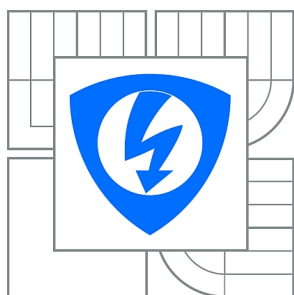


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH
TECHNologiÍ
ÚSTAV AUTOMATIZACE A MĚŘICÍ TECHNIKY

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION
DEPARTMENT OF CONTROL AND INSTRUMENTATION

ROBUSTNÍ ŘÍZENÍ ELEKTRICKÝCH POHONŮ

ROBUST CONTROL OF AC ELECTRICAL DRIVES

DIZERTAČNÍ PRÁCE
DOCTORAL THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

Ing. LUKÁŠ POHL

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

doc. Ing. PETR BLAHA, Ph.D.

BRNO 2014

ABSTRAKT

Cílem této disertační práce je prozkoumat nové možnosti návrhu robustních regulátorů střídavých elektrických motorů a navrhnout nejvhodnější metodu pro řízení reálných synchronních a asynchronních motorů. Robustní metoda představená v této práci využívá nelineární závislosti proudových rovnic na otáčkách motoru ke konstrukci samo nastavujícího se LPV regulátoru. Výhodou tohoto přístupu k regulaci proudů elektrických motorů je dosažení značné robustnosti proudové regulace bez ztráty rychlosti proudové smyčky. Rychlá a na otáčkách nezávislá odezva proudového regulátoru umožňuje použití robustního $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru otáček ve vnější smyčce kaskádní regulační struktury. Hlavním účelem robustního $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru otáček je potlačit vliv zatěžovacího momentu na dynamické vlastnosti regulace otáček. Požadované vlastnosti kaskádní regulační struktury s LPV regulátorem proudu a $\mathcal{H}_\infty$ regulátorem otáček jsou verifikovány na platformě reálného času dSPACE ds1103. Výsledky simulací pro synchronní a asynchronní motory potvrzují, že navržená metoda řízení elektrických pohonů je robustní pro celý rozsah pracovních otáček motoru a zároveň dokáže velmi dobře potlačit vliv zatěžovacího momentu.

KLÍČOVÁ SLOVA

$\mathcal{H}_\infty$, LPV, samo nastavující regulace, PMSM, IM, robustní řízení, potlačení zatěžovacího momentu

ABSTRACT

The purpose of this dissertation is to introduce and demonstrate a new approach to robust control of AC electrical drives. The proposed robust control method takes advantage of a nonlinear nature of AC motor $d-q$ equations to construct self-scheduled LPV stator current controller. The benefit of this approach is in maintaining the robustness without any increase in conservatism of the $\mathcal{H}_\infty$ controller. The resulting controller achieves fast and consistent response in the entire range of operating speeds. Rejection of the load torque disturbance is achieved with nonparametric $\mathcal{H}_\infty$ speed controller in the outer loop of the cascade structure. The combination of LPV current controller and $\mathcal{H}_\infty$ speed controller was verified on real-time simulation platform dSPACE ds1103. Simulation results for both types of AC motors (PMSM and IM) shows that the proposed solution is not only robust with respect to operating speeds but also impervious to wide range of load disturbance values.

KEYWORDS

$\mathcal{H}_\infty$, LPV, self-scheduled control, PMSM, IM, robust control, load torque disturbance rejection

POHL, Lukáš *Robustní řízení elektrických pohonů*: dizertační práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav automatizace a měřicí techniky, 2014. 114 s. Vedoucí práce byl doc. Ing. Petr Blaha, PhD.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou doktorskou práci na téma „Robustní řízení elektrických pohonů“ jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího doktorské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené doktorské práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této doktorské práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a/nebo majetkových a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

Brno

.....

(podpis autora)

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych poděkoval vedoucímu diplomové práce panu doc.Ing. Petru Blahovi, Ph.D. za odborné vedení, konzultace, trpělivost a podnětné návrhy k práci.

Brno

.....

(podpis autora)

OBSAH

Seznam symbolů a zkratek	11
1 Uvod	13
1.1 Současný stav řešení - rozbor literatury	14
1.2 Cíle disertační práce	16
1.3 Členění disertační práce	17
2 Elektrické pohony	18
2.1 Modelování střídavých elektrických pohonů	18
2.1.1 Transformace souřadnic	18
2.1.2 Asynchronní motor	20
2.1.3 Synchronní motor	23
2.2 Metody řízení elektrických pohonů	26
2.2.1 Přímé řízení momentu - DTC	26
2.2.2 Vektorové řízení	29
2.2.3 Simulace vektorového řízení	31
3 Teorie robustního řízení	33
3.1 Matematické nástroje	33
3.1.1 Normy	33
3.1.2 Nástroje pro práci s LMI	35
3.2 Vlastnosti zpětnovazebních obvodů	41
3.2.1 Stabilita systémů	41
3.2.2 Struktura a vlastnosti zpětnovazebních systémů	42
3.3 Použití LMI v řízení	52
3.3.1 Stabilita autonomního systému pomocí LMI	52
3.3.2 Bounded real lemma (BRL) - stabilita řízeného systému pomocí LMI	52
3.3.3 Syntéza regulátoru pomocí LMI	55
4 Řešení doktorské práce	63
4.1 Robustní LPV regulátor statorových proudů PMSM	65
4.1.1 LPV model elektrické části PMSM	65
4.1.2 Syntéza regulátoru	66
4.1.3 Realizace syntézy v Matlabu	70
4.1.4 Simulace	75
4.2 Robustní LPV regulátor otáček PMSM	82
4.2.1 LPV model PMSM	82

4.2.2	Syntéza regulátoru	83
4.2.3	Simulace	83
4.3	Kaskádní regulace otáček PMSM robustními regulátory	86
4.3.1	Ověření robustnosti vnitřní elektrické smyčky	86
4.3.2	Model mechanické části PMSM	87
4.3.3	Syntéza regulátoru	88
4.3.4	Simulace	89
4.3.5	Vliv vlastností proudové smyčky na potlačení zatěžovacího momentu	90
4.4	Kaskádní regulace otáček IM robustními regulátory	94
4.4.1	LPV model elektrické části IM	94
4.4.2	Syntéza LPV regulátoru proudu	97
4.4.3	Model mechanické části IM	98
4.4.4	Syntéza regulátoru otáček	98
4.4.5	Simulace kaskádního regulátoru IM	99
4.5	Implementace algoritmů řízení na platformě dSPACE ds1103	103
4.5.1	Příprava algoritmu řízení	104
4.5.2	Simulace na platformě ds1103	104

SEZNAM OBRÁZKŮ

2.1	Převod třífázového vektoru do dvoufázového souřadnicového systému	19
2.2	Změna perspektivy pozorovatele při transformaci souřadnic	20
2.3	Asynchronní motor siemens	21
2.4	Synchronní servomotor TG drives	24
2.5	Spínací režimy invertoru a vyznačení sektorů pro DTC řízení	27
2.6	Diagram přímého řízení momentu synchronního motoru	28
2.7	Diagram vektorového řízení rychlosti synchronního motoru	30
2.8	Odezva d-q proudů na skokovou změnu otáček	31
3.1	Standardní zpětnovazební zapojení s regulátorem s jedním stupněm volnosti	43
3.2	Obecná struktura regulačního obvodu	43
3.3	Ekvivalentní zapojení regulačního obvodu s jedním stupněm volnosti (s chybovým výstupem $z = y - r$)	44
3.4	Zapojení pro smíšený $\mathcal{H}_\infty$ optimalizační problém	45
3.5	Nominální systém s multiplikativní neurčitostí na vstupu soustavy $G_p = (I + w_I \Delta)G$	45
3.6	Zpětnovazební systém s multiplikativní neurčitostí na vstupu sou- stavy $G_p = (I + w_I \Delta)G$	46
3.7	Obecná struktura regulačního obvodu s neurčitostmi	46
3.8	Nyquistova charakteristika otevřené smyčky s neurčitostmi	47
3.9	Nyquistova charakteristika otevřené smyčky	49
3.10	Zpětnovazební systém s multiplikativní neurčitostí na vstupu sou- stavy $G_p = (I + w_I \Delta)G$	50
3.11	Nyquistova charakteristika otevřené smyčky s neurčitostmi	50
4.1	Obecná regulační struktura pro syntézu $\mathcal{H}_\infty$ LPV regulátoru	66
4.2	Struktura zpětnovazební obvodu s váhovanou citlivostní funkcí	67
4.3	Frekvenční charakteristika váhy citlivostní funkce	68
4.4	Frekvenční charakteristiky singulárních hodnot S a T PMSM s LPV regulátorem proudu pro $\omega_m \in [-110, 110]$	74
4.5	Implementace LPV regulátoru s jedním proměnným parametrem	75
4.6	Diagram vektorového řízení modelu synchronního motoru pomocí LPV regulátoru proudu	77
4.7	Diagram vektorového řízení reálného synchronního motoru pomocí LPV regulátoru proudu na platformě dSPACE ds1103	78
4.8	Odezva LPV regulátoru proudu na skokovou změnu otáček - simulace	79
4.9	Odezva LPV regulátoru proudu na skokovou změnu otáček - reálný motor bez zátěže	80

4.10	Odezva LPV regulátoru proudu na skokovou změnu otáček - zatížený reálný motor	80
4.11	Harmonické zkreslení trojfázových proudů vlivem „dead-time“ efektu	81
4.12	Frekvenční charakteristiky singulárních hodnot S a T PMSM s LPV regulátorem otáček pro $\omega_m \in [-110, 110]$	84
4.13	Přechodová charakteristika LPV regulátoru otáček	85
4.14	Odezva $d-q$ proudů LPV regulace otáček na skokovou změnu otáček	85
4.15	Kaskádní regulační struktura pro řízení proudu a otáček PMSM (E - elektrická část soustavy, M - mechanická část soustavy)	87
4.16	Přechodová charakteristika proudové části PMSM s LPV regulátorem proudu při parametru $\omega_m \in [-110, 110]$	88
4.17	Frekvenční charakteristika singulárních hodnot S a T mechanické části PMSM s $\mathcal{H}_\infty$ regulátorem otáček	89
4.18	Simulace odezvy robustního kaskádního $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru otáček a LPV regulátoru proudu synchronního motoru na skokovou změnu otáček	90
4.19	Odezva robustního kaskádního $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru otáček a LPV regulátoru proudu na skokovou změnu otáček reálného synchronního motoru bez zátěže	91
4.20	Odezva robustního kaskádního $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru otáček a LPV regulátoru proudu na skokovou změnu otáček reálného synchronního motoru při středně velké zátěži	92
4.21	Odezva robustního kaskádního $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru otáček a LPV regulátoru proudu na skokovou změnu otáček reálného synchronního motoru při velké zátěži	92
4.22	Přechodová charakteristika pomalejšího proudového LPV regulátoru při parametru $\omega_m \in [-110, 110]$	93
4.23	Odezva robustního kaskádního $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru otáček a nevhodně zvoleného LPV regulátoru proudu na skokovou změnu otáček	93
4.24	Kaskádní regulační struktura pro řízení proudu a otáček IM (E - elektrická část soustavy, M - mechanická část soustavy)	94
4.25	Frekvenční charakteristiky singulárních hodnot S a T elektrické části IM s LPV regulátorem proudu při $\omega_s \in [-220, 220]$ a $\omega_e \in [-200, 200]$	97
4.26	Frekvenční charakteristiky singulárních hodnot S a T mechanické části IM s $\mathcal{H}_\infty$ regulátorem otáček	99
4.27	Diagram vektorového řízení reálného asynchronního motoru pomocí LPV regulátoru proudu a $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru otáček	100
4.28	Odezva robustního kaskádního $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru otáček a LPV regulátoru proudu na skokovou změnu otáček reálného asynchronního motoru bez zátěže	101

4.29	Odezva robustního kaskádního $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru otáček a LPV regulátoru proudu na skokovou změnu otáček reálného asynchronního motoru se zátěží	102
4.30	Vnitřní architektura platformy ds1103	103
4.31	Simulink diagram pro vektorové řízení na ds1103	105
4.32	Simulink diagram pro měření otáček rotoru na ds1103 (Subsystem EncoderMeas)	106
4.33	Diagram pro měření proudů a napětí na ds1103 (Subsystem ADC-Meas) v prostředí Matlab Simulink	107

SEZNAM TABULEK

2.1	Tabulka spínacích režimů	27
3.1	Konstrukce matice $\Psi_{X_{cl}}$	61
3.2	Konstrukce matice $P_{X_{cl}}$	62
3.3	Konstrukce matice Q	62
4.1	Nominální hodnoty PMSM	73
4.2	Nominální hodnoty IM	102

SEZNAM SYMBOLŮ A ZKRATEK

$\frac{dx}{dt}$ - derivace x podle času
 $\dot{x}$ - derivace x podle času
 $|x|$ - absolutní hodnota x
 $\|x\|$ - norma x
 $f(x)$ - funkční hodnota x
 $\det$ - determinant matice
 rank - hodnost matice
 $\ker$ - jádro lineárního zobrazení matice
 $\sup$ - supremum funkce
 u - elektrické napětí
 i - elektrický proud
 Ψ - magnetický tok
 R - elektrický odpor
 L - indukčnost
 M - vzájemná indukčnost
 ω - rychlost otáčení
 ω_m - mechanická rychlost otáčení (rychlost rotoru)
 ω_e - elektrická rychlost otáčení
 ω_s - synchronní rychlost
 ϕ - úhel natočení
 T_L - zátěžový moment
 J_m - moment setrvačnosti
 s - Laplaceův operátor
 λ - vlastní čísla matice
 σ - singulární hodnoty matice
 $\bar{\sigma}$ - největší singulární hodnota matice
DSP - digitální signálový procesor
PWM - pulsní šířková modulace
SPI - sériové periferní rozhraní
CAN - controller area network
ADC - analogově digitální převodník
DAC - digitálně analogový převodník
TTL - tranzistorově tranzistorová logika
Bd - baud
DC - stejnosměrný proud
AC - střídavý proud
IM - asynchronní (indukční) motor

PMSM - synchronní motor s permanentními magnety

LMI - lineární maticová nerovnost

LPV - linear parameter varying, lineárně parametricky proměnný

1 UVOD

Cílem návrhu robustního řízení elektrických motorů je zajistit nezávislost řízení na vnějších i vnitřních vlivech, které mohou na soustavu působit. Nejčastěji používaným přístupem k přesnému řízení otáček elektrických motorů je vektorové řízení pomocí PI či PID regulátorů. Nízká výpočetní náročnost těchto regulátorů umožňuje snadnou implementaci regulátorů na mikroprocesorech. Nastavení konstant PI či PID regulátorů je klíčové pro správnou funkčnost zpětnovazebního řízení. Existuje velké množství postupů a metod nastavení regulátorů, ale v praxi se nejčastěji volí postup při kterém se nejdříve provede počáteční odhad konstant PID regulátoru a ten se později zpřesní až při testování na cílové aplikaci. Nesprávně nastavené konstanty PI či PID regulátorů se mohou projevit až při implementaci řízení na reálné soustavě. Nelze tak dopředu říci jestli konkrétní nastavení bude vyhovovat reálné soustavě v celém jejím pracovním rozsahu. Robustnost kaskádní regulace pomocí PI a PID regulátorů do značné míry závisí na zkušenostech s implementací na reálných aplikacích.

Vhodnějším přístupem k robustnímu řízení otáček motoru je podrobně se seznámit se strukturou regulované soustavy a všemi neurčitostmi, které soustavu ovlivňují. Zahrnutím všech informací do procesu návrhu regulátoru zkrátí dobu potřebnou pro implementaci a testování. Jednou z metod, které zohledňují neurčitosti při návrhu regulátoru jsou $\mathcal{H}_\infty$ metody. Soustavy, se kterými tyto metody pracují, mohou zahrnovat neurčitosti a regulační struktury různorodých tvarů. Omezením těchto metod je, že musí být regulovaná soustava lineární.

Bližší pohled na rovnice elektrických motorů v $d - q$ souřadnicovém systému odhalí, že vektorové řízení jednotlivých složek statorových proudů není zcela oddělené. Velikost vazby mezi $d - q$ složkami proudu závisí na aktuálních otáčkách motoru. LPV $\mathcal{H}_\infty$ regulátor, který tvoří značnou část řešení disertační práce, této závislosti využívá k vytvoření tzv. samo nastavujícího se $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru. Samotná robustní regulace proudu nezajistí nezávislost regulace otáček na vnějších vlivech. Inovativní přístup představený v této práci spočívá v použití dvojice $\mathcal{H}_\infty$ regulátorů, které jsou společně schopny zajistit robustní řízení elektrických motorů. První z těchto regulátorů je již zmíněný $\mathcal{H}_\infty$ LPV regulátor, který motor stabilizuje vůči změnám otáček. Druhý $\mathcal{H}_\infty$ regulátor ve vnější otáčkové smyčce zajistí potlačení zatěžovacího momentu.

Teoretická část této práce se zabývá syntézou $\mathcal{H}_\infty$ regulátorů pomocí lineárních maticových nerovností. Veškeré matematické nástroje jsou v této práci postupně představeny s cílem vypočítat na obecnou soustavu robustní regulátor. Další důležitou část disertační práce představuje implementace a testování diskretizovaných robustních $\mathcal{H}_\infty$ regulátorů na reálných motorech s použitím platformy reálného času

1.1 Současný stav řešení - rozbor literatury

Mezi nejvýznamnější osobnosti v oboru lineárních maticových nerovností (LMI) pro řízení nepochybně patří Pierre Apkarian a Pascal Gahinet. Autoři se ve svém nejcitovanějším článku zabývají parametrizací $\mathcal{H}_\infty$ regulátorů pomocí LMI. Vycházejí z článku „State-space solutions to standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control problems“ (Doyle et al., 1989). V této publikaci jsou uvedeny Riccatiho rovnice pro parametrizaci stavových $\mathcal{H}_\infty$ regulátorů. Riccatiho rovnice převedli na nerovnosti a řešení hledají pomocí LMI („A convex characterization of gain-scheduled $\mathcal{H}_\infty$ controllers“ (Gahinet – Apkarian, 1994)). Podle provedené rešerše dostupných zdrojů byli prvními, kterým se podařilo překonat problémy spojené s nalezením konvexního řešení nerovností vycházejících z Bounded Real Lemmy (BRL). Substitucí některých proměnných v LMI získali lineární řešení syntézy dynamických regulátorů (podobně jako v případě stavových regulátorů v publikaci (Chilali – Gahinet, 1996)). Několika úpravami rozepsali BRL na trojici LMI řešitelných pomocí konvexní optimalizace. Z výsledku optimalizace získali matice regulátorů. Podrobný rozbor postupu linearizace BRL pro syntézu dynamického regulátoru je uveden v sekci 3.3.3 (str.55). Rozšíření této metody návrhu robustního regulátoru bylo představeno v článku „A convex characterization of gain-scheduled $\mathcal{H}_\infty$ controllers“ (Apkarian – Gahinet, 1995). Článek se zabývá syntézou LPV (linear parameter varying) regulátoru na LPV soustavu. V principu se využívá parametrické závislosti soustavy pro návrh regulátorů pro krajní hodnoty tohoto parametru. Autoři zde dokázali, že plynulým přechodem mezi jednotlivými regulátory lze pomocí aktuální hodnoty proměnného parametru dosáhnout požadovaných vlastností regulace. Výhodou tohoto přístupu je, že na rozdíl od neurčitého parametru je tato metoda použitelná i pro rychlé změny známého (měřeného) parametru. Tato metoda byla později autory představena na několika příkladech (Apkarian et al., 1995). Diskretizaci těchto LPV regulátorů popisuje P. Apkarian v článku „On the discretization of LMI-synthesized linear parameter-varying controllers“ (Apkarian, 1997).

Dalším významným inovátorem v oblasti teorie LMI je profesor Carsten W. Scherer. Jeho výzkum je soustředěn především na robustní řízení, konvexní optimalizaci a metody řízeného zesílení („gain scheduling“). Nejvíce citovaný článek od C.W. Scherera formuluje kompletní přehled LMI zajišťujících požadované vlastnosti zpětnovazebního systému (kvalita podle $\mathcal{H}_2$ a $\mathcal{H}_\infty$ norem, nominální a robustní regulace, rozložení pólů) (Scherer et al., 1997). Dalším a z hlediska tohoto tématu důležitým článkem, je „LPV control and full block multipliers“ (Scherer, 2001). Hlav-

ním cílem článku je snížení konzervatismu definováním méně obecné kvadratické formy vstupně-výstupní funkce použitím plných blokových činitelů („full block multipliers“). Výsledky uvedené v závěru článku dokazují, že volbou kvadratického integrálního kritéria a rozdělením celého rozsahu proměnného parametru na několik intervalů, lze dosáhnout lepších vlastností zpětnovazebního obvodu. Zlepšení vlastností se projevilo jak při stejných, tak i větších změnách proměnného parametru.

Tématikou robustního řízení se také zabývají profesor Ian Postlethwaite a Dr Emmanuel Prempain. I. Postlethwaite je společně s S. Skogestad autorem uznávané knihy „Multivariable feedback control: analysis and design“ (Skogestad – Postlethwaite, 2005). Na téma syntézy regulátoru pomocí LMI napsali Prempain a Postlethwaite několik článků. Řízení asynchronního motoru pomocí LPV regulátorů se věnuje článek „A linear parameter variant $\mathcal{H}_\infty$ control design for an induction motor“ (Prempain et al., 2002). Hlavní myšlenka spočívá v možnosti linearizovat rovnice asynchronního motoru exaktní linearizací a později také vyjmutím otáček z těchto rovnic. Linearizované rovnice byly posléze přepsány do LPV tvaru. Otáčky rotoru jsou považovány za měřitelný parametr, pomocí kterého je možné při znalosti mezních hodnot otáček sestavit robustní LPV regulátor. Prempain a Postlethwaite se stejně jako C.W. Scherer dále věnovali snížení konzervativnosti robustních parametrických regulátorů. V článku „ $\mathcal{L}_2$ and $\mathcal{H}_2$ performance analysis and gain-scheduling synthesis for parameter-dependent systems“ (Prempain – Postlethwaite, 2008) jsou popsány metody pro analýzu $\mathcal{L}_2$ a $\mathcal{H}_2$ kvality regulace a syntézy regulátorů s použitím plných blokových činitelů („full block multipliers“). I. Postlethwaite se s dalšími autory zabývá aplikací LMI na systémy se saturací („Antiwindup for stable linear systems with input saturation: an LMI-based synthesis“ (Grimm et al., 2003)) kde řeší Antiwindup problematiku pomocí LPV regulátorů.

V oblasti řízení elektrických pohonů je možné nalézt několik aplikací $\mathcal{H}_\infty$ metod návrhu robustních regulátorů. První velice oblíbenou metodou návrhu je Loop-shaping design procedure (LSDP) (McFarlane – Glover, 1992). Princip této metody spočívá v robustní stabilizaci regulátoru navrženého metodou tvarování frekvenční charakteristiky otevřené smyčky. Pro systém rozložený nesoudělnou faktorizací existuje explicitní řešení pro výpočet robustních regulátorů zajišťujících nejnížší možnou hodnotu γ . Princip a použití této metody je dobře popsán v knize „Robust control design with MATLAB“ (Gu, 2005). Aplikace LSDP metody je většinou prováděna na linearizovaném modelu asynchronních a synchronních motorů (Acevedo et al., 2008)(Azaiz et al., 2007)(Hsien et al., 1996)(Ban et al., 2009). Nevýhodou této metody je, že dosažená γ je zaručena pouze v blízkém okolí lineární náhrady modelu motoru.

$\mathcal{H}_\infty$ metoda popsaná v článku „State-space solutions to standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control problems“ (Doyle et al., 1989), ze které později vycházejí Apkarian a Ga-

hinet, je se značnými úpravami soustavy také použitelná pro návrh robustního regulátoru elektrických pohonů. Hlavní problémem aplikace této metody na motory je nelineární charakter rovnic synchronních a asynchronních motorů. Jedno z možných řešení tohoto problému je popsáno v článku „Robust Speed Control of an Induction Motor: An Control Theory $\mathcal{H}_\infty$ Approach with Field Orientation and μ -Analysis“(Bottura et al., 2000). Všechny části stavových rovnic motoru, které se mění s časem (např. otáčky), jsou zde přetransformovány na parametrické neurčitosti. Nevýhodou tohoto postupu je, že použití parametrických neurčitostí způsobuje značný konzervatismus výsledného regulátoru a příliš se nehodí pro rychlé změny neurčité veličiny. Navíc, aby bylo možné dosáhnout požadované stability v celém rozsahu, musí být regulační smyčka značně pomalá. Tato $\mathcal{H}_\infty$ metoda (Doyle et al., 1989) inspirovala několik dalších autorů pracujících s elektrickými pohony (Zheng et al., 2006)(Zhang et al., 2008)(Sil et al., 2009).

Postup, jak odstranit všechny nevýhody vyplývající z rychle se měnící veličiny, je uveden v článku „Self-scheduled $\mathcal{H}_\infty$ control of linear parameter-varying systems: a design example“ (Apkarian et al., 1995). Článek se zabývá gain-scheduling metodou použitelnou na obecnou soustavu s rychle se měnícím parametrem. Syntéza $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru spočívá v nalezení jediné Ljapunovy funkce vyhovující všem mezním hodnotám tohoto parametru. Ljapunova funkce je poté dosazena do soustavy LMI, ze které se konvexní optimalizací získají matice regulátorů pro mezní hodnoty parametru. Výsledný akční zásah je složen z váhovaných akčních zásahů mezních regulátorů v závislosti na aktuální hodnotě proměnného parametru. Použití této metody na elektrických pohonech bylo demonstrováno v člancích (Prempain et al., 2002)(Machmoum et al., 2005). Druhý z těchto článků není příliš citovaný, ale popisuje zásadní způsob zápisu rovnic synchronního motoru, který umožňuje použití této metody i na PMSM.

1.2 Cíle disertační práce

Cíle disertace lze krátce shrnout v následujících bodech:

- Seznámit se se strukturou $d - q$ rovnic elektrických motorů a identifikovat jejich klíčové vlastnosti
- Vytvořit parametrické rovnice elektrických motorů
- Sestavit postup syntézy $\mathcal{H}_\infty$ LPV regulátorů pomocí lineárních maticových nerovností
- Aplikovat syntézu $\mathcal{H}_\infty$ LPV regulátorů na rovnice synchronního a asynchronního motoru

- Vytvořit testovací platformu vhodnou pro rychlé nasazení $\mathcal{H}_\infty$ regulátorů
- Verifikovat teoretické výsledky na reálných motorech

1.3 Členění disertační práce

Disertační práce je rozdělena do celkem pěti kapitol. Po úvodní kapitole o současném stavu řešení a cílech této práce následuje druhá kapitola o modelování a řízení elektrických pohonů. Tato kapitola si klade za cíl seznámit čtenáře s metodami řízení elektrických pohonů založenými na transformaci souřadnic. Metody řízení elektrických pohonů jsou soustředěny na dva nejpoužívanější typy elektrických motorů - asynchronní motory a synchronní motory s permanentními magnety.

Třetí kapitola se zaměřuje na teorii robustního řízení. Postupně je zde představen soubor matematických nástrojů používaných v teorii řízení. Metody syntézy robustních $\mathcal{H}_\infty$ regulátorů jsou postaveny na této teorii.

Čtvrtá kapitola se soustředí na návrh robustních regulátorů. Robustní regulace otáček synchronních a asynchronních motorů je dosaženo kombinací LPV regulátoru proudu a $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru otáček. Oba typy regulátorů jsou ověřeny na reálném synchronním a asynchronním motoru.

Poslední kapitola disertační práce je věnována zhodnocení dosažených výsledků a porovnání vlastností robustních regulátorů s PID regulátory.

2 ELEKTRICKÉ POHONY

První část této sekce je věnována metodám modelování střídavých elektrických pohonů. Cílem modelování je získat matematický popis co možná nejlépe popisující chování reálné soustavy/pohonu. V další části jsou představeny transformace běžně používané při modelování elektrických pohonů, na které navazuje sekce s modely vybraných elektrických pohonů. Část nazvaná „Metody řízení elektrických pohonů“ se zabývá rozбором nejpoužívanějších metod řízení motorů a jejich výhodami a nevýhodami. V závěru této kapitoly jsou uvedeny výsledky simulací jedné z nejpoužívanějších metod řízení elektrických pohonů - vektorového řízení.

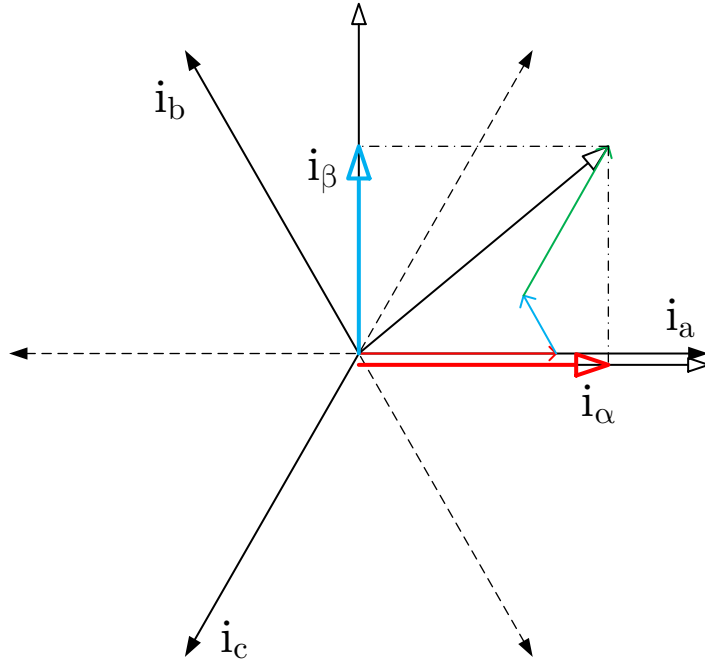
2.1 Modelování střídavých elektrických pohonů

Elektrické stroje lze v závislosti na způsobu přeměny energie používat buď jako generátory, nebo jako motory. Generátory jsou elektrické stroje, které mechanickou energii přetvářejí na elektrickou. Motory transformují elektrickou energii na energii mechanickou. Přestože lze většinu elektrických strojů používat v obou režimech, v této práci je věnována pozornost především řízení elektrických strojů v motorickém režimu - řízení motorů. V případech, kdy motor přejde do generátorového režimu (například při brzdění) se předpokládá, že je přebytečná energie mařena na vinutí motoru či na brzděném odporu. Návrh robustních algoritmů pro řízení elektrických pohonů je soustředěn především na střídavé třífázové synchronní a asynchronní motory. Modely střídavých pohonů jsou převzaty převážně z knih (Neborák, 2002; Lyshevski, 1999; Vas, 1998).

2.1.1 Transformace souřadnic

Proudy a napětí vícefázových elektrických motorů jsou obvykle znázorněny pomocí prostorových vektorů. U třífázových motorů se jedná o tři prostorové vektory (a,b,c) vzájemně posunuté o 120° . Rovnice statorových proudů motoru jsou v tomto případě tři. Složením těchto tří vektorů dostaneme výsledný vektor proudu statorem a průmětem tohoto vektoru do dvoufázového souřadnicového systému (α - β) s osami uzavírajícími úhel 90° získáme dva nové vektory. Touto transformací došlo k redukci počtu rovnic popisujících statorové proudy. Grafické znázornění této transformace je zobrazeno na Obr. 2.1.

Pro numerický přepočet se často používá maticový zápis α - β (Clarkové) transformace uvedený v rovnicích (2.1),(2.2).

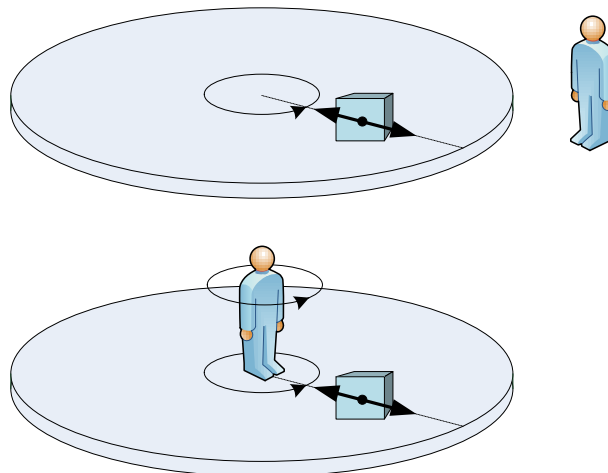


Obr. 2.1: Převod třífázového vektoru do dvoufázového souřadnicového systému

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & \cos \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{4\pi}{3} \\ 0 & \sin \frac{2\pi}{3} & \sin \frac{4\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos \frac{2\pi}{3} & \sin \frac{2\pi}{3} \\ \cos \frac{4\pi}{3} & \sin \frac{4\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Řízení proudů se se změnou souřadnicového systému sice zjednodušilo na řízení dvou vektorů, ale stále je nutné počítat se závislostí rovnic na úhlu natočení rotoru. Při požadavku na konstantní rychlost se bude měnit velikost vektorů α a β v závislosti na úhlu natočení výsledného vektoru. Ten se otáčí synchronně s rotorem, a pokud nedochází ke skluzu, tak s rotorem svírá úhel 90° (maximální velikost momentu). Regulátor pracující v α - β souřadnicovém systému musí i při konstantní požadované hodnotě otáček měnit velikost akčního zásahu (velikost α - β vektorů) v závislosti na aktuálním úhlu natočení. Tuto závislost lze odstranit změnou perspektivy, se kterou je nahlíženo na výsledný vektor. Pokud zavedeme nový souřadnicový



Obr. 2.2: Změna perspektivy pozorovatele při transformaci souřadnic

systém, který se bude otáčet synchronně s rotorem, tak dojde k odstranění závislosti rovnic statorových proudů na úhlu natočení. Maticový zápis transformace stacionárních vektorů proudu v α - β souřadnicovém systému do vektorů d – q otáčejících se synchronně s rotorem je uveden v rovnici (2.3) (Parkova transformace).

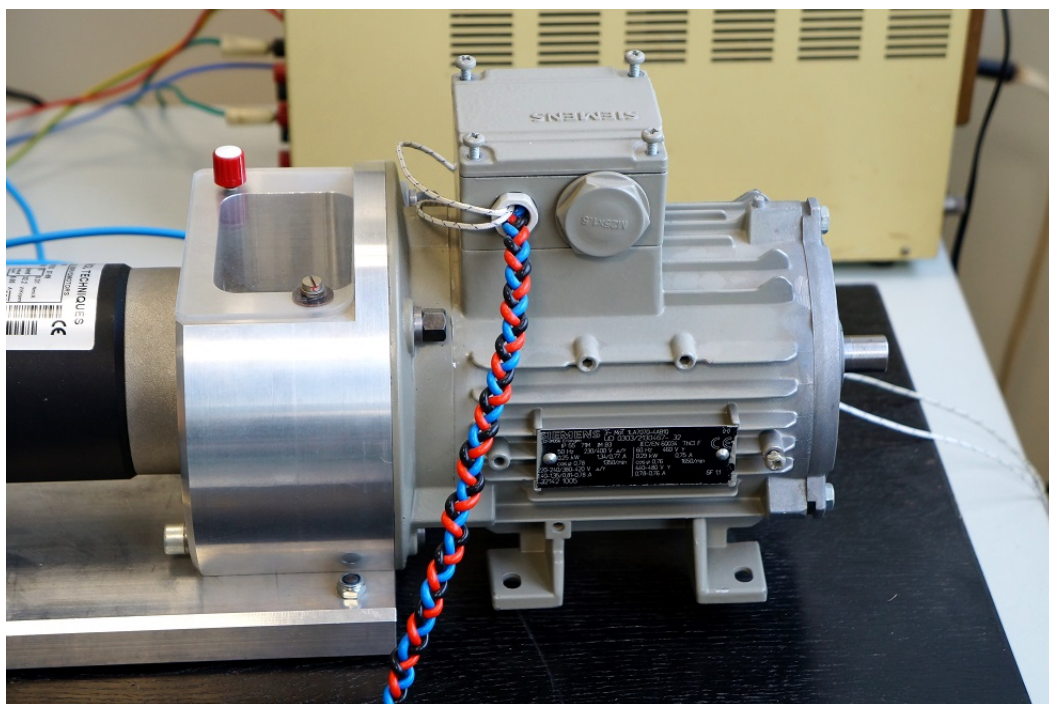
$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Tuto změnu perspektivy si lze jednoduše představit jako přemístění pozorovatele ze stacionárního stanoviště na stanoviště připevněné k otáčející se platformě. Při změně perspektivy lze nyní mnohem snadněji popsat pohyb tělesa umístěného na platformě. Pokud je těleso v klidu vzhledem k platformě, tak je také v klidu vzhledem k pozorovateli (viz Obr. 2.2)(Chattopadhyay et al., 2011).

