model slizniční vlny

3.8 Aeroelastický model

Dalším modelem, který tentokrát vytvořili Horáček a kol. [40], je model aeroelastický (viz Obr. 21 a). Je zde pouze jeden hmotný člen o proměnné tloušťce $a(y)$, která kopíruje fyziologický tvar hlasivky. Hmota je pevně připojena ke stěně pružnými a tlumícími členy, a umožňuje proto kmitání celé soustavy se dvěma stupni volnosti, které jsou vyjádřeny translačním a rotačním pohybem. Kmitání hlasivky je opět realizováno tlakem proudícího vzduchu, přičemž nedochází ke změně tloušťky povrchu hlasivky a nelze simulovat pohyb slizniční vlny.

Pro snazší matematicko-fyzikální popis byla hmota rozdělena do tří spojených diskrétních hmot, jak je vidět na Obr. 21 b).

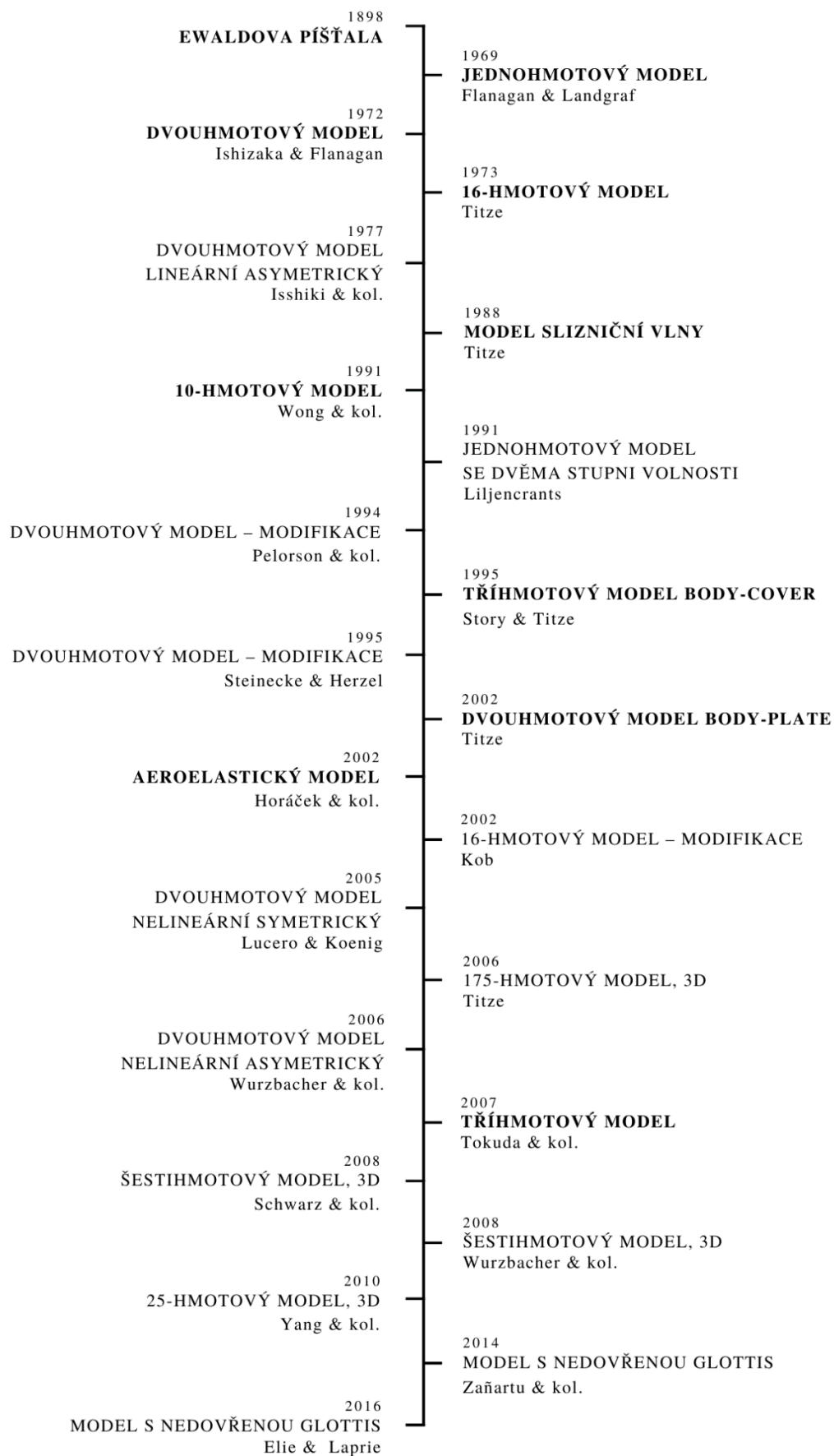


Obr. 21: Aeroelastický model; podle [40]

Horáčekův model vycházel částečně i ze dvouhmotových modelů, které modifikovali Pelorson a kol. [41] a Steinecke s Herzelem [42]. Dále také z modelu, který publikoval Liljencrants [43]. Jeho model byl složen pouze z jedné hmoty, která ale kromě translace dovoluje i rotaci, a model proto kmitá se dvěma stupni volnosti [29, 43].

3.9 Časová posloupnost modelů hlasivek

Na Obr. 22 je zobrazena časová posloupnost všech modelů hlasivek, které jsou zmíněné výše v kapitole 3. Jak je např. vidět, než byla matematicky popsána Ewaldova píšťala z konce 19. století, uplynulo téměř 70 let. Naopak poslední zmíněné modely jsou jen pár let staré, jedná se proto o stále aktuální téma. Tučně jsou zvýrazněny ty modely, které byly v kapitole 3 detailněji popsány.



Obr. 22: Časová posloupnost modelů hlasivek z kapitoly 3

4 Analytické modely hlasivek buzené harmonicky

Cílem této kapitoly je získání a ověření dynamických charakteristik vynuceného kmitání analytických modelů popsaných v kapitolách 3.2, 3.3 a 3.5. Vynucené kmitání je realizováno časově proměnnou budicí silou $F(t)$, která má harmonický průběh. První dynamickou charakteristikou je amplitudo-frekvenční charakteristika, která bude realizována pouze pro jednohmotový model z kapitoly 3.2. Druhou dynamickou charakteristikou je závislost průběhu výchylek jednotlivých hmot modelů v čase při vychýlení z rovnovážné polohy budicí silou $F(t)$ a při jejím následném harmonickém působení. Veškeré číselné hodnoty parametrů, které popisují chování analytických modelů, jsou převzaty z příslušné literatury, jež se problematikou zabývá.

4.1 Jednohmotový model

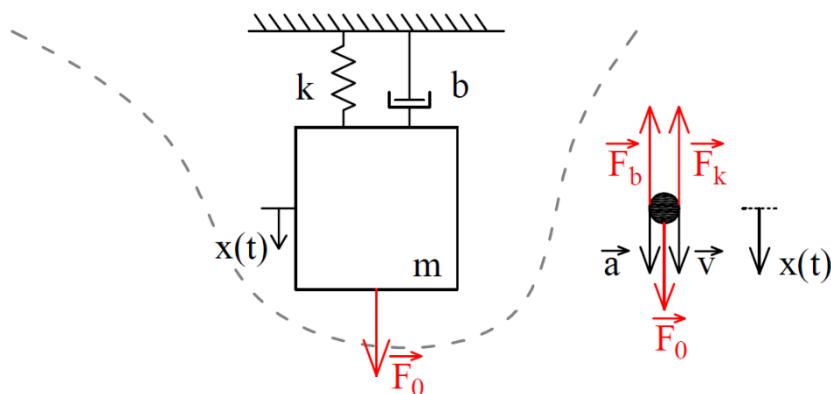
Jednohmotový model je popsán v kapitole 3.2 a znázorněn na Obr. 13. Jak již bylo zmíněno, jedná se o model s jedním hmotným prvkem, který kmitá pouze v jednom směru. Proto má model jeden stupeň volnosti a řešením bude jedna pohybová rovnice a jedna rovnice pro průběh výchylky v čase.

4.1.1 Odvození pohybové rovnice

Pohybovou rovnici lze odvodit dvěma způsoby – pomocí druhého Newtonova zákona nebo použitím Lagrangeovy rovnice II. druhu.

