

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

NUMERICKÉ MODELOVÁNÍ ŠÍŘENÍ ZVUKU POMOCÍ DIFERENČNÍCH
METOD

DIPLOMOVÁ PRÁCE
MASTER'S THESIS

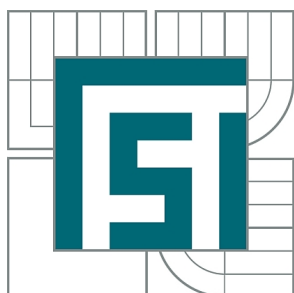
AUTOR PRÁCE
AUTHOR

Bc. ZDEŇKA PROCHAZKOVÁ

BRNO 2014



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

NUMERICKÉ MODELOVÁNÍ ŠÍŘENÍ ZVUKU POMOCÍ DIFERENČNÍCH METOD

NUMERICAL SIMULATION OF SOUND PROPAGATION BY DIFFERENCE METHODS

DIPLOMOVÁ PRÁCE
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

Bc. ZDEŇKA PROCHAZKOVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

doc. RNDr. LIBOR ČERMÁK, CSc.

BRNO 2014

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2013/2014

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

student(ka): Bc. Zdeňka Prochazková

který/která studuje v **magisterském navazujícím studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901T021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Numerické modelování šíření zvuku pomocí diferenčních metod

v anglickém jazyce:

Numerical simulation of sound propagation by difference methods

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

K popisu šíření zvuku se používají zjednodušené modely vycházející z Eulerových rovnic, například linearizované Eulerovy rovnice nebo perturbované akustické rovnice. Mezi numerickými metodami jsou nejpropracovanější a nejpoužívanější diferenční metody speciálně navržené pro šíření vln. Předmětem diplomové práce je shrnutí poznatků o diferenčních metodách používaných v aeroakustice a otestování vybraných metod na typických referenčních úlohách.

Cíle diplomové práce:

- 1) Popis diferenčních metod používaných v úlohách aeroakustiky.
- 2) Testování diferenčních schémat na 1D rovnici advekce, sestavit program v Matlabu.
- 3) Řešení linearizovaných Eulerových rovnic ve 2D, sestavit a otestovat program v Matlabu.
- 4) Řešení perturbovaných akustických rovnic ve 2D, sestavit a otestovat program v Matlabu.

ABSTRAKT

Cílem této práce je představit metodu konečných diferencí (FDM) upravenou pro použití v problematice modelování šíření zvuku a další postupy, které se společně s touto metodou používají. To jsou selektivní filtry a časová integrace metodou Runge-Kutta s nízkými nároky na paměť. Důležitou problematikou v modelování šíření zvuku jsou okrajové podmínky. V práci je uvedeno několik typů okrajových podmínek a jejich ověření. Součástí práce je několik vyřešených příkladů, které byly implementovány v Matlabu.

KLÍČOVÁ SLOVA

Výpočetní aeroakustika, metoda konečných diferencí, metoda konečných diferencí s nízkou disipací a nízkou disperzí, okrajová schémata, selektivní filtry

ABSTRACT

The goal of this thesis is to introduce the finite difference method (FDM) adjusted for usage in modeling of sound propagation, and other approaches that are used together with this method. These approaches include selective filtering and time integration using the Runge-Kutta method, which has low computer memory requirements. An important topic in modeling sound propagation are boundary conditions. The thesis examines and verifies several types of boundary conditions.

Included in the thesis are solutions to example problems implemented in Matlab.

KEYWORDS

Computational Aeroacoustics, Finite difference method, Low-dissipation low-dispersion finite difference method, boundary schemes, selective filters

PROHAZKOVÁ, Zdeňka *NUMERICKÉ MODELOVÁNÍ ŠÍŘENÍ ZVUKU POMOCÍ DIFFERENČNÍCH METOD*: diplomová práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav matematiky, 2014. 48 s. Vedoucí práce byl doc. RNDr. Libor Čermák, CSc.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci *Numerické modelování šíření zvuku pomocí diferenciálních metod* vypracovala samostatně s použitím odborné literatury a pramenů, uvedených na seznamu, jenž je součástí této práce.

30.5. 2014

Zdeňka Prochazková

Na tomto místě bych chtěla velmi poděkovat především vedoucímu této mojí diplomové práce doc. RNDr. Liboru Čermákovi, CSc. za trpělivé vedení, cenné rady a pomoc při zpracování této práce, ochotu, vstřícnost a toleranci.

Dále bych chtěla poděkovat rodičům za finanční i morální podporu při studiu, zvláště během posledních několika týdnů. Můj vděk také patří příteli Davidovi za čas, který této práci věnoval. Na neposledním místě děkuji Aničce za podporu, nadhled, pochopení a obětavou péči během dnů plných práce, které jsem mohla strávit s ní.

Zdeňka Prochazková

OBSAH

1	Aeroakustika	9
2	Eulerovy rovnice	10
2.1	Eulerovy rovnice v konzervativních proměnných	10
2.2	Eulerovy rovnice v primitivních proměnných	11
2.3	Linearizované Eulerovy rovnice	11
3	Metoda konečných diferencí	13
3.1	Prostorová diskretizace	13
3.2	Metody konečných diferencí vyššího řádu	13
3.3	Metody konečných diferencí s nízkou disipací a disperzí	15
3.4	Volba Δx	17
4	Časová integrace	19
4.1	Standardní Runge-Kuttovy metody	19
4.2	Runge-Kuttovy metody s nízkým nárokem na paměť	19
4.3	Runge-Kuttovy metody s nízkou disperzí a nízkou disipací	20
4.4	Volba časového kroku	21
5	Selektivní filtry	23
5.1	Standardní filtry	23
5.2	Optimalizované filtry	24
6	Okrajové podmínky	26
6.1	Volná hranice	26
6.1.1	Diferenční schémata na hranici	26
6.1.2	Sponge zóna	28
6.2	Pevná hranice	30
7	Příklady	32
7.1	Příklad v 1D	32
7.1.1	Rovnice advekce	32
7.1.2	Počáteční podmínka	32
7.1.3	Testovací příklad 1D	33
7.2	2D Implementace	33
7.2.1	Akustický puls	34
7.2.2	Jednoduchý akustický puls	37
7.2.3	Příklad s pevnou stěnou	41

8 Co je na CD a ovládání programu	44
8.1 Program 1D	44
8.2 Programy 2D	44
9 Závěr	45
Literatura	46
Seznam symbolů, veličin a zkratk	47

ÚVOD

Tato práce se zabývá modelováním šíření zvuku systémem parciálních diferenciálních rovnic. Práce stručně představí problematiku výpočetní aeroakustiky (dále jen CAA - Computational Aeroacoustics) a vysvětlí používané metody, které následně uplatní v příkladech. První příklad modeluje šíření zvukové vlny v jedné dimenzi. Následující příklady staví na prvním a rozšiřují řešení do dvou dimenzí a zkoumají různé typy okrajových podmínek.