2.1.2 Asynchronní motor

Asynchronní motory, v anglické literatuře také nazývané indukční motory, patří za svou dobu existence k jednomu z nejpoužívanějších elektrických strojů. Původní patent na střídavý asynchronní motor byl podán roku 1888 vynálezcem a průkopníkem v oboru elektřiny Nikolajem Teslou. Přestože od té doby prošla konstrukce asynchronního motoru značným vývojem, princip fungování asynchronního motoru zůstává stále stejný. Typický asynchronní motor se skládá z válcovitého rotoru s klecovým vinutím (kotvou) nakrátko a z buzeného statorového vinutí. Konstrukce

rotoru se mnohdy různí ale nejčastěji používaná konstrukce bez komutátoru je vyrobena z transformátorových plechů s hliníkovými či měďnými tyčemi vnořenými po obvodu rotoru. Tyto tyče jsou na obou koncích zkratovány kruhy ze stejného materiálu. Přiložením střídavého elektrického napětí na stator asynchronního motoru začnou vinutím statoru protékat střídavé elektrické proudy. Tyto proudy vytváří střídavé magnetické pole statoru. Rotorovým vinutím začne vlivem magnetické indukce protékat střídavý elektrický proud, který vytvoří magnetické pole rotoru. Interakcí statorového a rotorového magnetického pole vznikne elektromagnetický moment.



Obr. 2.3: Asynchronní motor siemens

Matematický model asynchronního motoru byl sestaven s ohledem na několik předpokladů, které značně zjednoduší tvar výsledného modelu. Jedním z předpokladů je, že se jedná o symetrický motor se stejnými hodnotami odporů a indukčností všech fází. Statorové vinutí je sinusově rozloženo po obvodu motoru a vzduchová mezera mezi statorem a rotorem je konstantní. Dále byly také zanedbány ztráty v železe a předpokládá se, že středový (nulový) vodič není připojen. Pro zjednodušený model třífázového asynchronního motoru platí následující rovnice pro statorová napětí (Neborák, 2002; Pujol et al., 2001; Vas, 1998):

$$\begin{aligned}
u_{sa} &= R_s i_{sa} + \frac{d\Psi_{sa}}{dt} \\
u_{sb} &= R_s i_{sb} + \frac{d\Psi_{sb}}{dt} \\
u_{sc} &= R_s i_{sc} + \frac{d\Psi_{sc}}{dt}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Význam jednotlivých veličin:

u_{sa}, u_{sb}, u_{sc} - statorové napětí

$\Psi_{sa}, \Psi_{sb}, \Psi_{sc}$ - statorové magnetické toky

R_s - elektrický fázový odpor symetrického asynchronního motoru

Spřažené toky nenasyceného asynchronního motoru lze spočítat z následujících rovnic:

$$\begin{aligned}
\Psi_{sa} &= \bar{L}_s i_{sa} + \bar{M}_s i_{sb} + \bar{M}_s i_{sc} + \bar{M}_{sr} \cos \varphi i_{ra} + \bar{M}_{sr} \cos(\varphi + 2\pi/3) i_{rb} \\
&\quad + \bar{M}_{sr} \cos(\varphi - 2\pi/3) i_{rc} \\
\Psi_{sb} &= \bar{L}_s i_{sb} + \bar{M}_s i_{cs} + \bar{M}_s i_{sa} + \bar{M}_{sr} \cos \varphi i_{rb} + \bar{M}_{sr} \cos(\varphi + 2\pi/3) i_{rc} \\
&\quad + \bar{M}_{sr} \cos(\varphi - 2\pi/3) i_{ra} \\
\Psi_{sc} &= \bar{L}_s i_{sc} + \bar{M}_s i_{as} + \bar{M}_s i_{sb} + \bar{M}_{sr} \cos \varphi i_{rc} + \bar{M}_{sr} \cos(\varphi + 2\pi/3) i_{ra} \\
&\quad + \bar{M}_{sr} \cos(\varphi - 2\pi/3) i_{rb}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Význam dalších veličin:

i_{ra}, i_{rb}, i_{rc} - rotorové proudy

$\bar{L}_s$ - vlastní indukčnosti statorového vinutí

$\bar{M}_s$ - vzájemná indukčnost statorového vinutí mezi různými fázemi

$\bar{M}_{sr}$ - vzájemná indukčnost mezi fázemi statoru a rotoru

φ - úhel natočení mezi statorem a rotorem

Obdobně lze dosazením $\varphi = -\varphi$ získat napěťové rovnice rotoru. Použitím Clarkové transformace na napěťové rovnice statoru a rotoru obdržíme následující napěťový model ve dvoufázovém statorovém souřadnicovém systému α, β (Pujol et al., 2001):

$$\begin{aligned}
u_{s\alpha} &= R_s i_{s\alpha} + L_s \frac{d i_{s\alpha}}{dt} - L_s \varphi_s \frac{d i_{s\beta}}{dt} + L_m \frac{d i_{r\alpha}}{dt} - L_m \omega_s i_{r\beta} - L_m \varphi_r \frac{d i_{r\beta}}{dt} \\
u_{s\beta} &= R_s i_{s\beta} + L_s \frac{d i_{s\beta}}{dt} + L_s \varphi_s \frac{d i_{s\alpha}}{dt} + L_m \frac{d i_{r\beta}}{dt} + L_m \omega_s i_{r\alpha} + L_m \varphi_r \frac{d i_{r\alpha}}{dt} \\
u_{r\alpha} &= R_r i_{r\alpha} + L_r \frac{d i_{r\alpha}}{dt} - L_r \varphi_r \frac{d i_{r\beta}}{dt} + L_m \frac{d i_{s\alpha}}{dt} + L_m \omega_s i_{s\beta} - L_m \varphi_s \frac{d i_{s\beta}}{dt} \\
u_{r\beta} &= R_r i_{r\beta} + L_r \frac{d i_{r\beta}}{dt} + L_r \varphi_r \frac{d i_{r\alpha}}{dt} + L_m \frac{d i_{s\beta}}{dt} - L_m \omega_s i_{s\alpha} + L_m \varphi_s \frac{d i_{s\alpha}}{dt}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Pro jednotlivé parametry platí:

$L_s = \bar{L}_s - \bar{M}_s$ - celková trojfázová statorová indukčnost

$L_r = \bar{L}_r - \bar{M}_r$ - celková trojfázová rotorová indukčnost

$L_m = \frac{3}{2} \bar{M}_{sr}$ - magnetizační indukčnost

ω_s - synchronní rychlost

Pomocí Parkovy transformace získáme dvoufázový napěťový model v synchronním souřadnicovém systému (d, q) (Neborák, 2002; Lyshevski, 1999; Pujol et al., 2001; Vas, 1998):

$$\begin{aligned}
u_{sd} &= R_s i_{sd} + L_s \frac{d i_{sd}}{dt} - L_s \omega_s i_{sq} + L_m \frac{d i_{rd}}{dt} - L_m \omega_s i_{rq} \\
u_{sq} &= R_s i_{sq} + L_s \frac{d i_{sq}}{dt} + L_s \omega_s i_{sd} + L_m \frac{d i_{rq}}{dt} + L_m \omega_s i_{rd} \\
u_{rd} &= R_r i_{rd} + L_r \frac{d i_{rd}}{dt} - L_r \omega_s i_{rq} + L_m \frac{d i_{sd}}{dt} - L_m \omega_s i_{sq} \\
u_{rq} &= R_r i_{rq} + L_r \frac{d i_{rq}}{dt} + L_r \omega_s i_{rd} + L_m \frac{d i_{sq}}{dt} + L_m \omega_s i_{sd}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Souřadnicový systém tohoto napěťového modelu je vztažen k synchronní rychlosti ω_s . Volbou stavových veličin je možné z těchto rovnic získat různé stavové popisy. Otáčky asynchronního motoru popisuje následující rovnice:

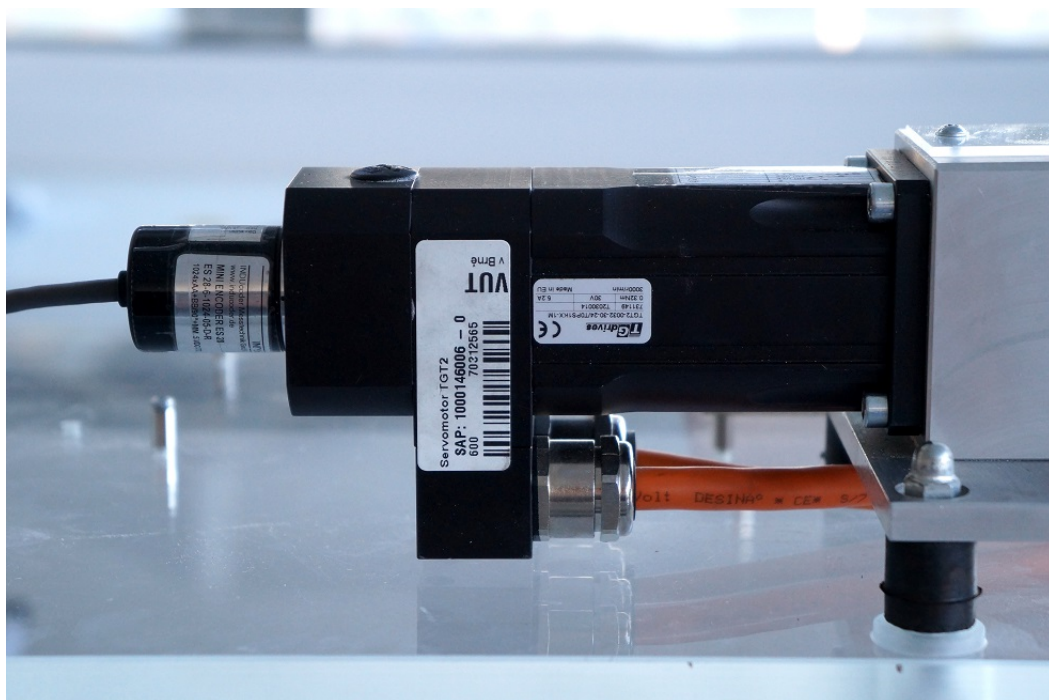
$$\dot{\omega}_e = \frac{1}{J} \left[\frac{3}{2} p (\Psi_{rd} i_{sq} - \Psi_{rq} i_{sd}) - T_L \right] \tag{2.8}$$

T_L - zátěžový moment

2.1.3 Synchronní motor

Podle konstrukce rotoru můžeme synchronní motory dále rozlišovat na reluktanční synchronní motor (stator z magneticky měkkého materiálu), synchronní motor s budícím vinutím (vinutí rotoru napájeno stejnosměrně) a synchronní motor s permanentními magnety ($Nd_2Fe_{14}B$, Sm_1Co_5 , Sm_2Co_{17}) buď na plášti rotoru, či uvnitř.

Synchronní motor s permanentními magnety má několik předností oproti ostatním typům synchronních motorů. Velikost magnetického toku rotoru je pevně daná druhem a velikostí použitých magnetů a matematický model v $d-q$ souřadnicích je jednodušší než u asynchronního motoru. Synchronní motor s permanentními magnety dokáže přes své malé rozměry vyvinout velký moment a navíc oproti reluktančnímu motoru netrpí zvlněním výstupního momentu při nízkých otáčkách. Z důvodu dostupnosti synchronního servomotoru v našich laboratořích a tím možnosti testování algoritmů na reálném motoru budou matematické modely v této sekci soustředěny výhradně na synchronní motory s permanentními magnety.



Obr. 2.4: Synchronní servomotor TG drives

Pro sestavení matematického modelu synchronního motoru s permanentními magnety byly zavedeny zjednodušující předpoklady shodné s asynchronním motorem. Uvažovaný synchronní motor s permanentními magnety je motor symetrické konstrukce se stejnými hodnotami odporů a indukčností všech fází. Statorové vinutí je sinusově rozloženo po obvodu motoru a vzduchová mezera mezi statorem a rotorem je konstantní. Dále byly také zanedbány ztráty v železe, tlumení materiálu rotoru a předpokládá se, že středový (nulový) vodič není připojen. Pro zjednodušený model třífázového synchronního motoru s permanentními magnety platí následující rovnice pro statorová napětí (Lyshevski, 1999; Vas, 1998):

$$\begin{aligned}
u_{sa} &= R_s i_{sa} + \frac{d\Psi_{sa}}{dt} \\
u_{sb} &= R_s i_{sb} + \frac{d\Psi_{sb}}{dt} \\
u_{sc} &= R_s i_{sc} + \frac{d\Psi_{sc}}{dt}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

u_{sa}, u_{sb}, u_{sc} - satorové napětí

$\Psi_{sa}, \Psi_{sb}, \Psi_{sc}$ - satorové magnetické toky

R_s - elektrický fázový odpor symetrického asynchronního motoru

$$\begin{aligned}
\Psi_{sa} &= \bar{L}_a i_{sa} + \bar{M}_{ba} i_{sb} + \bar{M}_{ca} i_{sc} + \Psi_f \sin \varphi \\
\Psi_{sb} &= \bar{L}_b i_{sb} + \bar{M}_{cb} i_{sc} + \bar{M}_{ab} i_{sa} + \Psi_f \sin(\varphi - 2/3\pi) \\
\Psi_{sc} &= \bar{L}_c i_{sc} + \bar{M}_{ac} i_{sa} + \bar{M}_{bc} i_{sb} + \Psi_f \sin(\varphi + 2/3\pi)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$\bar{L}$ - vlastní indukčnosti satorového vinutí

$\bar{M}$ - vzájemná indukčnost satorového vinutí mezi různými fázemi

Ψ_f - spřažený magnetický tok

φ - elektrický úhel natočení mezi statorem a rotorem

Použitím Clarkové transformace na napětové rovnice satoru obdržíme napětový model synchronního motoru s permanentními magnety ve dvoufázovém satorovém souřadnicovém systému α - β (Raute, 2009).

$$\begin{aligned}
u_{s\alpha} &= R_s i_{s\alpha} + L_{s\alpha} \frac{d i_{s\alpha}}{dt} - \omega_e \Psi_f \sin \phi \\
u_{s\beta} &= R_s i_{s\beta} + L_{s\beta} \frac{d i_{s\beta}}{dt} + \omega_e \Psi_f \cos \phi
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Pro indukčnosti platí následující přepočty do $\alpha - \beta$ souřadnic (Raute, 2009):

$$\begin{bmatrix} L_\alpha & M_{\alpha\beta} \\ M_{\beta\alpha} & L_\beta \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & \cos \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{4\pi}{3} \\ 0 & \sin \frac{2\pi}{3} & \sin \frac{4\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_a & M_{ba} & M_{ca} \\ M_{ab} & L_b & M_{cb} \\ M_{ac} & M_{bc} & L_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos \frac{2\pi}{3} & \sin \frac{2\pi}{3} \\ \cos \frac{4\pi}{3} & \sin \frac{4\pi}{3} \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Pro symetrické indukčnosti ($L_a = L_b = L_c$, $M_{ab} = M_{ba} = M_{ac} = M_{ca} = M_{bc} = M_{cb}$) lze výpočet zjednodušit na:

$L_{s\alpha} = L_{s\beta} = \bar{L} - \bar{M}$ - celková dvoufázová satorová indukčnost

Parkovou transformací získáme dvoufázový napěťový model v souřadnicovém systému (d - q) otáčejícím se synchronně s rotorem (Neborák, 2002; Lyshevski, 1999; Raute, 2009; Vas, 1998):

$$\begin{aligned} u_{sd} &= R_s i_{sd} + L_{sd} \frac{d i_{sd}}{dt} - \omega_e L_{sq} i_{sq} \\ u_{sq} &= R_s i_{sq} + L_{sq} \frac{d i_{sq}}{dt} + \omega_e L_{sd} i_{sd} + \omega_e \Psi_f \end{aligned} \quad (2.13)$$

Elektrická rychlost PMS motoru je dána rovnicí (2.14).

$$\dot{\omega}_e = \frac{1}{J} \left\{ \frac{3}{2} p [\Psi_f + (L_d - L_q) i_{sd}] i_{sq} - T_L \right\} \quad (2.14)$$

T_L - zátěžový moment

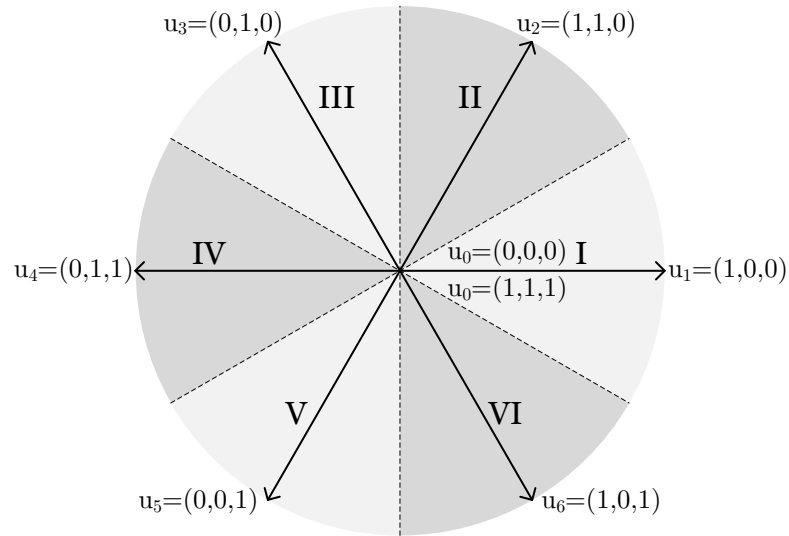
2.2 Metody řízení elektrických pohonů

Tato kapitola popisuje dva často používané principy řízení střídavých elektrických motorů založené na metodě řízení elektromagnetického momentu. Jedná se o metodu přímého řízení momentu a o metodu vektorového řízení. Princip obou těchto metod lze aplikovat jak na synchronní, tak i na asynchronní motory.

2.2.1 Přímé řízení momentu - DTC

Tato metoda řízení střídavých elektrických motorů byla vyvinuta v polovině osmdesátých let a hlavním zastáncem této metody je společnost ABB (Vas, 1998), která ji používá ve svých měničích. Přímé řízení momentu (Direct Torque Control) pracuje na principu výběru optimálního spínacího režimu invertoru za účelem dosažení požadované změny magnetického toku (spřažený magnetický tok, modul magnetického toku) a elektromagnetického momentu. Úhel mezi magnetickým tokem rotoru a statoru ovlivňuje velikost generovaného momentu, velikost magnetického toku určuje buzení rotoru. Invertor (střídač) trojfázového motoru má celkem šest aktivních spínacích režimů a dva nulové režimy, ze kterých lze vybírat pro dosažení požadovaného sektoru. Jednotlivé sektory střídače jsou zobrazeny na obrázku 2.5.

Volba režimu sepnutí probíhá podle toho, zda je potřeba zvětšit, zmenšit či zachovat aktuální hodnotu toku či momentu a podle toho, v jakém sektoru se aktuálně nachází vektor spřaženého magnetického toku statoru. Velikosti a směry vektorů toku a momentu nejsou přímo měřitelné. Z tohoto důvodu DTC metoda řízení vyžaduje estimaci některých veličin. Závislost spínacích režimů na sektorech a požadovaných změnách je popsána v tabulce 2.1.

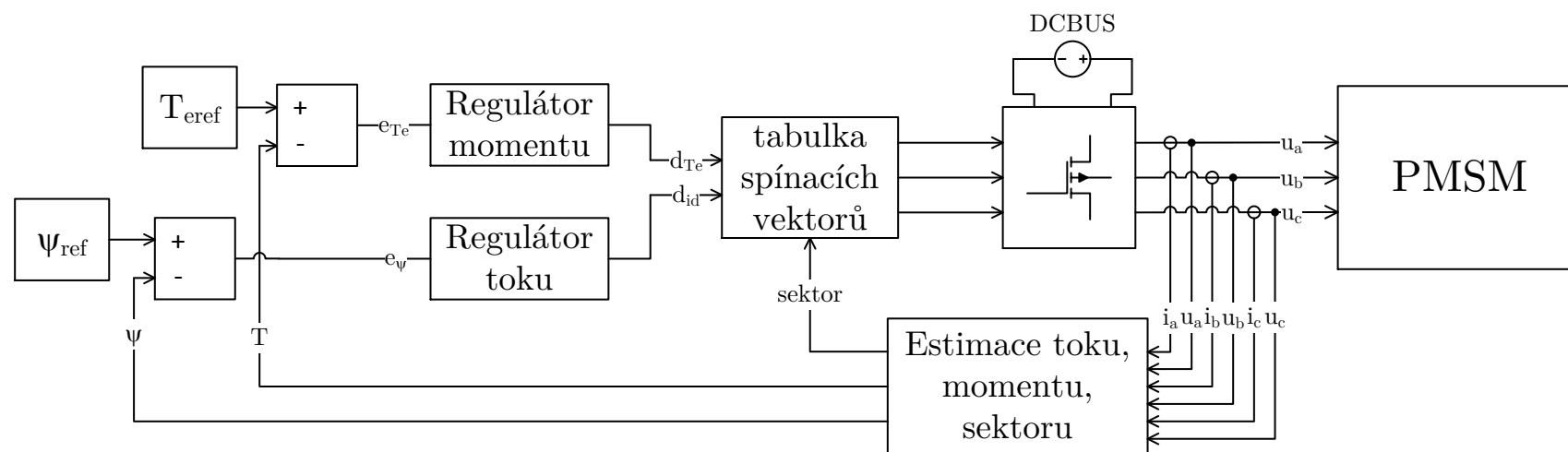


Obr. 2.5: Spínací režimy invertoru a vyznačení sektorů pro DTC řízení

Tab. 2.1: Tabulka spínacích režimů

d_{id}	d_{Te}	I	II	III	IV	V	VI
1	1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_1
	-1	u_6	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
-1	1	u_3	u_4	u_5	u_6	u_1	u_2
	-1	u_5	u_6	u_1	u_2	u_3	u_4

Diagram řízení synchronního motoru DTC metodou je uveden na obrázku 2.6. Referenční hodnoty momentu a toku jsou porovnávány s veličinami estimovanými z naměřených proudů a napětí. Regulátory na základě vyhodnocení odchylky referenčních a estimovaných veličin rozhodnou o tom, jestli je pro dosažení požadovaných hodnot vhodné moment a tok zvětšit či zmenšit. Podle aktuálního sektoru a požadovaných změn toku a momentu je z tabulky vybrán vektor napětí, který danou změnu zajistí.

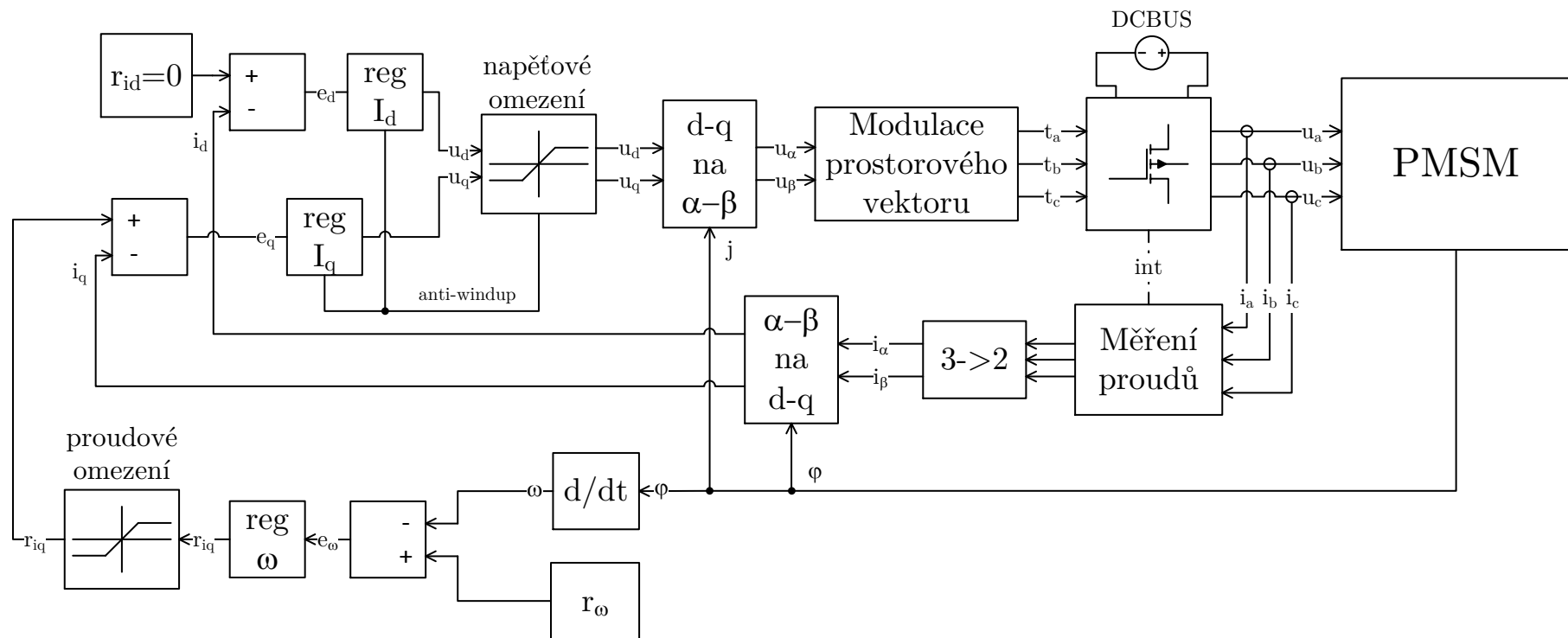


Obr. 2.6: Diagram přímého řízení momentu synchronního motoru

2.2.2 Vektorové řízení

V principu je vektorové řízení odvozeno od řízení stejnosměrného motoru s cizím buzením. Elektromagnetický moment stejnosměrného motoru je přímo úměrný součinu dvou veličin tvořících navzájem ortogonální osy. Jednou z veličin je tokotvorný elektrický proud, druhou veličinou je momentotvorný proud. V případě stejnosměrného motoru s cizím buzením se jedná o dvě nezávislé, fyzicky oddělené veličiny. Regulace momentu se obvykle provádí změnou momentotvorné složky při konstantní velikosti tokotvorné složky. U střídavých motorů je situace velice podobná. Statorové veličiny střídavých motorů se po aplikování Parkovy transformace (rovnice (2.3)) jeví jako stejnosměrné veličiny a lze tak opět měnit samostatně tokotvornou a momentotvornou složku proudu. Tato analogie se stejnosměrným motorem platí i pro vícefázové střídavé motory. Za předpokladu, že jsou všechna vinutí symetrická, lze použít Clarkové transformaci (rovnice 2.1) a převést tak vícefázové veličiny na dvoufázové. Podrobnější popis těchto transformací je uveden v sekci 2.1.1.

Regulace rychlosti rotoru (či momentu) nejčastěji probíhá kaskádně s vnitřní zpětnovazební smyčkou zajišťující požadovanou hodnotu proudu a vnější smyčkou pro řízení rychlosti a velikosti magnetického toku rotoru. Při požadavku na nulové ustálené hodnoty řízených veličin je nutné použít regulátory s integrační složkou. V případě robustních (stavových) regulátorů lze provést návrh na soustavu rozšířenou o integrační složku a posléze do regulátoru přidat pól aproximující tuto integrační složku. Diagram vektorového řízení se všemi podpůrnými bloky (transformace, PWM, omezení) je zobrazen na obrázku 2.7.

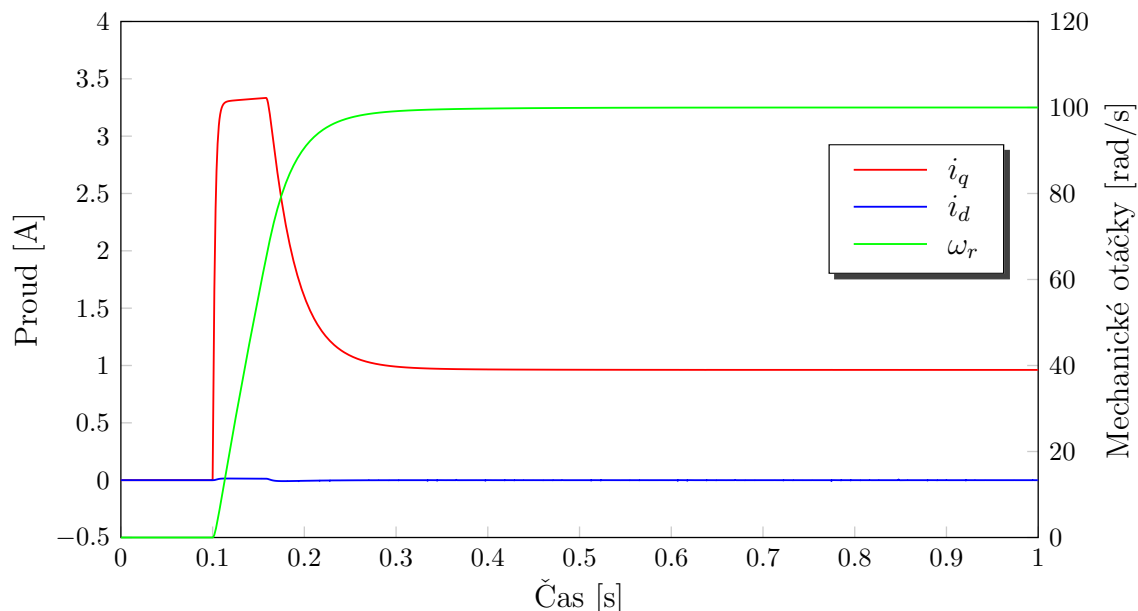


Obr. 2.7: Diagram vektorového řízení rychlosti synchronního motoru

Rozdíl mezi požadovanou a reálnou hodnotou otáček vstupuje do otáčkového regulátoru vnější smyčky. Akční zásah generovaný otáčkovým regulátorem je zároveň referenční hodnotou q složky proudu. V případě, že se jedná o reálnou aplikaci, tak je žádoucí maximální hodnotu proudu omezit. V případě synchronního motoru s permanentními magnety je referenční hodnota d složky proudu nulová. Reálné hodnoty proudů obou složek jsou získány transformacemi měřených třífázových proudů a po porovnání s referenčními hodnotami jsou přivedeny do proudových regulátorů. Akčním zásahem proudových regulátorů jsou satorová napětí v $d - q$ souřadnicích. Po omezení složek napětí (omezení v modulu) je pomocí $\alpha - \beta$ transformace a modulace prostorového vektoru vybrán vhodný vektor třífázového napětí.

2.2.3 Simulace vektorového řízení

Realizace modelů synchronních a asynchronních motorů byla provedena v prostředí Matlab Simulink s použitím základních Simulink bloků. Novější verze programu Matlab jsou vybaveny knihovnou SimPowerSystems. Tato knihovna používá bloky Simscape pro sestavení modelů točivých elektrických strojů. Interakce veličin v prostředí Simscape s prostředím Simulink je provedena pomocí specializovaných bloků, které tyto různé reprezentace reálných veličin přepočítávají tak, aby je bylo možné zobrazit či ovládat bloky z běžných knihoven Simulink. Modely synchronních a asynchronních motorů uvedené v této sekci byly vytvořeny ve starší verzi matlabu bez použití SimPowerSystems či Simscape.



Obr. 2.8: Odezva d-q proudů na skokovou změnu otáček

Obrázek 2.8 ukazuje běžný průběh otáček a proudu vektorového řízení. Průběhy vektorového řízení asynchronního motoru by lišily pouze nenulovou hodnotou d složky proudu, který zajišťuje buzení rotorového vinutí motoru. Krátce po změně žádané hodnoty otáček začne téct statorovým vinutím motoru maximální hodnota proudu. Tato hodnota je udržována až do okamžiku, kdy se regulační odchylka sníží na hodnotu kterou proudové regulátory vyhodnotí jako dostatečně malou a sníží hodnotu akčního zásahu. Tvar přechodného děje regulace otáček a proudů jsou značně závislé na parametrech regulátoru a soustavy. Změna těchto parametrů může vyvolat nežádoucí překmit či dokonce nestabilitu regulační smyčky. Cílem robustní regulace motoru je zmenšit vliv těchto změn na stabilitu a kvalitu regulace.

3 TEORIE ROBUSTNÍHO ŘÍZENÍ

3.1 Matematické nástroje

Tato kapitola je zaměřena na matematické nástroje sloužící k analýze vlastností dynamických systémů a k syntéze robustních regulátorů. První část této kapitoly se zabývá normami signálů a systémů. Druhá část je zaměřena na analýzu dynamických vlastností systémů. V závěrečné části jsou představeny matematické nástroje pro práci s lineárními maticovými nerovnostmi (LMI). Použití lineárních maticových nerovností v řízení je předvedeno na stabilitě autonomních a regulovaných systémů.

3.1.1 Normy

Normy signálů (vektorů) a systémů slouží především k posouzení vlastností sledovaných signálů z hlediska jejich velikostí. V případě normy systémů se jedná o velikost vstupně-výstupních signálů sledovaného systému. Důležitost norem v teorii robustního řízení spočívá v možnosti posoudit vlastnosti dynamického systému (kvalita regulace, stabilita, ...) z hlediska vstupně-výstupních signálů (Mackenroth, 2004; Zhou et al., 1996).

Vektorové a signálové normy

Norma vektoru $\|\mathbf{x}\|$, kde $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ je funkce splňující následující podmínky pro $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:

- i) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ - norma je vždy kladné číslo
- ii) $\|\mathbf{x}\| = 0 \leftrightarrow \mathbf{x} = 0$ - norma nulového vektoru je rovna nule
- iii) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$ - norma je homogenní funkce
- iv) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ - norma splňuje trojúhelníkovou nerovnost

V praxi rozeznáváme tři druhy norem - integrální (1-norma), mocninou (2-norma) a nekonečnou (∞).

1 - Norma je definována jako součet absolutních hodnot jednotlivých prvků vektoru:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$$

2 - Norma je definována jako druhá odmocnina součtu kvadrátů jednotlivých prvků vektoru:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

∞ - Norma je definována jako supremum absolutní hodnoty ze všech prvků vektoru:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

Obdobně lze aplikovat normy na vektorové funkce popisující nějaký obecný signál:

1 - Norma:

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n |f_i(t)| \right) dt$$

2 - Norma:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n |f_i(t)|^2 \right) dt}$$

∞ - Norma:

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} (\max_{1 \leq i \leq n} |f_i(t)|)$$

Normy funkcí, které jsou Lebesgue integrovatelné: $\|f\|_p < \infty$ (2-norma, ∞ -norma) jsou často označovány písmenem $\mathcal{L}$.

Maticové a systémové normy

Na matice ($A \in \mathbb{R}^{m \times n}$) lze nahlížet podobně jako na vektory. Některé maticové normy lze tedy odvodit přímo z vektorových norem:

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

Příkladem maticových norem odvozených z norem vektorových mohou být například 2 a ∞ normy:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Příkladem maticové normy, která není odvozená z vektorové normy, je Frobeniova norma:

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{trace}(A^T A)}$$

Norma systému udává informaci o velikosti výstupního signálu systému při znalosti signálu vstupního. Velikosti vstupních a výstupních signálů jsou dány normami signálů. Normy systémů tedy vycházejí z norem signálů.