Newtonův princip

Na Obr. 23 je zobrazeno silové působení na hmotný bod m , který představuje hmotný prvek modelu hlasivky. Na hmotný bod působí celkem tři síly – síla od pružiny $\vec{F}_k$, tlumicí síla $\vec{F}_b$ a budicí síla $\vec{F}$. Síla od pružiny $\vec{F}_k$ je lineárně závislá na výchylce hmotného bodu z rovnovážné polohy, lze ji definovat vztahem $F_k = kx$ a míří vždy opačným směrem než výchylka. Tlumicí síla $\vec{F}_b$ je úměrná rychlosti, přičemž její velikost lze zapsat vztahem $F_b = bv$ a míří opačným směrem než vektor příslušné rychlosti. Budicí síla $\vec{F}$ má harmonický průběh a její počáteční směr byl zvolen dle Obr. 23.



Obr. 23: Jednohmotový model – silové působení

Druhý Newtonův pohybový zákon má tvar:

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}. \quad (9)$$

Dosazením sil do tohoto vztahu vzniknou následující rovnice:

$$\vec{F} + \vec{F}_k + \vec{F}_b = m\vec{a}, \quad (10)$$

$$F - F_k - F_b = ma, \quad (11)$$

$$F - kx - bv = ma. \quad (12)$$

Vyjádřením rychlosti a zrychlení pomocí výchylky vznikne pohybová rovnice, která je shodná s rovnicí (1) v kapitole 3.2:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F. \quad (13)$$

Lagrangeova rovnice II. druhu

Lagrangeovy rovnice II. druhu (14) představují efektivní nástroj analytické mechaniky pro sestavování pohybových rovnic těles a soustav těles. Jsou založeny na energetickém principu a jejich výhodou je nezávislost na volbě vztažného systému. Z pohybových rovnic také vylučují všechny reakce ve vazbách, což je velkou výhodou zejména u složitějších soustav těles [44].

Sestavení pohybových rovnic je pouze na základě parciálních derivací kinetické energie E_k , potenciální energie E_p , disipativní energie E_d a výkonu vnějších sil P nebo práce vnějších sil W .

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = \frac{\partial P}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (14)$$

Veličina q se nazývá zobecněná souřadnice. Reprezentuje výchylku x , pokud se jedná o translační pohyb, nebo natočení φ v případě pohybu rotačního. Pro jednohmotový model, který koná translační pohyb v jednom směru, je příslušnou zobecněnou souřadnicí výchylka x .

Kinetická, potenciální a disipativní energie a výkon vnějších sil jsou spolu se svými parciálními derivacemi vyjádřeny v následujících rovnicích:

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2, \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x}, \quad (16)$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2, \quad (17)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = kx, \quad (18)$$

$$E_d = \frac{1}{2} b \dot{x}^2, \quad (19)$$

$$\frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}} = b \dot{x}, \quad (20)$$

$$P = F \dot{x}, \quad (21)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{x}} = F. \quad (22)$$

Výsledná pohybová rovnice, jež vznikne dosazením parciálních derivací do rovnice (14), je rovnice, která je opět totožná s rovnicemi (1) a (13):

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F. \quad (23)$$

4.1.2 Parametry modelu

Jednohmotový model popsáný v literatuře [18] bohužel nemá zveřejněné hodnoty parametrů m , b a k , proto byly pro výpočet využity parametry m_1 , m_2 , k_1 , k_2 , k_3 , b_1 a b_2 z dvouhmotového modelu [21], jak bude uvedeno v kapitole 4.2.2. Pro harmonicky působící budicí sílu $F = F_0 \sin(\omega t + \varphi)$ bylo zvoleno fázové posunutí φ nulové a amplituda F_0 takové velikosti, která odpovídá maximální výchylce 1 mm. Taková amplituda podle literatury [7] řádově odpovídá amplitudě hlasivek. Pro jednotlivé parametry byly v této práci navrženy vztahy:

$$m = m_1 + m_2, \quad (24)$$

$$b = b_1 + b_2, \quad (25)$$

$$k = k_1 + k_2. \quad (26)$$

Hodnoty výsledných parametrů jsou vypsány v Tab. 1.

Tab. 1: Hodnoty parametrů jednohmotového modelu

Veličina	Hodnota
m	0,15000 g
b	0,03697 N·s·m ⁻¹
k	88,00000 N·m ⁻¹
F_0	0,03700 N

4.1.3 Analytické řešení amplitudo-frekvenční charakteristiky

Amplitudo-frekvenční charakteristika je závislost amplitudy vynucených kmitů na vlastní frekvenci. Jedná se o jednu ze základních charakteristik mechanických systémů, ze které lze vyčíst např. hodnotu rezonanční frekvence.

Pohybovou rovnici (23) lze pomocí vztahů (27) až (29) z [44] přepsat na tvar (30), kde Ω_0 je vlastní úhlová frekvence netlumených kmitů, b_r je poměrný útlum a f_0 je síla F_0 vztažená na 1 kg hmoty. Jedná se o nehomogenní lineární obyčejnou diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty.

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (27)$$

$$b_r = \frac{b}{2\sqrt{km}} \quad (28)$$

$$f_0 = \frac{F_0}{m} \quad (29)$$

$$\ddot{x} + 2b_r\Omega_0\dot{x} + \Omega_0^2x = f_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (30)$$

Protože má rovnice (30) pravou stranu, která způsobuje nehomogenitu, bude výsledné řešení výchylky $x(t)$ obsahovat homogenní i partikulární část, jak je zobrazeno v rovnici:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t). \quad (31)$$

Nyní je potřeba vyřešit homogenní část rovnice:

$$\ddot{x} + 2b_r\Omega_0\dot{x} + \Omega_0^2x = 0. \quad (32)$$

Řešení se provede pomocí charakteristické rovnice (33), jejíž řešením pro podkritické tlumení ($b_r < 1$) je (34), kde Ω je vlastní úhlová frekvence tlumeného kmitání.

$$\lambda^2 + 2b_r\Omega_0\lambda + \Omega_0^2 = 0 \quad (33)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2b_r\Omega_0 \pm \sqrt{4b_r^2\Omega_0^2 - 4\Omega_0^2}}{2} = -b_r\Omega_0 \pm i\Omega_0\sqrt{(1 - b_r^2)} = -b_r\Omega_0 \pm i\Omega \quad (34)$$

Výsledkem je homogenní rovnice, která odpovídá tlumenému kmitání:

$$x_h(t) = C \cdot e^{\lambda t} = e^{-b_r\Omega_0 t} (C_1 e^{i\Omega t} + C_2 e^{-i\Omega t}). \quad (35)$$

Pomocí Eulerových vztahů lze rovnici převést na tvar:

$$x_h(t) = e^{-b_r\Omega_0 t} (A \cdot \sin(\Omega t) + B \cdot \cos(\Omega t)). \quad (36)$$

Partikulární řešení diferenciální rovnice musí být ve tvaru pravé strany, jak ukazuje následující rovnice, kde φ_p je fázové zpoždění odezvy za budicí silou v důsledku tlumení soustavy:

$$x_p(t) = X \cdot \sin(\omega t + \varphi - \varphi_p). \quad (37)$$

Pro zjištění závislosti amplitudy partikulárního řešení X na vlastní úhlové frekvenci ω je nutné amplitudu X vyjádřit. U vynuceného kmitání má vliv na výslednou amplitudu pouze partikulární řešení, protože homogenní část řešení (stejně jako u tlumeného kmitání) se po určitém čase utlumí, a na výsledné ustálené kmitání proto nemá vliv.

Derivací (37) vzniknou rovnice (38) a (39), které se potom dosadí do pohybové rovnice (30) a porovnají se sinové a kosinové složky:

$$\dot{x}_p(t) = \omega X \cdot \cos(\omega t + \varphi - \varphi_p), \quad (38)$$

$$\ddot{x}_p(t) = -\omega^2 X \cdot \sin(\omega t + \varphi - \varphi_p), \quad (39)$$

$$-\omega^2 X + X\Omega_0^2 = f_0 \cdot \cos(\varphi_p), \quad (40)$$

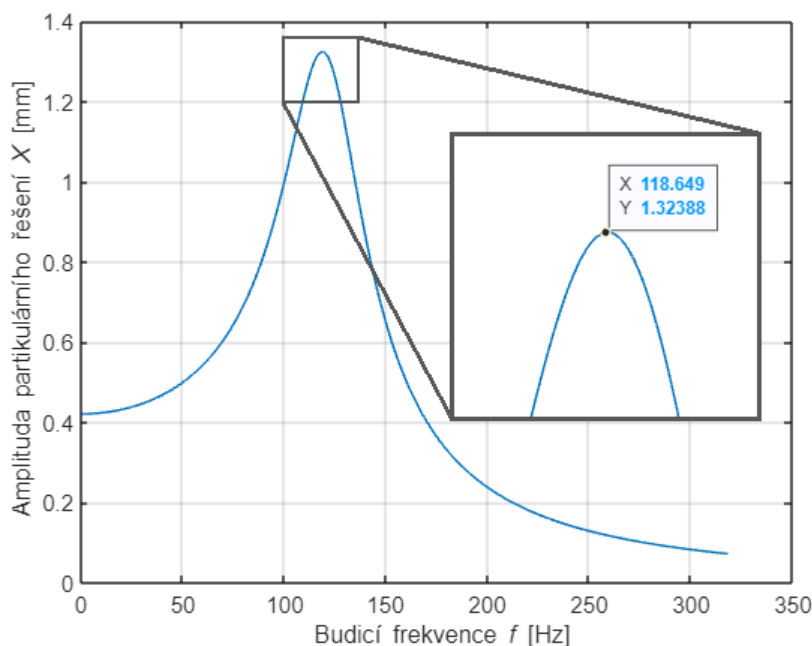
$$2b_r\Omega_0\omega X = f_0 \cdot \sin(\varphi_p). \quad (41)$$