Metody používané v numerickém modelování proudění tekutin (dále jen CFD - Computational Fluid Dynamics) jsou pro CAA nevhodné. Abychom při použití metod CFD dosáhli požadované přesnosti, potřebovali bychom velmi hustou mřížku s velkým počtem bodů (18 až 25 bodů na vlnovou délku). Tím by narostly výpočetní náklady. Metody CAA berou ohled na charakter aeroakustických vln, což je obvykle malá amplituda, vysoká frekvence a krátká vlnová délka. V této diplomové práci jsou mimo jiné uvedeny metody, při kterých stačí jen 5 až 8 bodů na vlnovou délku. Stěžejním tématem této práce je metoda konečných diferencí, konkrétně koncept schémat s nízkou disipací a disperzí.

K modelování šíření zvuku se používají linearizované Eulerovy rovnice. Kapitola 2 popisuje odvození těchto rovnic z Navier-Stokesových rovnic pro stlačitelné kapaliny.

V kapitole 3 je odvozena metoda konečných diferencí a schémata, která se používají v CAA. Společně s metodou konečných diferencí se v aeroakustice používají tzv. selektivní filtry, které mají zabránit šíření falešných vln. Tyto jsou popsány v kapitole 5.

V kapitole 4 je popsána časová integrace metodou Runge-Kutta. Ta je také přizpůsobena požadavkům aeroakustiky - při výpočtech požadujeme přesné řešení a nízké výpočetní náklady.

Jelikož zvuk se šíří do všech stran a my máme možnost provádět výpočty pouze na omezené oblasti, je obvykle nutné řešit okrajové podmínky. Toto je v CAA díky charakteru úloh velmi podstatná problematika. Podrobný popis okrajových podmínek najdeme v kapitole 6.

V kapitole 7 je vyřešených několik příkladů:

- testovací příklad v 1D
- akustický puls v 2D
- jednoduchý akustický puls ve 2D
- příklad s pevnou stěnou

Kapitola 8 dokumentuje přiložené CD s programy, které řeší uvedené příklady. V kapitole 9 jsou popsány výsledky příkladů a shrnutí řešené problematiky.

1 AEROAKUSTIKA

Aeroakustika se zabývá šířením zvuku generovaným turbulentním prouděním nebo působením aerodynamických sil při kontaktu s překážkou.

Pomocí metod aeroakustiky můžeme modelovat tvorbu hluku, což je v dnešní době aktuální téma. Metody CAA se používají například v dopravním průmyslu při návrhu dopravních prostředků. Tvorbu hluku je nutné řešit jak ve vlakové dopravě, tak v letecké a automobilové dopravě. Silně ovlivňuje komfort cestujících.

Stejně jako proudění tekutin se šíření zvuku modeluje pomocí Navier-Stokesových rovnic pro stlačitelné tekutiny. Jsou zde však určité rozdíly. Aeroakustické problémy jsou ze své podstaty závislé na čase, zatímco úlohy proudění tekutin jsou obvykle časově nezávislé.

Aeroakustické úlohy mají ještě další specifika a proto se metody CAA v posledních dvaceti letech oddělily od metod CFD. Shrňme rozdíly v charakteru úloh.

- V aeroakustice musíme často řešit šíření vln s vysokou frekvencí a krátkou vlnovou délkou. Řešit takovéto úlohy numericky je obtížné.
- Akustické vlny mají obvykle malou amplitudu ve srovnání se středním tokem. Intenzita zvuku je často 5-6 krát nižší. Výpočetní schémata tedy musí vnášet jen velmi malý numerický šum.
- Aeroakustické problémy obvykle řeší zvukové vlny, které se šíří na dlouhé vzdálenosti. To vyžaduje numerické řešení, které bude mít minimální disipaci a disperzi.
- V úlohách CFD se vlny rychle tlumí. Narozdíl od toho se akustické vlny šíří daleko od zdroje a vycházejí ven z výpočtové oblasti. Je proto nutné řešit okrajové podmínky tak, aby vlny na této umělé hranici spojitě opustily výpočetní oblast, neodrážely se zpátky a nepoškodily tak řešení.

2 EULEROVY ROVNICE

V této kapitole odvodíme rovnice pro výpočty aeroakustiky - linearizované Eulerovy rovnice. Odvozovat je budeme z obecných Navier-Stokesových rovnic pro stlačitelné tekutiny, ve kterých zanedbáme viskozitu. Tím získáme Eulerovy rovnice v konzervativním tvaru, které následně vyjádříme v primitivních proměnných, tedy hustota, vektorové složky rychlosti a tlak. Nakonec provedeme linearizaci rovnic. Všechny rovnice budeme odvozovat v prostoru dimenze d a také uvedeme tvar rovnic pro $d = 2$.

2.1 Eulerovy rovnice v konzervativních proměnných

Uvažujme neviskózní kapalinu. Uvažujme prostor dimenze $d \in \mathbb{N}$ a vektor proměnných

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} w_1(\mathbf{x}, t) \\ w_2(\mathbf{x}, t) \\ \vdots \\ w_s(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \vdots \\ \rho v_d \\ e \end{pmatrix}$$

kde $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ je hustota, $v_1 = v_1(\mathbf{x}, t), \dots, v_d = v_d(\mathbf{x}, t)$ jsou složky rychlosti a $e = e(\mathbf{x}, t)$ značí vnitřní energii; $s = d + 2$.

Systém Eulerových rovnic můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial \mathbf{f}_j(\mathbf{w})}{\partial x_j} = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

s počáteční podmínkou

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{w}_0(\mathbf{x})$$

kde

$$\mathbf{f}_j(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_1 v_j + \delta_{1j} p \\ \vdots \\ \rho v_d v_j + \delta_{dj} p \\ (e + p) v_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, d.$$

Počet proměnných je $s + 1$, zatímco počet rovnic je s . K systému rovnic 2.1 přidáme proto ještě stavovou rovnici

$$p = (\gamma - 1) \left(e - \frac{1}{2} \rho \|v_1, \dots, v_d\|^2 \right)$$

kde γ je adiabatická konstanta, například pro suchý vzduch je $\gamma = 1,4$.