$\mathcal{H}_2$ - Norma systému v časové oblasti a v Laplaceově transformaci:

$$\|g\|_2 = \sqrt{\int_0^\infty \text{trace}[g(t)^T g(t)] dt}, \text{ kde } g(t) = Ce^{At}B$$

$$\|G(s)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \text{trace}[G(j\omega)^T G(j\omega)] d\omega}$$

$\mathcal{H}_\infty$ - Norma systému pomocí normy signálů:

$$\|G\|_\infty = \sup_{(u \neq 0) \in \mathcal{L}} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2}$$

Nebo také:

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}[G(j\omega)]$$

3.1.2 Nástroje pro práci s LMI

Lineární maticová nerovnost (LMI¹) je nerovnost následujícího tvaru:

$$F(\mathbf{x}) > 0$$

$$F(\mathbf{x}) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i$$

Kde:

- $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jsou zadané symetrické matice
- $\mathbf{x}_i = (x_1 \dots x_m)^T \in \mathbb{R}^m$ je vektor m proměnných

Znaménko nerovnosti znamená, že se jedná o striktní LMI. V tomto případě představuje znaménko pozitivní definitnost ($\mathbf{u}^T F \mathbf{u} > 0 \forall \mathbf{u} \neq 0 \in \mathbb{R}^n$). LMI definují konvexní množinu a lze je tak řešit konvexní optimalizací. Konvexní množina je množina, ve které lze dva libovolné body této množiny spojit úsečkou, přičemž

¹LMI - Linear Matrix Inequality

všechny body úsečky musí ležet uvnitř této množiny. V praxi to znamená, že pokud je tato množina tvořena výstupními hodnotami optimalizačního kritéria (například kvadrát odchylek), tak je možné volbou správného kroku nalézt globální minimum této kritériální funkce. Velké množství optimalizačních úloh lze vyjádřit pomocí LMI a zjistit tak buď optimální řešení úlohy, nebo jen řešitelnost úlohy (existenci řešení). Úlohu konvexní optimalizace lze definovat následovně:

$$\begin{aligned} &\text{minimalizovat } f_0(x) \\ &\text{kritériem } f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Kde $f_0, \dots, f_m$ jsou obecné konvexní funkce

Schurův doplněk

Schurův doplněk je důležitý nástroj pro zmenšení výpočetní náročnosti řešení daného optimalizačního problému popsaného pomocí dvojice nelineárních nerovností. Nelineární soustavu maticových nerovností určitého tvaru lze pomocí Schurova doplněku převést na lineární. Pokud uvažujeme lineární soustavu nerovností (LMI) následujícího tvaru:

$$\begin{bmatrix} P & M \\ M^T & Q \end{bmatrix} > 0 \quad (3.1)$$

Kde P a Q jsou regulární symetrické matice. Schurův doplněk matice P bude mít tvar:

$$Q - M^T P^{-1} M \quad (3.2)$$

Vznikne tak nelineární soustava nerovností:

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q - M^T P^{-1} M \end{bmatrix} > 0 \quad (3.3)$$

Obdobně doplněk matice Q má tvar:

$$P - M Q^{-1} M^T \quad (3.4)$$

Vede na soustavu nelineárních nerovností:

$$\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & P - M Q^{-1} M^T \end{bmatrix} > 0 \quad (3.5)$$

Z tohoto postupu je zřejmé, že nelineární soustavy (3.3) a (3.5) lze obráceným způsobem převést na LMI (3.1). Schurův doplněk je možné vypočítat pomocí rozkladu $B = D^T L^T B L D$. Aby tato rovnost platila, musí být součiny $D^T L^T$ a $D L$ rovny jednotkové matici. Nerovnosti (3.3) lze získat následujícím postupem:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} I & P^{-1}M \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & -P^{-1}M \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & M \\ M^T & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -P^{-1}M \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & P^{-1}M \\ 0 & I \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} I & P^{-1}M \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & -P^{-1}M \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & -P^{-1}PM + M \\ M^T & Q - M^T P^{-1}M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & P^{-1}M \\ 0 & I \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} I & P^{-1}M \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P & 0 \\ -M^T P^{-1}P + M^T & Q - M^T P^{-1}M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & P^{-1}M \\ 0 & I \end{bmatrix} \\
& D^T \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q - M^T P^{-1}M \end{bmatrix} D
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Definitnost (pozitivní, negativní) celého kvadratického výrazu závisí na definitnosti prostředního členu, tím také na definitnosti submatice P a Schurova doplnku matice P . Tento druh rozkladu má kromě LMI mnohé další využití. Používá se například pro řešení soustav rovnic blokovou eliminací, pro nalezení pseudo inverze matice, pro výpočet Schurova determinantu:

$$\det \begin{pmatrix} P & M \\ M^T & Q \end{pmatrix} = \det(P) \det(S)$$

a pro výpočet řádu matice:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} P & M \\ M^T & Q \end{pmatrix} = \text{rank}(P) + \text{rank}(S)$$

Eliminace maticových proměnných

V jedné z následujících kapitol vede syntéza regulátoru na LMI tvaru nerovnosti (3.7).

$$\Psi + P^T K^T Q + Q^T K P < 0 \tag{3.7}$$

Ψ - symetrická matice $m \times m$

K - eliminovaná maticová proměnná

P, Q - matice sloupcové dimenze m

Cílem této podkapitoly je ukázat, že existence řešení této LMI za určitých podmínek závisí pouze na proměnné Ψ a na bázích lineárního zobrazení matic P , Q . LMI tvaru (3.7) má řešení¹ pouze tehdy, když mají řešení LMI (3.8) a (3.9).

$$W_P^T \Psi W_P < 0 \quad (3.8)$$

$$W_Q^T \Psi W_Q < 0 \quad (3.9)$$

W_P a W_Q jsou jádra lineárního zobrazení matic P a Q ($Ker(P), Ker(Q)$). Postup jak se dostat k tomuto výsledku je následující. Výraz (3.7) je možné z obou stran vynásobit regulární maticí S^T a S aniž by došlo ke změně definitnosti.

$$S^T \Psi S + (PS)^T K^T (QS) + (QS)^T K (PS) < 0 \quad (3.10)$$

- $S = [S_1, S_2, S_3, S_4]$
- S_1 je jádrem lineárního zobrazení matic P a Q ($Ker(P) \cup Ker(Q)$)
- S_2 je jádrem lineárního zobrazení matice P
- S_3 je jádrem lineárního zobrazení matice Q
- S_4 není jádrem lineárního zobrazení ani P ani Q

Součiny $(PS)^T K^T (QS)$ a $(QS)^T K (PS)$ tak budou mít v místech součinů matice s její bází nulové řádky (sloupce).

$$\begin{aligned} (PS)^T K^T (QS) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ S_3^T P^T \\ S_4^T P^T \end{bmatrix} K^T \begin{bmatrix} 0 & QS_2 & 0 & QS_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_3^T P^T K^T QS_2 & 0 & S_3^T P^T K^T QS_4 \\ 0 & S_4^T P^T K^T QS_2 & 0 & S_4^T P^T K^T QS_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{11} & 0 & K_{12} \\ 0 & K_{12}^T & 0 & K_{22} \end{bmatrix} \\ (QS)^T K (PS) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{11}^T & K_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{12}^T & K_{22}^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

¹Existenci řešení této LMI se myslí existence maticových proměnných, pro které je výraz negativně definitní

Součin $S^T \Psi S$ je roven:

$$S^T \Psi S = \begin{bmatrix} S_1^T \Psi S_1 & S_1^T \Psi S_2 & S_1^T \Psi S_3 & S_1^T \Psi S_4 \\ S_2^T \Psi S_1 & S_2^T \Psi S_2 & S_2^T \Psi S_3 & S_2^T \Psi S_4 \\ S_3^T \Psi S_1 & S_3^T \Psi S_2 & S_3^T \Psi S_3 & S_3^T \Psi S_4 \\ S_4^T \Psi S_1 & S_4^T \Psi S_2 & S_4^T \Psi S_3 & S_4^T \Psi S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} & \Psi_{14} \\ \Psi_{12}^T & \Psi_{22} & \Psi_{23} & \Psi_{24} \\ \Psi_{13}^T & \Psi_{23}^T & \Psi_{33} & \Psi_{34} \\ \Psi_{14}^T & \Psi_{24}^T & \Psi_{34}^T & \Psi_{44} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Po roznásobení a posčítání nerovnosti (3.10) je výsledná nerovnost tvaru:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} & \Psi_{14} \\ \Psi_{12}^T & \Psi_{22} & \Psi_{23} + K_{11}^T & \Psi_{24} + K_{12} \\ \Psi_{13}^T & \Psi_{23}^T + K_{11} & \Psi_{33} & \Psi_{34} + K_{12} \\ \hline \Psi_{14}^T & \Psi_{24}^T + K_{12}^T & \Psi_{34}^T + K_{12}^T & \Psi_{44} + K_{22}^T + K_{22} \end{array} \right] < 0 \quad (3.12)$$

Rozdělení matice v nerovnosti (3.12) odpovídá rozdělení matice pro výpočet Schurova doplňku (3.1). Z důvodu konfliktu značení bude submatice P ze sekce o Schurovu doplňku značena Π . Použitím Schurova doplňku submatice Π dostaneme ekvivalentní zápis nerovnosti (3.12).

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ \Psi_{12}^T & \Psi_{22} & \Psi_{23} + K_{11}^T \\ \Psi_{13}^T & \Psi_{23}^T + K_{11} & \Psi_{33} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.13)$$

$$\Psi_{44} + K_{22}^T + K_{22} - \begin{bmatrix} \Psi_{14} \\ \Psi_{24} + K_{12} \\ \Psi_{34} + K_{12} \end{bmatrix}^T \Pi^{-1} \begin{bmatrix} \Psi_{14} \\ \Psi_{24} + K_{12} \\ \Psi_{34} + K_{12} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.14)$$

Pro LMI (3.14) platí, že pro libovolné K_{12}^T a K_{12} lze vždy najít K_{22} takové, aby byla tato LMI negativně definitní (důkaz v Weiland – Scherer (2000)). Z toho plyne, že LMI (3.7) má řešení pouze tehdy, když existuje řešení LMI (3.13), které se v inverzi vyskytuje i v LMI (3.14). Řešení definitnosti Π je možné dále upravit rozkladem na Schurův doplněk submatice Ψ_{11} . Rozklad vede na dvě LMI:

$$\Psi_{11} < 0 \quad (3.15)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{22} & \Psi_{23} + K_{11}^T \\ \Psi_{23}^T + K_{11} & \Psi_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Psi_{12}^T \\ \Psi_{13}^T \end{bmatrix} \Psi_{11}^{-1} \begin{bmatrix} \Psi_{12} & \Psi_{13} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.16)$$

Po úpravách má nerovnost (3.16) tvar:

$$\begin{bmatrix} \Psi_{22} - \Psi_{12}^T \Psi_{11}^{-1} \Psi_{12} & K_{11}^T + \Psi_{23} - \Psi_{12}^T \Psi_{11}^{-1} \Psi_{13} \\ K_{11} + \Psi_{23}^T - \Psi_{13}^T \Psi_{11}^{-1} \Psi_{12} & \Psi_{33} - \Psi_{13}^T \Psi_{11}^{-1} \Psi_{13} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.17)$$

Pokud bude K_{11} zvoleno tvaru $K_{11} = \Psi_{13}^T \Psi_{11}^{-1} - \Psi_{23}^T$, tak bude existovat řešení LMI (3.7) jen tehdy, když bude existovat řešení nerovností (3.18), (3.19) a (3.20).

$$\Psi_{11} < 0 \quad (3.18)$$

$$\Psi_{22} - \Psi_{12}^T \Psi_{11}^{-1} \Psi_{12} < 0 \quad (3.19)$$

$$\Psi_{33} - \Psi_{13}^T \Psi_{11}^{-1} \Psi_{13} < 0 \quad (3.20)$$

Páry tvořené nerovnostmi (3.18), (3.19) a (3.18), (3.20) jsou Schurovým doplňkem Ψ_{11} a jejich původní tvar tvoří dvojici LMI (3.21), (3.22):

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{12}^T & \Psi_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.21)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{13} \\ \Psi_{13}^T & \Psi_{33} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.22)$$

Matice Ψ_{ii} jsou výsledkem součinu $S^T \Psi S$ (3.11). Rozložením Ψ_{ii} na jednotlivé činitele lze dále LMI (3.21), (3.22) upravit na:

$$\begin{bmatrix} S_1^T \Psi S_1 & S_1^T \Psi S_2 \\ S_2^T \Psi S_1 & S_2^T \Psi S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^T \\ S_2^T \end{bmatrix} \Psi \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\begin{bmatrix} S_1^T \Psi S_1 & S_1^T \Psi S_3 \\ S_3^T \Psi S_1 & S_3^T \Psi S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^T \\ S_3^T \end{bmatrix} \Psi \begin{bmatrix} S_1 & S_3 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$(S_1 S_2) = W_P$ jsou bázemi lineárního zobrazení matice P a $(S_1 S_3) = W_Q$ jsou bázemi lineárního zobrazení matice Q . Výsledkem jsou nerovnosti shodné s (3.8) a (3.9):

$$W_P^T \Psi W_P < 0$$

$$W_Q^T \Psi W_Q < 0$$

Volbou K_{11} tvaru $K_{11} = \Psi_{13}^T \Psi_{11}^{-1} - \Psi_{23}^T$ je otázka řešitelnosti LMI (3.7) ekvivalentní s řešitelností dvojice LMI (3.8) a (3.9). Tato ekvivalence je velice důležitá při syntéze regulátoru pomocí LMI (např. pomocí BRL - sekce 3.3.3), protože umožňuje zjistit řešitelnost úlohy s neznámým regulátorem daného tvaru. Konkrétní hodnotu regulátoru lze zpětně vypočítat ze znalosti řešení Ψ .

3.2 Vlastnosti zpětnovazebních obvodů

Tato kapitola krátce popisuje vlastnosti zpětnovazebních obvodů jako jsou například stabilita, robustnost a kvalita regulace. S těmito pojmy úzce souvisí průběhy citlivostní a komplementární citlivostní funkce, na které je v dalších kapitolách odkazováno.

3.2.1 Stabilita systémů

Autonomní systémy

Lineární autonomní systém lze popsat následující soustavou diferenciálních rovnic:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \quad (3.25)$$

Tento způsob zápisu je označován jako stavový popis systému. Písmeno $\mathbf{x}$ označuje vektor stavových proměnných a matice A je maticí zpětných vazeb. Lineární autonomní systém (3.25) je stabilní a zároveň disipativní, pokud je celková energie systému klesající. Jedním ze způsobů jak ověřit stabilitu systémů je pokusit se nalézt vhodnou Lyapunovu funkci. Lyapunova funkce $V(\mathbf{x})$ se volí tak, aby určitým způsobem vyjadřovala vnitřní energii systému, proto také bývá v anglické literatuře nazývána storage function. Energie systému by měla být kladná. Z toho plyne, že Lyapunova funkce by měla být pozitivně definitní. Pokud chceme aby byl systém stabilní, musí energie systému s časem klesat - derivace Lyapunovy funkce musí být negativně definitní či semidefinitní. Tyto dvě kritéria lze shrnout do následujících podmínek:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &> 0 \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &\leq 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Kde nerovnítko označuje pozitivní (negativní) definitnost.

Řízené systémy

Obecný stavový popis lineárního řízeného systému má oproti autonomnímu systému vstupní a výstupní veličiny a matice definující vazby mezi těmito veličinami a stavy.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Rovnice v tomto tvaru bývá nazývána stavovým popisem lineárního dynamického systému, kterému odpovídá operátorový přenos $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$, se systémovými maticemi (A, B, C, D) , sloupcovými vektory vstupů $\mathbf{u}$ a výstupů $\mathbf{y}$.

Při vyšetřování stability řízeného systému je nutné počítat se vstupními a výstupními signály. Pro popis vlastností vnějších signálů se používá funkce vstupně-výstupních proměnných $s(\mathbf{u}, \mathbf{y})$ (supply function). Typické tvary funkcí vstupně-výstupních proměnných:

$$\begin{aligned} s(\mathbf{u}, \mathbf{y}) &= \mathbf{u}^T \mathbf{y}, \\ s(\mathbf{u}, \mathbf{y}) &= \|\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2, \\ s(\mathbf{u}, \mathbf{y}) &= \|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2, \\ s(\mathbf{u}, \mathbf{y}) &= \|\mathbf{y}\|^2 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Hledaná Lyapunova funkce vyjadřuje celkovou vnitřní energii systému (storage function). Řízený systém je stabilní, pokud je vnitřní energie systému menší nebo rovna energii do systému dodané. Této podmínce stability odpovídá následující rovnost:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &\leq V(\mathbf{x}_0) + \int_0^\infty s(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &\leq s(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \end{aligned} \tag{3.29}$$

Tato podmínka stability řízeného systému je kombinací vnitřní stability (Lyapunov stability) a BIBO¹ stability.

3.2.2 Struktura a vlastnosti zpětnovazebních systémů

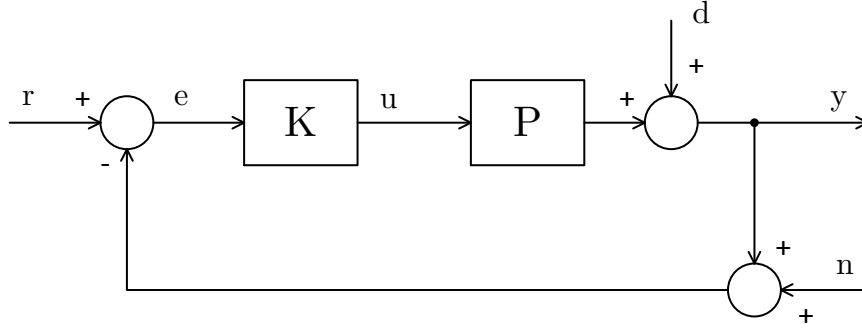
Nejčastěji používaná zpětnovazební struktura s regulátorem a soustavou je zobrazena na obrázku 3.1. Do regulačního obvodu vstupují celkem tři druhy poruch: porucha na vstupu soustavy, porucha na výstupu soustavy d a šum n (Zhou et al., 1996).

Pro formulaci zpětnovazebního systému se v robustním řízení převážně používá zobecněný tvar regulačního obvodu znázorněný na obrázku 3.2. Soustava P zde mapuje vnější vstupy $\mathbf{w}$ a řídicí signály $\mathbf{u}$ na vnější výstupy $\mathbf{z}$ a měřené výstupy $\mathbf{y}$. Výsledný přenos tohoto zapojení lze zjistit pomocí dolní lineární zlomkové transformace (Skogestad – Postlethwaite, 2005):

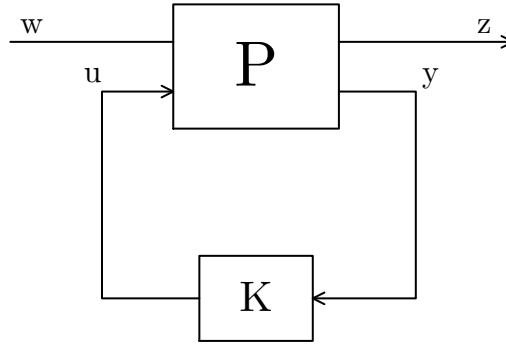
$$N = T_{zw} = F_l(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}$$

Obecnou strukturou je možné popsat velké množství různých zpětnovazebních zapojení. Jednou z typických úloh robustního řízení je minimalizace $\mathcal{H}_\infty$ normy ze vstupů $\mathbf{w}$ na výstupy $\mathbf{z}$ ($\min \|F_l(P, K)\|_\infty$). Obrázek 3.3 demonstruje vnitřní zapojení soustavy P pro zpětnovazební zapojení regulačního obvodu s jedním stupněm volnosti z obrázku 3.1 (Skogestad – Postlethwaite, 2005).

¹BIBO - bounded input bounded output, systém je BIBO stabilní právě když odezva na každý omezený vstupní signál je také omezená



Obr. 3.1: Standardní zpětnovazební zapojení s regulátorem s jedním stupněm volnosti

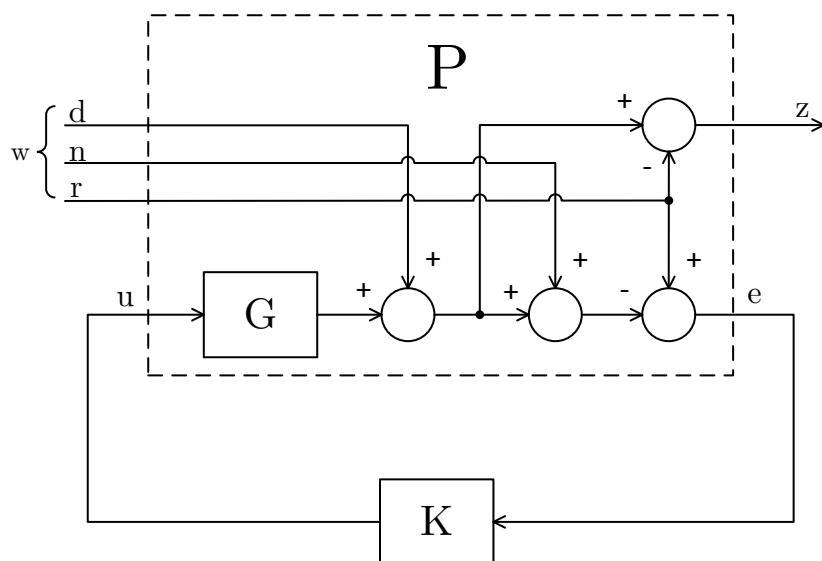


Obr. 3.2: Obecná struktura regulačního obvodu

Dalšími důležitými pojmy teorie robustního řízení jsou citlivostní funkce S a komplementární citlivostní funkce T . Citlivostní funkce $S = (I + L)^{-1}$; $L = PK$ představuje přenos od výstupu soustavy na výstup z regulačního obvodu. Komplementární funkce $T = I - S = L(I + L)^{-1}$ je přenos ze vstupu regulačního obvodu (žádané hodnoty) na výstup z regulačního obvodu. Tyto dvě funkce na sobě závisí rovností $S + T = I$. Důležitost těchto dvou funkcí je patrná z výpočtu regulační odchylky $e = y - r$ (Skogestad – Postlethwaite, 2005):

$$e = - \underbrace{(I + L)^{-1}}_S r + \underbrace{(I + L)^{-1} G_d}_S d - \underbrace{(I + L)^{-1} L}_T n$$

Kde G_d vyjadřuje model poruchy d působící na výstupu ze soustavy, r je žádaná hodnota a n je šum vstupující do zpětné vazby regulačního obvodu s jedním stup-



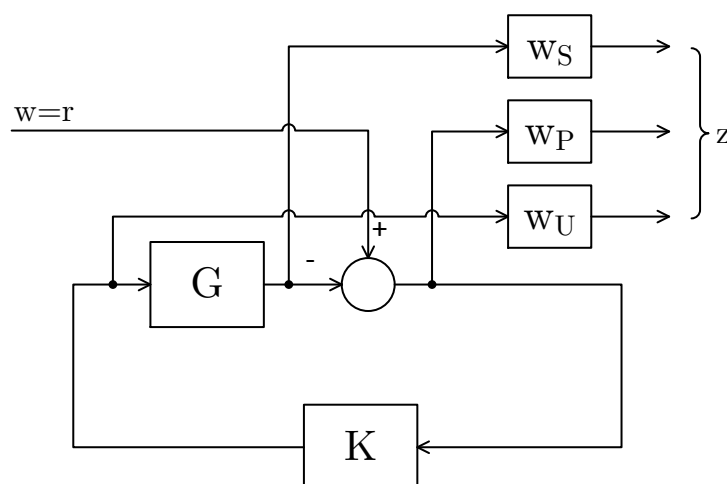
Obr. 3.3: Ekvivalentní zapojení regulačního obvodu s jedním stupněm volnosti (s chybovým výstupem $z = y - r$)

něm volnosti. Vzhledem k tomu, jaký mají citlivostní a komplementární citlivostní funkce vliv na výpočet regulační odchylky, je jejich volba kompromisem mezi dvěma protichůdnými požadavky - potlačení poruchy vstupující do zpětné vazby (n) a zároveň rychlost sledování požadované hodnoty (r). Pro definování tvarů jednotlivých funkcí se při syntéze regulátorů výstupy z těchto klíčových bodů regulačního obvodu váhují funkcemi, které zajistí požadovanou robustnost ($w_S T$), kvalitu regulace ($w_P S$) a případně omezení akčního zásahu ($w_U K S$). Řešení kombinace těchto požadavků bývá nazývána smíšeným $\mathcal{H}_\infty$ optimalizačním problémem (rovnice 3.30, obr. 3.4) (Skogestad – Postlethwaite, 2005).

$$\min_K \left\| \begin{bmatrix} w_U K S \\ w_S T \\ w_P S \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (3.30)$$

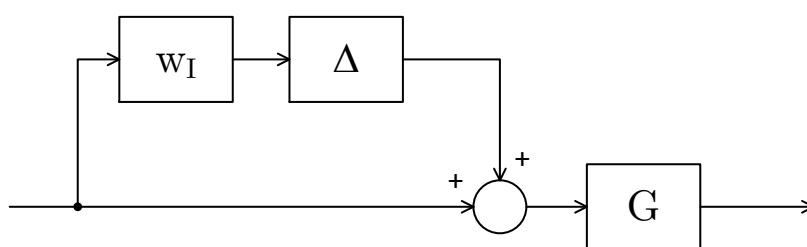
Robustní stabilita

Zpětnovazební systém s nominální soustavou je podle Nyquistova kritéria stabilní, pokud frekvenční charakteristika otevřeného obvodu v komplexní rovině obíhá s rostoucí frekvencí bod -1 v kladném směru tolikrát, kolik má otevřená smyčka nestabilních pólů. Teorie robustního řízení považuje regulační obvod za robustní, pokud není ovlivněn rozdílem mezi skutečnou soustavou a modelem, na který byl regulační



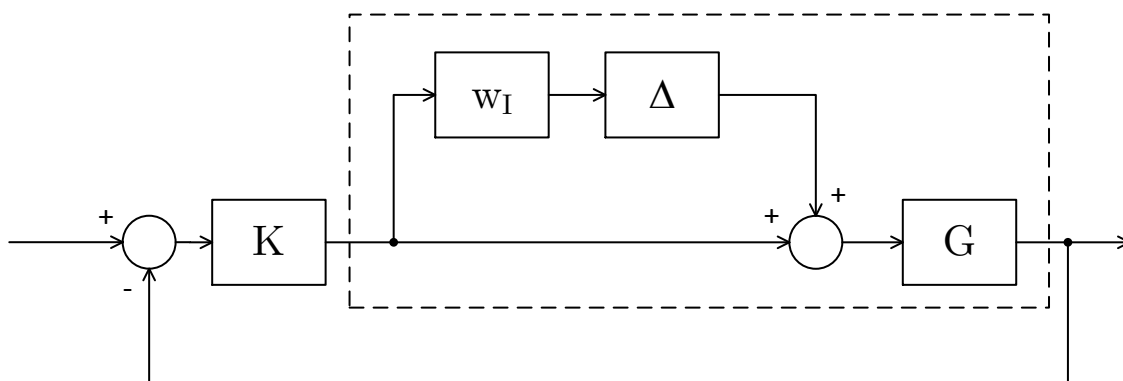
Obr. 3.4: Zapojení pro smíšený $\mathcal{H}_\infty$ optimalizační problém

obvod navržen (Skogestad – Postlethwaite, 2005). Pro ověření robustnosti zpětno-vazebního regulačního obvodu je důležité identifikovat všechny neurčitosti, které mohou mít nepříznivý dopad ať už na stabilitu, nebo na kvalitu regulace. Možností popisů a modelování jednotlivých typů neurčitostí je velké množství. Zde bude předveden dopad na stabilitu a kvalitu regulace pouze na jednom druhu neurčitosti a to na multiplikativní neurčitosti uvedené na obrázku 3.5. Více druhů neurčitostí a jejich dopad na regulační obvod lze najít například v knize „Multivariable feedback control“ (Skogestad – Postlethwaite, 2005).

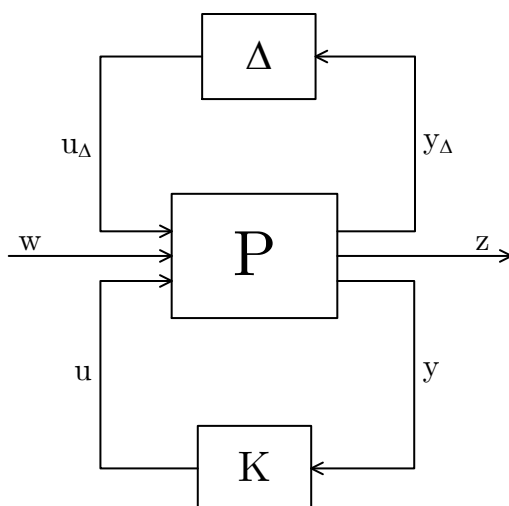


Obr. 3.5: Nominální systém s multiplikativní neurčitostí na vstupu soustavy $G_p = (I + w_I \Delta)G$

Všechny typy těchto neurčitostí lze popsat pomocí lineární zlomkové transformace, zjednoduší se tak pozdější syntéza regulátoru. Obecná struktura regulačního obvodu rozšířeného o neurčitosti je zobrazena na obrázku 3.7.



Obr. 3.6: Zpětnovazební systém s multiplikativní neurčitostí na vstupu soustavy
 $G_p = (I + w_I \Delta)G$



Obr. 3.7: Obecná struktura regulačního obvodu s neurčitostmi

V případě, že systém obsahuje více neurčitostí, je blok Δ tvořen diagonální maticí s prvky jednotlivých neurčitostí Δ_i na hlavní diagonále.

$$\Delta = \text{diag}\{\Delta_i\} = \begin{bmatrix} \Delta_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \Delta_i & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Přenos ze vstupů soustavy na výstupy lze vypočítat pomocí lineární zlomkové

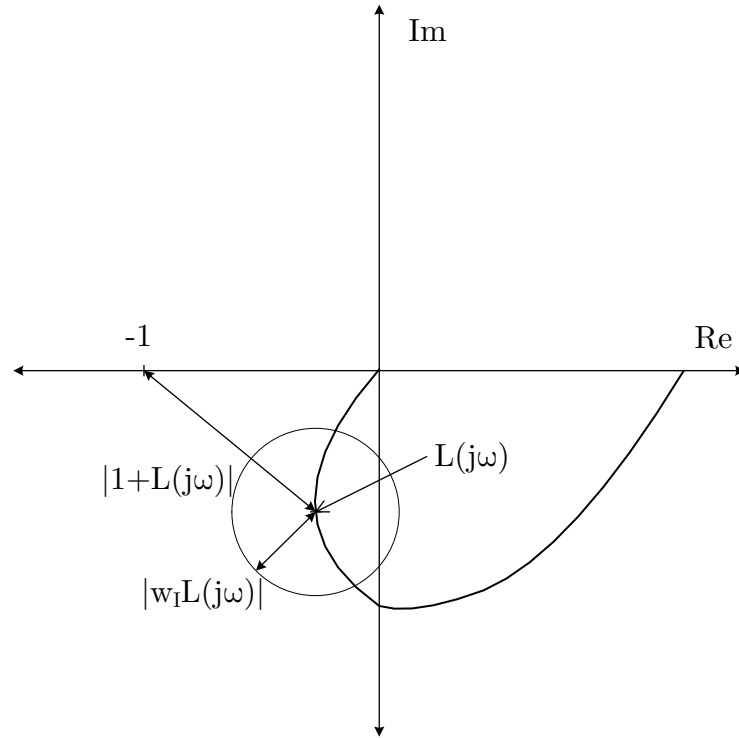
transformace. Pokud již máme obecnou strukturu s regulátorem spočítanou podle rovnice (3.30) bude transformace vypadat následovně:

$$F = F_u(N, \Delta) = N_{22} + N_{21}\Delta(I - N_{11}\Delta)^{-1}N_{12}$$

Za účelem definice robustní stability je nutné, aby blok neurčitostí Δ byl stabilní a normalizovaný následujícím způsobem:

$$\|\Delta\|_\infty \leq 1 \quad (3.31)$$

Tato podmínka není příliš omezující, většinu neurčitostí lze upravit tak, aby byly stabilní a normalizované. V Nyquistově charakteristice je zpětnovazební systém s multiplikativní neurčitostí robustně stabilní, pokud je poloměr kružnice $|w_I L|$ se středem v $L(j\omega)$ menší než vzdálenost mezi bodem $L(j\omega)$ a bodem -1 pro všechny hodnoty ω .



Obr. 3.8: Nyquistova charakteristika otevřené smyčky s neurčitostmi

$$|w_I L| < |1 + L|$$

Výsledkem roznásobení obou stran nerovnosti výrazem $|1 + L|^{-1}$ je nerovnost:

$$\left| w_I \frac{L}{1 + L} \right| < 1$$

Dosažením $T = \frac{L}{1+L}$ a použitím $\mathcal{H}_\infty$ normy se dostaneme k nerovnosti popisující podmínku robustní stability:

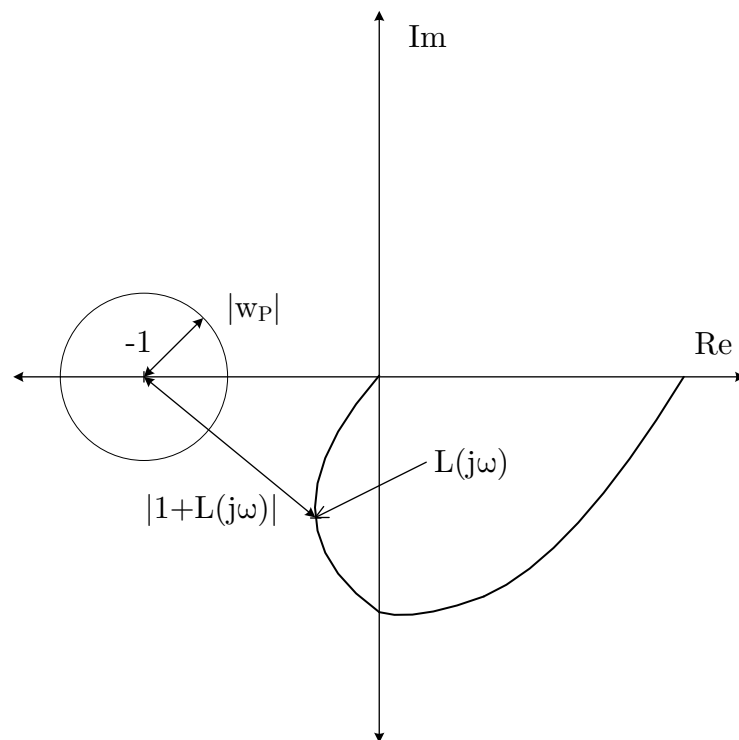
$$\begin{aligned} G_p &= (I + w_I \Delta_I)G, \\ T_p &= G_p K (1 + G_p K)^{-1}, \\ \|w_I T_p\|_\infty &< 1 \end{aligned}$$

Za povšimnutí stojí podobnost nerovnosti $\|w_I T\|_\infty < 1$ s nerovností $\|w_S T\|_\infty < 1$ (rovnice 3.30), z čehož vyplývá, že váha w_S skutečně vymezuje robustní stabilitu zpětnovazebního obvodu (stabilitu s neurčitostmi). Pokud je (3.31) splněna, je systém s neurčitostmi robustně stabilní tehdy a jen tehdy, když je norma jeho váhované komplementární citlivostní funkce menší než jedna. Obdobně lze získat definici robustní stability i pro jiné druhy neurčitostí. Robustně stabilní regulační obvod nezaručí, že bude dosaženo požadovaných vlastností regulačního děje. Splnění požadavků na vlastnosti regulačního děje pro systém zatížený neurčitostmi lze ověřit pomocí dalšího kritéria - robustní kvality regulace.

Robustní kvalita regulace

Pod pojmem kvalita regulace zpětnovazební smyčky si lze představit soubor několika různých kritérií posuzujících charakter výstupní veličiny zpětnovazebního obvodu. Kritériem u přechodové charakteristiky může být například doba náběhu, doba ustálení, velikost překmitu, činitel útlumu a velikost ustálené odchylky. Před vysvětlením robustní kvality regulace by bylo vhodné popsat jakým způsobem souvisí nominální kvalita regulace s frekvenční charakteristikou otevřené smyčky v komplexní rovině (Nyquistova charakteristika). Z Nyquistovi charakteristiky nominální otevřené smyčky regulačního obvodu (obr 3.9) lze tuto nerovnost snadno odvodit. Podmínka nominální kvality regulace bude dodržena za předpokladu, že se frekvenční charakteristika otevřené nominální smyčky nedotkne kružnice o poloměru $|w_P|$ se středem v bodě -1. Tato podmínka platí pro všechny frekvence, proto musí mít kružnice poloměr menší, než je vzdálenost mezi křivkou frekvenční charakteristiky a bodem -1.

$$|w_P| < |1 + L|$$



Obr. 3.9: Nyquistova charakteristika otevřené smyčky

Po roznásobení obou stran nerovnosti výrazem $|1 + L|^{-1}$ vznikne nerovnost:

$$|w_P S| < 1$$

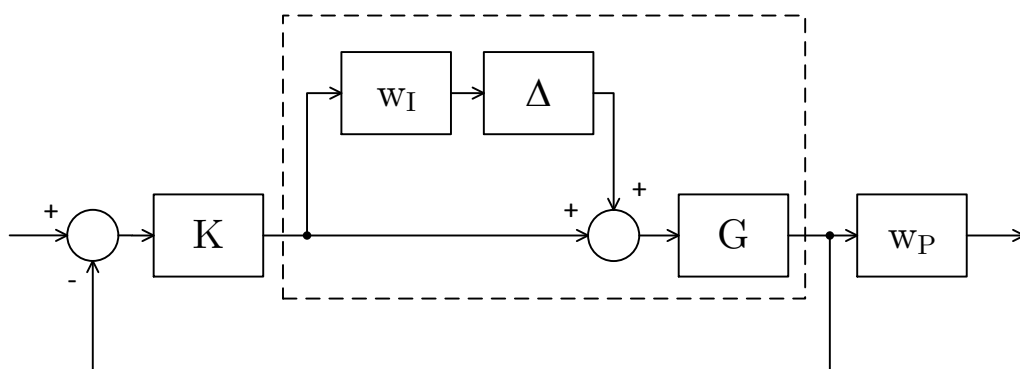
Na začátku sekce 3.2 je naznačeno, že kvalitu regulace lze ovlivnit váhovací funkcí w_P tvarující citlivostní funkci S . Pro nominální systém (obr. 3.1) platí $\mathcal{H}_\infty$ podmínka nominální kvality regulace:

$$S = (1 + GK)^{-1},$$

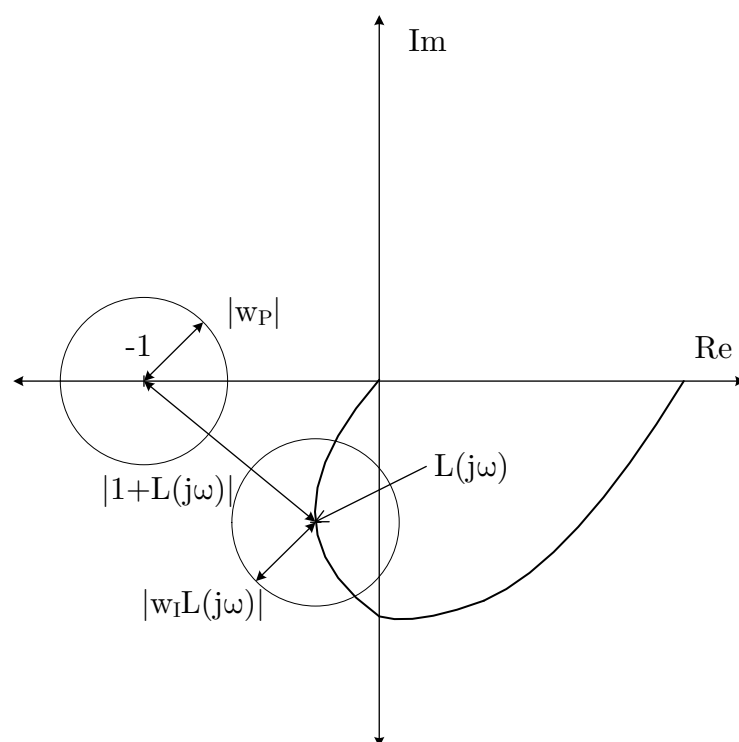
$$\|w_P S\|_\infty < 1$$

U soustavy s neurčitostmi (např. multiplikativní viz. obr.3.10) tato podmínka neplatí, protože frekvenční charakteristika otevřené smyčky již není křivka, ale plocha nakreslená kružnicí s poloměrem $|w_I|$ pohybující se po této křivce. Podmínku je nutné upravit tak, aby zahrnovala i neurčitosti v soustavě.