Po sečtení a umocnění rovnic (40) a (41) a drobných úpravách vznikne výsledný tvar amplitudy partikulárního řešení X (42) a fázového zpoždění za budicí silou φ_p (43), které bude využito později pro vyjádření konstant A a B z homogenní části řešení.

$$X = \frac{F_0}{k \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right)^2 + 4b_r^2 \frac{\omega^2}{\Omega^2}}} \quad (42)$$

$$\varphi_p = \arccos \left(\frac{1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega^2}\right)^2 + 4b_r^2 \frac{\omega^2}{\Omega^2}}} \right) \quad (43)$$

Průběh amplitudy partikulárního řešení X (42) v závislosti na budicí frekvenci byl vytvořen pomocí programovacího jazyku MATLAB a je znázorněn na Obr. 24.



Obr. 24: Amplitudo-frekvenční charakteristika jednohmotového modelu hlasivky

Jak je vidět na Obr. 24, vlastní frekvence jednohmotového modelu buzeného silou F je rovna 118,6 Hz. V bakalářské práci Radka Kubíčka [45], která zkoumala vlastní frekvence tlumených volných kmitů, vyšla pro jednohmotový model se stejnými parametry vlastní frekvence 120,3 Hz. Protože zde je uvažováno tlumení vynucené, měla by se frekvence těchto kmitů od kmitů tlumených lišit v řádu jednotek.

4.1.4 Analytické řešení průběhu výchylky

Výsledné řešení průběhu výchylky lze podle vztahu (31) po předchozích výpočtech rozepsat rovnicí:

$$x(t) = e^{-b_r \Omega_0 t} (A \cdot \sin(\Omega t) + B \cdot \cos(\Omega t)) + X \cdot \sin(\omega t + \varphi - \varphi_p). \quad (44)$$

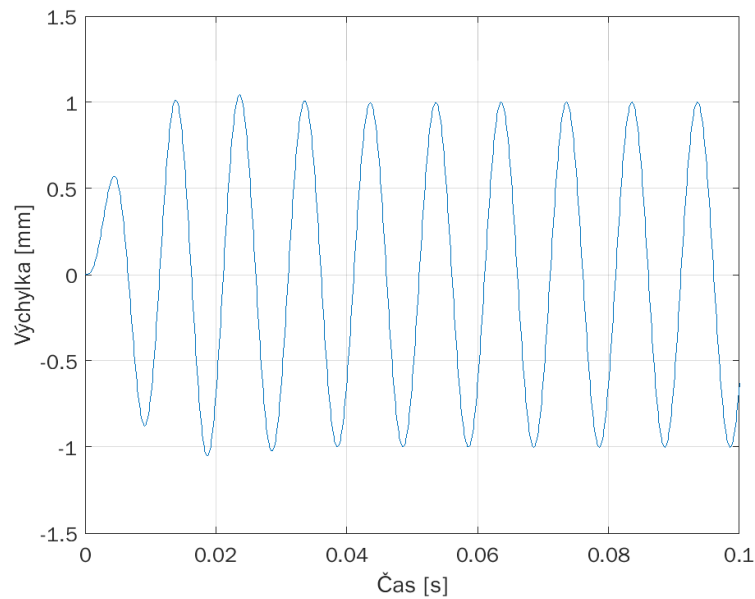
Při zvolení počátečních podmínek v čase $t = 0$: $x(0) = 0$ a $\dot{x}(0) = 0$ lze vyjádřit konstanty A a B :

$$A = -X \cdot \sin(\varphi - \varphi_p), \quad (45)$$

$$B = \frac{-X\omega \cdot \cos(\varphi - \varphi_p)}{\Omega} - \frac{b_r}{\sqrt{1 - b_r^2}} \cdot X \cdot \sin(\varphi - \varphi_p). \quad (46)$$

Průběh výchylky (44) jednohmotového modelu hlasivky byl vytvořen opět v programovacím jazyku MATLAB a je znázorněn na Obr. 25. Pro vykreslení grafu byla zvolena frekvence $f = 100$ Hz, která odpovídá typickému mužskému hlasu [11], a na úhlovou frekvenci ji lze přepočítat pomocí vztahu $\omega = 2\pi f$.

Z Obr. 25 je patrné, že po třech periodách kmitu se amplituda výchylky ustálí na 1 mm. Tato hodnota odpovídá reálné amplitudě hlasivek [7]. Počet period do ustálení také odpovídá reálným hlasivkám, podle literatury [46] se hlasivky ustálí po třech až čtyřech periodách. Po tomto čase má na průběh výchylky vliv pouze partikulární řešení diferenciální rovnice (44), homogenní část se utlumí.



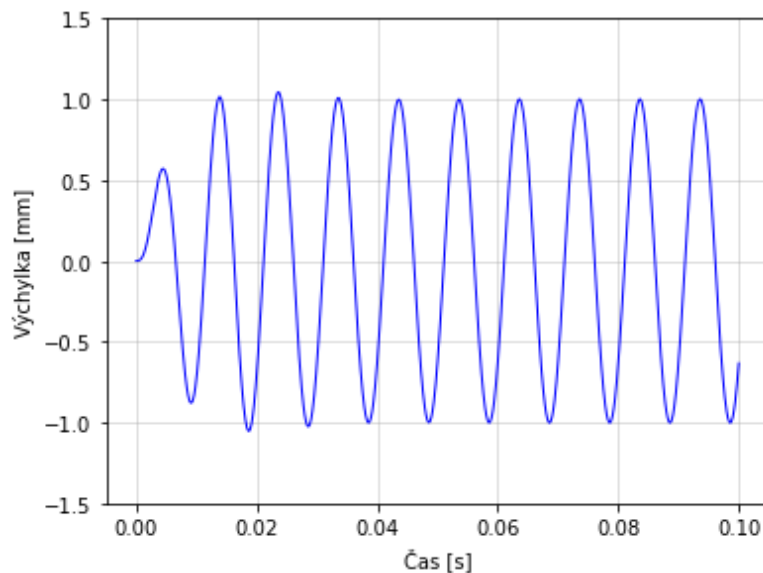
Obr. 25: Analytické řešení výchylky vynuceného kmitání jednohmotového modelu

4.1.5 Numerické řešení průběhu výchylky

Pro ověření výsledku z kapitoly 4.1.4 je potřeba provést řešení průběhu výchylky jednohmotového modelu v čase numericky. Toto řešení bylo provedeno v programovacím jazyku Python pomocí příkazu `odeint()` a je zobrazeno na Obr. 26. Aby program řešení provedl, je nutné diferenciální rovnici 2. řádu (30) převést na soustavu dvou diferenciálních rovnic 1. řádu:

$$\dot{x} = y, \quad (47)$$

$$\dot{y} = f_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) - 2b_r \Omega_0 y - \Omega_0^2 x. \quad (48)$$



Obr. 26: Numerické řešení výchylky vynuceného kmitání jednohmotového modelu

Jak je vidět na Obr. 26, průběh výchylky je u numerického řešení stejný jako u analytického z kapitoly 4.1.5. Pro složitější modely hlasivek proto bude stačit pouze numerické řešení.

4.2 Dvouhmotový model

Dvouhmotový model je popsán v kapitole 3.3 a zobrazen na Obr. 14. Je reprezentován dvěma hmotnými prvky pohybujícími se v jednom směru, proto má model dva stupně volnosti. V literatuře [21] je kmitání hmotných prvků charakterizováno pomocí nelineárních tuhostí, což způsobuje nelineární chování modelu. Pro zjednodušení výpočtu zde nelineární tuhosti pružných členů, které spojují hmotné prvky s pevnou stěnou, nebudou uvažovány. Model je buzený dvěma harmonickými silami $F_1 = F_{10} \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$ a $F_2 = F_{20} \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$, které jsou vůči sobě posunuty o fázový posun $\varphi_1 - \varphi_2$. Síla $\vec{F}_1$ představuje budicí sílu na dolním okraji hlasivky a síla $\vec{F}_2$ představuje budicí sílu na horním okraji hlasivky. Takto buzený model simuluje pohyb slizniční vlny, který odpovídá modálnímu/hrudnímu rejstříku³.