Rovnice pro $d = 2$ (tedy ve 2D) bude tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{w})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}_2(\mathbf{w})}{\partial y} = \mathbf{0}, \quad (2.2)$$

kde

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_1(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ u(e + p) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ v(e + p) \end{pmatrix}.$$

2.2 Eulerovy rovnice v primitivních proměnných

Jako primitivní proměnné obvykle nazýváme tyto fyzikální veličiny: hustotu ρ , složky rychlosti v_1, \dots, v_d a tlak p . Veličiny uspořádáme do vektoru $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (\rho, v_1, \dots, v_d, p)^T$. Rovnici (2.1) můžeme potom vyjádřit pomocí vektoru \mathbf{u} .

Pro $d = 2$ označíme $u = v_1$, $v = v_2$. Systém rovnic v primitivních proměnných je potom tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbb{A}_1(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbb{A}_2(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0,$$

kde

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_1(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & u \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_2(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & \gamma p & v \end{pmatrix}$$

2.3 Linearizované Eulerovy rovnice

Primitivní veličiny $(\rho, v_1, \dots, v_d, p)$ můžeme rozložit na dvě části - střední tok a časově závislou kolísavou složku (fluctuating part)

$$\begin{pmatrix} \rho(\mathbf{x}, t) \\ v_1(\mathbf{x}, t) \\ \vdots \\ v_d(\mathbf{x}, t) \\ p(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0(\mathbf{x}) \\ v_{01}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ v_{0d}(\mathbf{x}) \\ p_0(\mathbf{x}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \rho'(\mathbf{x}, t) \\ v_1'(\mathbf{x}, t) \\ \vdots \\ v_d'(\mathbf{x}, t) \\ p'(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix},$$

kde $\rho'(\mathbf{x}, t)$, $v'_j(\mathbf{x}, t)$, $j = 1, \dots, d$, $p'(\mathbf{x}, t)$ jsou odchylky hustoty, jednotlivých složek rychlosti a tlaku. $\rho_0(\mathbf{x})$, $v_{01}(\mathbf{x}), \dots, v_{0d}(\mathbf{x})$ a $p_0(\mathbf{x})$ jsou hodnoty středního toku. Při označení $\mathbf{u}' = (\rho', v'_1, \dots, v'_d, p')^T$ a $\mathbf{u}_0 = (\rho_0, v_{01}, \dots, v_{0d}, p_0)$ rovnice (2.1) přejde na

$$\frac{\partial(\mathbf{u}' + \mathbf{u}_0)}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \mathbb{A}_j(\mathbf{u}' + \mathbf{u}_0) \frac{\partial(\mathbf{u}' + \mathbf{u}_0)}{\partial x_j} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, t > 0.$$

Dále budeme předpokládat, že odchylky proměnných \mathbf{u}' jsou zanedbatelné ve srovnání se středním tokem \mathbf{u}_0 , tedy že

$$|\rho'| \ll |\rho_0|, \quad |v'_j| \ll \|v_{01}, \dots, v_{0d}\|^2, \quad j = 1, \dots, d, \quad |p'| \ll |p_0|.$$

Potom $\mathbb{A}_j(\mathbf{u}' + \mathbf{u}_0) \approx \mathbb{A}_j(\mathbf{u}_0)$.

Dostaneme linearizované Eulerovy rovnice (LEE)

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \mathbb{A}_j(\mathbf{u}_0) \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x_j} + \mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0,$$

kde \mathbf{H} je vektor derivací hodnot veličin středního toku

$$\mathbf{H} = \sum_{j=1}^d \mathbb{A}_j(\mathbf{u}_0) \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial x_j}.$$

Pro $d = 2$ a zjednodušené označení $u = v_1$, $v = v_2$ máme

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}' = \begin{pmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ u_0 \\ v_0 \\ p_0 \end{pmatrix}.$$

Pro zjednodušení budeme předpokládat rovnoměrné proudění (ρ_0, u_0, v_0, p_0 jsou konstanty), tedy $\mathbf{H} = \mathbf{0}$. Potom dostaneme linearizované Eulerovy rovnice. V maticovém tvaru tedy

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \mathbb{A}_1(\mathbf{u}_0) \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x} + \mathbb{A}_2(\mathbf{u}_0) \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial y} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \quad (2.3)$$

kde

$$\mathbb{A}_1(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_0 & \rho_0 & 0 & 0 \\ 0 & u_0 & 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ 0 & 0 & u_0 & 0 \\ 0 & \gamma p_0 & 0 & u_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{A}_2(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} v_0 & 0 & \rho_0 & 0 \\ 0 & v_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_0 & \frac{1}{\rho_0} \\ 0 & 0 & \gamma p_0 & v_0 \end{pmatrix}$$

Tento systém linearizovaných Eulerových rovnic budeme využívat pro další výpočty.

3 METODA KONEČNÝCH DIFERENCÍ

Metoda konečných diferencí (Finite Difference Method - FDM) je numerická metoda, kterou můžeme aproximovat derivace a řešit diferenciální rovnice. Tato metoda je jednoduchá a všestranná. Lze ji použít k řešení různých typů rovnic. Tato kapitola popisuje princip metody konečných diferencí a odvození několika druhů schémat používaných v CAA.

3.1 Prostorová diskretizace

V jedné dimenzi, tedy na úsečce, provedeme pro jednoduchost ekvidistantní dělení. Interval $\langle a, b \rangle$ rozdělíme na n stejně dlouhých dílků o délce $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Uzly označíme $x_i = a + i\Delta x, i = 0, 1, 2, \dots, n$. Aproximovanou hodnotu funkce u v bodě x_i označíme u_i . Tedy $u_i \approx u(x_i)$.

3.2 Metody konečných diferencí vyššího řádu

Centrální diferenční metoda při ekvidistantním dělení má tvar

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-N}^N a_j f(x_0 + j\Delta x) \quad (3.1)$$

Koeficienty a_j můžeme určit z Taylorova rozvoje funkce f . Pro každý bod diskretizované oblasti můžeme napsat Taylorův rozvoj funkce. Z rovnic potom získáme potřebné koeficienty.