Zahrnutím neurčitostí soustavy vznikne Nyquistova charakteristika, ze které lze odvodit robustní kvalitu řízení (obr. 3.11).



Obr. 3.10: Zpětnovazební systém s multiplikativní neurčitostí na vstupu soustavy
 $G_p = (I + w_I \Delta)G$



Obr. 3.11: Nyquistova charakteristika otevřené smyčky s neurčitostmi

Z obrázku 3.11 je patrné, že součet poloměrů kružnic musí být menší než vzdá-

lenost mezi křivkou frekvenční charakteristiky a bodem -1:

$$|w_P| + |w_IL| < |1 + L|$$

Úpravou této nerovnosti a použitím $\mathcal{H}_\infty$ normy vznikne podmínka pro robustní kvalitu řízení zpětnovazebního smyčky s multiplikativní neurčitostí (Obrázek 3.5):

$$\|w_PS\|_\infty + \|w_IT\|_\infty < 1$$

Robustní kvalitu řízení systému lze přepsat na následující tvar:

$$\begin{aligned} G_p &= (I + w_I\Delta_I)G, \\ S_P &= (1 + G_pK)^{-1}, \\ S_P &= (1 - GL + w_IGK)^{-1}, \\ \|w_PS_P\|_\infty &< 1 \end{aligned}$$

3.3 Použití LMI v řízení

3.3.1 Stabilita autonomního systému pomocí LMI

Příkladem zjištění řešitelnosti úlohy může být ověření stability nalezením Lyapunovy funkce, která musí splňovat určitá kritéria (kapitola 3.2.1), aby mohl být systém považován za stabilní. Kandidátem na Lyapunovu funkci může být zvolena následující kvadratická forma:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x} \quad (3.32)$$

Matice P by měla být symetrická. V případě, že není symetrická ji lze symetrizovat ($P_1 = \frac{1}{2}(P + P^T)$), protože $\mathbf{x}^T P \mathbf{x} = \mathbf{x}^T P_1 \mathbf{x}$). Přínos kvadratické formy je v tom, že $V(\mathbf{x})$ je pozitivně definitní, pokud je P pozitivně definitní. Pokud se neprovádí řešení pozitivní definitnosti pomocí LMI, lze pozitivní definitnost zjistit ze znamének vlastních čísel matice P . Derivace Lyapunovy funkce se provede následovně:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P \dot{\mathbf{x}} \quad (3.33)$$

Po dosazení $\dot{\mathbf{x}}$ ze stavového popisu autonomního systému (rovnice (3.25)):

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A^T P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (A^T P + P A) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$$

$\dot{V}(\mathbf{x})$ musí být negativně definitní aby byl systém (3.25) asymptoticky stabilní. Z toho plyne, že Q musí být negativně definitní, případně $-Q$ pozitivně definitní. Stabilitu autonomního systému lze řešit jako existenci řešení soustavy dvou lineárních maticových nerovností $P > 0$ a $-A^T P - P A > 0$. Pro přehlednost se soustavy lineárních maticových nerovností zapisují maticově.

$$F_1(\mathbf{x}) > 0, \dots, F_m(\mathbf{x}) > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} F_1(\mathbf{x}) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & F_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} > 0 \quad (3.34)$$

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & -A^T P - P A \end{bmatrix} > 0 \quad (3.35)$$

Autonomní systém je stabilní, pokud existuje P splňující tuto soustavu LMI.

3.3.2 Bounded real lemma (BRL) - stabilita řízeného systému pomocí LMI

Stabilitu řízeného systému definovanou v kapitole 3.2.1 lze vhodnou volbou Lyapunovy funkce a vstupně-výstupní funkce přepsat do tvaru LMI. Stejně jako v případě

autonomního systému je pro sestavení LMI pro řízený systém vhodné zvolit kvadratický tvar Lyapunovy funkce tak jak je uveden v rovnici (3.32). Vstupně-výstupní funkci lze získat z definice BIBO stability pomocí $\mathcal{H}_\infty$ normy systému (kapitola 3.1.1, str.33). Pokud je $\mathcal{H}_\infty$ norma systému omezená, tak je i největší možné zesílení systému omezené.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{G}\|_\infty &< \gamma \\ \sup_{\|u\|_2 \neq 0} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} &\leq \gamma \end{aligned} \quad (3.36)$$

$\mathcal{L}_2$ normu signálu lze spočítat jako $\sqrt{\int_0^\infty x_i^2} = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$, druhá mocnina této normy vede na tvar $\mathbf{x}^T \mathbf{x}$ vhodný pro LMI zápis. Do tohoto tvaru lze upravit podmínku (3.36). Výsledkem těchto úprav je jeden z vhodných tvarů vstupně-výstupní funkce (rovnice (3.28)).

$$\begin{aligned} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} &< \gamma \\ \|y\|_2 &< \gamma \|u\|_2 \\ \|y\|_2^2 - \gamma^2 \|u\|_2^2 &< 0, \\ s : \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \gamma^2 \mathbf{u}^T \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Stabilita řízeného systému (kapitola 3.2.1) je po dosazení dána nerovností ve tvaru:

$$\dot{\mathbf{x}}^T P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \gamma^2 \mathbf{u}^T \mathbf{u} < 0 \quad (3.38)$$

Dosazením proměnných ze stavové rovnice (3.27) se výraz rozšíří na:

$$\mathbf{x}^T A^T P \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P A \mathbf{x} + \mathbf{x}^T C^T C \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P B \mathbf{u} + \mathbf{x}^T C^T D \mathbf{u} + \mathbf{u}^T B^T P \mathbf{x} + \mathbf{u}^T D^T C \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{u} - \gamma^2 \mathbf{u}^T \mathbf{u}$$

Nerovnici lze pak zapsat v maticovém tvaru:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + P A + C^T C & P B + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} < 0$$

Řízený systém je stabilní¹ s největším možným zesílením γ , pokud je pro $P > 0$ a $\gamma > 0$ splněna následující LMI:

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A + C^T C & P B + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.39)$$

¹V případě ostré nerovnosti asymptoticky stabilní

Pro $D = 0$ se navíc LMI zjednoduší na:

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB \\ B^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.40)$$

V literatuře se tato LMI často objevuje v jiném tvaru, který je zcela ekvivalentní. Lze k němu dospět pomocí níže uvedené úpravy. Upravený tvar totiž připomíná Schurův doplněk (3.1.2).

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^T \\ D^T \end{bmatrix} I \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} < 0 \quad (3.41)$$

Původní bloková matice je tvaru:

$$\begin{bmatrix} P & M \\ M^T & Q \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Kde

$$P = \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} C & D \end{bmatrix} Q = -I \quad (3.43)$$

Z toho plyne, že ekvivalentní (neredukovaná) LMI má tvar:

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma^2 I & D^T \\ C & D & -I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.44)$$

Oproti tvaru uvedeném v (Gahinet – Apkarian, 1994) se tato neredukovaná LMI liší druhou mocninou γ . Tuto mocninu lze odstranit násobením z obou stran výrazem:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

a použitím substituce $\hat{P} = P/\gamma$ se LMI upraví na:

$$\begin{bmatrix} A^T \hat{P} + \hat{P} A & \hat{P} B & C^T \\ B^T \hat{P} & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (3.46)$$

3.3.3 Syntéza regulátoru pomocí LMI

Spojení regulátoru a soustavy

Syntéza regulátoru pomocí LMI se provádí na soustavě následujícího tvaru:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B_w\mathbf{w}(t) + B_u\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= C_z\mathbf{x}(t) + D_{wz}\mathbf{w}(t) + D_{uz}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C_y\mathbf{x}(t) + D_{wy}\mathbf{w}(t) + D_{uy}\mathbf{u}(t)\end{aligned}\quad (3.47)$$

S neznámým regulátorem tvaru:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_k(t) &= A_k\mathbf{x}_k(t) + B_k\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= C_k\mathbf{x}_k(t) + D_k\mathbf{y}(t)\end{aligned}\quad (3.48)$$

Pro spojení regulátoru se soustavou podle obrázku 3.2 ze sekce 3.2.2 (str.42) se výstupní rovnice soustavy dosadí do výstupní rovnice regulátoru a pro zjednodušení se uvažuje $D_{uy} = 0$:

$$\mathbf{u} = C_k\mathbf{x}_k + D_kC_y\mathbf{x} + D_kD_{wy}\mathbf{w}$$

Obě výstupní rovnice se dosadí do stavových rovnic soustavy a regulátoru a rovnice výstupu z :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B_w\mathbf{w} + B_u(C_k\mathbf{x}_k + D_kC_y\mathbf{x} + D_kD_{wy}\mathbf{w}) \\ \dot{\mathbf{x}}_k &= A_k\mathbf{x}_k + B_k(C_y\mathbf{x} + D_{wy}\mathbf{w}) \\ \mathbf{z} &= C_z\mathbf{x} + D_{wz}\mathbf{w} + D_{uz}(C_k\mathbf{x}_k + D_kC_y\mathbf{x} + D_kD_{wy}\mathbf{w})\end{aligned}$$

Po úpravách má stavová rovnice se vstupy $\mathbf{w}$, výstupy $\mathbf{z}$ a stavy $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_k$ následující výsledný tvar:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= (A + B_uD_kC_y)\mathbf{x} + B_uC_k\mathbf{x}_k + (B_w + B_uD_kD_{wy})\mathbf{w} \\ \dot{\mathbf{x}}_k &= B_kC_y\mathbf{x} + A_k\mathbf{x}_k + B_kD_{wy}\mathbf{w} \\ \mathbf{z} &= (C_z + D_{uz}D_kC_y)\mathbf{x} + D_{uz}C_k\mathbf{x}_k + (D_{wz} + D_{uz}D_kD_{wy})\mathbf{w}\end{aligned}$$

Z těchto rovnic je zřejmé, že systémové matice výsledného spojení regulátoru a soustavy budou mít tvar:

$$\begin{aligned}A_{cl} &= \begin{bmatrix} A + B_uD_kC_y & B_uC_k \\ B_kC_y & A_k \end{bmatrix} & B_{cl} &= \begin{bmatrix} B_w + B_uD_kD_{wy} \\ B_kD_{wy} \end{bmatrix} \\ C_{cl} &= \begin{bmatrix} C_z + D_{uz}D_kC_y & D_{uz}C_k \end{bmatrix} & D_{cl} &= \begin{bmatrix} D_{wz} + D_{uz}D_kD_{wy} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Pro další odvozování LMI pro syntézu regulátoru je nutné tyto systémové matice rozdělit podle závislosti na maticích regulátoru.

$$A_0 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_0 = \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_0 = \begin{bmatrix} C_z & 0 \end{bmatrix} \quad D_{11} = D_{wz}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & B_u \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ C_y & 0 \end{bmatrix} \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & D_{uz} \end{bmatrix} \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_{wy} \end{bmatrix}$$

Tak, aby se následujícím dosazením matic regulátoru dalo dostat zpět k maticím $A_{cl}, B_{cl}, C_{cl}, D_{cl}$:

$$A_{cl} = A_0 + B_1 K C_1 \quad B_{cl} = B_0 + B_1 K D_{21} \quad C_{cl} = C_0 + D_{12} K C_1 \quad D_{cl} = D_{11} + D_{12} K D_{21}$$

$$\text{Kde } K = \begin{bmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{bmatrix}.$$

BRL pro soustavu s regulátorem

Bounded real lemma (nerovnost 3.46) je možné použít i v případě soustavy s regulátorem. Upravená BRL má následující tvar:

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T X_{cl} + X_{cl} A_{cl} & X_{cl} B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T X_{cl} & -\gamma I & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.49)$$

Pro $X_{cl} > 0$

Na rozdíl od BRL z kapitoly 3.3.2 se ale nejedná o LMI, protože na levé straně nerovnosti dochází k násobení dvou proměnných - X a systémových matic regulátoru K :

$$\begin{bmatrix} A_0^T X_{cl} + X_{cl} A_0 + (B_1 K C_1)^T X_{cl} + X_{cl} (B_1 K C_1) & X_{cl} B_0 + X_{cl} B_1 K D_{21} & C_0^T + (D_{12} K C_1)^T \\ B_0^T X_{cl} + (B_1 K D_{21})^T X_{cl} & -\gamma I & D_{11}^T + (D_{12} K D_{21})^T \\ C_0 + (D_{12} K C_1) & D_{11} + (D_{12} K D_{21}) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

Eliminace součinu neznámých proměnných

Násobení dvou proměnných v nelineární maticové nerovnosti lze odstranit eliminací proměnných z kapitoly 3.1.2 (str.37). Nerovnost se musí upravit tak, aby měla požadovaný tvar LMI (3.7).

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} A_0^T X_{cl} + X_{cl} A_0 & X_{cl} B_0 & C_0^T \\ B_0^T X_{cl} & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_0 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} C_1^T K^T B_1^T X_{cl} + X_{cl} B_1 K C_1 & X_{cl} B_1 K D_{21} & C_1^T K^T D_{12}^T \\ D_{21}^T K^T B_1^T X_{cl} & 0 & D_{21}^T K^T D_{12}^T \\ D_{12} K C_1 & D_{12} K D_{21} & 0 \end{bmatrix} \\
& < 0 \\
& \underbrace{\begin{bmatrix} A_0^T X_{cl} + X_{cl} A_0 & X_{cl} B_0 & C_0^T \\ B_0^T X_{cl} & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_0 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix}}_{\Psi_{X_{cl}}} + \begin{bmatrix} C_1^T K^T B_1^T X_{cl} & 0 & C_1^T K^T D_{12}^T \\ D_{21}^T K^T B_1^T X_{cl} & 0 & D_{21}^T K^T D_{12}^T \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} X_{cl} B_1 K C_1 & X_{cl} B_1 K D_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ D_{12} K C_1 & D_{12} K D_{21} & 0 \end{bmatrix} \\
& < 0 \\
& \Psi_{X_{cl}} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_1^T \\ D_{21}^T \\ 0 \end{bmatrix}}_{Q^T} K^T \underbrace{\begin{bmatrix} B_1^T X_{cl} & 0 & D_{12}^T \end{bmatrix}}_{P_{X_{cl}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} X_{cl} B_1 \\ 0 \\ D_{12} \end{bmatrix}}_{P_{X_{cl}}^T} K \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 & D_{21} & 0 \end{bmatrix}}_Q < 0 \\
& \Psi_{X_{cl}} + Q^T K^T P_{X_{cl}} + P_{X_{cl}}^T K Q < 0 \tag{3.50}
\end{aligned}$$

Nerovnost (3.50) má podle lemmy 3.1.2 řešení pouze tehdy, když mají řešení následující nerovnosti:

$$\begin{aligned}
W_{P_{X_{cl}}}^T \Psi_{X_{cl}} W_{P_{X_{cl}}} &< 0 \\
W_Q^T \Psi_{X_{cl}} W_Q &< 0
\end{aligned}$$

Kde $W_{P_{X_{cl}}}$ a W_Q jsou jádra lineárního zobrazení matic $P_{X_{cl}}$ a Q . Výraz $P_{X_{cl}}$ závisí na X_{cl} , z čehož plyne, že $W_{P_{X_{cl}}}$ závisí na X_{cl}^{-1} následujícím způsobem:

$$P_{X_{cl}} = P \begin{bmatrix} X_{cl} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \Rightarrow W_{P_{X_{cl}}} = \begin{bmatrix} X_{cl}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} W_P$$

X_{cl}^{-1} lze nyní snadno přemístit do LMI $\Psi_{X_{cl}}$, upravená nerovnost má tvar:

$$W_P^T \left\{ \begin{bmatrix} X_{cl}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \Psi_{X_{cl}} \begin{bmatrix} X_{cl}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \right\} W_P < 0$$

Ekvivalentní zápis:

$$W_P^T \Phi_{X_{cl}} W_P < 0$$

Kde $\Phi_{X_{cl}}$ je výsledkem součinu:

$$\begin{bmatrix} X_{cl}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \Psi_{X_{cl}} \begin{bmatrix} X_{cl}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{cl}^{-1} A_0^T + A_0 X_{cl}^{-1} & B_0 & X_{cl}^{-1} C_0^T \\ B_0^T & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_0 X_{cl}^{-1} & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} = \Phi_{X_{cl}}$$

BRL pro systém s regulátorem (nerovnost (3.49)) za použití eliminace maticové proměnné (sekce 3.1.2 str.37) a po provedení všech výše uvedených úprav lze zapsat následující sadou LMI:

$$[W_p]^T \begin{bmatrix} X_{cl}^{-1} A_0^T + A_0 X_{cl}^{-1} & B_0 & X_{cl}^{-1} C_0^T \\ B_0^T & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_0 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} [W_p] < 0 \quad (3.51)$$

$$[W_q]^T \begin{bmatrix} A_0^T X_{cl} + X_{cl} A_0 & X_{cl} B_0 & C_0^T \\ B_0^T X_{cl} & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_0 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} [W_q] < 0 \quad (3.52)$$

$$X_{cl} > 0 \quad (3.53)$$

Kde:

- W_p je jádrem lineárního zobrazení $[B_1^T, 0, D_{12}^T]$
- W_q je jádrem lineárního zobrazení $[C_1, D_{21}, 0]$

LMI (3.51)-(3.53) obsahují jak X_{cl} tak i jeho inverzi a všechny systémové matice jsou zde v substituci. Pro zpřehlednění je nutné LMI vyjádřit základními systémovými maticemi (ze stavové rovnice (3.47)). Pozdější výpočet matic regulátorů se usnadní, když budou X_{cl} a X_{cl}^{-1} mít následující tvar:

$$X_{cl} = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & S_{22} \end{bmatrix}, X_{cl}^{-1} = \begin{bmatrix} R & M \\ M^T & R_{22} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N}_{p1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ \mathcal{N}_{p2} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} R & M \\ M^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & M \\ M^T & 0 \end{bmatrix} \right\} & \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} & \left\{ \begin{bmatrix} R & M \\ M^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_z^T \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ & \begin{bmatrix} B_w^T & 0 \\ C_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & M \\ M^T & 0 \end{bmatrix} & D_{wz}^T \\ & & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{p1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ \mathcal{N}_{p2} & 0 \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N}_{q1} & 0 \\ 0 & 0 \\ \mathcal{N}_{q2} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} A^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} & \left\{ \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \end{bmatrix} \right\} & \begin{bmatrix} C_z^T \\ 0 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} B_w^T & 0 \\ C_z & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & 0 \end{bmatrix} & D_{wz}^T \\ & & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{q1} & 0 \\ 0 & 0 \\ \mathcal{N}_{q2} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.55)$$

Kde:

- $\mathcal{N}_{p1} = \ker(B_u^T)$
- $\mathcal{N}_{p2} = \ker(D_{uz}^T)$
- $\mathcal{N}_{q1} = \ker(C_y)$
- $\mathcal{N}_{q2} = \ker(D_{wy})$

Poslední podmínka z trojice LMI (3.55) vznikla z tzv. lemmy o doplňku matice¹. Tato podmínka zajišťuje, aby v maticích rozdělených podle (3.54) nedošlo vlivem eliminace proměnných (sekce 3.1.2) k eliminaci submatic M a N, které jsou důležité pro rekonstrukci regulátorů z řešení R a S. Důkaz této lemmy je mimo rozsah této práce a v dostupných článcích se tato lemma většinou používá bez uvedení důkazu,

¹Matrix Completion Lemma

lze ho však najít v knize (Dullerud – Paganini, 2000). Z této lemmy vyplývá ještě jedna podmínka, která zde není uvedena. Tato podmínka je totiž splněna vždy, kdy je řád regulátorů stejný, nebo větší než řád soustavy. Řešení pro redukovaný řád regulátoru je mnohem komplikovanější, protože tato podmínka není lineární maticovou nerovností a nelze ji vždy řešit konvexní optimalizací. Roznásobení všech matic uvnitř nerovností vede na následující tři LMI:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N}_{p1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ \mathcal{N}_{p2} & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AR + RA^T & AM & B_w & RC_z^T \\ M^T A^T & 0 & 0 & M^T C_z^T \\ B_w^T & 0 & -\gamma I & D_{wz}^T \\ C_z R & C_z M & D_{wz} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{p1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I \\ \mathcal{N}_{p2} & 0 \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N}_{q1} & 0 \\ 0 & 0 \\ \mathcal{N}_{q2} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T S + SA & A^T N & SB_w & C_z^T \\ N^T A & 0 & N^T B_w & 0 \\ B_w^T S & B_w^T N & -\gamma I & D_{wz}^T \\ C_z & 0 & D_{wz} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{q1} & 0 \\ 0 & 0 \\ \mathcal{N}_{q2} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0$$

Druhý řádek matic W_P a W_Q je nulový, lze tedy vypustit druhý řádek a druhý sloupec obou LMI. Těmito úpravami a prohozením posledních dvou řádků a sloupců druhé LMI je výsledný tvar roven třem LMI (3.56), (3.57) a (3.58).

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{N}_R & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{cc|c} AR + RA^T & RC_z^T & B_w \\ C_z R & -\gamma I & D_{wz} \\ \hline B_w^T & D_{wz}^T & -\gamma I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{N}_R & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] < 0 \quad (3.56)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{N}_S & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right]^T \left[\begin{array}{cc|c} A^T S + SA & SB_w & C_z^T \\ B_w^T S & -\gamma I & D_{wz}^T \\ \hline C_z & D_{wz} & -\gamma I \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathcal{N}_S & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] < 0 \quad (3.57)$$

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.58)$$

Výpočet matic regulátoru

Řešením LMI (3.56), (3.57) a (3.58) jsou matice R , S a výsledná hodnota γ . Možností jak se zpětně dopočítat k X_{cl} tvaru (3.54) je více. Všechny vycházejí z faktu, že $X_{cl} X_{cl}^{-1} = I$. V článku (Gahinet – Apkarian, 1994) se nejdříve provede rozklad, ze kterého se získají matice M a N :

$$MN^T = I - RS$$

Pomocí matic M a N se spočítá X_{cl} řešením rovnice:

$$\begin{bmatrix} S & I \\ N^T & 0 \end{bmatrix} = X_{cl} \begin{bmatrix} I & R \\ 0 & M^T \end{bmatrix}$$

Metoda pro získání X_{cl} uvedená v knize (Dullerud – Paganini, 2000) je poněkud odlišná. Využívá se toho, že matice N musí být symetrická a lze jí tedy vypočítat pomocí Choleského dekompozice z následující rovnice:

$$NN^T = S - R^{-1}$$

Použitím Choleského dekompozice tak odpadá nutnost řešit další rovnici, protože tento faktor matice $S - R^{-1}$ lze přímo dosadit do následujícího vztahu:

$$X_{cl} = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & I \end{bmatrix}$$

Při znalosti X_{cl} je nyní možné rekonstruovat systémové matice regulátoru. Možností jak matice regulátoru spočítat je opět více. Články od autorů Apkarian, Gahinet a Scherer uvádějí, že výpočetně nejrychlejší je získat matice regulátoru z analytického řešení LMI (3.50). Toto řešení vychází z toho, že použitím eliminace maticových proměnných byl tvar systémové submatice K_{11} zvolen jako $K_{11} = \Psi_{13}^T \Psi_{11}^{-1} - \Psi_{23}^T$ (viz sekce 3.1.2 str.37). Dalším, mnohem užitečnějším postupem, jak rekonstruovat matice regulátoru, je vyřešit LMI (3.50) pomocí konvexní optimalizace. Při znalosti X_{cl} se již jedná o konvexní problém. Nespornou výhodou tohoto postupu je, že je možné optimalizační metodě stanovit další požadavky na vlastnosti regulátoru. Vzhledem k použitým substitucím je sestavení matic $\Psi_{X_{cl}}$, $P_{X_{cl}}$ a Q poněkud zmatené, proto jsou zde uvedeny tři tabulky popisující konstrukci těchto matic, včetně uvedení velikostí matic v závislosti na počtu stavů (n_a, n_k), vnějších vstupů (n_{iexo}), vnějších výstupů (n_{oexo}), řídicích vstupů - výstupů z regulátoru (n_{icon}), měřených výstupů - vstupů do regulátoru (n_{omeas}).

	n_a	n_k	n_{iexo}	n_{oexo}
n_a	$A^T X + X A$		$X B_w$	$C z^T$
n_k			0	I
n_{iexo}	$B_w^T X$	0	$-\gamma I$	$D w z^T$
n_{oexo}	$C z$	I	$D w z$	$-\gamma I$

Tab. 3.1: Konstrukce matice $\Psi_{X_{cl}}$

	n_a	n_k	n_{iexo}	n_{oexo}
n_a	$\begin{pmatrix} 0 & I \\ B_u^T & 0 \end{pmatrix} X_{cl}$		0	0
n_{icon}			0	D_{uz}^T

Tab. 3.2: Konstrukce matice $P_{X_{cl}}$

	n_a	n_k	n_{iexo}	n_{oexo}
n_a	0	I	0	0
n_{omeas}	C_y	0	D_{wy}	0

Tab. 3.3: Konstrukce matice Q

Výstupem konvexní optimalizace jsou systémové matice regulátoru A_k , B_k , C_k a D_k . Řád regulátoru je v tomto případě shodný s řádem soustavy. Pokud by tomu tak nebylo, nejednalo by se při rekonstrukci o konvexní problém a nalezení globálního minima pro zvolená kritéria by nemuselo být vždy jisté.

4 ŘEŠENÍ DOKTORSKÉ PRÁCE

Výzkumné práce na řešení problematiky robustního řízení začaly v roce 2010 výzkumem robustního regulátoru otáček asynchronního motoru získaného pomocí $\mathcal{H}_\infty$ metody smíšených citlivostních funkcí. D - q rovnice asynchronního motoru se souřadnicovým systémem vztaženým k toku rotoru byly upraveny na tvar, ve kterém otáčky motoru vystupovaly jako neurčitý parametr. Robustní $\mathcal{H}_\infty$ regulátor otáček byl navržen tak, aby pracoval v celém rozsahu neurčitého parametru. Výsledky simulací tohoto regulátoru byly publikovány ve sborníku workshopu „Perspektivní projekty vývoje řídicích a senzorických technologií“ (Pohl, 2011a). Ze simulací tohoto regulátoru bylo zřejmé, že robustní regulátor sice pracuje v celém rozsahu otáček motoru, ale je zároveň značně pomalý. Ve stejné době byla ověřena možnost návrhu $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru otáček metodou $\mathcal{H}_\infty$ Loopshaping. Tato metoda byla aplikována na rovnice asynchronního motoru se souřadnicovým systémem vztaženým k toku rotoru, které byly linearizovány v okolí jednoho pracovního bodu. Výsledný regulátor sice dosahoval větší rychlosti ale nebyl dostatečně robustní. Při návrhu regulátorů bylo možné specifikovat požadavky na robustnost či rychlost přechodného děje jen v omezené míře, což způsobilo, že změna zatěžovacího momentu měla výrazný vliv na otáčky motoru (Pohl, 2012a).

Dalším logickým krokem bylo změnit přístup k rovnicím asynchronního motoru. Po prostudování postupu z článku (Prempain et al., 2002) byla vyzkoušena další metoda návrhu robustního regulátoru. Rovnice asynchronního motoru v α - β souřadnicovém systému vztaženému k statorovému magnetickému poli byly linearizovány zpětnovazební linearizací. Linearizované rovnice byly převedeny na parametrické s otáčkami motoru jako proměnným parametrem. Výsledkem syntézy robustního regulátoru byl parametrický regulátor, který se přizpůsobil aktuální naměřené hodnotě otáček. Vlastnosti tohoto $\mathcal{H}_\infty$ LPV regulátoru byly prezentovány na studentské konferenci EEICT 2011 (Pohl, 2011b). Použitím d - q rovnic asynchronního motoru¹ vhodného tvaru bylo dosaženo exaktního lineárního modelu pouhou úpravou rovnic do parametrického (LPV) tvaru. Tento postup je podrobněji diskutován v sekci 4.4 disertační práce. V dostupných literárních zdrojích nebyl nalezen článek, který by tento postup využíval a bude tedy v blízké budoucnosti publikován v odborném časopise.

Cílem další práce na robustní regulaci elektrických pohonů bylo aplikovat LPV metodu na rovnice synchronního motoru s permanentními magnety v d - q souřadnicovém systému vztaženému k magnetickému poli rotoru. Rozdílný tvar rovnic neumožňoval přímé použití LPV metody na tento druh motoru. Jak je ukázáno v

¹Byly použity hybridní proudové-tokové rovnice v souřadnicovém systému vztaženému k magnetickému poli rotoru

následující sekci, rovnice synchronního motoru s permanentními magnety obsahují konstantní výraz Ψ_f násobený otáčkami motoru. Přímým převodem na LPV tvar by vznikla osamocená konstanta, která není násobena ani vstupní, výstupní ani stavovou veličinou. Tato nelinearita byla odstraněna tak, že Ψ_f bylo považováno za vstupní veličinu. Jelikož se jedná o veličinu závislou na proměnném parametru bylo nutné ji považovat za vnější vstup¹, protože podle požadavků na matici B musí být řídicí vstupy nezávislé na proměnném parametru. Tento krok neúmyslně zahrnuje robustnost vůči změnám Ψ_f , který se v průběhu regulace příliš nemění. Výsledky simulací LPV regulátoru proudu PMSM byly prezentovány na konferenci INES 2011 (IEEE International Conference on Intelligent Engineering Systems) (Pohl – Blaha, 2011) a později na konferenci DAAAM 2011 (POHL – VESELY, 2011).

K ověření výsledků simulace byla použita simulační platforma reálného času dSPACE ds1103. Vývoj této platformy byl zaměřen na rychlé testování algoritmů vektorového řízení elektrických motorů. Podrobný popis platformy a jejích jednotlivých částí je představen v sekci 4.5. Přizpůsobení této platformy námi používanému třífázovému střídači bylo časově náročné. Zejména realizace SPI pro naprogramování řídicího obvodu střídače byla zdoluhavá, protože způsob použití SPI byl v tomto případě značně nestandardní. Funkčnost platformy byla otestována na několika jednoduchých algoritmech. Výsledky testování různých algoritmů byly publikovány na workshopu „Perspektivní projekty vývoje řídicích a senzorických technologií“ (Pohl, 2012b), na soutěži EEICT 2012 (Pohl, 2012c) a na konferenci INES 2012 (Pohl – Vesely, 2012). Po zprovoznění platformy pro klasické metody řízení zbývalo odstranit problémy s implementací robustních $\mathcal{H}_\infty$ algoritmů řízení. Bylo zjištěno, že úspěšnost diskretizace závisí ve velké míře na velikosti vlastních čísel matice regulátoru. Pokud jsou vlastní čísla příliš velká, vyžaduje regulátor velké hodnoty vzorkovací frekvence (větší než desítky kilohertz). Bylo tedy nutné prostudovat a modifikovat funkce Matlabu, které mají na starost výpočet robustního $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru. Úpravou algoritmu bylo možné specifikovat maximální možnou velikost vlastních čísel jako jednu z podmínek optimalizačního procesu. Tato úprava umožnila ověření $\mathcal{H}_\infty$ LPV regulátoru proudu PMSM na reálném motoru. Výsledky simulací byly ve velké míře potvrzeny a článek na toto téma byl publikován na uznávané konferenci „Annual Conference of IEEE Industrial Electronics Society“ IECON 2013 (Pohl et al., 2013). Další práce spočívala v nalezení řešení, které je robustní jak vůči změnám otáček motoru, tak i zatěžovacího momentu. Touto problematikou se zabývají následující kapitoly a jedná se z velké míry o dosud nepublikované výsledky.

¹Vliv změny vnějších vstupů je optimalizační metodou minimalizován

4.1 Robustní LPV regulátor statorových proudů PMSM

Následující kapitoly se zabývají syntézou a testováním robustních regulátorů v různých konfiguracích. Prvním z těchto regulátorů je $\mathcal{H}_\infty$ LPV regulátor proudu. Účelem LPV regulátoru statorových proudů PMSM je řízení synchronního motoru v kaskádní regulační struktuře s LPV regulátorem ve vnitřní proudové smyčce a P či PI regulátorem v nadřazené otáčkové smyčce. Vlastnosti této regulační struktury a její přínosy pro řízení motorů budou blíže popsány v sekci 4.3 na straně 86.

4.1.1 LPV model elektrické části PMSM

Elektrický LPV model synchronního motoru s permanentními magnety je odvozen z napěťových rovnic statoru v d - q souřadnicovém systému (2.13) ze sekce 2.1.3. Volbou stavového vektoru $x = [i_d, i_q]^T$, vstupních veličin $u = [\Phi_f, u_d, u_q]^T$ a výstupních veličin $y = [i_d, i_q]^T$ se získá stavový popis z rovnice (4.1).

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{R_s}{L_d}x_1 + \frac{\omega_m L_q}{L_d}x_2 + \frac{1}{L_d}u_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\omega_m L_d}{L_q}x_1 - \frac{R_s}{L_q}x_2 + \frac{1}{L_q}(u_3 - \omega_m u_1) \\ y &= [x_1, x_2]^T \end{aligned} \quad (4.1)$$

Pro sestavení LPV modelu se ze stavových rovnic vyjmou otáčky ω_m , které se později použijí jako plánovací proměnná (scheduling variable). Výsledkem této úpravy jsou lineární parametrické stavové rovnice, které závisí na ω_m .

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2)x + (B_1\alpha_1 + B_2\alpha_2)u \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (4.2)$$

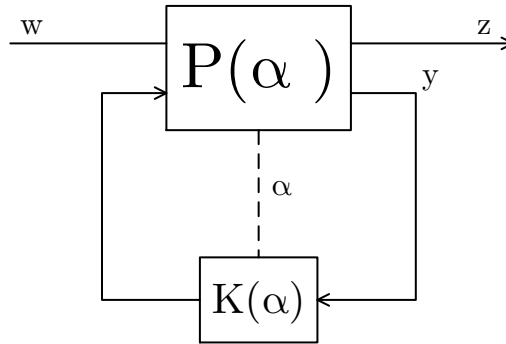
Tvar LPV systému z rovnice (4.2) je nazýván polytopickým LPV systémem, protože plánovací proměnná nevyjadřuje přímo reálný parametr, ale jeho škálovanou hodnotu v rozsahu $[0 \ 1]$. Systémové matice LPV systému odpovídají původním systémovým maticím v mezních hodnotách plánovací proměnné (ω_m). Vztah mezi reálným parametrem a plánovací proměnnou je v případě jednoho proměnného parametru $\omega_m \in [\omega_{min} \ \omega_{max}]$ definován jako $\omega_m = \alpha_1 \omega_{min} + \alpha_2 \omega_{max}$ pro parametry $\alpha_1, \alpha_2 \in [0 \ 1]$. V každém okamžiku musí platit, že $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Systémové matice LPV systému mají následující tvar:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_d} & \omega_{min} \frac{L_q}{L_d} \\ -\omega_{min} \frac{L_d}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} & B_1 &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L_d} & 0 \\ \omega_{min} \frac{1}{L_q} & 0 & \frac{1}{L_q} \end{bmatrix} \\
A_2 &= \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_d} & \omega_{max} \frac{L_q}{L_d} \\ -\omega_{max} \frac{L_d}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L_d} & 0 \\ \omega_{max} \frac{1}{L_q} & 0 & \frac{1}{L_q} \end{bmatrix} \\
C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Nevýhodou zvolené struktury systémových matic je, že magnetický tok rotoru je brán jako vstupní veličina. Optimalizační algoritmus hledající vhodný regulátor se bude snažit potlačit vliv změn magnetického toku na vlastnosti uzavřeného obvodu. V některých případech jsou požadavky stanovené pomocí váhovacích funkcí tak striktní, že dodatečná neurčitost způsobená změnou magnetického toku může způsobit neřešitelnost optimalizačního problému. Před samotným návrhem regulátoru je proto vhodné škálovat velikost magnetického toku a odpovídajícím způsobem upravit vstupní matici LPV systému.