4.2.1 Odvození pohybových rovnic

Pro odvození pohybových rovnic dvouhmotového modelu buzeného harmonickými silami $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$ lze využít Lagrangeovy rovnice II. druhu (14). K jejich sestavení je třeba vyjádřit kinetickou, potenciální a disipativní energii a výkon vnějších sil včetně jejich parciálních derivací podle zobecněných souřadnic. Protože má dvouhmotový model dva stupně volnosti, zobecněnými souřadnicemi jsou zde výchylka prvního hmotného prvku $x_1(t)$ a výchylka druhého hmotného prvku $x_2(t)$. Jednotlivé energie a výkon jsou spolu se svými derivacemi uvedeny v následujících rovnicích:

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2, \quad (49)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1, \quad (50)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \ddot{x}_2, \quad (51)$$

$$E_p = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 + \frac{1}{2} k_3 (x_2 - x_1)^2, \quad (52)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_1} = k_1 x_1 + k_3 (x_1 - x_2), \quad (53)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_2} = k_2 x_2 + k_3 (x_2 - x_1), \quad (54)$$

$$E_d = \frac{1}{2} b_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} b_2 \dot{x}_2^2, \quad (55)$$

$$\frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}_1} = b_1 \dot{x}_1, \quad (56)$$

$$\frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}_2} = b_2 \dot{x}_2, \quad (57)$$

$$P = F_1 \dot{x}_1 + F_2 \dot{x}_2, \quad (58)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{x}_1} = F_1, \quad (59)$$

³ Modální/hrudní rejstřík je nejčastěji používaný hlasový rejstřík při mluveném slovu a zpěvu [4, 20].

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{x}_2} = F_2. \quad (60)$$

Po dosazení do Lagrangeovy rovnice II. druhu vznikne soustava dvou pohybových rovnic, které lze zapsat v maticovém tvaru:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Tato soustava rovnic je totožná s rovnicemi (2) a (3) z kapitoly 3.3.

4.2.2 Parametry modelu

Číselné hodnoty hmotností prvků a lineárních tuhostí pružných členů jsou převzaty z literatury [21]. Pro tlumicí konstanty b_1 a b_2 odvodili autoři Ishizaka a Flanagan vztahy:

$$b_1 = 2\xi_1\sqrt{m_1k_1}, \quad (62)$$

$$b_2 = 2\xi_2\sqrt{m_2k_2}. \quad (63)$$

Je patrné, že kromě závislosti na příslušné hmotnosti a tuhosti je tlumicí konstanta přímo úměrná tlumicímu koeficientu ξ . V případě, že nedojde při kmitání hlasivek k jejich vzájemné interakci, jsou tlumicí koeficienty rovny $\xi_1 = 0,1$ a $\xi_2 = 0,6$. Pokud by došlo k uzavření hlasivkové štěrbiny, a tedy ke vzájemné kolizi hlasivek, byly by rovny $\xi_1 = 1,1$ a $\xi_2 = 1,6$. V této práci bude uvažováno kmitání bez vzájemné kolize. Budící síly $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$ mají harmonický průběh a jsou určeny vztahy $F_1 = F_{10} \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$ a $F_2 = F_{10} \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$. Protože budící síla $\vec{F}_1$ předchází budící síle $\vec{F}_2$, byl fázový posun φ_2 zvolen nulový a velikost fázového posunu φ_1 byla převzata z literatury [21] stejně jako ostatní parametry. Veškeré číselné hodnoty parametrů dvouhmotového modelu jsou uvedeny v Tab. 2. Kmitání je buzeno s frekvencí 100 Hz stejně jako v kapitole 4.1.

Tab. 2: Hodnoty parametrů dvouhmotového modelu

Veličina	Hodnota
m_1	0,12500 g
m_2	0,02500 g
b_1	0,02000 N·s·m ⁻¹
b_2	0,01697 N·s·m ⁻¹
k_1	80,00000 N·m ⁻¹
k_2	8,00000 N·m ⁻¹
k_3	25,00000 N·m ⁻¹
F_{10}	0,03700 N
F_{20}	0,03700 N
φ_1	55,00000°
φ_2	0,00000°

4.2.3 Numerické řešení průběhu výchylky

Numerické řešení výchylek $x_1(t)$ a $x_2(t)$ dvouhmotového modelu buzeného dvěma silami bylo provedeno v programovacím jazyku Python pomocí příkazu `odeint()` a je zobrazeno na Obr. 27. Pro vyřešení pohybových rovnic je potřeba soustavu dvou diferenciálních rovnic 2. řádu (61) převést na soustavu čtyř diferenciálních rovnic 1. řádu:

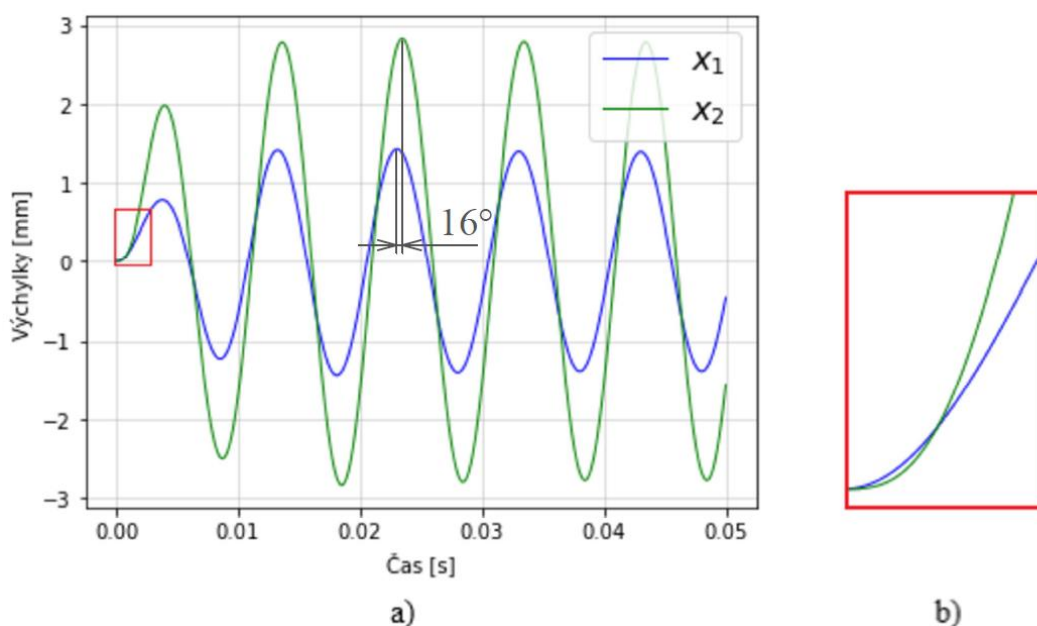
$$\dot{x}_1 = y_1, \quad (64)$$

$$y_1 = \frac{F_1}{m_1} - \frac{b_1}{m_1} y_1 - \frac{k_1 + k_3}{m_1} x_1 + \frac{k_3}{m_1} x_2, \quad (65)$$

$$\dot{x}_2 = y_2, \quad (66)$$

$$y_2 = \frac{F_2}{m_2} - \frac{b_2}{m_2} y_2 - \frac{k_2 + k_3}{m_2} x_2 + \frac{k_3}{m_2} x_1. \quad (67)$$

Na Obr. 27 a) jsou zobrazeny průběhy výchylek $x_1(t)$ a $x_2(t)$ dvouhmotového modelu s detailem na Obr. 27 b), který zobrazuje fázový posun výchylek na začátku kmitání. Jak je vidět, i když byly použity stejné parametry jako pro jednohmotový model (viz kapitola 4.1, Obr. 26), amplituda obou výchylek je větší, protože budící síly se navzájem ovlivňují, a amplitudy proto narůstají. Vzájemné ovlivňování budících sil má za následek i dřívejší ustálení kmitů, které nastává po jedné periodě. Po tomto čase je utlumena homogenní část řešení výchylek a na výsledné kmitání má vliv pouze partikulární řešení. Z grafu je zřejmý i ustálený fázový posun. Vlivem odlišných číselných hodnot vstupních parametrů jednotlivých hmot je menší než fázový posun budících sil a jeho hodnota odpovídá 16° .