Pro ilustraci odvodíme aproximaci první derivace funkce f v bodě x_0 pomocí pěti-bodového centrálního schématu, tedy $N = 2$. Pomocí Taylorova rozvoje vyjádříme hodnoty funkce v $2N$ okolních bodech bodu x_0

$$f(x_0 \pm \Delta x) = f(x_0) \pm \frac{f'(x_0)}{1!} \Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!} \Delta x^2 \pm \frac{f'''(x_0)}{3!} \Delta x^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!} \Delta x^4 + \dots \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} f(x_0 \pm 2\Delta x) = f(x_0) &\pm \frac{f'(x_0)}{1!} (2\Delta x) + \frac{f''(x_0)}{2!} (2\Delta x)^2 \pm \\ &\frac{f'''(x_0)}{3!} (2\Delta x)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!} (2\Delta x)^4 + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

Odečteme od sebe dvě rovnice (3.2)

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x) \approx 2\Delta x f'(x_0) + \frac{1}{6} f'''(x_0) \Delta x^3 \quad (3.4)$$

a dvě rovnice (3.3)

$$f(x_0 + 2\Delta x) - f(x_0 - 2\Delta x) \approx 4\Delta x f'(x_0) + \frac{8}{6}f'''(x_0) \quad (3.5)$$

Druhé a čtvrté derivace se odečty. Rovnice (3.4) a (3.5) sečteme a pro první derivaci po úpravě získáme

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{1}{12}f(x_0 - 2\Delta x) - \frac{2}{3}f(x_0 - \Delta x) + \frac{2}{3}f(x_0 + \Delta x) - \frac{1}{12}f(x_0 + 2\Delta x) \right)$$

Při použití tohoto pětibodového schématu dosáhneme přesnosti řádu $O(\Delta x^4)$. Analogicky lze odvodit schémata vyšších řádů.

Obecně je standardní centrální $(2N+1)$ -bodová diferenční metoda přesnosti řádu $O(h^{2N})$. V Tabulce 3.1 jsou uvedeny koeficienty standardních centrálních 5-, 9-, 11- a 13-bodových schémat z Taylorova rozvoje. Schémata jsou označena FDs5p, FDs9p, FDs11p, resp. FDs13p. Označení jsou převzata z [4].

	FDs5p	FDs9p	FDs11p	FDs13p
a_0	0	0	0	0
a_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$
a_2	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{5}{21}$	$-\frac{15}{56}$
a_3		$\frac{4}{105}$	$\frac{5}{84}$	$\frac{5}{63}$
a_4		$-\frac{1}{280}$	$-\frac{5}{504}$	$-\frac{1}{56}$
a_5			$\frac{1}{1260}$	$\frac{3}{1155}$
a_6				$-\frac{1}{5544}$

Tab. 3.1: Koeficienty FDM odvozené z Taylorova rozvoje. ($a_{-j} = -a_j$)

Koeficienty odvozené pomocí Taylorova rozvoje jsou ale pro použití v CAA nevyhovující. Dochází k disipaci a disperzi šířených vln, tedy ke změně amplitudy a fáze.^[8]

Můžeme se o tom přesvědčit, když provedeme Fourierovu transformaci diferenční rovnice (3.1)

$$\tilde{f}(k) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx, \quad (3.6)$$

získáme tak rovnici

$$ik\tilde{f} \approx \left(\frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-N}^N a_j e^{ikj\Delta x} \right) \tilde{f}. \quad (3.7)$$

Efektivní vlnové číslo k^* Fourierovy transformace definujeme jako

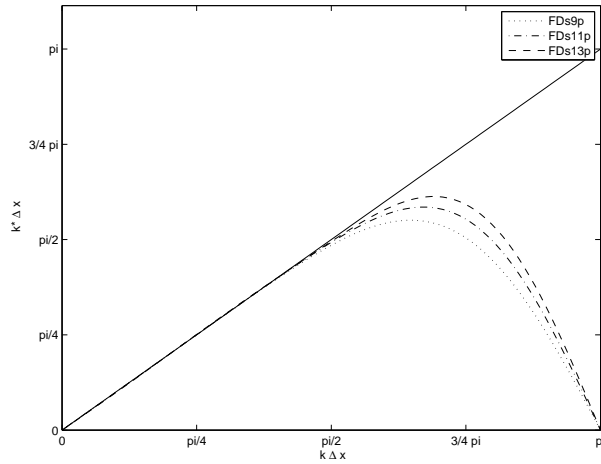
$$k^* \Delta x = -i \sum_{j=-N}^N a_j e^{ijk\Delta x}. \quad (3.8)$$

$k^* \Delta x$ je periodická funkce argumentu $k\Delta x$ s periodou 2π , kde k nazveme přesné vlnové číslo.

Rozdíl mezi přesným a efektivním vlnovým číslem vyjadřuje chybu numerického řešení. Efektivní vlnové číslo k^* je obecně komplexní. Jeho reálná část souvisí s disperzní chybou, tedy mění fázi. Imaginární část souvisí s disipací a mění amplitudu vlny.^[7] Pro centrální $(2N+1)$ -bodovou diferenční metodu vyjádříme efektivní vlnové číslo (např. [4], [8])

$$k^* \Delta x = 2 \sum_{j=1}^N a_j \sin(jk\Delta x)$$

Efektivní vlnové číslo k^* má pro centrální metodu pouze reálnou část, dochází tedy jen ke změně fáze. $k^* \Delta x$ jako funkce $k\Delta x$ je pro různá standardní schémata vykreslena na Obrázku 3.1.



Obr. 3.1: Závislost $k^* \Delta x$ na $k\Delta x$ pro standardní schémata.