4.1.2 Syntéza regulátoru

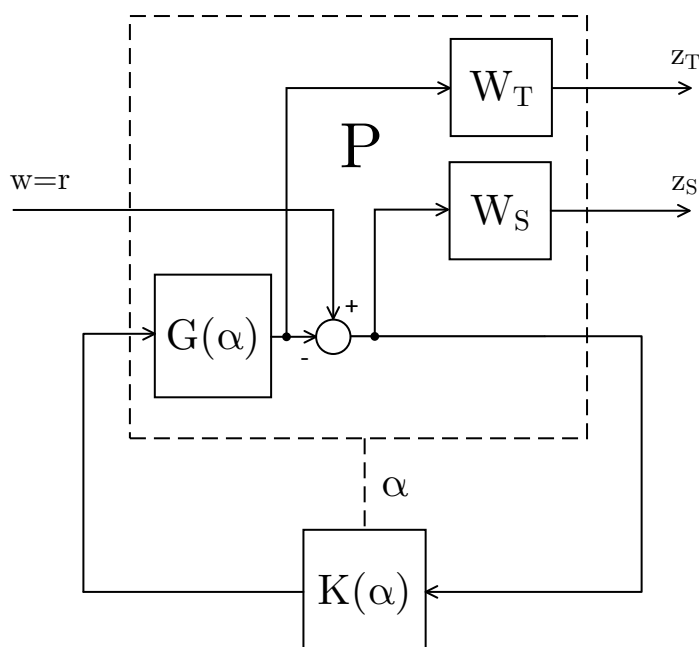
Cílem optimalizačního algoritmu je nalézt parametrický regulátor minimalizující $\mathcal{H}_\infty$ normu ze vstupů w na výstupy z (struktura uvedená na obr.4.1).



Obr. 4.1: Obecná regulační struktura pro syntézu $\mathcal{H}_\infty$ LPV regulátoru

Obecná struktura nijak nespécifikuje požadavky na zásobu stability či kvalitu regulace. Tyto požadavky lze vyjádřit připojením některé z váhovacích funkcí do zpětnovazebního regulačního obvodu (viz. sekce 3.2.2 na str.42). Připojením váhovací funkce k citlivostní funkci (Obr. 4.2) je možné předdefinovat zároveň zásobu

stability v modulu, velikost ustálené odchylky i rychlost přechodného děje. Váhovací funkce připojená ke komplementární citlivostní funkci ovlivňuje velikost překmitu přechodného děje.



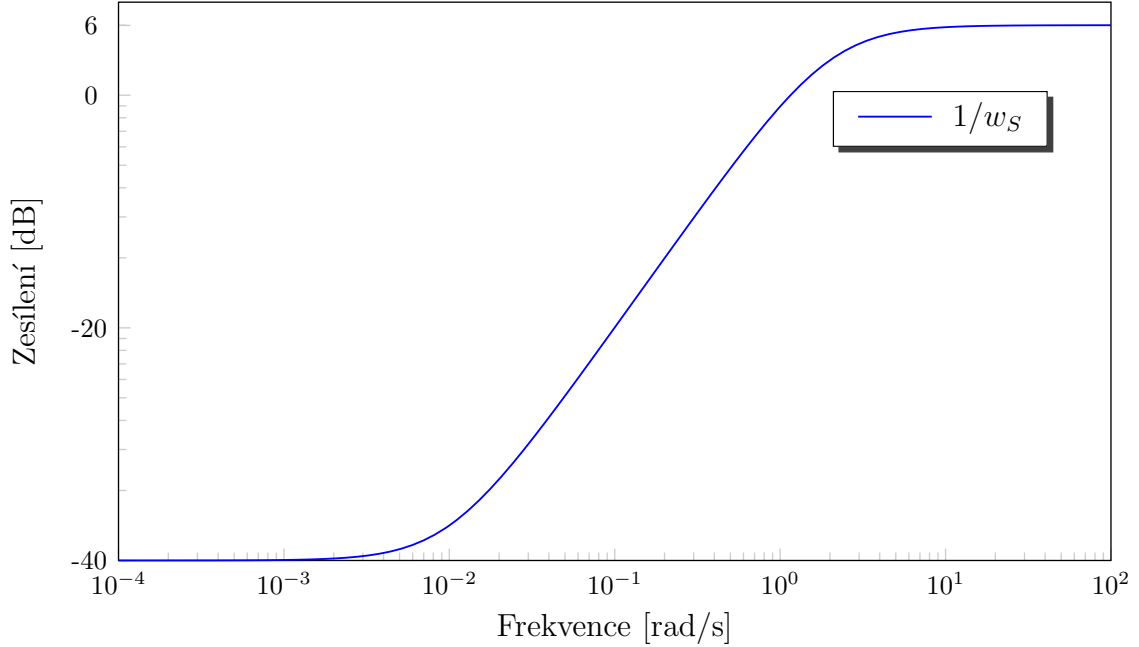
Obr. 4.2: Struktura zpětnovazebního obvodu s váhovanou citlivostní funkcí

Přenosy váhovacích funkcí tvarujících citlivostní, či komplementární citlivostní funkci by obecně měly být co nejnižšího řádu. Řád výsledného regulátoru je roven řádu soustavy + řádu všech váhovacích funkcí. Výjimku tvoří syntéza redukovaného regulátoru, u které nelze zaručit nalezení globálního minima z důvodu nekonvexnosti problému. Pro snížení řádu regulátoru se často při omezení překmitu přechodného děje používá pouze statická váha komplementární citlivostní funkce. Pro tvarování citlivostní funkce je možné použít dynamickou váhu tvaru (4.4).

$$W_S = \frac{\frac{1}{M}s + \omega_b}{s + \omega_b A} \quad (4.4)$$

Pro syntézu regulátoru synchronního motoru byly parametry váhovací funkce zvoleny následovně: $M = 2$ zajistí zásobu stability v modulu 0.5, $A = 0.01$ pro omezení velikosti ustálené odchylky na 1% z celkové velikosti výstupní veličiny a $\omega_b = 50$ zajistí požadovanou rychlost přechodného děje. Popis vlastností jednotlivých parametrů vah a další tvary váhovacích funkcí lze nalézt v knize „Multivariable

Feedback Control“ (Skogestad – Postlethwaite, 2005). Frekvenční charakteristika váhové funkce s těmito parametry je zobrazena na Obr. 4.3. Konstrukci systému P z Obr. 4.2 lze provést buď ručně blokovou algebrou, nebo pomocí `sconnect` funkce Matlabu.



Obr. 4.3: Frekvenční charakteristika váhy citlivostní funkce

Stavový popis systému se všemi váhovacími funkcemi a nadefinovanou zpětnovazební strukturou je nutné pro účel syntézy regulátoru rozdělit na řídicí vstupy/výstupy a vnější vstupy/výstupy. Výsledný tvar stavových rovnic je podobný tomu z rovnice (3.47) (sekce 3.3.3 str.55). Na rozdíl od běžného obecného tvaru pro syntézu se jedná o popis několika rohových systémů pro mezní hodnoty proměnných parametrů.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= A_i \mathbf{x}(t) + B_{wi} \mathbf{w}(t) + B_{ui} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}(t) &= C_{zi} \mathbf{x}(t) + D_{wzi} \mathbf{w}(t) + D_{uzi} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C_{yi} \mathbf{x}(t) + D_{wyi} \mathbf{w}(t) + D_{uyi} \mathbf{u}(t)\end{aligned}\tag{4.5}$$

Hledaný regulátor má podobný tvar:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_k(t) &= A_{ki} \mathbf{x}_k(t) + B_{ki} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{u}(t) &= C_{ki} \mathbf{x}_k(t) + D_{ki} \mathbf{y}(t)\end{aligned}\tag{4.6}$$

Kde $i = 1, \dots, r$ vyjadřuje index systému pro mezní hodnotu parametru. Syntéza regulátoru probíhá podobně jako v případě neparametrického systému. Prvním krokem syntézy je najít jednu Ljapunovu matici X_{cl} vyhovující pro všechny

rohové matice parametrického systému. Pro konvexní optimalizační problém¹ dokazuje existence této matice stability rohových regulátorů pro celý rozsah intervalu proměnného parametru. Počet LMI nutných k vyřešení tohoto problému se zvětšuje s počtem proměnných parametrů $(2r + 1)$. Tvar BRL pro parametrický systém je popsán nerovností (4.7).

$$\begin{bmatrix} A_{cli}^T X_{cl} + X_{cl} A_{cli} & X_{cl} B_{cli} & C_{cli}^T \\ B_{cli}^T X_{cl} & -\gamma I & D_{cli}^T \\ C_{cli} & D_{cli} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, X_{cl} > 0 \quad (4.7)$$

Kde:

$$\begin{aligned} A_{cli} &= \begin{bmatrix} A_i + B_{ui} D_{ki} C_{yi} & B_{ui} C_{ki} \\ B_{ki} C_{yi} & A_{ki} \end{bmatrix} & B_{cli} &= \begin{bmatrix} B_{wi} + B_{ui} D_{ki} D_{wyi} \\ B_{ki} D_{wyi} \end{bmatrix} \\ C_{cli} &= \begin{bmatrix} C_{zi} + D_{uzi} D_{ki} C_{yi} & D_{uzi} C_{ki} \end{bmatrix} & D_{cli} &= \begin{bmatrix} D_{wzi} + D_{uzi} D_{ki} D_{wyi} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Na soustavu jsou kladeny následující požadavky:

- $D_{uyi} = 0$ - nesplnění této podmínky by znamenalo existenci přímé vazby řídicího vstupu na měřený výstup, BRL (4.7) by neplatila
- $B_{ui}, C_{yi}, D_{uzi}, D_{wyi}$ jsou nezávislé na proměnném parametru. Závislost by způsobila existenci nekonečně mnoha řešení v BRL (4.7)
- A_i, B_{ui} a A_i, C_{yi} jsou říditelné a pozorovatelné. Tato podmínka je již obsažena v BRL samotném.

Řešitelnost této LMI (existence vhodné X_{cl} a γ) je ověřena podobně jako v případě neparаметrického systému. Postup, jakým se BRL rozepíše na trojici LMI, je popsán v kapitole 3.3.3 na str.55. Výsledkem tohoto postupu je $2r + 1$ LMI:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathcal{N}_R & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right)^T \left(\begin{array}{cc|c} A_i R + R A_i^T & R C_{qi}^T & B_{wi} \\ C_{zi} R & -\gamma I & D_{wzi} \\ \hline B_{wi}^T & D_{wzi}^T & -\gamma I \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{N}_R & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right) < 0, i = 1, \dots, r \quad (4.8)$$

¹Parametrická Bounded Real Lemma (BRL) s affiním, či polytipickým parametrem je konvexním optimalizačním problémem

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathcal{N}_S & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right)^T \left(\begin{array}{cc|c} A_i^T S + S A_i & S B_{wi} & C_{zi}^T \\ B_{wi}^T S & -\gamma I & D_{wzi}^T \\ \hline C_{zi} & D_{wzi} & -\gamma I \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{N}_S & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right) < 0, i = 1, \dots, r \quad (4.9)$$

$$\begin{pmatrix} R & I \\ I & S \end{pmatrix} \geq 0 \quad (4.10)$$

S omezením řádu R a S :

$$\text{rank}(I - RS) \leq k \quad (4.11)$$

Kde $\mathcal{N}_R$ a $\mathcal{N}_S$ jsou bázemi lineárního zobrazení matic $(B_{ui}^T, D_{u zi}^T)$, $(C_{yi}, D_{w yi})$. Pro optimalizační algoritmus je také vhodné stanovit ještě další omezení. Jedná se o omezení maximální hodnoty vlastních čísel $\bar{\lambda}$ (spectral radius) matic R a S . Toto omezení je velice důležité z důvodu implementace na reálném motoru. Velikost vlastních čísel těchto dvou maticových proměnných ovlivní velikost vlastních čísel matic A_i . Podle velikosti vlastních čísel v maticích A_i se musí zvolit odpovídající velikost vzorkování:

$$f > \frac{\bar{\lambda}(A_i)}{2}$$

Po nalezení vhodných matic R a S a skaláru γ se provede rekonstrukce matice X_{cl} . Matice parametrického regulátoru se získají dosazením X_{cl} a γ do všech BRL pro mezní hodnoty proměnných parametrů. Počet regulátorů odpovídá počtu mezních hodnot proměnných parametrů. Spojením soustavy (již bez váhovacích funkcí) s regulátorem vznikne zpětnovazební systém.

4.1.3 Realizace syntézy v Matlabu

Systémové matice LPV modelu PMSM se v Matlabu sestaví tak, aby odpovídaly stavové rovnici (4.2). Nominální parametry motoru jsou uvedeny v tabulce 4.1 na konci této sekce. Pomocí `sconnect` funkce Matlabu se realizuje zapojení z Obr. 4.2 včetně váhy citlivostní a komplementární citlivostní funkce. Matice zpětnovazebního systému se rozdělí na matice A , B_{wi} , B_{ui} , C_{zi} , C_{yi} , $D_{w zi}$, $D_{u yi}$, $D_{u zi}$, $D_{w yi}$ podle druhu vstupní/výstupní veličiny. V případě výpočtu proudového regulátoru pro synchronní motor má parametr soustavy dvě krajní hodnoty. Jsou jimi mezní hodnoty otáček ω_{max} a ω_{min} . Z toho plyne, že je celkem nutné řešit soustavu pěti LMI se dvěma maticovými proměnnými R S a jednou skalární proměnnou γ .

LMI Toolbox

Pro řešení LMI byl použit Matlab LMI Toolbox. Definice jednotlivých LMI pomocí tohoto toolboxu je poměrně komplikovaná. Nejdříve je nutné nadefinovat maticové proměnné R , S a γ příkazem `lmivar`. R a S jsou symetrické, blokově diagonální maticové proměnné velikosti n_A a γ je skalární proměnná. Poté se sestaví vnější $(\mathcal{N}_R, \mathcal{N}_S)$ a vnitřní faktory LMI výrazu pomocí `lmiterm`. Jednotlivé prvky LMI se umístí na odpovídající pozici uvnitř LMI. Uvádí se pouze prvky na hlavní diagonále a pod (či nad) hlavní diagonálou LMI. Příkazu `lmiterm` se předává index LMI do které výraz patří, dále souřadnice a typ prvku. LMI Toolbox rozlišuje celkem tři druhy prvků LMI. Jedním jsou vnější faktory, dále konstantní výrazy a výrazy zahrnující maticové proměnné. Definice jednotlivých výrazů se musí provést pro všechny rohové systémy. Definice LMI je ukončena přiřazením struktury LMI do proměnné pomocí příkazu `getlmis`. Řešení R , S a γ se získá pomocí funkce `mincx`, které se předá proměnná s definicí LMI a minimalizační kritérium. Celý postup sestavení LMI pro řešení existence parametrické BRL je uveden ve výpisu programu 1.

```

1  % LMI setup
2  setlmis([]);
3  lmivar(1,[na 1]);          % R
4  lmivar(1,[na 1]);          % S
5  lmivar(1,[1 1]);           % gamma
6  for i = 1:k
7      NR = null([Bu(:,:,i)' Duz(:,:,i)']);
8      NR = blkdiag(NR,eye(niexo));
9      NS = null([Cy(:,:,i) Dwy(:,:,i)]);
10     NS = blkdiag(NS,eye(noexo));
11     l1=[A(:,:,i);Cz(:,:,i)]; r1=[eye(ns) zeros(ns,noexo)];
12     lmiterm([(2*i-1) 0 0 0],NR);
13     lmiterm([(2*i-1) 1 1 1],l1,r1,'s');
14     lmiterm([(2*i-1) 1 1 3],[zeros(ns,noexo);eye(noexo)],...
15             [zeros(noexo,ns),-eye(noexo)]);
16     lmiterm([(2*i-1) 2 1 0],[Bw(:,:,i)' Dwz(:,:,i)']);
17     lmiterm([(2*i-1) 2 2 3],-1,1);
18     r1=[A(:,:,i),Bw(:,:,i)]; l1=[eye(ns);zeros(niexo,ns)];
19     lmiterm([2*i 0 0 0],NS);
20     lmiterm([2*i 1 1 2],l1,r1,'s');
21     lmiterm([2*i 1 1 3],[zeros(ns,niexo);eye(niexo)],...
22             [zeros(niexo,ns),-eye(niexo)]);
23     lmiterm([2*i 2 1 0],[Cz(:,:,i) Dwz(:,:,i)]);
24     lmiterm([2*i 2 2 3],-1,1);
25 end
26 lmiterm([- (2*k+1) 1 1 1],1,1);
27 lmiterm([- (2*k+1) 2 1 0],1);
28 lmiterm([- (2*k+1) 2 2 2],1,1);
29 LMIs=getlmis;

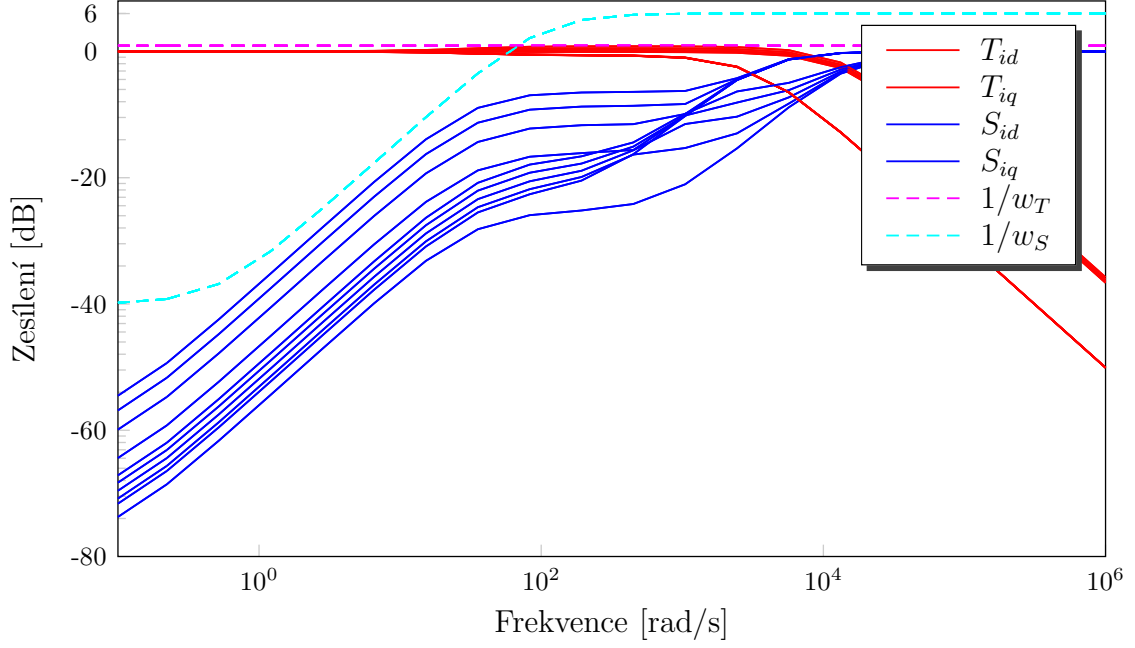
```

Výpis programu 1: Sestavení LMI pro LPV Systém

Tab. 4.1: Nominální hodnoty PMSM

Parametr	Symbol	Nominální hodnota
Počet pólových dvojic	p	3
Magnetický tok statoru	Φ_f	0.0208 N.m/A
Odpor statoru	R_s	1.1 Ω
Indukčnost v přímé ose	L_d	390 μH
Indukčnost v kvadratické ose	L_q	470 μH
Moment setrvačnosti	J_m	0.000018 kg.m ²

Z řešení R a S se vypočítá $NN^T = S - R^{-1}$. N se dosadí do jednoho z možných tvarů X_{cl} . Ze znalosti X_{cl} je možné rekonstruovat systémové matice regulátoru řešením LMI (3.50). Konstrukce této LMI probíhá podobně jako v předchozím případě. Velikosti a tvary jednotlivých matic jsou přehledně uvedeny v tabulkách 3.1, 3.2, 3.3 (sekce 3.3.3, str.55). Parametrický regulátor statorových proudů PMSM se skládá ze dvou dílčích regulátorů pro krajní hodnoty otáček rotoru. Mechanismus přechodu mezi rohovými regulátory je podrobněji popsán v části zabývající se simulacemi. Takto získaný regulátor lze bez úprav použít pro spojitou analýzu vlastností regulační smyčky a simulace ve spojitém čase. Jednou z metod analýzy vlastností regulační smyčky je vykreslení frekvenční charakteristiky singulárních hodnot. Vykreslením průběhů frekvenční charakteristiky singulárních hodnot pro S a T lze ověřit splnění všech požadavků na průběh citlivostní a komplementární citlivostní funkce (Obr. 4.4). Všechny průběhy citlivostních a komplementárních citlivostních funkcí leží pod hranicemi stanovenými váhovacími funkcemi. Meze stanovené pro rychlost přechodného děje, zásobu stability v modulu a překmit byly dodrženy pro všechny sledované frekvence.



Obr. 4.4: Frekvenční charakteristiky singulárních hodnot S a T PMSM s LPV regulátorem proudu pro $\omega_m \in [-110, 110]$

Diskretizace

Cílem diskretizace regulátoru je nalezení diskrétní náhrady, která bude v okamžicích vzorkování aproximovat spojitý regulátor. Článek „On the discretization of LMI-synthesized linear parameter-varying controllers“ (Apkarian, 1997) popisuje několik možných metod diskretizace LPV regulátorů. Pro implementaci regulátoru PMSM byla z důvodu rychlosti výpočtu akčního zásahu zvolena metoda, která neobsahuje inverze matic. Tato metoda je odvozena z lichoběžníkové aproximace následujícího diskrétního LPV systému (Apkarian, 1997):

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= \left(I - \frac{T}{2}A(\Theta_k)\right)^{-1} \left(I + \frac{T}{2}A(\Theta_k)\right) z_k + \sqrt{T} \left(I - \frac{T}{2}A(\Theta_k)\right)^{-1} B(\Theta_k) y_k \\ u_k &= \sqrt{T} C(\Theta_k) \left(I - \frac{T}{2}A(\Theta_k)\right)^{-1} z_k + \left(\frac{T}{2} C(\Theta_k) \left(I - \frac{T}{2}A(\Theta_k)\right)^{-1} B(\Theta_k) + D(\Theta_k)\right) y_k \end{aligned} \quad (4.12)$$

Dosazením aproximace T druhého řádu do rovnic (4.12) se získá diskrétní ekvivalent bez maticových inverzí (Hanselmann, 1987):

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= \left(I + \left(I + \frac{T}{2}A(\Theta_k)\right)TA(\Theta_k)\right) z_k + \left(I + \frac{T}{2}A(\Theta_k)\right)TB(\Theta_k) y_k \\ u_k &= C(\Theta_k) \left(I + \left(I + \frac{T}{2}A(\Theta_k)\right)\frac{T}{2}A(\Theta_k)\right) z_k + \left(C(\Theta_k) \left(I + \frac{T}{2}A(\Theta_k)\right)\frac{T}{2}B(\Theta_k) + D(\Theta_k)\right) y_k \end{aligned} \quad (4.13)$$

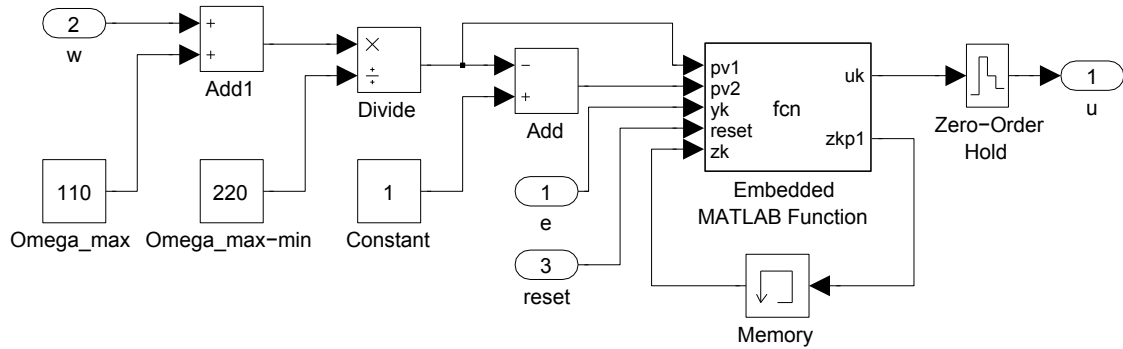
K získání diskretní náhrady zbývá zvolit vhodnou vzorkovací frekvenci. Jak již bylo dříve uvedeno, minimální dosažitelná vzorkovací frekvence závisí také na velikosti vlastních čísel v A matici regulátorů.

4.1.4 Simulace

Simulace proudového regulátoru PMSM byly provedeny jak na modelu PMSM tak i na reálném motoru pomocí platformy dSPACE 1103. Matice regulátoru jsou v závislosti na aktuální hodnotě otáček vypočteny podle následujícího vzorce:

$$K = \left(\frac{\omega_m + \omega_{max}}{\omega_{max} - \omega_{min}} \right) K_{\omega_{min}} + \left(1 + \frac{\omega_m + \omega_{max}}{\omega_{max} - \omega_{min}} \right) K_{\omega_{max}} \quad (4.14)$$

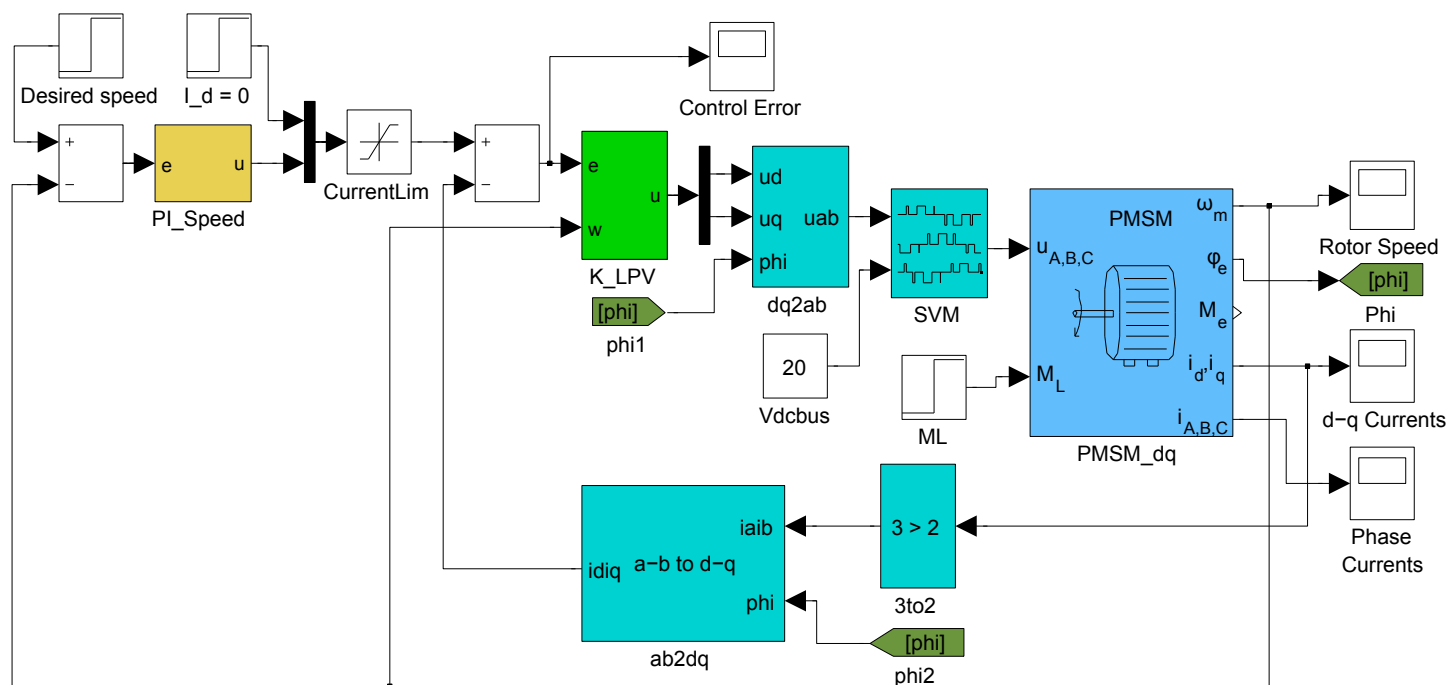
Regulátor byl implementován pomocí Matlab embedded funkce. Přepočet proměnného parametru je společně s embedded funkcí zobrazen na Obr. 4.5.



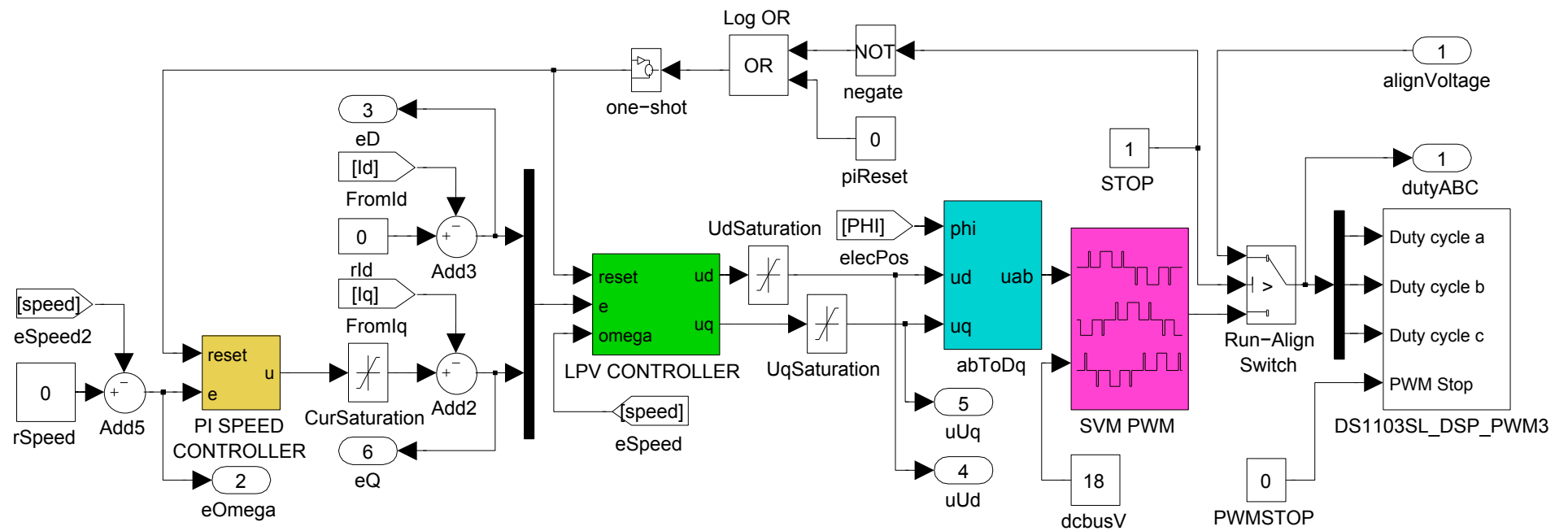
Obr. 4.5: Implementace LPV regulátoru s jedním proměnným parametrem

Vnitřek Matlab Embedded funkce tvoří kód pro výpočet matice regulátoru z rovnice (4.14) a pro výpočet akčního zásahu z rovnice (4.13). Akční zásah v dalším kroku je vypočten z předchozí hodnoty stavu a aktuálních hodnot vstupů a matic regulátoru. Takto vytvořený regulátor je použit jak pro simulace na modelu motoru, tak i pro simulace na reálném motoru. Struktura vektorového řízení je podobná pro obě metody simulace. Proudový LPV regulátor PMSM je simulován společně s PI regulátorem ve vnější otáčkové smyčce kaskádní regulační struktury. Pro dosažení podobných výsledků jsou simulace na modelu motoru opatřeny stejnými omezeními jako v případě reálného motoru. Nastavení konstant PI regulátoru otáček je stejné v obou případech. Vhodné počáteční podmínky pro simulace na reálném motoru jsou zajištěny zarovnáním rotoru na nulovou pozici a vyresetováním vnitřních stavů všech regulátorů. Po naměření výsledků simulací na reálném motoru byly upraveny koeficienty tření a tlumení modelu motoru tak, aby se průběhy výstupních veličin

co nejvíce podobaly průběhům z reálného motoru. Diagram s modelem motoru je zobrazen na Obr. 4.6, diagram pro simulace na reálném motoru je na Obr. 4.7.

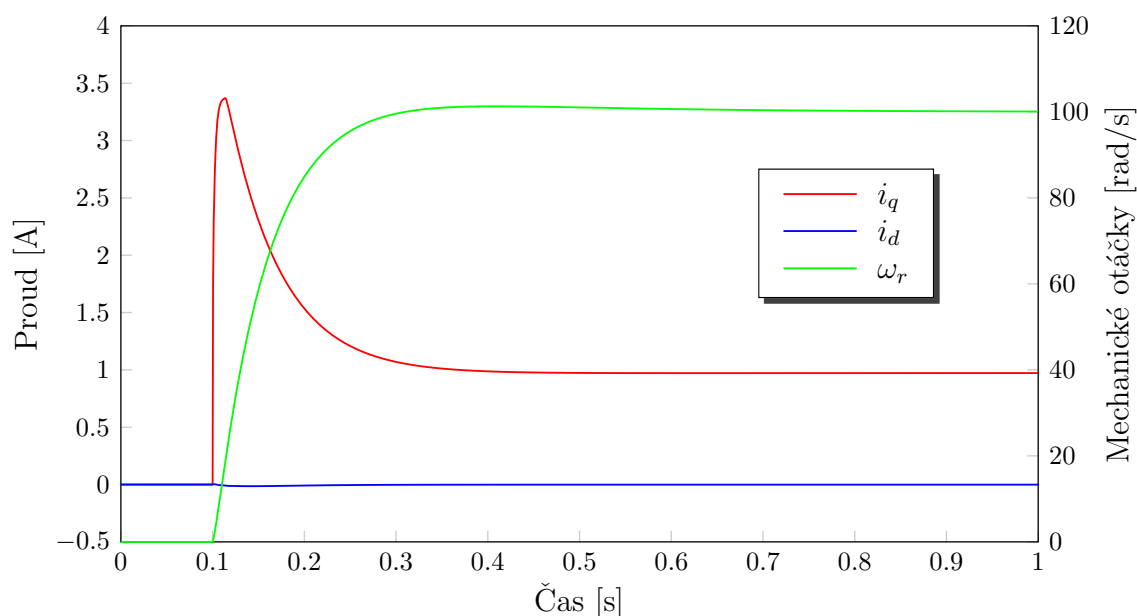


Obr. 4.6: Diagram vektorového řízení modelu synchronního motoru pomocí LPV regulátoru proudu

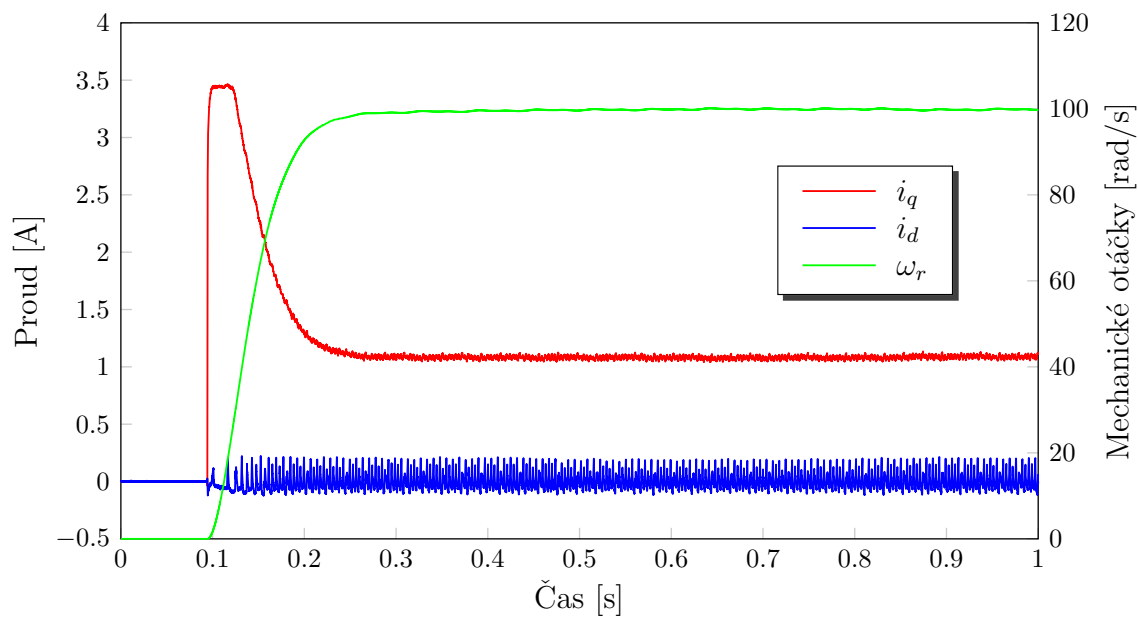


Obr. 4.7: Diagram vektorového řízení reálného synchronního motoru pomocí LPV regulátoru proudu na platformě dSPACE ds1103

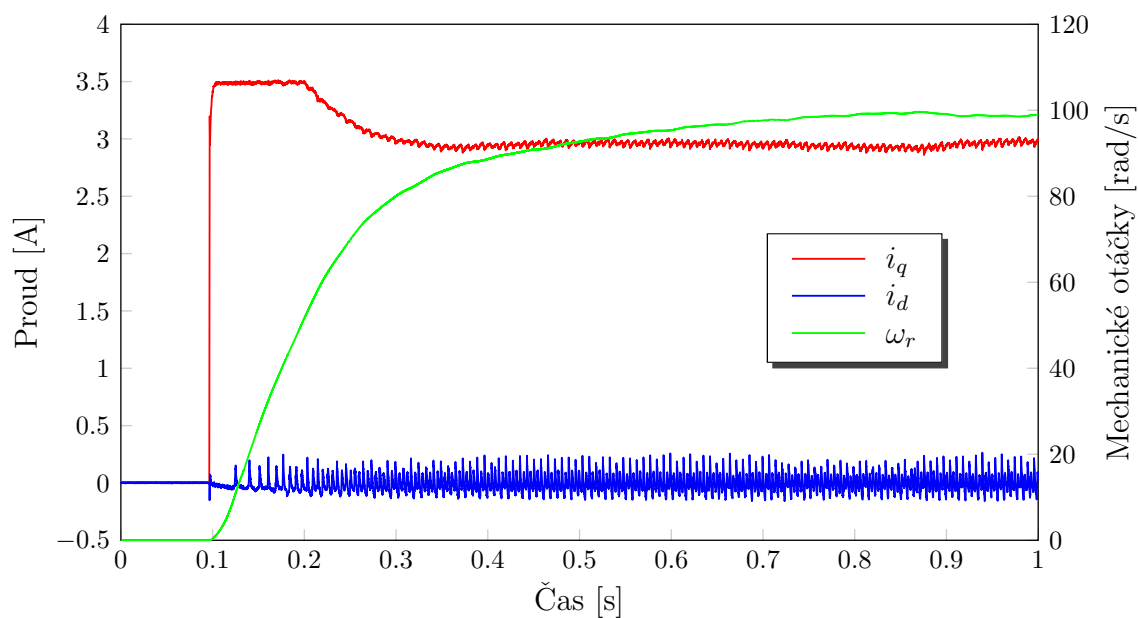
Odezvy proudového LPV regulátoru na skokovou změnu otáček byly naměřeny jak na simulovaném tak i na reálném motoru. Na Obr. 4.8 jsou zobrazeny simulované odezvy na modelu motoru s nominálními parametry. Odezvy na Obr. 4.9 a 4.10 jsou provedeny na reálném motoru. Obrázek 4.9 představuje odezvu na změnu požadovaných otáček nezatíženého motoru a obrázek 4.10 odezvu se zátěží přibližně 0.2Nm. Na průběhu sledovaných veličin je vidět pouze nepatrný rozdíl mezi simulacemi na modelu a simulacemi na reálném motoru. V obou případech je po změně požadované hodnoty otáček aplikován plný akční zásah (3.5A - omezení výkonové desky), který je držen až do okamžiku, kdy aktuální hodnota otáček dosáhne hodnoty blízké požadované hodnotě. Přechodný děj odezní v závislosti na zátěži za 0.2-0.8s. Harmonické zkreslení třífázových proudů 4.11 bylo způsobeno především měničem samotným. K hodnotě akčního zásahu ve formě střídý PWM přidává řídicí obvod střídače tzv. bezpečný čas (dead-time). Tento čas zamezuje současnému sepnutí tranzistorů střídače. Zároveň ale způsobuje harmonické zkreslení třífázových proudů, které se po transformacích projeví jako periodický šum na měřených proudech.