Obr. 27: Výchylky vynuceného kmitání dvouhmotového modelu

4.3 Tříhmotový model body-cover

Tříhmotový model je popsán v kapitole 3.5 a zobrazen na Obr. 16. Tento model, stejně jako dvouhmotový, vykazuje nelineární chování způsobené nelinearitou některých pružných členů. Pro zjednodušení dalších výpočtů není tato nelinearita uvažována a všechny pružné členy jsou vzaty jako lineární.

Pro tříhmotový body-cover model byly vytvořeny dvě analýzy popsané v kapitolách 4.3.3 a 4.3.4. První variantou je buzení obou hmot m_2 a m_3 harmonickými budícími silami $\vec{F}_2$ a $\vec{F}_3$, jejichž velikosti lze popsat vztahy $F_2 = F_{20} \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$ a $F_3 = F_{30} \cdot \sin(\omega t + \varphi_3)$ a které jsou od sebe posunuty o fázový posun $\varphi_2 - \varphi_3$. Takto buzený model odpovídá pohybu slizniční vlny a modálnímu/hrudnímu rejstříku [20]. Druhou variantou je buzení pouze horní hmoty m_3 silou $\vec{F}_3$, zatímco síla $\vec{F}_2$ je nulová. Takto buzený model odpovídá falzetu⁴.

4.3.1 Odvození pohybových rovnic

Pohybové rovnice tříhmotového body-cover modelu lze odvodit z Lagrangeových rovnic II. druhu (14). Kinetická, potenciální a disipativní energie a výkon vnějších sil jsou spolu se svými parciálními derivacemi podle zobecněných souřadnic x_1 , x_2 a x_3 sepsané v následujících rovnicích:

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2, \quad (68)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1, \quad (69)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \ddot{x}_2, \quad (70)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_3} \right) = m_3 \ddot{x}_3, \quad (71)$$

$$E_p = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 (x_3 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k_4 (x_3 - x_2)^2, \quad (72)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_1} = k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) + k_3 (x_1 - x_3), \quad (73)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_2} = k_2 (x_2 - x_1) + k_4 (x_2 - x_3), \quad (74)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_3} = k_3 (x_3 - x_1) + k_4 (x_3 - x_2), \quad (75)$$

$$E_d = \frac{1}{2} b_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} b_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_1)^2, \quad (76)$$

$$\frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}_1} = b_1 \dot{x}_1 + b_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + b_3 (\dot{x}_1 - \dot{x}_3), \quad (77)$$

$$\frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}_2} = b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1), \quad (78)$$

$$\frac{\partial E_d}{\partial \dot{x}_3} = b_3 (\dot{x}_3 - \dot{x}_1), \quad (79)$$

⁴ Pro falzetový rejstřík jsou charakteristické vysoké tóny hlasového rozsahu [4].

$$P = F_2 \dot{x}_2 + F_3 \dot{x}_3, \quad (80)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{x}_1} = 0, \quad (81)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{x}_2} = F_2, \quad (82)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{x}_3} = F_3. \quad (83)$$

Po dosazení do Lagrangeových rovnic II. druhu vznikne soustava tří pohybových rovnic o třech neznámých, které lze maticově zapsat jako (84). Pro všechny tři varianty buzení platí stejné odvození pohybových rovnic, liší se pouze v budících silách na pravé straně rovnic.

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 + b_2 + b_3 & -b_2 & -b_3 \\ -b_2 & b_2 & 0 \\ -b_3 & 0 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + k_3 & -k_2 & -k_3 \\ -k_2 & k_2 + k_4 & -k_4 \\ -k_3 & -k_4 & k_3 + k_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \quad (84)$$

4.3.2 Parametry modelu

Číselné hodnoty hmotností prvků a lineárních tuhostí pružin byly převzaty z literatury [27]. Pro tlumicí konstanty platí podle [27] vztahy:

$$b_1 = 2\xi_1 \sqrt{m_1 k_1}, \quad (85)$$

$$b_2 = 2\xi_2 \sqrt{m_2 k_2}, \quad (86)$$

$$b_3 = 2\xi_3 \sqrt{m_3 k_3}. \quad (87)$$

Tlumicí koeficienty nabývají hodnot $\xi_1 = 0,2$ a $\xi_2 = \xi_3 = 0,4$ v případě, že hlasivky kmitají bez vzájemné kolize. Hodnoty fázových posunů φ_2 a φ_3 byly zvoleny stejné jako v případě dvouhmotového modelu z kapitoly 4.2. Velikost amplitud budících sil F_{20} a F_{30} byla zvolena taková, aby byla v případě buzení oběma silami velikost amplitudy stejná jako u dvouhmotového modelu. Veškeré číselné hodnoty parametrů tříhmotového modelu jsou uvedeny v Tab. 3. Stejně jako pro předchozí modely (kapitoly 4.1 a 4.2) byla použita frekvence 100 Hz.

Tab. 3: Hodnoty parametrů tříhmotového modelu

Veličina	Hodnota
m_1	0,050000 g
m_2	0,010000 g
m_3	0,010000 g
b_1	0,028284 N·s·m ⁻¹
b_2	0,005657 N·s·m ⁻¹
b_3	0,004733 N·s·m ⁻¹
k_1	100,000000 N·m ⁻¹

Veličina	Hodnota
k_2	5,000000 N·m ⁻¹
k_3	3,500000 N·m ⁻¹
k_4	2,000000 N·m ⁻¹
F_{20}	0,005600 N
F_{30}	0,005600 N
φ_2	55,000000°
φ_3	0,000000°

4.3.3 Model pohybu slizniční vlny

Numerické řešení výchylek $x_1(t)$, $x_2(t)$ a $x_3(t)$ tříhmotového modelu body-cover buzeného dvěma harmonickými silami $F_2 = F_{20}\sin(\omega t + \varphi_2)$ a $F_3 = F_{30}\sin(\omega t + \varphi_3)$ bylo provedeno v programovacím jazyku Python pomocí příkazu *odeint()* a je zobrazeno na Obr. 28. Pro řešení je nutné soustavu diferenciálních rovnic 2. řádu (84) převést na soustavu diferenciálních rovnic 1. řádu:

$$\dot{x}_1 = y_1, \quad (88)$$

$$\dot{y}_1 = -\frac{b_1 + b_2 + b_3}{m_1}y_1 + \frac{b_2}{m_1}y_2 + \frac{b_3}{m_1}y_3 - \frac{k_1 + k_2 + k_3}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 + \frac{k_3}{m_1}x_3, \quad (89)$$

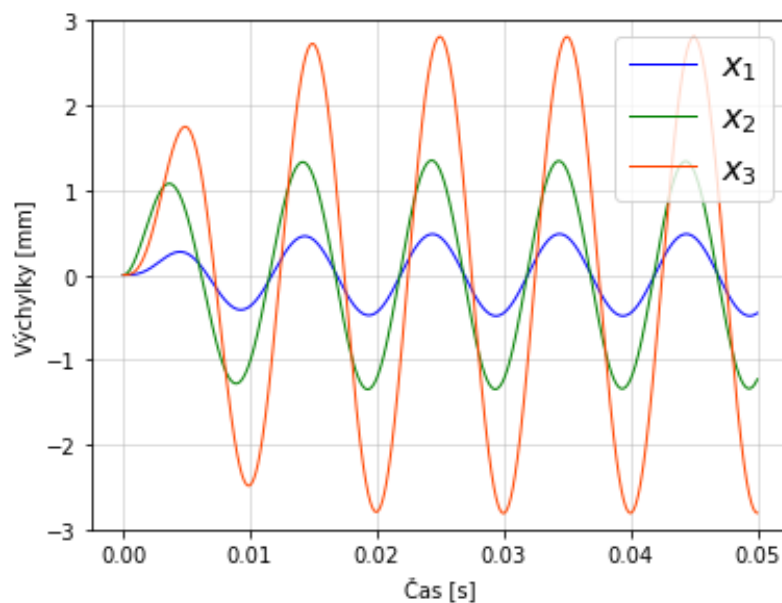
$$\dot{x}_2 = y_2, \quad (90)$$

$$\dot{y}_2 = \frac{b_2}{m_2}y_1 - \frac{b_2}{m_2}y_2 + \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{k_2 + k_4}{m_2}x_2 + \frac{k_4}{m_2}x_3 + \frac{F_2}{m_2}, \quad (91)$$

$$\dot{x}_3 = y_3, \quad (92)$$

$$\dot{y}_3 = \frac{b_3}{m_3}y_1 - \frac{b_3}{m_3}y_3 + \frac{k_3}{m_3}x_1 + \frac{k_4}{m_3}x_2 - \frac{k_3 + k_4}{m_3}x_3 + \frac{F_3}{m_3}. \quad (93)$$