3.3 Metody konečných diferencí s nízkou disipací a disperzí

Koeficienty a_j v rovnici 3.1 můžeme zvolit tak, že schéma bude sice nižšího řádu přesnosti, ale bude mít lepší disperzní vlastnosti.^[8] Těch můžeme dosáhnout, když

budeme minimalizovat chybu efektivního vlnového čísla. Minimalizovat můžeme buď integrální chybu^[8]

$$\int_{(k\Delta x)_l}^{(k\Delta x)_u} |k^* \Delta x - k \Delta x|^2 d(k\Delta x) \quad (3.9)$$

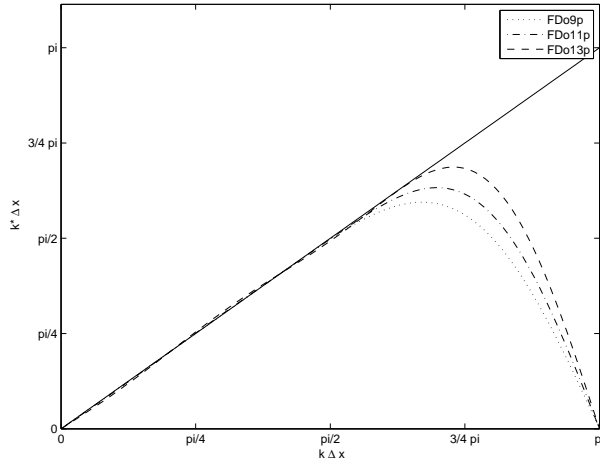
nebo relativní chybu^[4]

$$\int_{(k\Delta x)_l}^{(k\Delta x)_u} \frac{|k^* \Delta x - k \Delta x|}{k \Delta x} d(k\Delta x) = \int_{\ln(k\Delta x)_l}^{\ln(k\Delta x)_u} |k^* \Delta x - k \Delta x| d \ln(k\Delta x) \quad (3.10)$$

kde meze integrálu k_l a k_u volíme tak, abychom dosáhli co nejmenší chyby pro co největší rozsah $k\Delta x$.

Při počítání koeficientů optimalizovaných schémat se potom volí některé koeficienty tak, abychom dosáhli požadovaného řádu přesnosti. Ostatní koeficienty se volí minimalizací integrálu (3.9) nebo (3.10), abychom současně dosáhli co nejmenší disperzní chyby.

Například při odvozování 9-bodového centrálního schématu uvedeného v tabulce 3.2 se zvolí koeficienty a_3 a a_4 z Taylorova rozvoje tak, abychom dosáhli řádu přesnosti 4. Koeficienty a_3 a a_4 vyjádříme pomocí zbývajících dvou (a_1 a a_2). Koeficienty a_1 a a_2 získáme minimalizací integrálu (3.10) s mezemi $(k\Delta x)_l = \pi/16$ a $(k\Delta x)_h = \pi/2$.^[8]

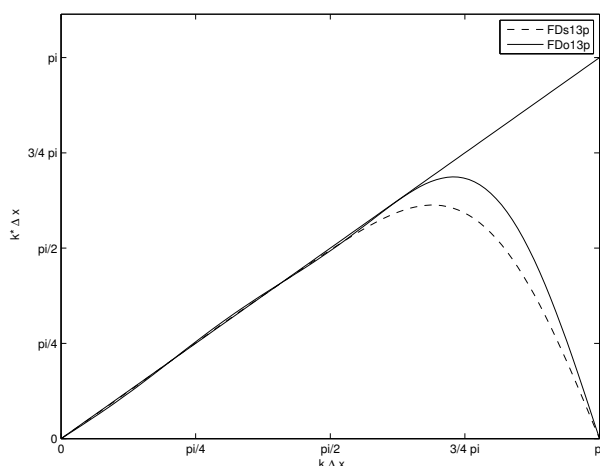


Obr. 3.2: Závislost $k^* \Delta x$ na $k \Delta x$ pro FDo9p, FDo11p, FDo13p.

Optimalizovaná centrální 9-, 11- a 13-bodová schémata přejatá z [4] jsou uvedena v tabulce 3.2 pod označím autorů Bogeyho a Baillyho jako FDo9p, FDo11p, resp. FDo13p. Tato schémata jsou přesnosti řádu 4. Závislost efektivní hodnoty $k^* \Delta x$ těchto schémat na přesné hodnotě $k \Delta x$ je na obrázku 3.2.

	FDo9p	FDo11p	FDo13p
d_0	0	0	0
d_1	0.841570125482	0.872756993962	0.907646591371
d_2	-0.244678631765	-0.286511173973	-0.337048393268
d_3	0.059463584768	0.090320001280	0.133442885327
d_4	-0.007650904064	-0.020779405824	-0.045246480208
d_5		0.002484594688	0.011169294114
d_6			-0.001456501759

Tab. 3.2: Optimalizované koeficienty centrálních diferenčních schémat, kde $(a_{-j} = -a_j)$.



Obr. 3.3: Závislost $k^*\Delta x$ na $k\Delta x$ pro FDs13p a FDo13p.

Pro porovnání je na obrázku 3.3 uvedena závislost $k^*\Delta x$ na $k\Delta x$ pro 13-bodové standardní schéma FDs13p a 13-bodové optimalizované schéma FDo13p. V grafu je vidět, že křivka pro optimalizované schéma FDo13p "kopíruje" v porovnání s FDs13p přesnou hodnotu pro vyšší $k\Delta x$, ale tato aproximace je méně přesná. Menší přesnost aproximace je způsobena nižším formálním řádem přesnosti metody, jak bylo uvedeno výše. FDs13p je přesnosti řádu 12, optimalizované FDo13p je řádu pouze 4. Tyto chyby jsou však zanedbatelně malé.^[4]

3.4 Volba Δx

Hodnotu Δx vybereme podle toho, jak přesné řešení potřebujeme získat. Určíme maximální dovolenou hodnotu chyby $\delta = |k^*\Delta x - k\Delta x|$. Můžeme pak nalézt odpoví-

dající vlnové číslo k^* , pro které dostaneme chybu nejvýše takovou. Potom spočítáme minimální rozlišení R_{min} (z anglického resolution) numerického schématu, tj. počet bodů na vlnovou délku

$$R_{min} = \frac{2\pi}{k^* \Delta x}.$$

Je to minimální počet bodů, který potřebujeme na aproximaci vlny. Vlny o vlnové délce kratší než $R_{min} \Delta x$ už neaproximujeme přesně.

4 ČASOVÁ INTEGRACE

Explicitní Runge-Kuttovy metody jsou v CAA jedny z nejčastěji používaných metod pro časovou integraci.

4.1 Standardní Runge-Kuttovy metody

Mějme rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u)$$

Pro jednoduchost zvolíme v čase ekvidistantní dělení $t_{n+1} - t_n = \Delta t, n = 1, 2, \dots$.