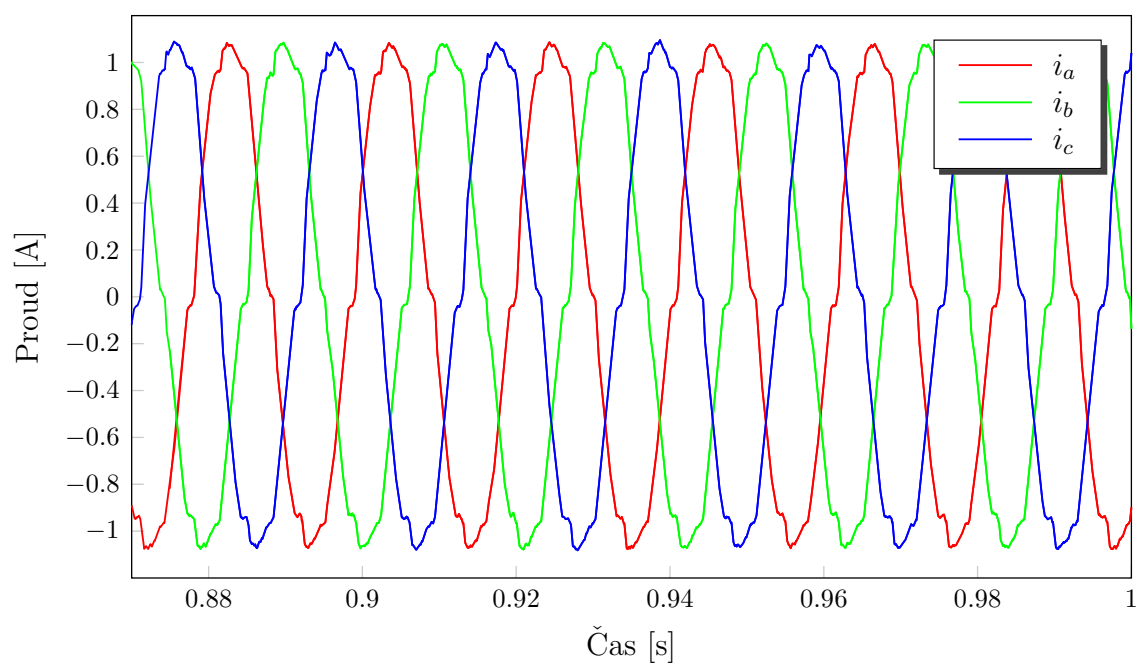
Obr. 4.8: Odezva LPV regulátoru proudu na skokovou změnu otáček - simulace



Obr. 4.9: Odezva LPV regulátoru proudu na skokovou změnu otáček - reálný motor bez zátěže



Obr. 4.10: Odezva LPV regulátoru proudu na skokovou změnu otáček - zatížený reálný motor



Obr. 4.11: Harmonické zkreslení trojfázových proudů vlivem „dead-time“ efektu

4.2 Robustní LPV regulátor otáček PMSM

V této sekci je představen odlišný přístup k řízení otáček PMSM. Regulace neprobíhá v kaskádní struktuře. Navržený regulátor je určen pro nezávislé řízení otáček pomocí jednoho LPV regulátoru.

4.2.1 LPV model PMSM

Stavové rovnice proudové části motoru z předchozí sekce jsou rozšířeny o mechanickou část:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{R_s}{L_d}x_1 + \frac{\omega_m L_q}{L_d}x_2 + \frac{1}{L_d}u_3 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{\omega_m L_d}{L_q}x_1 - \frac{R_s}{L_q}x_2 + \frac{1}{L_q}(u_4 - \omega_m u_1) \\ \dot{x}_3 &= \frac{3}{2J_m}p\bar{\Psi}_f x_2 - \frac{1}{J_m}u_2 - \frac{b}{J_m}x_3 \\ y &= x_3 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Kde x je stavový vektor s veličinami $x = [i_d, i_q, \omega]^T$, u je vektor vstupních veličin $u = [\Phi_f, T_L, u_d, u_q]^T$ a y je výstupní veličina $y = \omega$. Postup vytvoření LPV modelu je téměř identický s postupem sestavení LPV modelu proudové části motoru. Po sestavení matic LPV modelu pro mezní hodnoty otáček bude výsledný tvar LPV modelu shodný s polytopickým tvarem uvedeným v rovnici (4.2). Se systémovými maticemi LPV modelu lze pracovat stejně jako s obyčejnými systémovými maticemi. Konstrukcí obecné zpětnovazební regulační struktury (Obr. 4.1) lze získat následující LPV systémové matice:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_d} & \omega_{min} \frac{L_q}{L_d} & 0 \\ -\omega_{min} \frac{L_d}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2J_m}p\bar{\Psi}_f & -\frac{b}{J_m}\omega_{min} \end{bmatrix} & A_2 &= \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_d} & \omega_{max} \frac{L_q}{L_d} & 0 \\ -\omega_{max} \frac{L_d}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2J_m}p\bar{\Psi}_f & -\frac{b}{J_m}\omega_{max} \end{bmatrix} \\ B_{w1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{min} \frac{1}{L_q} & 0 \end{bmatrix} & B_{u1} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L_d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & B_{w2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{max} \frac{1}{L_q} & 0 \end{bmatrix} & B_{u2} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L_d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} & D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Matice vstupních veličin jsou rozdělené na matice vnějších vstupů w a řídicích vstupů u . Výstupní matice a matice přímých vazeb nebylo vzhledem k jejich obsahu

nutné rozdělovat na matice závislé na minimalizovaných výstupech z a na matice závislé na měřených výstupech y . V maticích A se vyskytuje nominální hodnota magnetického toku rotoru. Do modelu také vstupuje aktuální hodnota magnetického toku, která je považována za neurčitost jejíž vliv má být minimalizován. Volba magnetického toku jako vstupní veličiny byla učiněna čistě z realizačního hlediska a nebylo proto žádoucí vnášet do systému další neurčitost. Z tohoto důvodu je v maticích A dosazena nominální hodnota magnetického toku.

4.2.2 Syntéza regulátoru

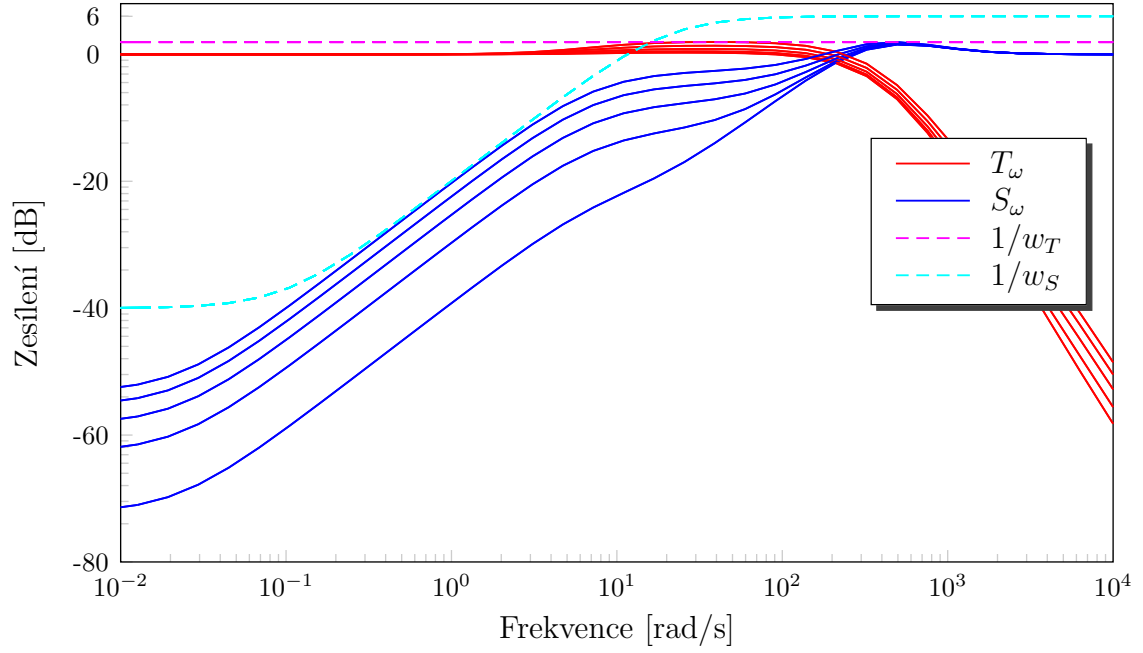
Požadavky na vlastnosti zpětnovazebního systému jsou vyjádřeny váhou citlivostní funkce S a komplementární citlivostní funkce T . Vliv těchto funkcí na zpětnovazební vlastnosti je popsán v sekci 3.2 na straně 41. Stejně jako u LPV regulátoru proudu je váha citlivostní funkce tvaru:

$$W_S = \frac{\frac{1}{M}s + \omega_b}{s + \omega_b A} \quad (4.17)$$

Hodnoty jednotlivých parametrů byly zvoleny následovně: $A = 0.01$, $M = 2$, $\omega_b = 10$. Velikost komplementární citlivostní funkce je omezena statickou váhou o zesílení 0.8. Spojením obecného zpětnovazebního LPV modelu a váhovacích funkcí obdržíme rozšířenou strukturu pro syntézu LPV regulátoru (Obr. 4.2 na straně 67). Postup syntézy regulátoru otáček je shodný s postupem syntézy LPV regulátoru proudu z předchozí sekce. Dodržení kritérií stanovených váhovacími funkcemi bylo ověřeno pomocí frekvenční charakteristiky singulárních hodnot zpětnovazebního obvodu s LPV regulátorem otáček. Z grafu na obrázku 4.12 je patrné, že ve stanoveném rozsahu otáček motoru nepřesahuje citlivostní a komplementární citlivostní funkce stanovené meze.

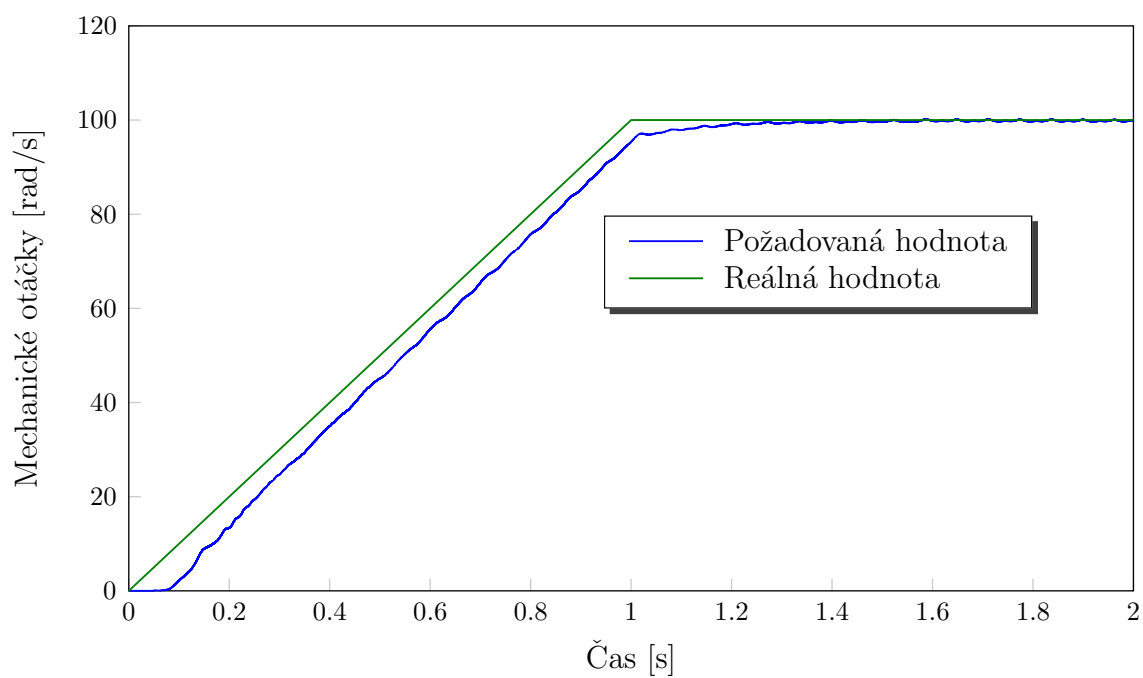
4.2.3 Simulace

Testování LPV regulátoru otáček na reálném motoru bylo provedeno pouze v omezeném rozsahu. Výkonová deska připojená k platformě dSPACE má vnitřní proudovou pojistku, která zajišťuje odpojení výkonových členů od motoru při překročení proudu 3.5A. Při testování skokovou změnou požadovaných otáček docházelo k odpojení motoru. Důvodem přechodného překročení proudu a odpojení motoru je absence omezení proudů ve vnitřní struktuře regulátoru. Tento problém byl vyřešen použitím požadované hodnoty otáček ve formě lineárně rostoucího signálu. Sklon signálu byl zvolen tak, aby nedocházelo k přechodnému překročení limitní hodnoty

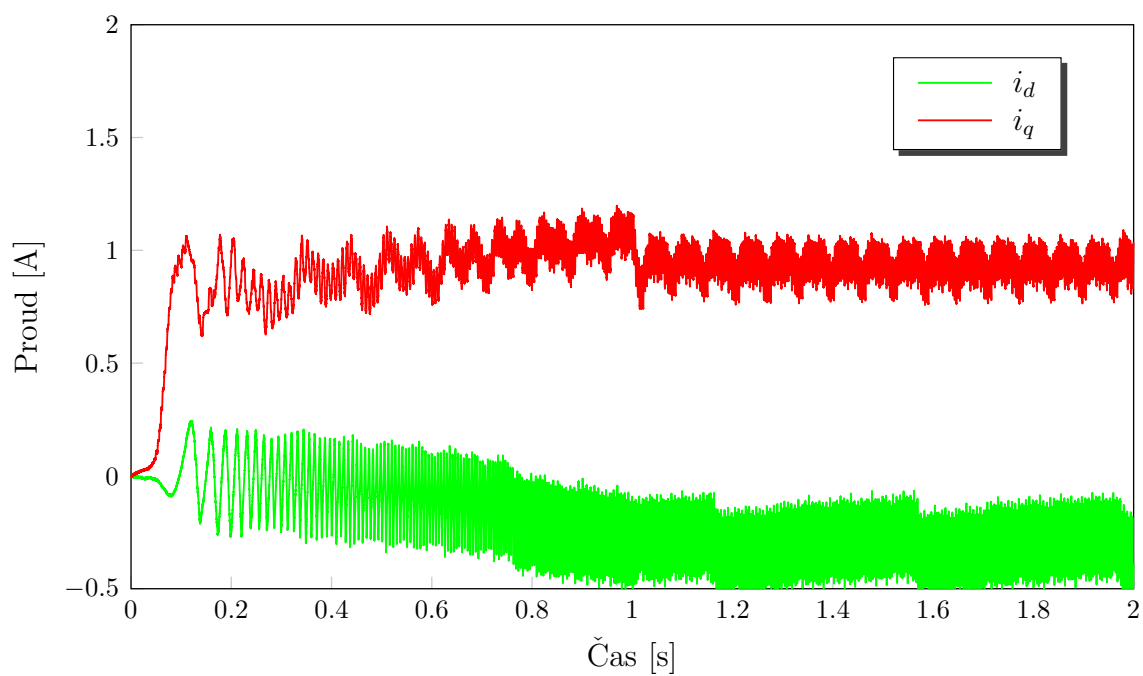


Obr. 4.12: Frekvenční charakteristiky singulárních hodnot S a T PMSM s LPV regulátorem otáček pro $\omega_m \in [-110, 110]$

proudu. Průběh požadovaných a skutečných otáček je zobrazen na Obr. 4.13. Skutečné otáčky sledují požadovanou hodnotu otáček jen s malým zpožděním. Průběhy statorových proudů v $d-q$ souřadnicích (Obr. 4.14) jsou mnohem více zvlněné než v případě proudového LPV regulátoru. LPV regulátor otáček navíc není schopen potlačit vazbu mezi $d-q$ složkami proudu a tím dochází k nežádoucímu odbuzování magnetického toku rotoru. Permanentní magnet použitého motoru byl vyroben ze směsi neodymu o velké síle magnetického pole a tak se toto odbuzování příliš neprojevilo na chování motoru. Problém by mohl nastat u „low-cost“ aplikací s levnějšími permanentními magnety PMSM u kterých by v extrémních případech mohlo dojít k demagnetizaci rotoru. Celkově nevýhody samostatného LPV regulátoru otáček převyšují jeho výhody a tak byla navržena nová varianta kaskádní regulace s robustním LPV regulátorem proudu a neparаметrickým $\mathcal{H}_\infty$ regulátorem otáček.



Obr. 4.13: Přejchodová charakteristika LPV regulátoru otáček



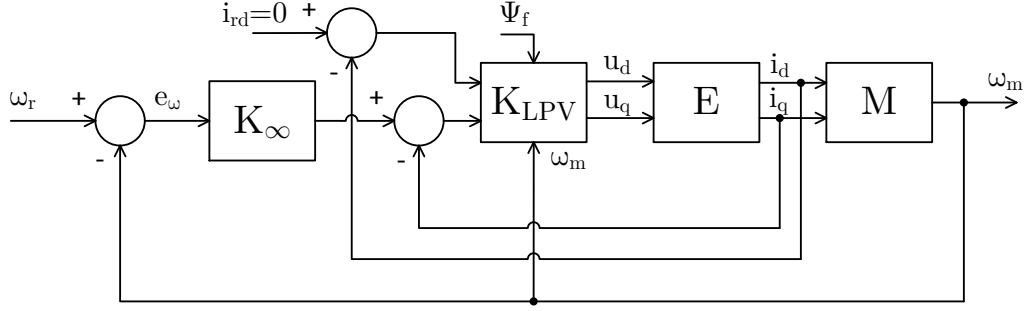
Obr. 4.14: Odezva d - q proudů LPV regulace otáček na skokovou změnu otáček

4.3 Kaskádní regulace otáček PMSM robustními regulátory

Jedním z přínosů kaskádní regulační struktury je možnost řídit odděleně různě rychlé stavové veličiny dynamického systému. V případě elektrických strojů se konkrétně jedná o řízení proudu statorem a řízení otáček motoru. Rozdíl v rychlosti elektrické a mechanické části je jak u synchronních tak i asynchronních motorů značně velký. Návrhem robustního regulátoru na mechanickou část do jisté míry zanedbáváme dynamiku rychlejší elektrické části motoru. Zanedbání dynamických vlastností může později způsobit nežádoucí chování regulační smyčky. Dalším přínosem kaskádní regulační struktury je větší možnost ovlivnit průběh a hlavně velikost satorových proudů při implementaci na reálném motoru. Syntéza robustního LPV regulátoru je určena pro lineární parametrické soustavy a bez použití nelineárního omezení vnitřních stavů soustavy nelze do návrhu zahrnout omezení proudů. Při řízení rychlosti PMSM se z těchto důvodů nejčastěji používá kaskádní regulační struktura. Řešení návrhu regulátoru otáček v kaskádním zapojení je rozděleno na dvě části. V prvním kroku je navržen robustní LPV regulátor proudu na parametrickou soustavu tvořenou elektrickou částí PMSM motoru (postup shodný s postupem v sekci 4.1 na str. 65). Chování takto získaného regulátoru je nutné ověřit pro celý rozsah otáček motoru. Jedním z předpokladů návrhu neparametrického robustního regulátoru otáček je, že dynamika vnitřní proudové smyčky nezávisí na proměnném parametru (otáčkách motoru). Dalším zjednodušujícím předpokladem je rychlá odezva celé proudové smyčky. Po potvrzení těchto vlastností můžeme vnitřní smyčku považovat za blízkou ideálnímu zdroji proudu a soustředit se na návrh robustního regulátoru otáček. Druhým krokem návrhu je sestavení modelu mechanické části PMSM a syntéza robustního $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru otáček.

4.3.1 Ověření robustnosti vnitřní elektrické smyčky

Rychlost a robustnost vztaženou ke změnám proměnného parametru lze ověřit jak pomocí frekvenční charakteristiky singulárních hodnot (viz sekce 4.1 na str. 65), tak i pomocí přechodových charakteristik vnitřní otáčkové smyčky pro různé hodnoty otáček motoru. Pro kaskádní regulaci otáček PMSM byl zvolen modifikovaný LPV regulátor proudu ze sekce 4.1. Modifikace spočívá ve zrychlení přechodného děje proudové smyčky volbou rychlejšího LPV regulátoru (ω_b změněna z hodnoty 0.5 na hodnotu 50). Přechodové charakteristiky proudové smyčky z Obr. 4.16 se pro rozsah otáček -110rad/s až 110rad/s překrývají. Dynamické vlastnosti lze pro tento rozsah považovat za nezávislé na otáčkách motoru. Rychlost přechodného děje



Obr. 4.15: Kaskádní regulační struktura pro řízení proudu a otáček PMSM (E - elektrická část soustavy, M - mechanická část soustavy)

regulátoru otáček je o několik řádů větší než rychlost mechanické části motoru. Zvolený regulátor proudu plně vyhovuje požadavkům pro použití v kaskádní regulační struktuře.

4.3.2 Model mechanické části PMSM

Elektromagnetický moment synchronního motoru s permanentními magnety je dán rovnicí (4.18).

$$T_e = \frac{3}{2}p(\Psi_f i_q + (L_d - L_q)i_d i_q) \quad (4.18)$$

Volbou nulové přímé složky proudu ($i_d = 0$) se přechází rovnice zjednoduší na tvar (4.19).

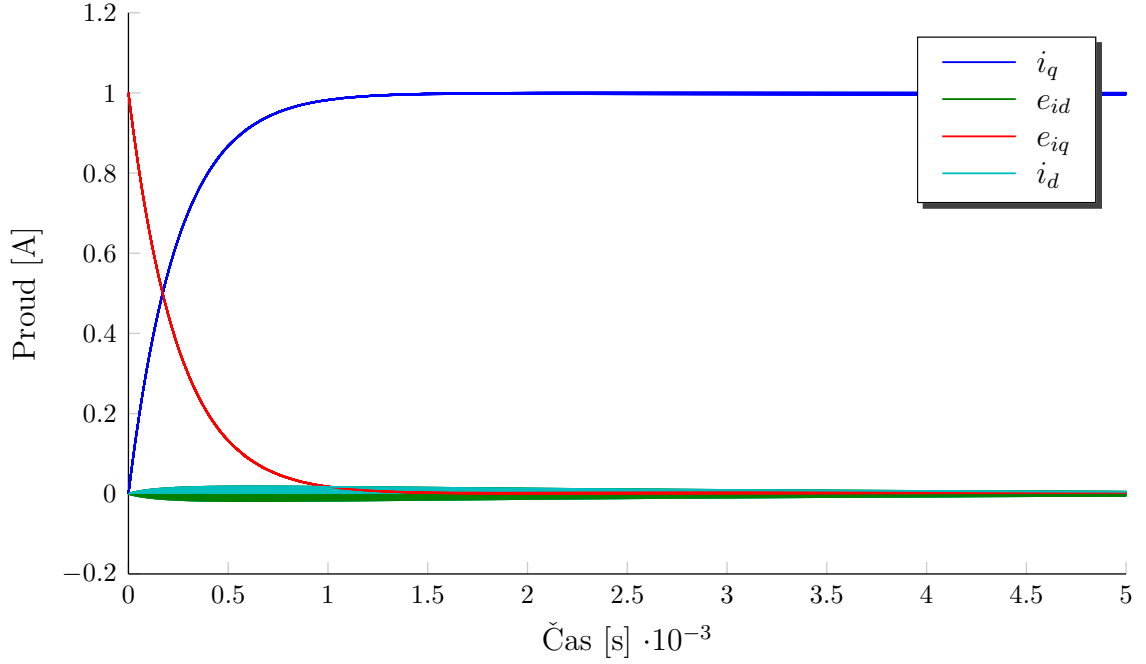
$$T_e = \frac{3}{2}p\Psi_f i_q \quad (4.19)$$

Otáčky motoru jsou závislé na elektromagnetickém momentu sníženém o hodnotu zátěžového momentu a viskózního tření motoru (Zhang et al., 2006; Bingyou, 2009; Rui-wen et al., 2010).

$$J_m \dot{\omega} = T_e - T_L - b\omega \quad (4.20)$$

$$\dot{\omega} = \frac{3}{2J_m}p\Psi_f i_q - \frac{T_L}{J_m} - \frac{b}{J_m}\omega \quad (4.21)$$

Pro syntézu robustního regulátoru otáček je zátěžový moment T_L společně s požadovanou hodnotou otáček r_ω považován za vnější vstupy (w) jejichž vliv má



Obr. 4.16: Přechodová charakteristika proudové části PMSM s LPV regulátorem proudu při parametru $\omega_m \in [-110, 110]$

být minimalizován pomocí řídicího vstupu $i_q(u)$. Vnější výstupy určené pro minimalizaci jsou tvořeny výstupy z váhované citlivostní a komplementární citlivostní funkce zpětnovazebního obvodu (z). Měřeným výstupem vstupujícím do regulátoru je regulační odchylka otáček $e_\omega(y)$. Více informací o obecné regulační struktuře je uvedeno v sekci 3.2.2 na str. 42, obecná struktura je zobrazena na Obr. 3.2. Výsledné systémové matice obecné struktury pro syntézu robustního regulátoru otáček mají následující tvar:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} -\frac{b}{J_m} \end{bmatrix} & B_w &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{J_m} \end{bmatrix} & B_u &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2J_m} p \Psi_f \end{bmatrix} \\
 C_y &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} & D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 C_z &= \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

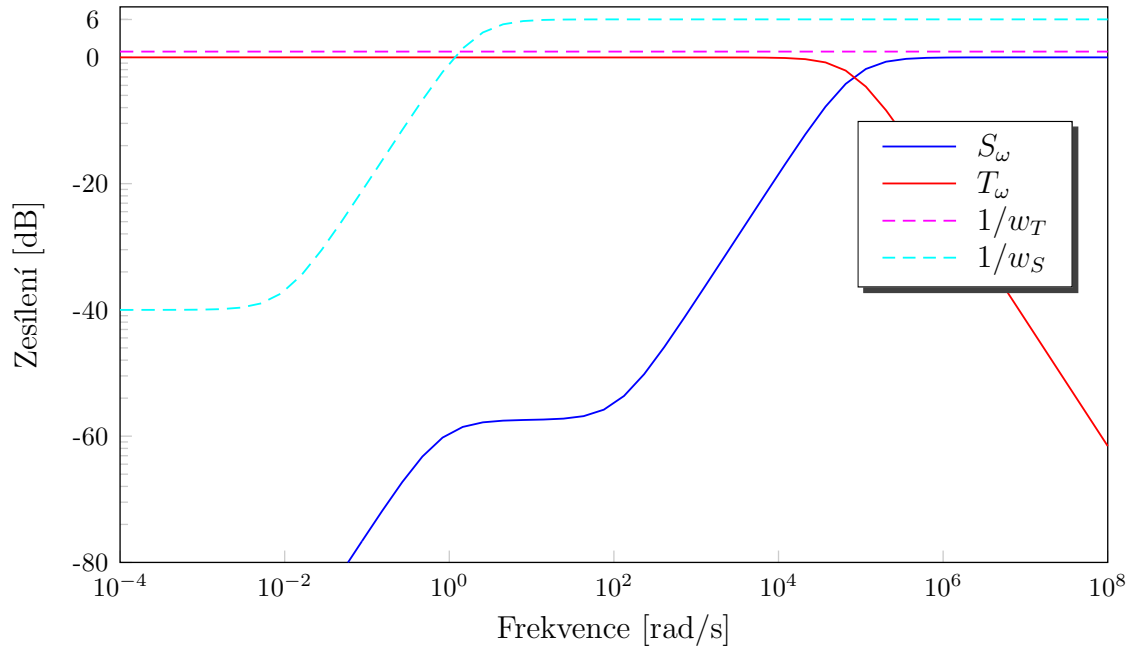
Systémové matice jsou rozděleny podle druhu vstupních a výstupních veličin.

4.3.3 Syntéza regulátoru

Pro tvarování citlivostní funkce byla použita dynamická váha s přenosem (4.23).

$$W_S = \frac{\frac{1}{M}s + \omega_b}{s + \omega_b A} \quad (4.23)$$

Hodnoty jednotlivých parametrů byly zvoleny následovně: $A = 0.01$, $M = 2$, $\omega_b = 1$. Velikost komplementární citlivostní funkce je omezena statickou váhou o zesílení 0.9. Výpočet regulátoru probíhá podobně jako v případě vnitřního proudového regulátoru. Regulátor otáček na rozdíl od regulátoru proudu není parametrický. Pro získání matice X_{cl} a posléze i systémových matic regulátoru je potřeba vyřešit pouze tři LMI (viz. sekce 3.3.3). Vlastnosti získaného regulátoru jsou patrné z frekvenční charakteristiky singulárních hodnot S a T zpětnovazebního obvodu (jeho mechanické části). Na průbězích frekvenční charakteristiky vah a S a T funkcí (Obr. 4.17) je vidět, že by bylo možné ještě více zrychlit rychlostní regulátor, ale z důvodu implementace a omezení velikosti singulárních hodnot matic regulátoru byla ω_b ponechána na původní hodnotě.

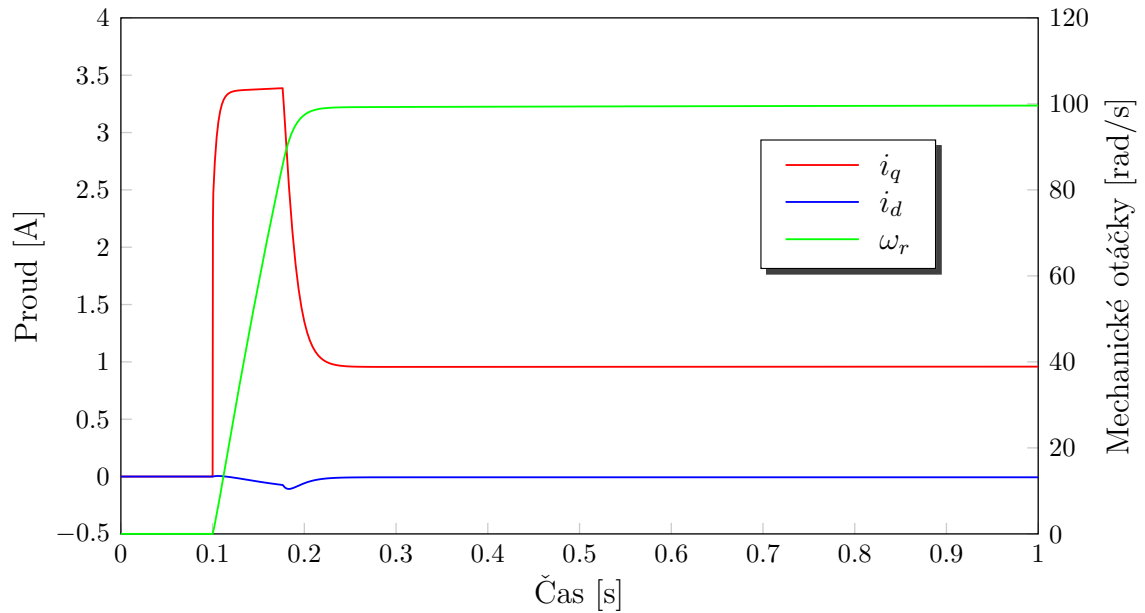


Obr. 4.17: Frekvenční charakteristika singulárních hodnot S a T mechanické části PMSM s $\mathcal{H}_\infty$ regulátorem otáček

4.3.4 Simulace

Kaskádní regulační struktura řízení otáček a proudů PMSM byla ověřena jak simulacně, tak i na reálném motoru na platformě dSPACE ds1103. Jednotlivé kroky vedoucí k implementaci robustních kaskádních regulátorů proudu a otáček jsou shodné

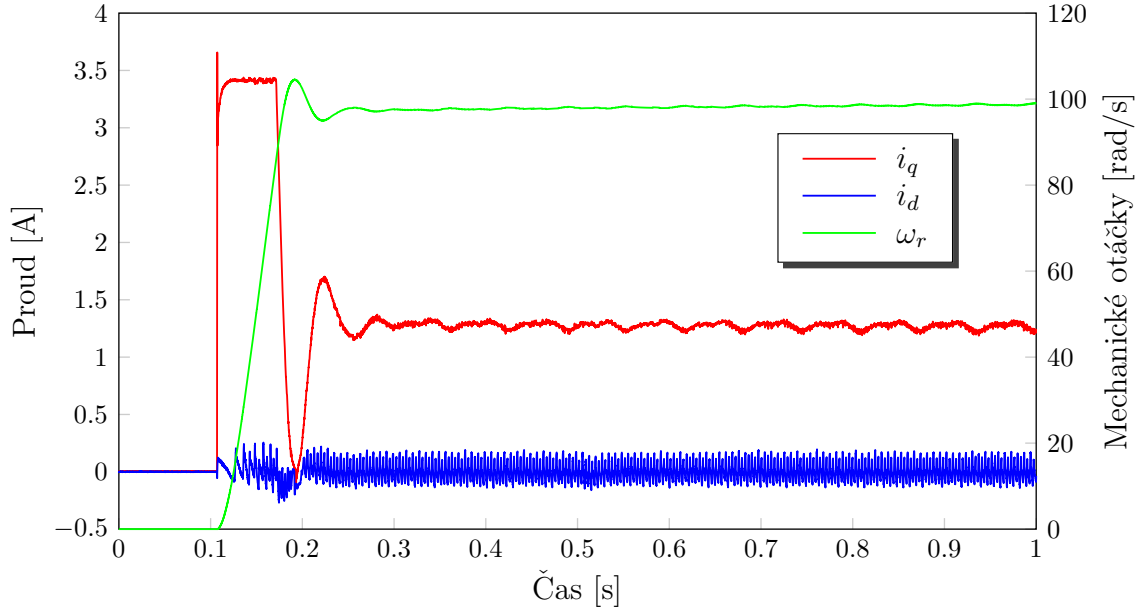
s implementací samotného proudového regulátoru ze sekce 4.1. Na naměřených přechodných dějích je patrný rozdíl mezi simulacemi a měřením na reálném motoru (Obr. 4.18 a Obr. 4.19). Při použití mnohem rychlejšího proudového regulátoru se více projeví parazitní vlivy a nepřesnosti identifikace jednotlivých parametrů motoru. V porovnání s kaskádní PI regulací je robustní regulace schopná rychleji reagovat na změnu zátěže motoru. Další přínos rychlé reakce na změnu zátěže je možné spatřit na obrázcích 4.19, 4.20 a 4.21. S rostoucí zátěží roste vlivem komutace zvlnění momentu zatěžovacího kartáčového DC motoru. Zvlnění zatěžovacího momentu se robustní regulátor snaží vyregulovat změnou elektrického momentu motoru. Ve výsledku je s robustním regulátorem při zatížení DC motorem menší zvlnění otáček motoru než s PI regulátorem.