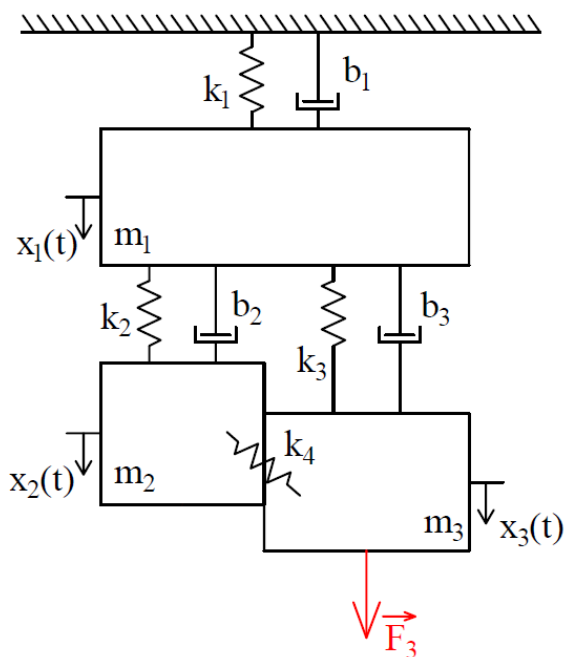
Z Obr. 28 je stejně jako u dvouhmotového modelu (viz Obr. 27) patrný pohyb slizniční vlny způsobený fázovým posunem. Výchylka x_1 , která představuje tělo hlasivky, kmitá s menší amplitudou než výchylky x_2 a x_3 reprezentující obal. V důsledku nižších hodnot tlumicího a pružného členu na hmotném prvku m_3 má tato hmota vyšší amplitudu než hmotný prvek m_2 . Ustálení vynuceného kmitání nastane po jedné a půl periodě kmitů. Oproti dvouhmotovému modelu na Obr. 27 je vidět rozdíl ve výsledném fázovém posunu ustálených kmitů, který je způsoben interakcí obalu hlasivky se třetí hmotou představující tělo hlasivky a také odlišnými hodnotami vstupních parametrů obou modelů.



Obr. 28: Výchylky vynuceného kmitání tříhmotového modelu, který odpovídá pohybu slizniční vlny

4.3.4 Model falzetu

Analytický model znázorňující falzet je zobrazen na Obr. 29. U tohoto druhu hlasu, pro který jsou charakteristické vysoké tóny, kmitá spíše horní okraj hlasivky, proto je model buzen pouze silou $\vec{F}_3$ [4].



Obr. 29: Tříhmotový model odpovídající falzetu

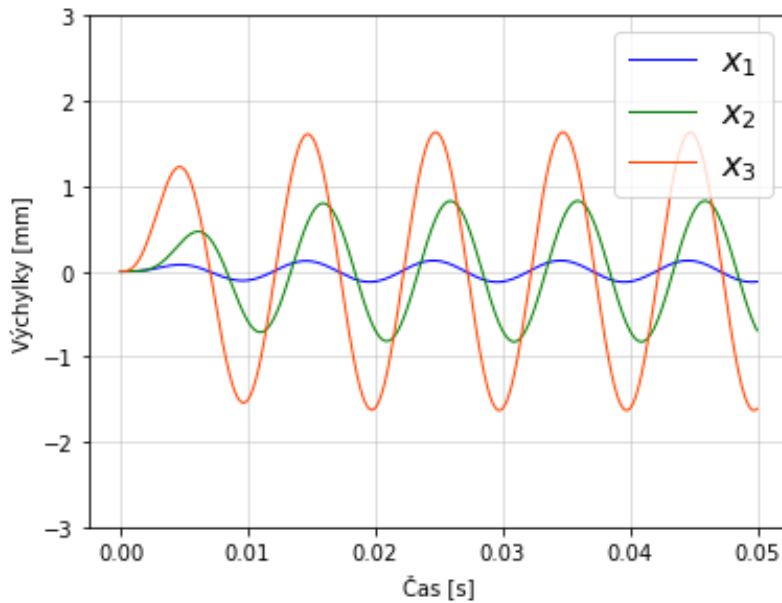
Oproti modelu slizniční vlny, který je popsán v kapitole 4.3.3, má v důsledku nulové síly F_2 pohybová rovnice tvar:

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 + b_2 + b_3 & -b_2 & -b_3 \\ 0 & b_2 & 0 \\ -b_3 & 0 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + k_3 & -k_2 & -k_3 \\ -k_2 & k_2 + k_4 & -k_4 \\ -k_3 & -k_4 & k_3 + k_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3 \end{pmatrix}. \quad (94)$$

Numerické řešení výchylek $x_1(t)$, $x_2(t)$ a $x_3(t)$ bylo provedeno v programovacím jazyku Python pomocí příkazu `odeint()`. Při převodu soustavy diferenciálních rovnic 2. řádu na soustavu rovnic 1. řádu je oproti rovnicím (88) až (93), které odpovídají modelu slizniční vlny, změna pouze v rovnici (91), která má pro model falzetu následující tvar:

$$\dot{y}_2 = \frac{b_2}{m_2} y_1 - \frac{b_2}{m_2} y_2 + \frac{k_2}{m_2} x_1 - \frac{k_2 + k_4}{m_2} x_2 + \frac{k_4}{m_2} x_3. \quad (95)$$

Na Obr. 30 je zobrazeno numerické řešení výchylek $x_1(t)$, $x_2(t)$ a $x_3(t)$. Je patrné, že buzení pouze hmoty m_3 způsobuje fázové posunutí hmoty m_2 a větší amplitudu horního okraje hlasivky oproti okraji dolnímu. Ve srovnání s modelem slizniční vlny (Obr. 28) celková amplituda klesla. K ustálení kmitů dojde zhruba po jedné periodě.



Obr. 30: Výchylky vynuceného kmitání tříhmotového modelu, který odpovídá falzetu

Závěr

Cílem bakalářské práce bylo sestavení hmotového modelu lidských hlasivek a analýza jeho vynuceného kmitání.

V rešeršní části byla popsána anatomie a fyziologie hlasového ústrojí a shrnuty současné poznatky o tvorbě lidského hlasu, které vychází z momentálně uznávané myoelasto-aerodynamické teorie. Ta popisuje vznik hlasu jako interakci proudění vzduchu a kmitání hlasivek, díky čemuž vznikají akustické vlny, které se šíří do okolního prostředí. Dále byl sepsán přehled a rozbor nejpoužívanějších hmotových modelů hlasivek doplněný o modely méně známé. Tato část, kde jsou modely shrnuty od nejjednodušších po složitější, které mohou být složené i z několika desítek hmotných prvků, byla důležitým podkladem pro navazující praktickou část.

Praktická část bakalářské práce se zabývala vynuceným kmitáním třech základních analytických modelů hlasivek, tedy jednohmotového, dvouhmotového a tříhmotového body-cover modelu. Pro všechny modely byly odvozeny pohybové rovnice, jež odpovídaly rovnicím zmíněným v rešeršní části. Číselné hodnoty parametrů modelů byly převzaty vždy z příslušné literatury, v níž byl model publikován, a zbývající hodnoty dopočítány tak, aby vyhovovaly vlastnostem reálných lidských hlasivek. Obecně je určení přesných číselných hodnot a vlastností materiálů v lidském těle obtížné, protože se u každého jedince liší. Naměřené hodnoty proto většinou spadají do určitých oblastí, ze kterých se vyberou materiálové charakteristiky pro výpočtové modely.

Pro jednohmotový model byla pohybová rovnice odvozena analyticky včetně svého řešení. To bylo srovnáno s numerickým řešením pohybové rovnice v programovacím jazyku. Obdržením stejného výsledku byl ověřen program pro numerické řešení, který byl pak využit i k řešení ostatních modelů. Pro tento model byla odvozena a vykreslena i amplitudo-frekvenční charakteristika, což je jedna z hlavních charakteristik vynuceného kmitání. Harmonická budicí síla modelu byla nastavena tak, aby výchylka kmitání odpovídala typické hodnotě kmitání reálných hlasivek.

Dvouhmotový model byl buzený dvěma fázově posunutými harmonickými silami tak, aby pohyb hmot simuloval pohyb slizniční vlny. Takový pohyb odpovídá modálnímu/hrudnímu rejstříku, což je nejčastější hlasový rejstřík používaný při mluveném projevu a zpěvu. Oproti jednohmotovému modelu kmital dvouhmotový s vyššími amplitudami, protože budicí síly spolu navzájem interagují. Ve výsledném ustáleném kmitání byl fázový posun menší než u budicích sil, protože hmoty modelu měly odlišné vstupní parametry.