Obecný explicitní p -stupňový algoritmus Runge-Kutta (RK) z $u^n = u(t)$ do $u^{n+1} = u(t + \Delta t)$ je

$$u^{n+1} = u^n + \sum_{i=1}^p w_i k_i, \quad (4.1)$$

kde

$$k_i = \Delta t F \left(u^n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j \right)$$

pro $i = 1, 2, \dots, p$. w_i a β_{ij} jsou konstantní koeficienty metody.

4.2 Runge-Kuttovy metody s nízkým nárokem na paměť

Kvůli velkému rozsahu úloh CAA je důležité šetřit paměť počítače. Algoritmus (4.1) byl upraven tak, aby nároky na paměť byly co nejmenší. Algoritmus

$$\begin{aligned} u^0 &= u^n \\ u^l &= u^n + \alpha_l \Delta t F(u^{l-1}), l = 1, \dots, p, \end{aligned} \quad (4.2)$$

kde α_j jsou koeficienty metody, využívá při výpočtu hodnoty u^l pouze dvě hodnoty u . Využívá hodnotu u^n z předchozího časového kroku t_n a hodnotu u^{l-1} z předchozího stupně RK metody.^[4]

Pro lineární pravou stranu $F(u)$ můžeme algoritmus (4.2) přepsat do tvaru

$$u^{n+1} = u^n + \sum_{j=1}^p \underbrace{\prod_{l=p-j+1}^p \alpha_l}_{\gamma_j} \Delta t^j \frac{\partial^j u^n}{\partial t^j}$$

p -stupňový algoritmus s koeficienty γ_j odvozenými z Taylorova rozvoje, $\gamma_j = 1/j!$, $j = 1, 2, \dots, p$ je řádu p . Koeficienty 4-stupňové metody jsou uvedeny v tabulce 4.1 pod označením RKs4s. Schéma je řádu 4 pro lineární pravou stranu F . Pro nelineární F je schéma odvozeno z Taylorova rozvoje řádu 2 pro libovolné p .^[4]

4.3 Runge-Kuttovy metody s nízkou disperzí a nízkou disipací

Stejně jako v kapitole o konečných diferencích budeme optimalizovat schéma pro dosažení minimální disipace a disperze. Tato schémata se nazývají Low-dispersion low-dissipation Runge-Kutta algorithms (LDDRK).

Zavedeme tzv. efektivní zesilující faktor (amplification factor) algoritmu

$$G_{RK}(\omega\Delta t) = \frac{\hat{u}^{n+1}(\omega)}{\hat{u}^n(\omega)} = 1 + \sum_{j=1}^p \gamma_j (i\omega\Delta t)^j = |G_{RK}(\omega\Delta t)| e^{i\omega^* \Delta t}$$

kde $|G_{RK}|$ je zesílení a ω^* je efektivní úhlová frekvence. Zesilující faktor srovnáme s přesným zesilujícím faktorem $G_e = e^{i\omega\Delta t}$.

Množství disipace vyjádříme jako $1 - |G_{RK}(\omega\Delta t)|$ a rozdíl ve fázi $\omega^* \Delta t - \omega \Delta t$.^[5] Koeficienty γ_j lze určit tak, že minimalizujeme kvadratickou chybu^[8] mezi přesným a efektivním zesilujícím faktorem

$$E_1 = \int_{(\omega\Delta t)_l}^{(\omega\Delta t)_h} \left| |G_{RK}(\omega\Delta t)| e^{i\omega^* \Delta t} - e^{i\omega \Delta t} \right|^2 d(\omega\Delta t) \quad (4.3)$$

nebo relativní chybu^[4]

$$E_2 = \int_{\ln(\pi/16)}^{\ln(\pi/2)} (1 - |G_{RK}(\omega\Delta t)|) d \ln(\omega\Delta t) + \int_{\ln(\pi/16)}^{\ln(\pi/2)} \frac{|\omega^* \Delta t - \omega \Delta t|}{\pi} d \ln(\omega\Delta t) \quad (4.4)$$

Podobně jako při výpočtu koeficientů diferenční metody lze kombinovat určování koeficientu Runge-Kuttovy metody z Taylorova rozvoje pro zajištění požadovaného řádu přesnosti a určování koeficientu minimalizací disperzní a disipační chyby (4.3) nebo (4.4).

Podle DeRoecka^[8] pro 5-stupňovou metodu zvolíme Taylorovým rozvojem koeficienty γ_5 a γ_4 tak, abychom dosáhli přesnosti řádu 2. Minimalizací integrálu (4.3) pro $(\omega\Delta t)_h = 0$ a $(\omega\Delta t)_u = \pi/2$ dopočítáme γ_3, γ_2 a γ_1 . Podobně pro 6-stupňovou metodu, která bude řádu přesnosti 4. Takto získané koeficienty lze najít v [8].

Bogey a Bailly^[4] minimalizují chybu (4.4) pro úhlovou frekvenci až do $\omega\Delta t = \pi/2$ za podmínek

$$\begin{aligned} 1 - |G_{RK}(\omega\Delta t)| &> 0, \\ \frac{\partial \ln(1 - |G_{RK}(\omega\Delta t)|)}{\partial \ln(\omega\Delta t)} &\geq -5 \end{aligned}$$

pro $0 \leq \omega\Delta t \leq \pi$. Takto odvozené koeficienty jsou uvedeny v tabulce 4.1 pod názvy RKo5s pro 5-stupňové optimalizované schéma a RKo6s pro 6-stupňové optimalizované schéma.^[4]

	RKs4s	RKo5s	RKo6s
γ_1	1	1	1
γ_2	1/2	1/2	1/2
γ_3	1/6	0.165250353664	0.165919771368
γ_4	1/24	0.039372585984	0.040919732041
γ_5		0.007149096448	0.007555704391
γ_6			0.000891421261

Tab. 4.1: Koeficienty Runge-Kuttovy metody - standardní 4-stupňové schéma, optimalizovaná 5- a 6-stupňová schémata.

4.4 Volba časového kroku

Časový krok volíme v závislosti na zvoleném Δx . Kdybychom zvolili časový krok Δt příliš dlouhý, Runge-Kuttova metoda integrace by se mohla stát nestabilní.

Různí autoři k volbě kroku přistupují různě. Bogey a Bailly^[4] volí časový krok Δt na základě kroku Δx za použití CFL čísla (Courant - Friedrich - Lewy)

$$\Delta t = \text{CFL} \Delta x \tag{4.5}$$

bez bližší specifikace volby CFL.