Obr. 4.18: Simulace odezvy robustního kaskádního $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru otáček a LPV regulátoru proudu synchronního motoru na skokovou změnu otáček

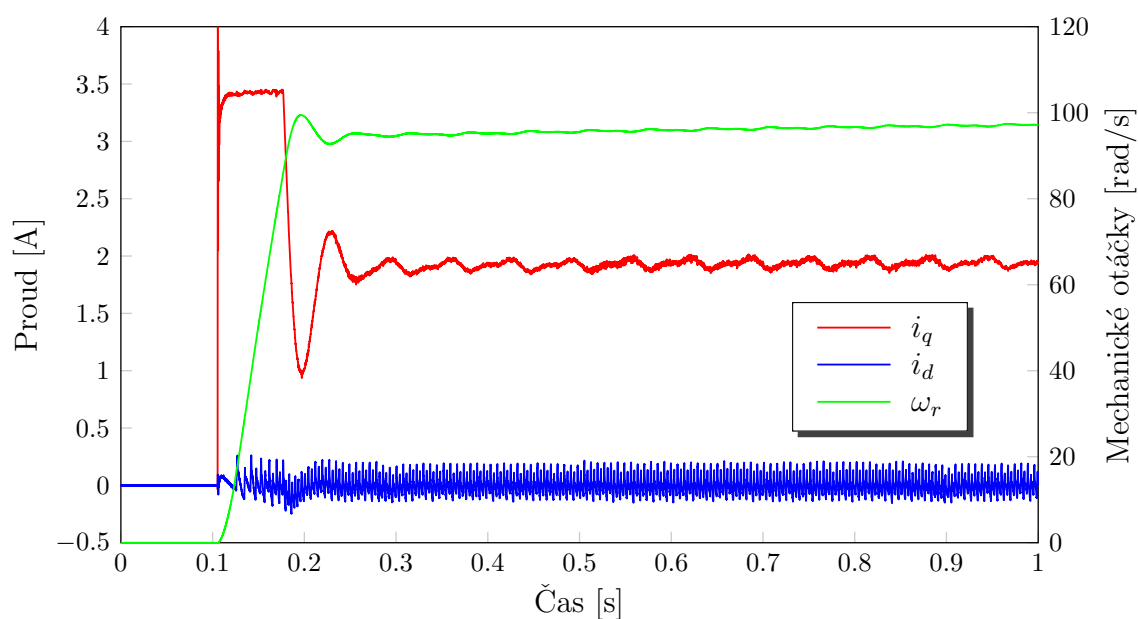
4.3.5 Vliv vlastností proudové smyčky na potlačení zatěžovacího momentu

Závěr této sekce ukazuje dopad nevhodně zvoleného proudového regulátoru na robustnost kaskádní regulace otáček. Jedním z předpokladů rychlého vyregulování otáček při různých hodnotách zatěžovacího momentu je rychlá odezva regulátoru proudu. Regulátor proudu z obrázku 4.16 je schopen ustálit přechodný děj za přibližně $1ms$. Pro demonstrační účely byl vytvořen pomalejší regulátor, který má sice rychlou prvotní odezvu ale doba ustálení se pohybuje okolo jedné sekundy (Obr.

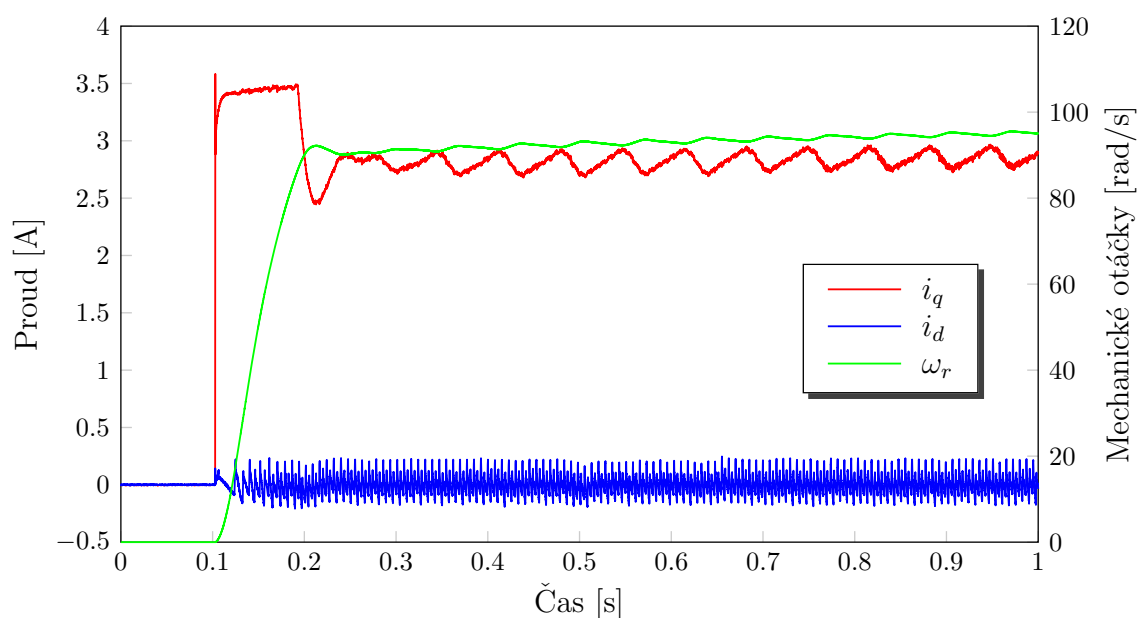


Obr. 4.19: Odezva robustního kaskádního $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru otáček a LPV regulátoru proudu na skokovou změnu otáček reálného synchronního motoru bez zátěže

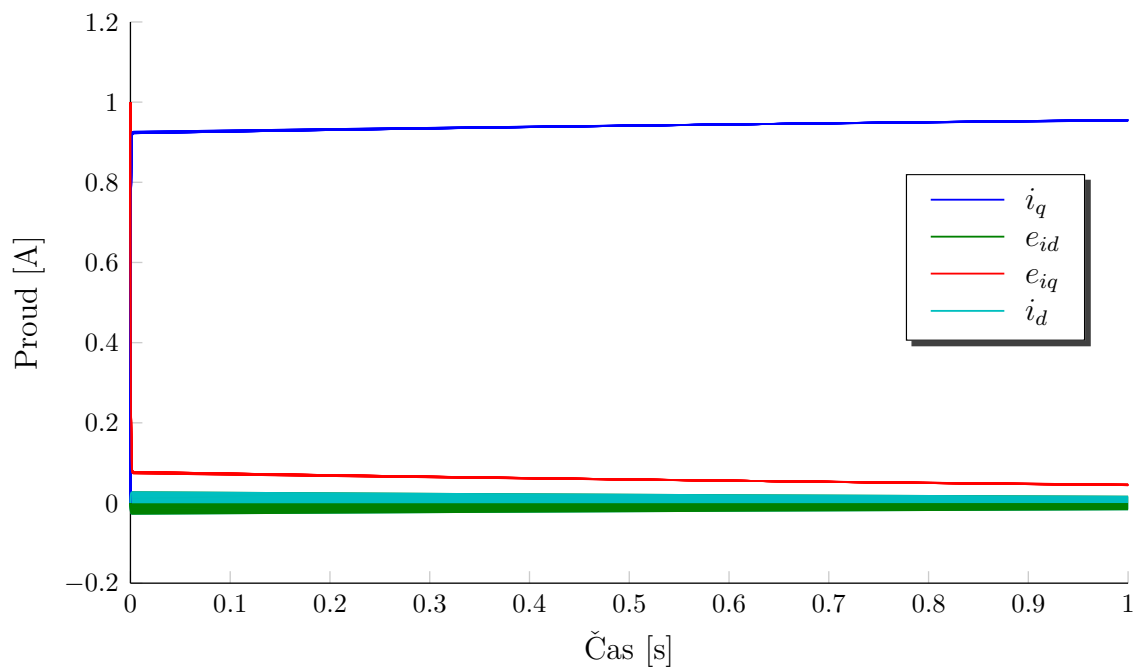
4.22). Tato nežádoucí vlastnost se projeví na rychlostní regulaci pomalejším ustálením otáček. S rostoucí hodnotou poruchy se prodlužuje doba nutná pro ustálení otáček na požadované hodnotě. Na obrázku 4.23 je zobrazena skoková odezva kaskádní regulace otáček se stejným regulátorem otáček jako v případě odezvy z Obr. 4.21. Na obou průbězích je zřetelný rozdíl způsobený odlišným regulátorem proudu. Doba ustálení otáček motoru do jisté míry kopíruje průběh ustálení proudového regulátoru. Je také pravděpodobné, že kromě pomalého regulátoru proudu je na vině i samotný $\mathcal{H}_\infty$ regulátor otáček. Ten totiž stejně jako robustní LPV regulátor proudu neobsahuje čistě integrační složku ale jen její přibližnou aproximaci. Pokud nemá vnitřní proudová smyčka ustálenou odchylku blízkou nule není ani $\mathcal{H}_\infty$ regulátor otáček schopný dosáhnout nulové ustálené odchylky.



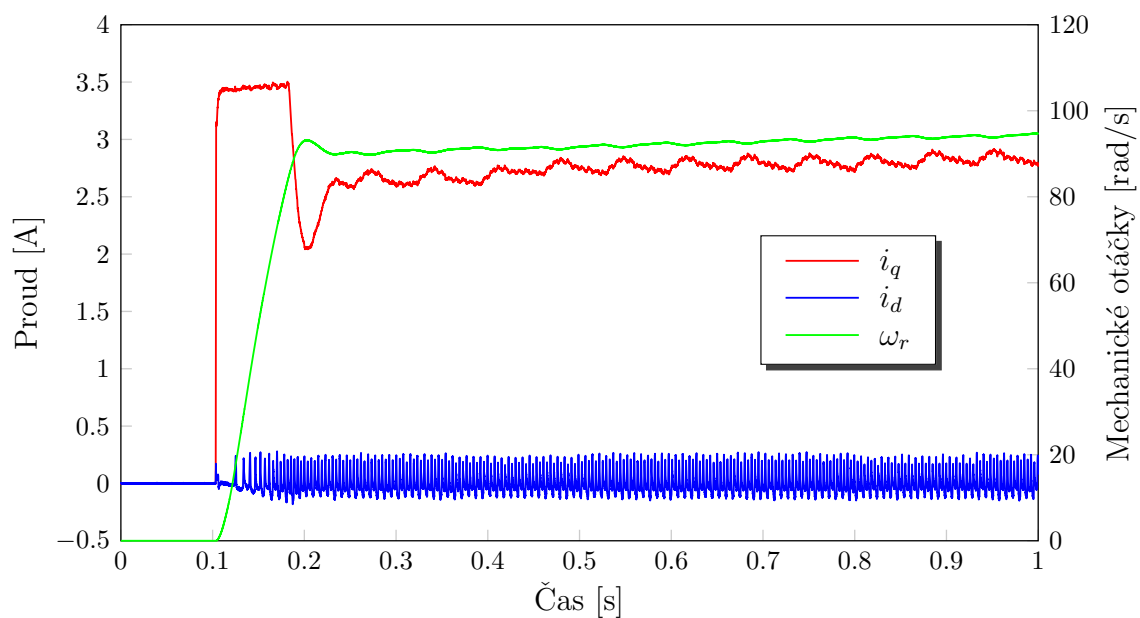
Obr. 4.20: Odezva robustního kaskádního $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru otáček a LPV regulátoru proudu na skokovou změnu otáček reálného synchronního motoru při středně velké zátěži



Obr. 4.21: Odezva robustního kaskádního $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru otáček a LPV regulátoru proudu na skokovou změnu otáček reálného synchronního motoru při velké zátěži



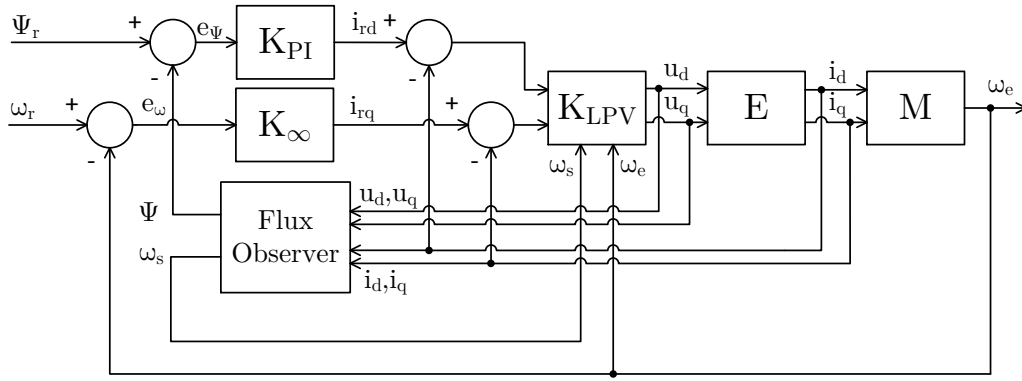
Obr. 4.22: Přebodová charakteristika pomalejšího proudového LPV regulátoru při parametru $\omega_m \in [-110, 110]$



Obr. 4.23: Odezva robustního kaskádního $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru otáček a nevhodně zvoleného LPV regulátoru proudu na skokovou změnu otáček

4.4 Kaskádní regulace otáček IM robustními regulátory

Regulace otáček asynchronního motoru (IM) je v této kapitole řešena pomocí kaskádní regulační struktury. Z předchozích kapitol o synchronním motoru vyplynulo, že se jedná o nevhodnější přístup k řízení elektrických motorů. Kapitola kaskádní regulace otáček IM je rozdělena na dvě hlavní části. První část se zabývá návrhem vnitřního LPV regulátoru proudu. Ve druhé části je popsána syntéza vnějšího $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru otáček. Postupy návrhu jednotlivých robustních regulátorů pro asynchronní motor jsou shodné s postupy pro synchronní motor.



Obr. 4.24: Kaskádní regulační struktura pro řízení proudu a otáček IM (E - elektrická část soustavy, M - mechanická část soustavy)

4.4.1 LPV model elektrické části IM

V této sekci jsou uvedeny pouze klíčové body a případné rozdíly oproti návrhu LPV regulátoru proudu synchronního motoru. Z rovnic asynchronního motoru v d-q souřadnicovém systému spojeným s magnetickým tokem rotoru (kapitola 2.1.2, str.20) se volbou stavového vektoru $x = [i_{sd}, i_{sq}, \Psi_{rd}, \Psi_{rq}]$, vektoru výstupních veličin $y = [i_{sd}, i_{sq}]$ a vektoru vstupních veličin $u = [u_{sd}, u_{sq}]$ získá následující stavový popis proudové části asynchronního motoru:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{R_s L_r + R_r L_m^2}{L_r^2} x_1 + \omega_s \frac{L_s L_r - L_m^2}{L_r} x_2 + \frac{R_r L_m}{L_r^2} x_3 + \frac{L_m}{L_r} x_4 + \frac{L_r}{L_s L_r - L_m^2} u_1 \\
\dot{x}_2 &= -\omega_s \frac{L_s L_r - L_m^2}{L_r} x_1 - \frac{R_s L_r + R_r L_m^2}{L_r^2} x_2 - \frac{L_m}{L_r} x_3 + \frac{R_r L_m}{L_r^2} x_4 + \frac{L_r}{L_s L_r - L_m^2} u_2 \\
\dot{x}_3 &= \frac{R_r L_m}{L_r} x_1 - \frac{R_r}{L_r} x_3 + (\omega_s - \omega_e) x_4 \\
\dot{x}_4 &= \frac{R_r L_m}{L_r} x_2 - \frac{R_r}{L_r} x_4 + (\omega_e - \omega_s) x_3 \\
y &= [x_1, x_2]^T
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Elektrická a synchronní rychlost ω_e, ω_s se zvolí za plánovací proměnné v rozsahu $[-200, 200]$ a $[-220, 220]$, což představuje maximálně 10% skluz. Výsledný LPV systém je podobného tvaru jako v případě proudového regulátoru PMSM (rovnice (4.2)). Systémové matice jsou oproti PMSM závislé na dvou proměnných parametrech. Podle zvolené formy se bude parametrický systém skládat ze tří (affiní popis), nebo ze čtyř (polytopický popis) systémů. Konstrukcí zpětné vazby od $d-q$ proudů vzniknou systémové matice parametrického (polytopického) systému (4.26).

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{bmatrix} -\frac{R_s L_r + R_r L_m^2}{L_r^2} & \omega_{smin} \frac{L_s L_r - L_m^2}{L_r} & \frac{R_r L_m}{L_r^2} & \frac{L_m}{L_r} \\ -\omega_{smin} \frac{L_s L_r - L_m^2}{L_r} & -\frac{R_s L_r + R_r L_m^2}{L_r^2} & -\frac{L_m}{L_r} & \frac{R_r L_m}{L_r^2} \\ \frac{R_r L_m}{L_r} & 0 & -\frac{R_r}{L_r} & \omega_{smin} - \omega_{emin} \\ 0 & \frac{R_r L_m}{L_r} & \omega_{emin} - \omega_{smin} & 0 \end{bmatrix} \\
A_2 &= \begin{bmatrix} -\frac{R_s L_r + R_r L_m^2}{L_r^2} & \omega_{smax} \frac{L_s L_r - L_m^2}{L_r} & \frac{R_r L_m}{L_r^2} & \frac{L_m}{L_r} \\ -\omega_{smax} \frac{L_s L_r - L_m^2}{L_r} & -\frac{R_s L_r + R_r L_m^2}{L_r^2} & -\frac{L_m}{L_r} & \frac{R_r L_m}{L_r^2} \\ \frac{R_r L_m}{L_r} & 0 & -\frac{R_r}{L_r} & \omega_{smax} - \omega_{emin} \\ 0 & \frac{R_r L_m}{L_r} & \omega_{emin} - \omega_{smax} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= \begin{bmatrix} -\frac{R_s L_r + R_r L_m^2}{L_r^2} & \omega_{smin} \frac{L_s L_r - L_m^2}{L_r} & \frac{R_r L_m}{L_r^2} & \frac{L_m}{L_r} \\ -\omega_{smin} \frac{L_s L_r - L_m^2}{L_r} & -\frac{R_s L_r + R_r L_m^2}{L_r^2} & -\frac{L_m}{L_r} & \frac{R_r L_m}{L_r^2} \\ \frac{R_r L_m}{L_r} & 0 & -\frac{R_r}{L_r} & \omega_{smin} - \omega_{emax} \\ 0 & \frac{R_r L_m}{L_r} & \omega_{emax} - \omega_{smin} & 0 \end{bmatrix} \\
A_4 &= \begin{bmatrix} -\frac{R_s L_r + R_r L_m^2}{L_r^2} & \omega_{smax} \frac{L_s L_r - L_m^2}{L_r} & \frac{R_r L_m}{L_r^2} & \frac{L_m}{L_r} \\ -\omega_{smax} \frac{L_s L_r - L_m^2}{L_r} & -\frac{R_s L_r + R_r L_m^2}{L_r^2} & -\frac{L_m}{L_r} & \frac{R_r L_m}{L_r^2} \\ \frac{R_r L_m}{L_r} & 0 & -\frac{R_r}{L_r} & \omega_{smax} - \omega_{emax} \\ 0 & \frac{R_r L_m}{L_r} & \omega_{emax} - \omega_{smax} & 0 \end{bmatrix} \\
B_w &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_u = \begin{bmatrix} \frac{L_r}{L_s L_r - L_m^2} & 0 \\ 0 & \frac{L_r}{L_s L_r - L_m^2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
C_z &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
D &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Matice B_w , B_u , C_z , C_y a D jsou nezávislé na proměnných parametrech a jsou společné pro všechny čtyři rohové systémy obecné regulační struktury. Do této struktury vstupují vnější vstupy $w = [r_{isd}, r_{isq}]$, řídicí vstupy $u = [u_{sd}, u_{sq}]$, a vystupují výstupy pro optimalizaci $z = [i_{sd}, i_{sq}, e_{isd}, e_{isq}]$ a měřené výstupy (vstupy regulátoru) $y = [e_{isd}, e_{isq}]$. Připojením váhovacích funkcí k výstupům z vznikne rozšířená struktura pro syntézu LPV regulátoru proudu asynchronního motoru. Výsledný polytopický model asynchronního motoru je složen ze čtyř váhovaných systémů. Váha jednotlivých systémů je dána aktuální hodnotou obou proměnných parametrů.

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= (A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 + A_3 \alpha_3 + A_4 \alpha_4)x + Bu \\
y &= Cx + Du
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Výpočet parametrů α_1 až α_4 se provede podle aktuální hodnoty otáček motoru a otáček magnetického pole následujícím způsobem:

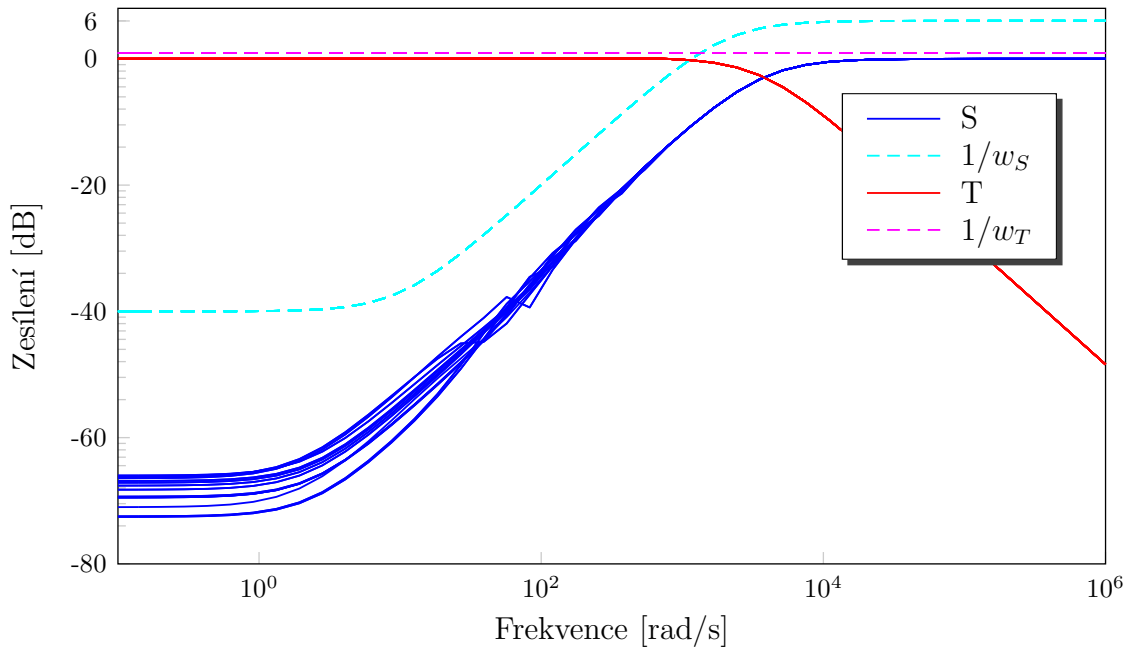
$$\alpha_1 = xy \quad \alpha_2 = (1-x)y \quad \alpha_3 = x(1-y) \quad \alpha_4 = (1-x)(1-y)$$

$$x = \frac{\omega_{smax} - \omega_s}{\omega_{smax} - \omega_{smin}} \quad y = \frac{\omega_{emax} - \omega_e}{\omega_{emax} - \omega_{emin}}$$

Z předchozích vztahů vyplývá, že matice A_1 je pro mezní hodnoty $[\omega_{smin}, \omega_{emin}]$, A_2 pro mezní hodnoty $[\omega_{smax}, \omega_{emin}]$, A_3 pro mezní hodnoty $[\omega_{smin}, \omega_{emax}]$ a A_4 pro mezní hodnoty $[\omega_{smax}, \omega_{emax}]$.

4.4.2 Syntéza LPV regulátoru proudu

Tvarování citlivostní a komplementární citlivostní funkce se provádí váhovacími funkcemi stejného tvaru jako v případě synchronního motoru (4.4). Teorie podle které je provedena syntéza LPV regulátoru proudu asynchronního motoru je uvedena v sekci 3.3.3 na str. 55. Frekvenční charakteristika singulárních hodnot zpětnovazebního obvodu s výsledným regulátorem je vykreslena na Obr. 4.25. Hranice stanovené váhami citlivostní a komplementární citlivostní funkce nebyly překročeny v celém rozsahu sledovaných frekvencí.



Obr. 4.25: Frekvenční charakteristiky singulárních hodnot S a T elektrické části IM s LPV regulátorem proudu při $\omega_s \in [-220, 220]$ a $\omega_e \in [-200, 200]$

4.4.3 Model mechanické části IM

Elektromagnetický moment asynchronního motoru je dán rovnicí (4.28).

$$T_e = \frac{3}{2}p(\Psi_{rd}i_{sq} - \Psi_{rq}i_{sd}) \quad (4.28)$$

Z elektromagnetického momentu lze vypočítat elektrickou rychlost asynchronního motoru v $d - q$ souřadnicovém systému (4.29).

$$\dot{\omega}_e = \frac{1}{J} \left[\frac{3}{2}p(\Psi_{rd}i_{sq} - \Psi_{rq}i_{sd}) - T_L - \omega_e \right] \quad (4.29)$$

U souřadnicového systému spojeného s magnetickým tokem rotoru uvažujeme, že q složka magnetického toku je rovna nule:

$$\dot{\omega}_e = \frac{1}{J} \left(\frac{3}{2}p\bar{\Psi}_{rd}i_{sq} - T_L - B\omega_e \right) \quad (4.30)$$

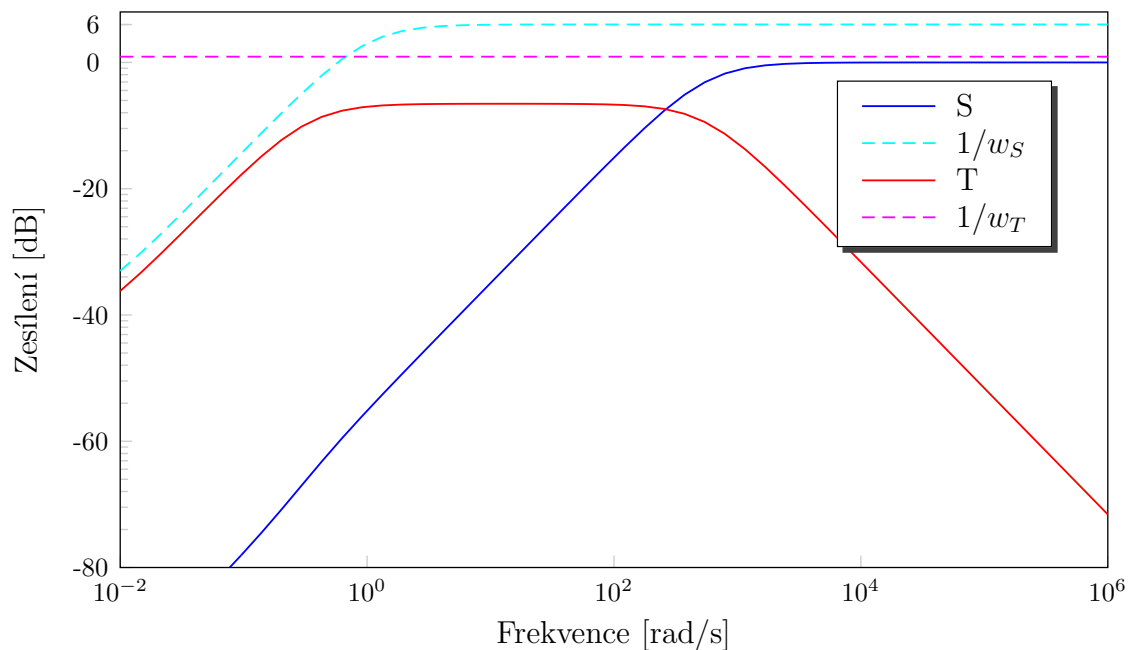
Kde B je hodnota viskózního tření a T_L je zatěžovací moment. Stejně jako v případě synchronního motoru se regulace otáček asynchronního motoru zjednoduší, pokud bude mít vnitřní smyčka vlastnosti podobné ideálnímu zdroji proudu. Elektrický moment asynchronního motoru nyní závisí pouze na hodnotě d složky magnetického toku Ψ_{rd} a q složky proudu statoru i_{sq} . Hodnota q složky proudu statoru je brána jako vstupní veličina. Vzhledem k tomu, že se obvykle rotor asynchronního motoru budí na konstantní hodnotu, tak můžeme hodnotu Ψ_{rd} považovat za konstantu. Zpětnou vazbou od elektrických otáček motoru se vytvoří obecná regulační struktura s těmito systémovými maticemi:

$$\begin{aligned} A &= \left[-\frac{B}{J_m} \right] B_w = \left[-\frac{1}{J_m} \quad 0 \right] B_u = \left[\frac{3}{2}p\bar{\Psi}_{rd} \right] \\ C_z &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} C_y = [-1] D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Kde $w = [r_{\omega_e}, T_L]$ jsou vnější vstupy, $u = r_{iq}$ je řídicí vstup, $z = [\omega_e, e_{\omega_e}]$ výstupy pro optimalizaci a $y = e_{\omega_e}$ měřený výstup (vstup regulátoru).

4.4.4 Syntéza regulátoru otáček

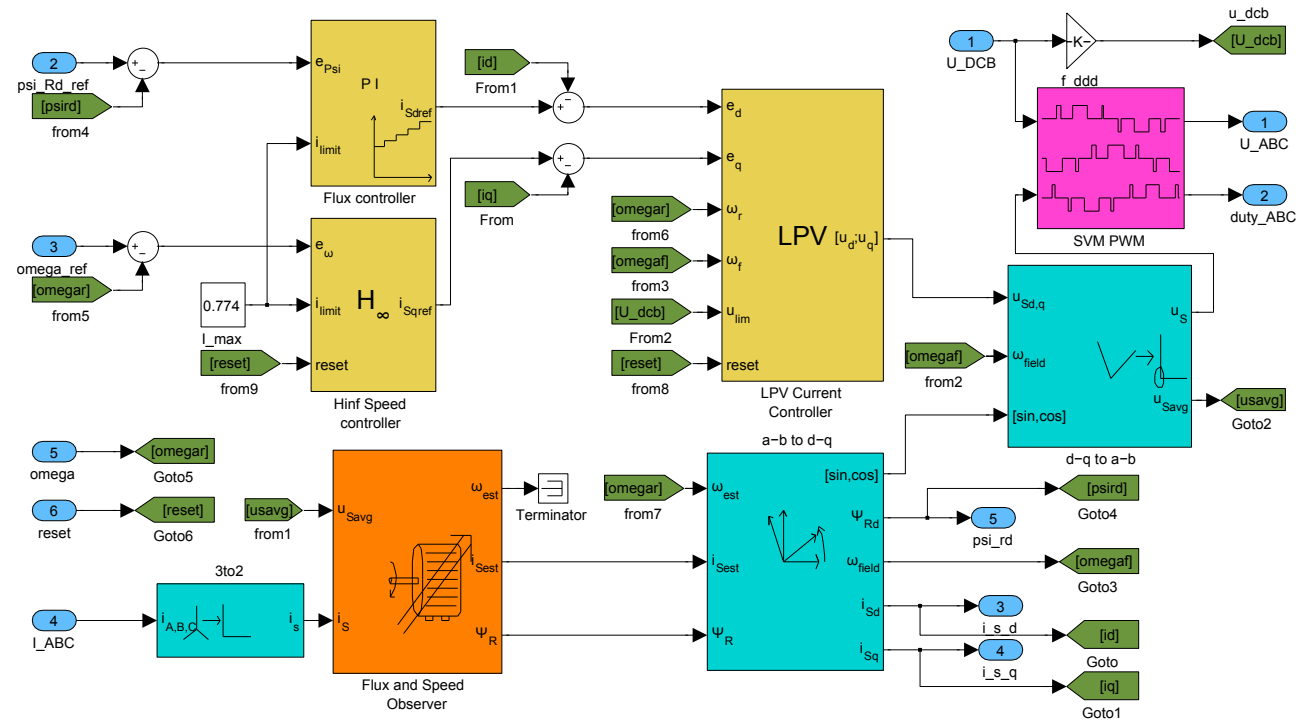
Po syntéze robustního $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru otáček na obecnou zpětnovazební strukturu rozšířenou o váhovací funkce lze sestavit zpětnovazební obvod. Frekvenční charakteristika singulárních hodnot citlivostní a komplementární citlivostní funkce zpětnovazební obvodu s $\mathcal{H}_\infty$ regulátorem otáček je vykreslena na Obr. 4.26. Hranice stanovené váhami citlivostní a komplementární citlivostní funkce nebyly na žádné frekvenci porušeny.



Obr. 4.26: Frekvenční charakteristiky singulárních hodnot S a T mechanické části IM s $\mathcal{H}_\infty$ regulátorem otáček

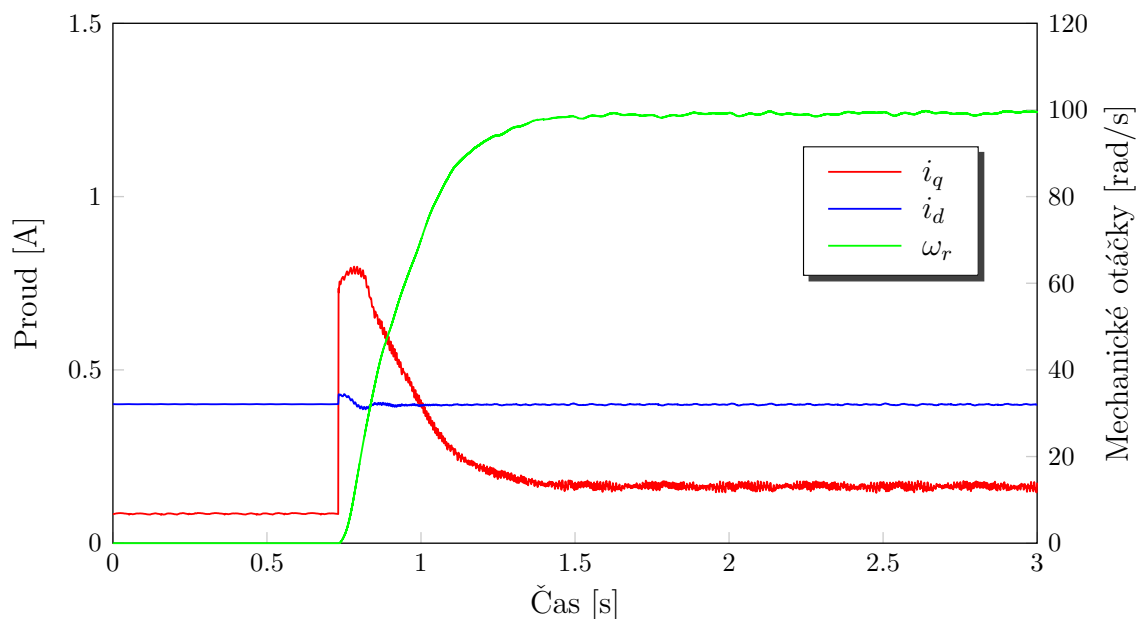
4.4.5 Simulace kaskádního regulátoru IM

Robustní regulátory byly navrženy na hodnoty reálného asynchronního motoru s parametry uvedenými v tabulce 4.2 na konci této sekce. Simulace na tomto motoru byly provedeny na platformě dSPACE ds1103 propojené s vysokonapětovou deskou. Simulační diagram z Obr. 4.27 má velmi podobnou strukturu jako u diagramu pro synchronní motor. Skládá se z LPV regulátoru proudu ve vnitřní smyčce, $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru otáček a PI regulátoru toku ve vnější smyčce. Do LPV regulátoru vstupují regulační odchylky d - q proudů, synchronní frekvence ω_s a rychlost rotoru ω_r . Magnetický tok asynchronního motoru nebylo možné měřit přímo na motoru a musel být estimován z hodnot statorového napětí a proudu.