Tříhmotový body-cover model, který na rozdíl od předešlých modelů zohledňuje i odlišné elastické vlastnosti různých vrstev hlasivky, byl buzený dvěma způsoby. Nejdříve byl namodelován tak, aby stejně jako dvouhmotový model odpovídal pohybu slizniční vlny a modálnímu/hrudnímu rejstříku, a poté tak, aby odpovídal falzetovému rejstříku. Pro falzet jsou typické vyšší tóny než u běžného hlasu a model byl buzený pouze na horním okraji hlasivky.

Budicí síly modelu slizniční vlny byly nastaveny tak, aby hlasivka kmitala se stejnou amplitudou jako dvouhmotový model. Mezi modely je viditelný rozdíl ve výsledném fázovém posunu, jenž je způsoben interakcí odlišného počtu hmot a různými hodnotami jejich parametrů, které byly převzaty vždy z příslušné literatury a vzájemně se liší.

Model falzetu oproti ostatním modelům kmital s menší amplitudou v důsledku buzení jednou silou, což odpovídá skutečnému chování hlasivek při falzetu.

Z výsledků je patrné, že analytické modely jsou velmi dobře laditelné a v některých oblastech mohou odpovídat reálnému chování hlasivek.

Modely odvozené v této práci mohou sloužit jako výchozí bod k modelům interakce se vzduchem proudícím skrz hlasivky, což může výrazně zvýšit úroveň modelování jevů spojených s kmitajícími hlasivkami.

Seznam použitých zdrojů

- [1] PÁČ, Libor. *Anatomie člověka II: splachnologie, kardiovaskulární systém, žlázy s vnitřní sekrecí*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2007. ISBN 978-80-210-4291-9.
- [2] ČIHÁK, Radomír. *Anatomie 2*. 2. vyd. Praha: Grada Publishing, 2002. ISBN 80-247-0143-X.
- [3] *Vybrané snímky k anatomii a fyziologii* [online]. [cit. 2022-02-25]. Dostupné z: https://is.muni.cz/el/ped/jaro2018/SPk119/Vybrane_snimky_27.4._2018.pdf?lang=en
- [4] ŠVEC, Jan G. *Studium mechanicko-akustických vlastností zdroje lidského hlasu*. B.m., 1996. Univerzita Palackého v Olomouci.
- [5] MIŠUN, Vojtěch. *Tajemství lidského hlasu*. 1. vyd. Brno: VUTIUM, 2010. ISBN 978-80-214-3499-8.
- [6] VAN DER BERG, Janwillem, W. VENNARD, D. BURGER and C. SHERVANIAN. *Voice Production: The Vibrating Larynx*. Netherlands: Stichting film en wetenschap, universitaire film. 1960.
- [7] TITZE, Ingo R. *Principles of Voice Production*. B.m.: Eaglewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1994. ISBN 0-13-717893-X.
- [8] FINCK, Camille and Lionel LEJEUNE. Structure and oscillatory function of the vocal folds. *Handbook of Behavioral Neuroscience* [online]. 2010, **19**(C), 427–438 [cit. 2022-03-01]. ISSN 1569-7339. Dostupné z: doi:10.1016/B978-0-12-374593-4.00039-5
- [9] HIRANO, Minoru, Y. KAKITA, K. OHMARU and S. KURITA. Structure and Mechanical Properties of the Vocal Fold [online]. 1982, **7**, 271–297 [cit. 2022-03-04]. ISSN 0193-3434. Dostupné z: doi:10.1016/B978-0-12-608607-2.50015-7
- [10] FANT, Gunnar. *Acoustic Theory of Speech Production*. B.m.: Mouton, The Netherlands, 1960. ISBN 9027916004.
- [11] TITZE, Ingo R. *The myoelastic aerodynamic theory of phonation*. Iowa: National center for voice and speech, 2006. ISBN 0-87414-156-7.
- [12] ŠVEC, Jan G., H. K. SCHUTTE, C. J. CHEN and I. R. TITZE. Integrative Insights into the Myoelastic-Aerodynamic Theory and Acoustics of Phonation. Scientific Tribute to Donald G. Miller. *Journal of Voice* [online]. 2021 [cit. 2022-03-13]. ISSN 0892-1997. A Dostupné z: doi:10.1016/J.JVOICE.2021.01.023
- [13] PASLEY, Brian N., A. FLINKER and R. T. KNIGHT. Speech Sounds. *Brain Mapping: An Encyclopedic Reference* [online]. 2015, **2**, 661–666 [cit. 2022-03-01]. Dostupné z: doi:10.1016/B978-0-12-397025-1.00062-2
- [14] JIANG, Jack, E. LIN and D. G. HANSON. Vocal Fold Physiology. *Otolaryngologic Clinics of North America* [online]. 2000, **33**(4), 699–718 [cit. 2022-03-04]. ISSN 0030-6665. Dostupné z: doi:10.1016/S0030-6665(05)70238-3

- [15] ASHBY, Michael and John MAIDMENT. *Úvod do obecné fonetiky*. Prague: Charles University in Prague, Karolinum Press, 2015. ISBN 9788024623221.
- [16] LUST, Robert M. The Pulmonary System. In: *xPharm: The Comprehensive Pharmacology Reference* [online]. B.m.: Elsevier, 2007 [cit. 2022-03-01], p. 1–6. Dostupné z: doi:10.1016/B978-008055232-3.60307-1
- [17] EWALD, Ernst Julius Richard. Zur Konstruktion von Polsterpfeifen. *Pflüger's Archiv für die gesamte Physiologie des Menschen und der Tiere* [online]. 1913, **152**(4), 171–186. ISSN 1432-2013. Dostupné z: doi:10.1007/BF01680977
- [18] FLANAGAN, James L. and Lorinda L. LANDGRAF. Self Oscillating Source for Vocal Tract Synthesizers [online]. 1968. Dostupné z: doi:10.1109/TAU.1968.1161949
- [19] CVETICANIN, Livija. Review on Mathematical and Mechanical Models of the Vocal Cord. *Journal of Applied Mathematics* [online]. 2012, **2012**. Dostupné z: doi:10.1155/2012/928591
- [20] STORY, Brad. An overview of the physiology, physics and modeling of the sound source for vowels. *Acoustical Science and Technology* [online]. 2002, **23**. Dostupné z: doi:10.1250/ast.23.195
- [21] ISHIZAKA, K. and J. L. FLANAGAN. Synthesis of Voiced Sounds From a Two-Mass Model of the Vocal Cords. *The Bell System Technical Journal*. 1972, **51**(6).
- [22] ALIPOUR, Fariborz, Ch. BRUCKER, D. COOK, A. GOMMEL, M. KALTENBACHER, W. MATTHEUS, L. MONGEAU, E. NAUMAN, R. SCHWARZE, I. TOKUDA and S. ZORNER. Mathematical Models and Numerical Schemes for the Simulation of Human Phonation. *Current Bioinformatics* [online]. 2011, **6**(3), 323–343. Dostupné z: doi:10.2174/157489311796904655
- [23] LUCERO, Jorge C. and Laura L. KOENIG. Simulations of temporal patterns of oral airflow in men and women using a two-mass model of the vocal folds under dynamic control. *Citation: The Journal of the Acoustical Society of America* [online]. 2005, **117**, 1362. Dostupné z: doi:10.1121/1.1853235
- [24] ISSHIKI, Nobuhiko, M. TANABE, K. ISHIZAKA and D. BROAD. Clinical Significance of Asymmetrical Vocal Cord Tension. *Annals of Otology, Rhinology & Laryngology* [online]. 1977, **86**(1), 58–66. ISSN 0003-4894. Dostupné z: doi:10.1177/000348947708600109
- [25] WURZBACHER, Tobias, R. SCHWARZ and M. DÖLLINGER. Model-based classification of nonstationary vocal fold vibrations A finite-element model of vocal-fold vibration. *Citation: The Journal of the Acoustical Society of America* [online]. 2006, **120**, 3003. Dostupné z: doi:10.1121/1.2211550
- [26] TOKUDA, Isao T., J. HORÁČEK, J. G. ŠVEC and H. HERZEL. Comparison of bio-mechanical modeling of register transitions and voice instabilities with excised larynx experiments. *The Journal of the Acoustical Society of America* [online]. 2007, **122**(1), 519–531 [cit. 2022-03-17]. ISSN 0001-4966. Dostupné z: doi:10.1121/1.2741210