DeRoeck^[8] ve své práci volí časový krok na základě vlastností zvoleného Runge-Kuttova schématu. Chce splnit následující dvě podmínky

- časový krok je omezen stabilitou metody. Pro klasické metody je kritérium tvaru $\omega\Delta t \leq R$, kde R závisí na metode Runge-Kutta (pro 5-stupňovou metodu je $R \approx 3,54$, pro 6-stupňovou metodu je $R \approx 1,75$) a ω závisí na zvoleném

schématu metody konečných diferencí a jeho k^* ($\omega = c_0 k^*$, kde c_0 je rychlost zvuku).^[8] Odtud můžeme získat CFL podmínku stability

$$\text{CFL} \equiv c_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{R}{k^* \Delta x} \quad (4.6)$$

- Chceme dosáhnout co nejmenší disipace a disperze, aby řešení bylo co nej-
přesnější. Zvolíme maximální hodnotu disipační chyby $\epsilon_r = |1 - |r^*(\omega \Delta t)||$ a
disperzní chyby $\epsilon_{\omega \Delta t} = |\omega^* \Delta t - \omega \Delta t|$. Podle toho zvolíme minimální hodnotu
 $\omega \Delta t$, při které jsou oba požadavky na přesnost splněny, a stanovíme limit
přesnosti L . Potom můžeme formulovat CFL podmínku přesnosti

$$\text{CFL} \equiv c_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{L}{k^* \Delta x} \quad (4.7)$$

Limity přesnosti L pro různá schémata Runge-Kuttovy metody pro různá ϵ_r
a $\epsilon_{\omega \Delta t}$ najdeme v [8].

Podmínka (4.7) je silnější než podmínka (4.6), tedy pokud určíme časový krok Δt
podle kritéria přesnosti, metoda bude stabilní.^[8]

5 SELEKTIVNÍ FILTRY

Jak je vidět na Obrázku 3.1 i na Obrázku 3.2, hodnota $k^*\Delta x$ numerické metody se od přesné hodnoty $k\Delta x$ pro vyšší hodnoty liší. Pro dlouhé vlny je k^* dobrá aproximace, ale při vyšších frekvencích se liší výrazně. Numerické modelování šíření krátkých vln je vysoce disperzivní. Tyto vlny se šíří rychlostí rozdílnou od skutečné fyzikální rychlosti a tím poškozují numerické řešení.^[9]

Diferenční metoda se v souvislosti s tímto jevem může stát nestabilní. Tomu předejdeme, když do výpočtu filtrování přivedeme umělou disipaci krátkých vln. Filtrování ale nesmí poškodit dlouhé vlny.

Krátké vlny odstraníme přidáním tlumícího členu k výsledku Runge-Kuttovy metody

$$u^f(x_0) = u(x_0) - \sigma_d D(x_0), \quad (5.1)$$

kde $\sigma_d \in \langle 0, 1 \rangle$ je koeficient tlumení a

$$D(x_0) = \sum_{j=-N}^N d_j u(x_0 + j\Delta x). \quad (5.2)$$

Při použití filtru v každé iteraci volíme σ_d mezi 0,1 a 0,2. Vlastnost $d_j = d_{-j}$ předchází disperzi.

5.1 Standardní filtry

Koeficienty d_j můžeme získat tak, že budeme chtít zrušit členy Taylorova rozvoje rovnice (5.1) pro $k\Delta x \rightarrow 0$.^[4] Takto získané koeficienty označíme jako standardní. Pro $N = 4, 5, 6$ jsou tyto koeficienty uvedeny v tabulce 5.1.

	SFs9p	SFs11p	SFs13p
d_0	35/128	63/256	231/1024
d_1	-7/32	-105/512	-99/512
d_2	7/64	15/128	495/4096
d_3	-1/32	-45/1024	-55/1024
d_4	1/256	5/512	33/2048
d_5		-1/1024	-3/1024
d_6			1/4096

Tab. 5.1: Standardní koeficienty centrálních schémat selektivních filtrů. ($d_{-j} = d_j$)

5.2 Optimalizované filtry

Pro výpočet optimalizovaného filtru provedeme Fourierovu transformaci výrazu (5.2) a označímeji $\tilde{D}_u(k\Delta x)$.

Budeme minimalizovat relativní chybu mezi \tilde{D} a ideální filtrovací funkcí D_{id} [8]

$$\int_0^\pi \frac{|\tilde{D}_u(k\Delta x) - D_{id}(k\Delta x)|^2}{k\Delta x} d(k\Delta x).$$

Jako ideální filtrovací funkce D_{id} se obvykle používá Gaussova funkce

$$D_{id}(k\Delta x) = \exp \left\{ -\ln(2) \left(\frac{k\Delta x - \pi}{\sigma} \right)^2 \right\},$$

kde σ můžeme volit pro dosažení různých filtrovacích funkcí. [8]

$\tilde{D}(k\Delta x)$ musí splňovat několik podmínek:

- Aby nedocházelo k disperzi krátkých vln, ale pouze k disipaci, musí být $\tilde{D}(k\Delta x)$ sudá funkce. Tedy

$$\tilde{D}(k\Delta x) = d_0 + 2 \sum_{j=1}^N d_j \cos(jk\Delta x)$$

- Dlouhé vlny nechceme tlumit, musí tedy platit $\tilde{D}(k\Delta x) \rightarrow 0$ pro $k\Delta x \rightarrow 0$.
- Pro pohodlnost volíme normalizovanou funkci

$$\tilde{D}(0) = 0, \quad \tilde{D}(\pi) = 1$$

Takto získané koeficienty d_j lze najít v [8]

Bogey a Bailly^[4] podle Tama při odvozování koeficientů optimalizovaných 9-, 11- a 13-bodových schémat (s označením SFo9p, SFo11p a SFo13p) minimalizují integrál

$$\int_{\ln(\pi/16)}^{\ln(\pi/2)} D_u(k\Delta x) d(\ln(k\Delta x)),$$

přičemž pro $0 < k\Delta x < \pi$ musí být splněny dvě podmínky:

- Filtr musí být pouze disipativní, nesmí být disperzní. Tedy opět \tilde{D}_u musí být sudá funkce.

$$\tilde{D}(k\Delta x) = d_0 + 2 \sum_{j=1}^N d_j \cos(jk\Delta x)$$

- Filtr musí splňovat

$$\frac{\partial \ln D_k}{\partial(k\Delta x)} \geq \begin{cases} -5 & \text{pro SFo9p a SFo11p} \\ -10 & \text{pro SFo13p} \end{cases}$$

Tato schémata jsou uvedena v tabulce 5.2.