Obr. 4.27: Diagram vektorového řízení reálného asynchronního motoru pomocí LPV regulátoru proudu a $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru otáček

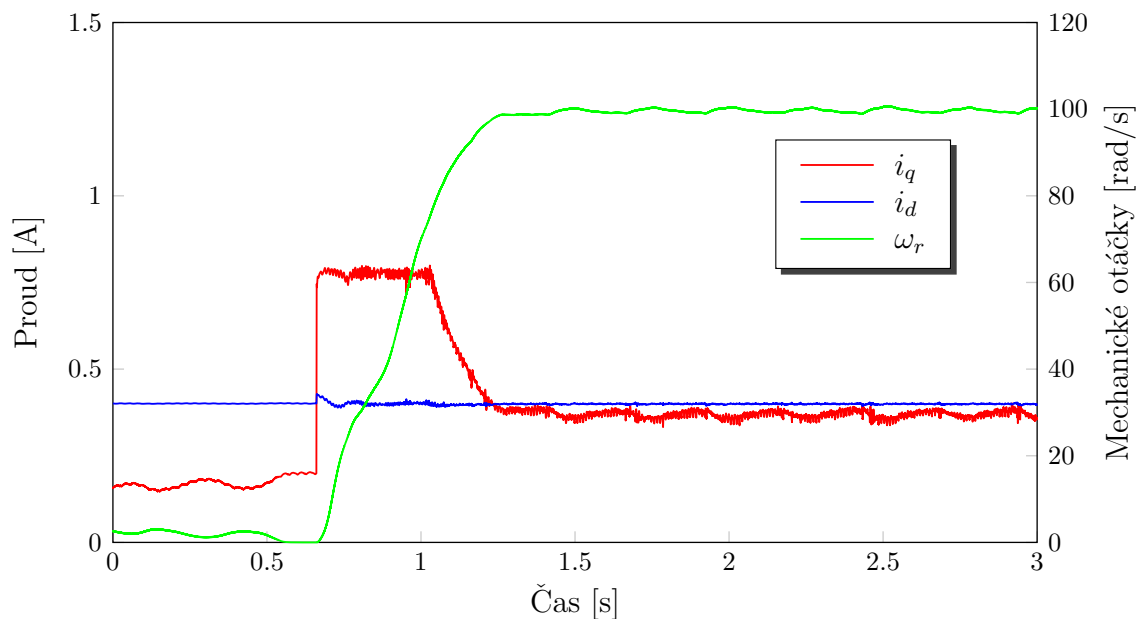
Robustní regulátory byly testovány skokovou změnou požadovaných otáček z nulové hodnoty na 100rad/s . Statické omezení proudu v $d - q$ souřadnicích bylo při maximálním fázových proudech (i_a, i_b, i_c) 1.34A zvoleno 0.774A . Použitím dynamického omezení proudu by bylo možné tuto hodnotu zvýšit až na hodnotu omezení fázových proudů (1.34A), ale pro účely testování při zátěži plně dostačoval proud 0.774A . Odezvy robustních regulátorů v kaskádním zapojení na skokový požadavek otáček jsou zobrazeny v grafech na Obr. 4.28 a 4.29.



Obr. 4.28: Odezva robustního kaskádního $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru otáček a LPV regulátoru proudu na skokovou změnu otáček reálného asynchronního motoru bez zátěže

Na charakteristice zatíženého motoru (Obr. 4.29) je vidět, že robustní regulátory zajišťují téměř stejnou dobu ustálení otáček motoru bez ohledu na velikosti zatěžovacího momentu. Průběhy $d - q$ proudů jsou při přechodném ději v malé míře ovlivněny vazbou mezi těmito složkami. Vazbu mezi $d - q$ složkami by bylo možné odstranit použitím metody zpětnovazební linearizace. Pro řádné zrušení vazeb je nutné znát přesné hodnoty motoru a změna těchto parametrů by mohla mít dopad na robustnost řízení. I bez použití zpětnovazební linearizace je robustní LPV regulátor proudu schopný tuto poruchu v krátké době eliminovat.

Robustní regulátory zapojené v kaskádní struktuře dokazují, že použitím kombinace LPV regulátoru proudu a $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru otáček je možné potlačit vliv zatěžovacího momentu na dynamické vlastnosti regulace otáček elektrických motorů. LPV regulátor proudu zajišťuje nezávislost vnitřní smyčky na otáčkách rotoru a $\mathcal{H}_\infty$



Obr. 4.29: Odezva robustního kaskádního $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru otáček a LPV regulátoru proudu na skokovou změnu otáček reálného asynchronního motoru se zátěží

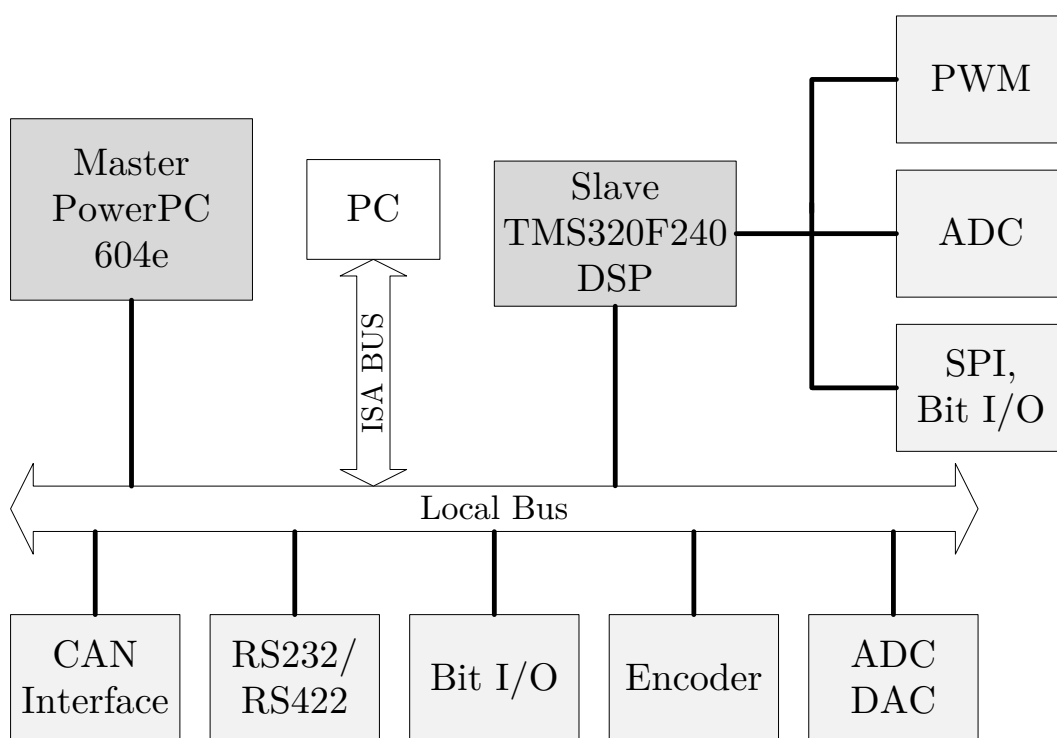
regulátor otáček potlačuje poruchy způsobené změnou zatěžovacího momentu.

Tab. 4.2: Nominální hodnoty IM

Parametr	Symbol	Nominální hodnota
Počet pólových dvojic	p	2
Odpor statoru	R_s	28Ω
Odpor rotoru	R_r	35Ω
Indukčnost statoru	L_s	$1.4H$
Indukčnost rotoru	L_r	$1.4 H$
Vzájemná indukčnost	L_m	$1.2 H$
Moment setrvačnosti	J_m	0.005 kg.m^2

4.5 Implementace algoritmů řízení na platformě dSPACE ds1103

Tato práce se kromě teorie robustního řízení zabývá také jejich implementací na reálných motorech. Vývoj řídicích algoritmů a jejich simulace probíhá v prostředích Matlab a Simulink. Pro rychlý vývoj a testování algoritmů na reálných motorech byla zvolena platforma dSPACE ds1103. Tato platforma reálného času využívá prostředí Simulink pro generování kódu. Hlavním procesorem ds1103 je PowerPC 604e, který je doplněn o signálový procesor (DSP) TMS320F240. Procesor PowerPC lze naprogramovat libovolným vygenerovaným softwarem. Signálový procesor TMS320F240 je od výrobce opatřen firmwarem umožňujícím obsluhu jednotlivých periférií DSP. Hlavní procesor komunikuje s DSP procesorem přes vnitřní sběrnici. Mezi periférie DSP patří například časovače, A/D převodníky, seriová linka a pulsně šířková modulace (PWM). Signálový procesor lze podle tvrzení výrobce také přeprogramovat, ale počet přepisů vnitřní paměti DSP je omezen.



Obr. 4.30: Vnitřní architektura platformy ds1103

4.5.1 Příprava algoritmu řízení

Nástroje pro syntézu a analýzu robustních regulátorů jsou většinou určeny pro spojitě soustavy. Výstupem algoritmů pro syntézu regulátorů je proto nejčastěji spojitý regulátor. Oproti tomu implementace regulátorů se provádí na procesorech pracujících s diskretním časem a spojitě regulátory je nutné převést na diskretní a to bez ztráty dynamických vlastností regulátorů. Při implementaci mohou vzniknout další problémy, které se při simulacích nijak nemusely projevit. Algoritmy pracující v reálných aplikacích jsou vždy nějakým způsobem omezeny. Některá omezení plynou z rychlosti použitého procesoru, jiná jsou dána samotným reálným procesem. V obou případech je nutné s těmito omezeními počítat, případně je kompenzovat. Jednotlivé kroky přípravy algoritmů pro nasazení na reálném procesu jsou shrnuty v několika následujících bodech.

Redukce řádu a velikosti vlastních čísel regulátoru

Robustní regulátory bývají často vysokého řádu a je nutné je aproximovat modelem nižšího řádu. Pro potřeby této práce plně dostačovaly Matlab funkce **balred** a **modred**. Podrobnosti o metodách redukce řádu lze najít například v knize „Robust and Optimal Control“ (Zhou et al., 1996). Velikost vlastních čísel regulátoru má vliv na nejnižší dosažitelnou frekvenci vzorkování. Pokud není vzorkovací frekvence zvolena dostatečně velká, dochází ke ztrátě dynamických vlastností regulátoru. Více podrobností o tomto problému je uvedeno v kapitole 4.1.

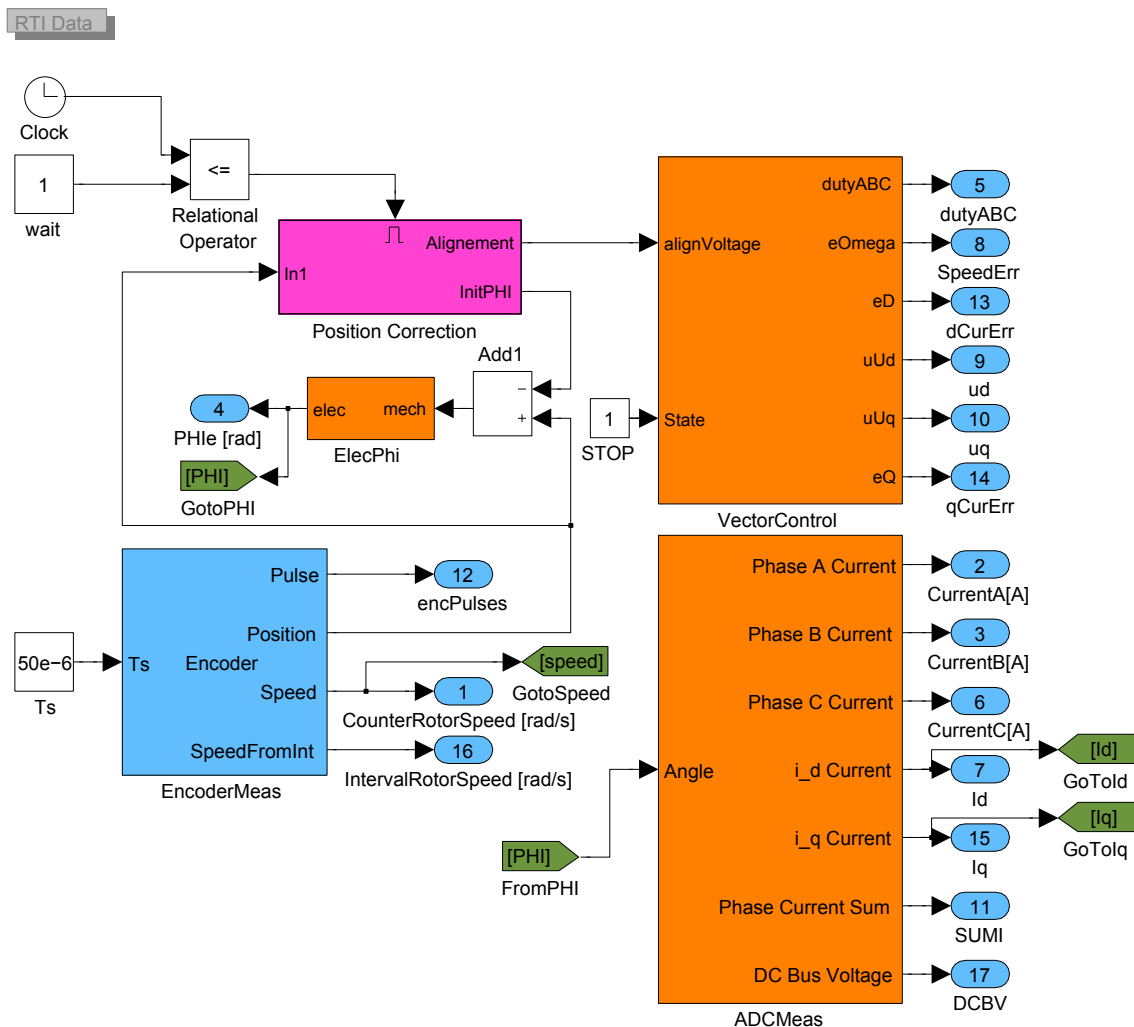
Nasycení, Anti-Windup

Problematika kompenzace nelinearit typu nasycení je značně obsáhlá a přesahuje rozsah této práce, podrobnější popis různých metod kompenzace lze najít například v knize „Anti-Windup and Control of Systems With Multiple Input Saturations“ (Öhr, 2003). Pro potřeby řízení proudů a otáček motorů, ať už pomocí PI či stavových regulátorů, byla zvolena jednoduchá metoda vypnutí integračního členu při detekci nasycení.

4.5.2 Simulace na platformě ds1103

Inicializace výkonové desky

dSPACE ds1103 není standardně vybaven výkonovými členy. Signály PWM jsou v úrovních TTL a je možné je připojit na libovolnou výkonovou desku podporující toto rozhraní. Pro malé napětí byla použita třífázová výkonová deska Freescale s

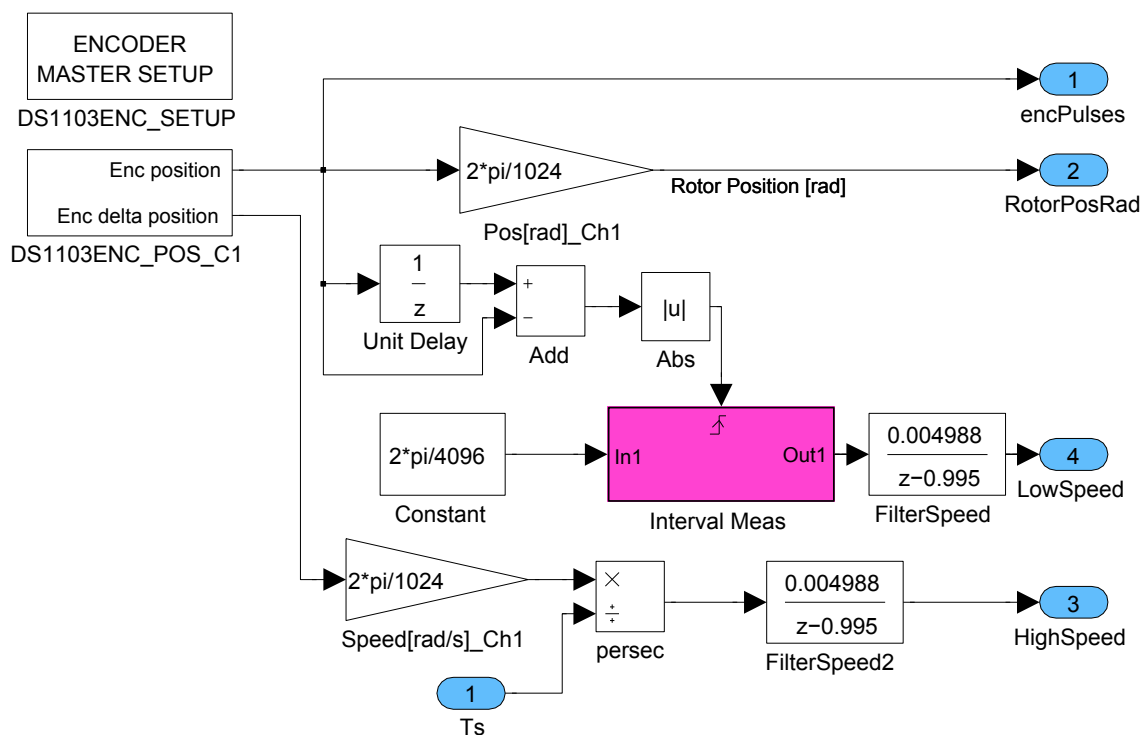


Obr. 4.31: Simulink diagram pro vektorové řízení na ds1103

driverem MC33927. Driver na této desce je nejprve potřeba inicializovat přes rozhraní SPI. Inicializace slouží k definování velikosti „dead-time“. Velikost tohoto času určuje dobu, po kterou se čeká s přepnutím tranzistoru z jednoho stavu do druhého. Nedodržení této „bezpečné“ doby může vlivem přechodného děje dojít k současnému otevření horních i dolních tranzistorů střídače a tím k jejich výkonovému poškození zkratem napájení na zem. Konfigurace dead-time pomocí SPI se provádí pulsem definované délky na lince CS (chip select). Různá délka pulzu je dosažena volbou odpovídající rychlosti SPI rozhraní. Například rychlost 468750Bd vede na puls délky $24\mu s$, který je driverem interpretován jako dead-time o délce $1.5\mu s$. Uložení hodnoty dead-time je možné ověřit přečtením status registru po SPI. Po nakonfigurování dead-time registru je již možné pomocí EN (enable) signálu povolit ovládání výkonových tranzistorů PWM signály.

Měření otáček rotoru

dSPACE ds1103 je vybaven rozhraním pro čítání pulsů kvadratického enkodérů. Informace o pohybu rotoru je měřena enkodérem s 1024 pulzy na jednu otáčku rotoru. V případě čítání dvou vzájemně posunutých fází enkodéru je celkem načteno 4096 hran na jednu otáčku rotoru. Přepočet počtu hran na otáčky v rad/s je zobrazen na Obr. 4.32. Informace o počáteční poloze rotoru je známa pouze v případě, kdy je pro snímání polohy použit absolutní snímač úhlu natočení. V ostatních případech je potřeba počáteční polohu identifikovat před samotným řízením pomocí testovacího signálu, nebo, pokud to aplikace umožňuje, natočit rotor do definované polohy. Pro testovací účely byla zvolena metoda natočení rotoru pomocí zarovnávacího napětí vygenerovaného změnou střídy PWM v jednotlivých fázích na 0.57, 0.465, 0.456. Tyto hodnoty střídy PWM zajistí zarovnání rotoru na fázi A. Zarovnání a korekce počáteční polohy je zobrazena na celkovém diagramu na Obr. 4.31.

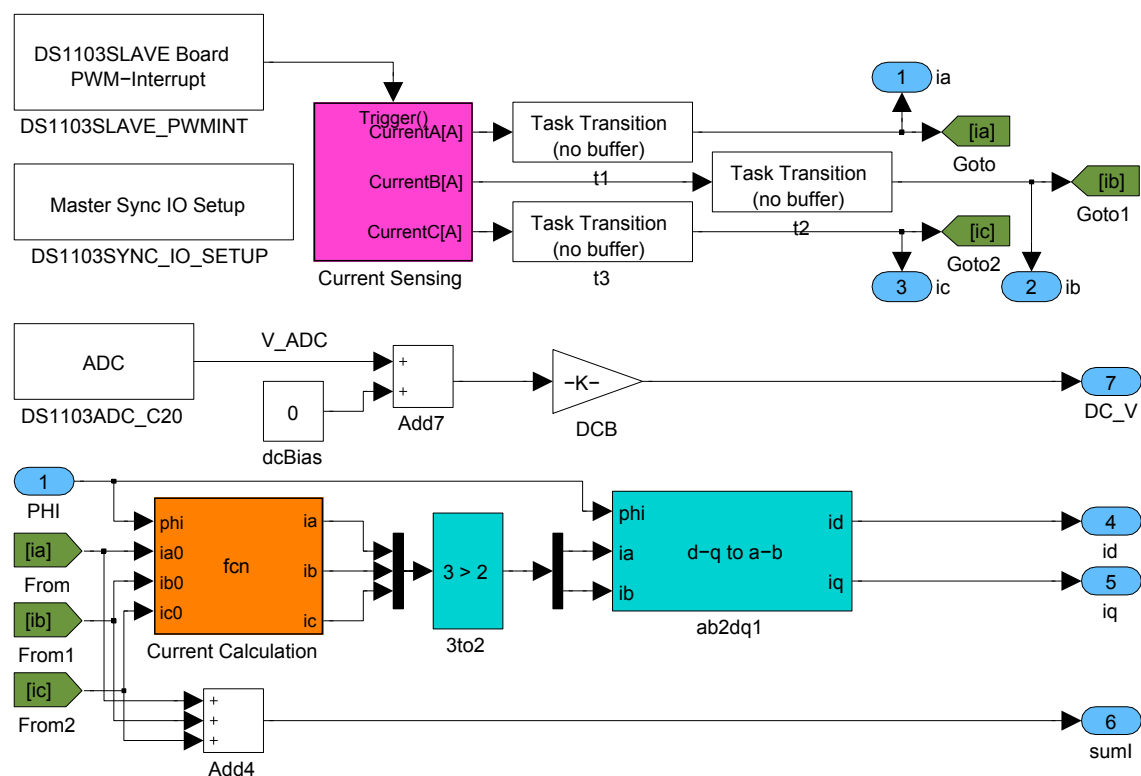


Obr. 4.32: Simulink diagram pro měření otáček rotoru na ds1103 (Subsystem EncoderMeas)

Měření statorových proudů a napětí stejnosměrného meziobvodu

Výkonové MOSFET tranzistory spodní části můstku mají v cestě proudu odpor pro měření proudu. Proud přes tyto tranzistory teče pouze v okamžicích, kdy je výko-

nový tranzistor otevřený. Pro přesné měření proudu je nutné načasovat okamžiky snímání proudu. Načasování na střed řídicího pulsu tranzistoru by mělo odpovídat střední hodnotě proudu, který proteče danou fází motoru. Implementace přesného okamžiku snímání je provedena pomocí přerušení od DSP procesoru, který zároveň generuje PWM. Diagram subsystému pro měření napětí stejnosměrného meziobvodu a přesné měření fázových proudů je na Obr. 4.33.



Obr. 4.33: Diagram pro měření proudů a napětí na ds1103 (Subsystém ADCMeas) v prostředí Matlab Simulink

Algoritmus řízení

Prioritou této části systému je, aby byla plně konfigurovatelná a bylo tak možné v krátkém čase měnit jednotlivé algoritmy řízení bez dopadu na obslužné funkce. Tento subsystém obsahuje pouze samotné vektorové řízení (a blok pulsně šířkové modulační). Předchozí kapitoly o implementaci regulátorů zobrazovaly jen vnitřní zapojení tohoto subsystému bez obslužných funkcí potřebných pro správnou funkčnost celého systému.

5 ZÁVĚR

Shrnutí: Hlavním cílem této disertační práce byl průzkum problematiky řízení elektrických pohonů a návrh robustních regulátorů synchronních a asynchronních motorů. Rovnice motorů a metody představené v úvodních kapitolách byly využity pro simulace elektrických motorů a pro návrh robustních regulátorů. Značná část práce se zabývala teorií robustního řízení a syntézou robustních regulátorů pomocí lineárních maticových nerovností (LMI). Proces návrhu robustního regulátoru pomocí LMI zde byl popsán v několika krocích vedoucích k sestavení LMI pomocí Matlab LMI Toolboxu. Výsledkem syntézy byl pro všechny typy motorů dynamický regulátor pracující ve spojitém čase, který byl pro účely implementace na dSPACE ds1103 diskretizován. Veškeré teoretické výsledky představené v této práci byly ověřeny na dvou typech reálných motorů - asynchronním motoru a synchronním motoru s permanentními magnety. Metody a nástroje použité k testování algoritmů robustního řízení byly podrobně popsány v sekci zabývající se implementací těchto řídicích algoritmů.

Dosažené cíle: Po nastudování konvexní optimalizace a teorie lineárních maticových nerovností se podařilo vytvořit program pro syntézu $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru pomocí LMI. Z rešerše dostupných literárních zdrojů vyplynulo, že většina článků publikovaných na téma $\mathcal{H}_\infty$ řízení elektrických pohonů řešila problematiku robustního řízení na lineárních náhradách skutečných rovnic motoru. Studium rovnic elektrických motorů a odborných článků byl nalezen odlišný přístup k $\mathcal{H}_\infty$ řízení elektrických pohonů, který spočívá ve využití parametrické závislosti rovnic na otáčkách motoru. Přepsáním rovnic motoru do parametrického tvaru a návrhem parametrického LPV $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru se podařilo zlepšit dynamické vlastnosti regulace statorových proudů motoru. Několik autorů již v minulosti úspěšně aplikovalo tuto LPV metodu na synchronní a asynchronní motory (Machmoum et al., 2005; Bottura et al., 2000), kde LPV $\mathcal{H}_\infty$ regulátor sice zajistil robustní řízení statorových proudů ale jak bylo dokázáno v sekci 4.1 nebylo spojení LPV regulátoru proudu a PI regulátoru otáček schopné zcela potlačit vliv zatěžovacího momentu. Použitím kaskádní regulační struktury s LPV $\mathcal{H}_\infty$ regulátorem proudu a $\mathcal{H}_\infty$ regulátorem otáček bylo dosaženo nejen nezávislosti dynamických vlastností proudové smyčky na otáčkách motoru ale také značného potlačení vlivu zatěžovacího momentu na dynamické vlastnosti otáčkové smyčky motoru.

Zhodnocení a zaměření budoucího výzkumu: V této práci bylo dokázáno, že správnou volbou váhovacích funkcí pro návrh regulátoru a omezením maximální velikosti vlastních čísel regulátoru lze použít i poměrně složité LPV $\mathcal{H}_\infty$ regulátory

pro řízení reálných synchronních a asynchronních motorů. Komplikovaný postup přípravy soustavy a samotné syntézy $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru je vyvážen výrazným zlepšením dynamických vlastností regulace. V posledních několika letech se objevují vědecké články na téma optimalizace strukturovaných regulátorů (například se strukturou PID)(Boyd et al., 2014; Apkarian et al., 2007) a přestože výzkum regulátorů s obecnou strukturou není zcela vyčerpán, chtěl bych další výzkum zaměřit na metody syntézy strukturovaných regulátorů. Použitím optimalizačních metod pro nastavení parametrů PID regulátoru by teoreticky mělo být možné přiblížit robustnost PID regulátoru robustnosti $\mathcal{H}_\infty$ regulátoru s obecnou strukturou.

LITERATURA

- ACEVEDO, S. S. – GIRALDO, E. – GIRALDO, D. Speed Control of Induction Motor Using Robust Control with LSDP. In *Electronics, Robotics and Automotive Mechanics Conference, 2008. CERMA'08*, s. 350–353. IEEE, 2008.
- APKARIAN, P. On the discretization of LMI-synthesized linear parameter-varying controllers. *Automatica*. 1997, 33, 4, s. 655–661.
- APKARIAN, P. – GAHINET, P. A convex characterization of gain-scheduled $\mathcal{H}_\infty$ controllers. *Automatic Control, IEEE Transactions on*. 1995, 40, 5, s. 853–864.
- APKARIAN, P. – GAHINET, P. – BECKER, G. Self-scheduled $\mathcal{H}_\infty$ control of linear parameter-varying systems: a design example. *Automatica*. 1995, 31, 9, s. 1251–1261.
- APKARIAN, P. – BOMPART, V. – NOLL, D. Non-smooth structured control design with application to PID loop-shaping of a process. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 2007, 17, 14, s. 1320–1342.
- AZAIZ, A. – RAMDANI, Y. – MEROUFEL, A. Design of Robust Control System for the PMSM Motor. *JOURNAL OF ELECTRICAL ENGINEERING-BRATISLAVA-*. 2007, 58, 6, s. 326.
- BAN, N. et al. A Servo Control System Using the Loop Shaping Design Procedure. *World Academy of Science, Engineering and Technology*. 2009, 60.
- BINGYOU, L. Research on h infinity robust tracking controller for permanent magnet synchronous motor servo system. In *Information Engineering and Computer Science, 2009. ICIECS 2009. International Conference on*, s. 1–5. IEEE, 2009.
- BOTTURA, C. P. et al. Robust Speed Control of an Induction Motor: An Control Theory $\mathcal{H}_\infty$ Approach with Field Orientation and μ -Analysis. *Power Electronics, IEEE Transactions* 2000, 15, 5, s. 908–915.
- BOYD, S. – HAST, M. – ÅSTRÖM, K. MIMO PID Tuning via Iterated LMI Restriction. *Dosud nepublikováno*. 2014.
- CHATTOPADHYAY, S. – MITRA, M. – SENGUPTA, S. *Clarke and Park Transform*. Power Systems. Springer Netherlands, 2011. doi: 10.1007/978-94-007-0635-4_12. Dostupné z: <http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-0635-4_12>. ISBN 978-94-007-0634-7.

- CHILALI, M. – GAHINET, P. $\mathcal{H}_\infty$ design with pole placement constraints: an LMI approach. *Automatic Control, IEEE Transactions on*. 1996, 41, 3, s. 358–367.
- DOYLE, J. C. et al. State-space solutions to standard $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ control problems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*. 1989, 34, 8, s. 831–847.
- DULLERUD, G. – PAGANINI, F. *A Course in Robust Control Theory: A Convex Approach*. Texts in Applied Mathematics. Springer, 2000. ISBN 9780387989457.
- GAHINET, P. – APKARIAN, P. A linear matrix inequality approach to $\mathcal{H}_\infty$ control. *International journal of robust and nonlinear control*. 1994, 4, 4, s. 421–448.
- GRIMM, G. et al. Antiwindup for stable linear systems with input saturation: an LMI-based synthesis. *Automatic Control, IEEE Transactions on*. 2003, 48, 9, s. 1509–1525.
- GU, D.-W. *Robust control design with MATLAB®*. Springer, 2005.
- HANSELMANN, H. Implementation of digital controllers - A survey. *Automatica*. 1987, 23, 1, s. 7 – 32. ISSN 0005-1098. doi: 10.1016/0005-1098(87)90115-4.
- HSIEN, T.-L. – TSAI, M.-C. – SUN, Y.-Y. Robust speed control of permanent magnet synchronous motors: design and experiments. In *Industrial Electronics, Control, and Instrumentation, 1996., Proceedings of the 1996 IEEE IECON 22nd International Conference on*, 2, s. 1177–1182. IEEE, 1996.
- LYSHEVSKI, S. *Electromechanical Systems, Electric Machines, and Applied Mechatronics*. Electric Power Engineering Series. Taylor & Francis, 1999. Dostupné z: <<http://books.google.cz/books?id=3GYU1N1XKw8C>>. ISBN 9780849322754.
- MACHMOUM, S. – CHEVREL, P. – DARENGOSSE, C. A linear parameter variant $\mathcal{H}_\infty$ controller design for a permanent magnet synchronous machine. *Power Electronics and Applications, 2005* 2005, s. 1–11.
- MACKENROTH, U. *Robust Control Systems: Theory and Case Studies*. Springer, 2004. Dostupné z: <<http://www.google.cz/books?id=xcc6nAF8xUEC>>. ISBN 9783540209294.
- MCFARLANE, D. – GLOVER, K. A loop-shaping design procedure using $\mathcal{H}_\infty$ synthesis. *Automatic Control, IEEE Transactions* 1992, 37, 6.
- NEBORÁK, I. *Modelování a simulace elektrických regulovaných pohonů*. Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, Fakulta elektrotechniky a informatiky, 2002. Dostupné z: <<http://books.google.cz/books?id=119YAgAACAAJ>>. Habilitační práce. ISBN 9788024800837.

- ÖHR, J. *Anti-Windup and Control of Systems With Multiple Input Saturations*. Uppsala University, Sweden, 2003. Dostupné z: <<http://www.calerga.com/contrib/1/PIDWindup.pdf>> ISBN 91-506-1691-9.
- PREMPAIN, E. – POSTLETHWAITE, I. – BENCHAI, A. A linear parameter variant $\mathcal{H}_\infty$ control design for an induction motor. *Control Engineering Practice*. 2002, 10, 6, s. 633–644.
- PREMPAIN, E. – POSTLETHWAITE, I. $\mathcal{L}_2$ and $\mathcal{H}_2$ performance analysis and gain-scheduling synthesis for parameter-dependent systems. *Automatica*. 2008, 44, 8, s. 2081–2089.
- PUJOL, A. et al. *Improvements in direct torque control of induction motors*. Universitat Politècnica de Catalunya, 2001. Doctoral thesis.
- RAUTE, R. *Sensorless Control of AC Machines for Low and Zero Speed Operation without Additional Test Signal Injection*. University of Nottingham, 2009. Doctoral thesis.
- RUI-WEN, Y. et al. Design of robust controller for PMSM drivers. In *Electrical and Control Engineering (ICECE), 2010 International Conference on*, s. 3605–3608. IEEE, 2010.
- SCHERER, C. – GAHINET, P. – CHILALI, M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *Automatic Control, IEEE Transactions on*. Jul 1997, 42, 7, s. 896–911.
- SCHERER, C. W. LPV control and full block multipliers. *Automatica*. 2001, 37, 3, s. 361–375.
- SIL, A. et al. Design of robust Power System Stabilizer using $\mathcal{H}_\infty$ mixed sensitivity technique. In *Power Systems, 2009. ICPS '09. International Conference on*, s. 1–4, 2009. doi: 10.1109/ICPWS.2009.5442746.
- SKOGESTAD, S. – POSTLETHWAITE, I. *Multivariable feedback control: analysis and design*. John Wiley, 2005. Dostupné z: <<http://books.google.cz/books?id=3dxSAAAAMAAJ>>. ISBN 9780470011676.
- VAS, P. *Sensorless vector and direct torque control*. Monographs in electrical and electronic engineering. Oxford University Press, 1998. Dostupné z: <<http://books.google.cz/books?id=90RSAAAAMAAJ>>. ISBN 9780198564652.
- WEILAND, S. – SCHERER, C. *Linear Matrix Inequalities in Control*, 2000.

- ZHANG, F. et al. Research on $\mathcal{H}_\infty$ mixed sensitivity control of brushless doubly-fed motor. In *Electrical Machines and Systems, 2008. ICEMS 2008. International Conference on*, s. 1531–1534, 2008.
- ZHANG, Y. et al. Load disturbance resistance speed controller design for PMSM. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*. 2006, 53, 4, s. 1198–1208.
- ZHENG, K. et al. High performance robust linear controller synthesis for an induction motor using a multi-objective hybrid control strategy. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 2006, 65, 11, s. 2061–2081.
- ZHOU, K. et al. *Robust and optimal control*. 40. Prentice Hall New Jersey, 1996.

VLASTNÍ PUBLIKAČNÍ ČINNOST

- POHL, L. Návrh regulátoru asynchronního motoru metodou $\mathcal{H}_\infty$ Loopshaping. In *Workshop Perspektivní projekty vývoje řídicích a senzorických technologií září 2012*, 2012a.
- POHL, L. Vektorové řízení PMSM na simulační platformě reálného času dSPACE. In *Workshop Perspektivní projekty vývoje řídicích a senzorických technologií 2012*, 2012b.
- POHL, L. – BLAHA, P. Linear Parameter Varying Approach To Robust Control of a Permanent Magnet Synchronous Motor. In *2011 15th IEEE International Conference on Intelligent Engineering Systems (INES)*, s. 287–291. IEEE, 2011.
- POHL, L. – VESELY, L. Robustness Analysis of PMSM LPV Controller. In *Proceedings of DAAAM conference 2011*, 2011.
- POHL, L. – VESELY, L. PMSM control framework with dSPACE real-time control platform. In *2012 16th IEEE International Conference on Intelligent Engineering Systems (INES)*, s. 179–183. IEEE, 2012.
- POHL, L. Syntéza regulátoru asynchronního motoru metodou smíšených citlivostních funkcí. In *Workshop Perspektivní projekty vývoje řídicích a senzorických technologií - Sborník příspěvků*. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2011a.
- POHL, L. Rapid Control Prototyping for Electric Drives. In *Proceeding of the 18th Conference Student EEICT 2012*, 2012c.
- POHL, L. LPV Approach to Robust Control Of AC Induction Motor. In *Proceedings of the 17th Conference Student EEICT 2011*, 2011b.
- POHL, L. – VESELY, I. – GRAF, M. Real-time implementation of $\mathcal{H}_\infty$ LPV controller for PMSM drive. In *IECON 2013-39th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, s. 3072–3077. IEEE, 2013.