- [27] STORY, Brad H. and Ingo R. TITZE. Voice simulation with a body-cover model of the vocal folds. *Citation: The Journal of the Acoustical Society of America* [online]. 1995, **97**, 3003. Dostupné z: doi:10.1121/1.412234
- [28] TITZE, Ingo R. Regulating glottal airflow in phonation: Application of the maximum power transfer theorem to a low dimensional phonation model. *Citation: The Journal of the Acoustical Society of America* [online]. 2002, **111**, 367. Dostupné z: doi:10.1121/1.1417526
- [29] MURTOLA, Tiina. *Investigating vowel production with computational physical modelling and glottal inverse filtering* [online]. Helsinki, 2019 [cit. 2022-03-28]. b.n. Dostupné z: <http://urn.fi/URN:ISBN:978-952-60-8619-4>
- [30] TITZE, Ingo R. The Human Vocal Cords: A Mathematical Model. *Phonetica* [online]. 1973, **28**(3–4), 129–170. Dostupné z: doi:doi:10.1159/000259453
- [31] TITZE, Ingo R. The Human Vocal Cords: A Mathematical Model. *Phonetica* [online]. 1974, **29**(1–2), 1–21. Dostupné z: doi:doi:10.1159/000259461
- [32] KOB, Malte. *Physical Modeling of the Singing Voice*. Hamburg, 2002. b.n.
- [33] WONG, Darrell, M. R. ITO and N. B. COX. Observation of perturbations in a lumped-element model of the vocal folds with application to some pathological cases. *Citation: The Journal of the Acoustical Society of America* [online]. 1991, **89**, 383. Dostupné z: doi:10.1121/1.400472
- [34] SCHWARZ, Raphael, M. DÖLLINGER, T. WURZBACHER, U. EYSHOLDT and J. LOHSCHELLER. Nonlinear source-filter coupling in phonation. *Citation: The Journal of the Acoustical Society of America* [online]. 2008, **123**, 2733. Dostupné z: doi:10.1121/1.2902167
- [35] WURZBACHER, Tobias, M. DÖLLINGER and R. SCHWARZ. Spatiotemporal classification of vocal fold dynamics by a multimass model comprising time-dependent parameters. *Citation: The Journal of the Acoustical Society of America* [online]. 2008, **123**, 2324. Dostupné z: doi:10.1121/1.2835435
- [36] YANG, Anxiong, J. LOHSCHELLER, D. A. BERRY, S. BECKER, U. EYSHOLDT, D. VOIGT and M. DÖLLINGER. Biomechanical modeling of the three-dimensional aspects of human vocal fold dynamics. *The Journal of the Acoustical Society of America* [online]. 2010, **127**(2), 1014–1031 [cit. 2022-03-28]. ISSN 0001-4966. Dostupné z: doi:10.1121/1.3277165
- [37] ZAÑARTU, Matías, G. E. GALINDO, B. D. ERATH, S. D. PETERSON, G. R. WODICKA and R. E. HILLMAN. Nonlinear source-filter coupling in phonation. *Citation: The Journal of the Acoustical Society of America* [online]. 2014, **136**, 2733. Dostupné z: doi:10.1121/1.4901714
- [38] ELIE, Benjamin and Yves LAPRIE. Extension of the single-matrix formulation of the vocal tract: Consideration of bilateral channels and connection of self-oscillating models of the vocal folds with a glottal chink. *Speech Communication* [online]. 2016, **82**, 85–96 [cit. 2022-03-28]. ISSN 0167-6393. Dostupné z: doi:10.1016/J.SPECOM.2016.06.002

- [39] TITZE, Ingo R. The physics of small-amplitude oscillation of the vocal folds. *Citation: The Journal of the Acoustical Society of America* [online]. 1988, **83**, 1536. Dostupné z: doi:10.1121/1.395910
- [40] HORÁČEK, Jaromír and Jan G. ŠVEC. Aeroelastic Model of Vocal-fold-shaped Vibrating Element for Studying The Phonation Threshold. *Journal of Fluids and Structures* [online]. 2002, (7), 931–955. Dostupné z: doi:10.1006/jfls.454
- [41] PELORSON, X., A. HIRSCHBERG and R. R. VAN HASSEL. Theoretical and experimental study of quasisteady-flow separation within the glottis during phonation. Application to a modified two-mass model A finite-element model of vocal-fold vibration. *Citation: The Journal of the Acoustical Society of America* [online]. 1994, **96**, 3003. Dostupné z: doi:10.1121/1.411449
- [42] STEINECKE, Ina and Hanspeter HERZEL. Bifurcations in an asymmetric vocal-fold model. *Citation: The Journal of the Acoustical Society of America* [online]. 1995, **97**, 1148. Dostupné z: doi:10.1121/1.412061
- [43] LILJENCANTS, Johan. A translating and rotating mass model of the vocal folds [online]. 1991, **32**(1), 001–018 [cit. 2022-03-28]. Dostupné z: https://www.speech.kth.se/prod/publications/files/qpsr/1991/1991_32_1_001-018.pdf
- [44] JULIŠ, Karel and Rudolf BREPTA. *Mechanika. II. díl, Dynamika*. 1. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1987.
- [45] KUBÍČEK, R. *Řešení dynamických charakteristik jednoduchých modelů hlasivek*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2016. 81 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Petr Hájek.
- [46] TANABE, M., N ISSHIKI and M. SAWADA. Damping Ratio of the Vocal Cord. *Folia Phoniatrica et Logopaedica* [online]. 1979, **31**(1), 27–34. ISSN 1021-7762. Dostupné z: doi:10.1159/000264147

Seznam použitých zkratk a symbolů

Zkratka	Význam
3D	trojrozměrný, trojdimenzionální,
AC	<i>cartilago arytenoidea</i> , chrupavka hlasivková,
CC	<i>cartilago cricoidea</i> , chrupavka prstencová,
FEM	finite element method,
FVM	finite volume method,
kol.	kolektiv,
MKO	metoda kontrolních objemů,
MKP	metoda konečných prvků,
TC	<i>cartilago thyroidea</i> , chrupavka štítná.

Symbol	Jednotka	Význam
A, B, C	[mm]	integrační konstanty homogenního řešení diferenciální rovnice,
$a(y)$	[mm]	tloušťka aeroelastického modelu,
b	[N·s·m ⁻¹]	konstanta tlumení,
b_r	[-]	poměrný útlum,
$B(b, x, \dot{x})$	[N]	nelineární síla tlumicího členu v ose x,
E_b	[J]	potenciální energie,
E_d	[J]	disipativní energie,
E_k	[J]	kinetická energie,
f	[Hz]	frekvence kmitání hlasivek,
f_0	[N·kg ⁻¹]	amplituda hnací síly vztažená na 1 kg,
F_0	[N]	amplituda hnací síly,
k	[N·m ⁻¹]	tuhost pružiny, pružný člen,
$K(k, x)$	[N]	nelineární síla pružného členu v ose x,
m, M	[kg]	hmotnost hmotného členu, hmotný člen,
P	[W]	výkon vnějších sil,
$q, \dot{q}, \ddot{q}$	[mm, m·s ⁻¹ , m·s ⁻²]	zobecněná souřadnice a její časové derivace,
W	[J]	práce vnějších sil,
$x, \dot{x}, \ddot{x}$	[mm, m·s ⁻¹ , m·s ⁻²]	výchylka hmotného prvku v ose x a její časové derivace,
x_0	[mm]	neutrální poloha výchylky,
x_h	[mm]	homogenní část řešení výchylky v ose x,
x_p	[mm]	partikulární část řešení výchylky v ose x,
X	[mm]	amplituda partikulárního řešení diferenciální rovnice,
$y, \dot{y}$	[m·s ⁻¹ , m·s ⁻²]	rychlost hmotného prvku v ose x a její časová derivace,
$\ddot{a}$	[m·s ⁻²]	zrychlení hmotného prvku,
$\vec{F}$	[N]	hnací síla,

$\overrightarrow{F_b}$	[N]	lineární síla tlumicího členu,
$\overrightarrow{F_k}$	[N]	lineární síla pružného členu,
$\overrightarrow{M_2}$	[N·m]	hnací moment,
$\vec{v}$	[m·s ⁻¹]	rychlost hmotného prvku,
$\overrightarrow{v_{sv}}$	[m·s ⁻¹]	rychlost slizniční vlny,
λ	[-]	kořen charakteristické rovnice,
ξ	[-]	tlumicí koeficient,
ω	[rad·s ⁻¹]	úhlová frekvence kmitání hlasivek,
Ω	[rad·s ⁻¹]	vlastní úhlová frekvence tlumeného kmitání,
Ω_0	[rad·s ⁻¹]	vlastní úhlová frekvence netlumeného kmitání,
φ	[rad]	fázový posun,
φ_2	[rad]	natočení,
φ_p	[rad]	fázové zpoždění za budicí silou.