	SFo9p	SFo11p	SFo13p
d_0	0,243527493120	0,215044884112	0,190899511506
d_1	-0,204788880640	-0,187772883589	-0,171503832236
d_2	0,120007591680	0,123755948787	0,123632891797
d_3	-0,045211119360	-0,059227575576	-0,069975429105
d_4	0,008228661760	0,018721609157	0,029662754736
d_5		-0,002999540835	-0,008520738659
d_6			0,001254597714

Tab. 5.2: Optimalizované koeficienty centrálních schémat selektivních filtrů. ($d_{-j} = d_j$)^[4]

6 OKRAJOVÉ PODMÍNKY

Problémy numerického řešení vznikají na okraji výpočetní oblasti. Ta je vždy nutně konečná, ale reálná oblast šíření zvuku může být nekonečná. V případě volné hranice, tedy když máme omezenou výpočetní oblast, ale reálná oblast pokračuje, se chceme vyhnout falešným odrazům vlny. Hranice musí pohltit celou vlnu.

Oblast také může končit pevnou hranicí, kdy se vlna odrazí zpět do oblasti, případně může nastat kombinace těchto dvou možností.

6.1 Volná hranice

Volnou hranici můžeme numericky řešit několika způsoby. Můžeme odvodit diferenční schémata pro okrajové body tak, aby vlna vymizela. Když dojdeme tak blízko ke hranici, že už nemůžeme použít $(2N + 1)$ -bodové schéma, použijeme schémata, která používají stejný počet bodů, ale nejsou centrální, nebo budeme postupně snižovat počet použitých bodů. Další možností je soužití tzv. sponge zóny. Při jejím použití zvětšíme významně výpočetní oblast, na které poruchu budeme tlumit.

6.1.1 Diferenční schémata na hranici

Budeme opět uvažovat úsečku s ekvidistantním dělením, stejně jako v kapitole 3. Metoda konečných diferencí při použití necentrálních schémat má tvar

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0) = \frac{1}{\Delta x} \sum_{j=-P}^Q a_j u(x_0 + j\Delta x). \quad (6.1)$$

Aproximace používá P bodů nalevo od bodu x_0 a Q bodů napravo od bodu x_0 . Na rovnici (6.1) aplikujeme Fourierovu transformaci, podobně jako v kapitole 3. Můžeme vyjádřit efektivní vlnové číslo

$$k^* \Delta x = -i \sum_{j=-P}^Q a_j e^{ijk\Delta x}.$$

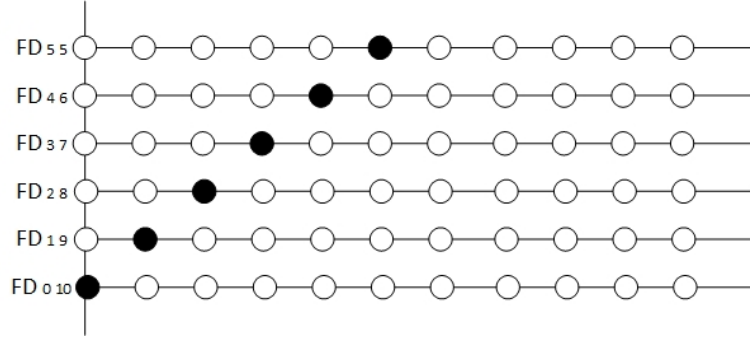
Některé koeficienty a_j určíme z Taylorova rozvoje a ostatní minimalizací chyby

$$\int_{\pi/16}^{\pi/2} [(1 - \alpha) |Re(k^* \Delta x) - k\Delta x| + \alpha |Im(k^* \Delta x)|] \frac{d(k\Delta x)}{k\Delta x},$$

kde $0 < \alpha < 0,5$ v závislosti na schématu. Meze integrálu jsou voleny tak, abychom optimalizovali chybu vln mezi 32 a 4 body na vlnovou délku.^[3]

Uvnitř oblasti, na které chceme získat numerické řešení, používáme $(2N + 1)$ -bodová centrální schémata. Když se blížíme hranici, používáme diferenční schémata

o stejném počtu bodů, ale necentrální. Postupně se dostaneme až ke schématu, které využívá hodnot $2N$ bodů pouze na jedné straně od bodu x_0 , viz obrázek 6.1. Na obrázku je také označení těchto schémat. 11-bodová necentrální schémata v tabulce 6.2 dosahují přesnosti řádu 4.^[3]



Obr. 6.1: Necentrální schémata metody konečných diferencí a jejich označení. Vyplněná kolečka značí bod x_0 , prázdná kolečka značí body, které použijeme k výpočtu hodnoty $\partial u / \partial x$ v bodě x_0 .

Filtrování na okraji provedeme stejně jako v kapitole 5 v rovnici 5.1. Filtrování D je nyní ale v necentrálním tvaru

$$D(x_0) = \sum_{j=-P}^Q d_j u(x_0 + j\Delta x).$$

Provedeme Fourierovu transformaci a získáme

$$\tilde{D}(k\Delta x) = \sum_{j=-P}^Q d_j e^{ijk\Delta x}$$

Koeficienty d_j určíme minimalizací chyby

$$\int_{\pi/16}^{\pi/2} \left[(1 - \alpha) |\tilde{D}(k\Delta x)| + \alpha |\phi(\tilde{D}(k\Delta x))| \right] \frac{d(k\Delta x)}{k\Delta x}$$

kde $0 < \alpha < 0.01$ volíme v závislosti na filtru, $\phi(\tilde{D}(k\Delta x))$ je argument komplexního čísla.

V tabulce 6.1 jsou uvedena takto odvozená schémata, a to jedenáctibodová SF_{46} , SF_{37} a SF_{28} .^[3] Značení je stejné jako u diferenčních schémat. Tato schémata jsou přesnosti řádu 2. Schémata, která jsou vysoce decentralizovaná (SF_{19} a SF_{010}), jsou vysoce disipativní. Místo filtru SF_{19} se používá 7-bodové schéma SF_{15} uvedené také v tabulce 6.1. Schéma SF_{110} se nepoužívá vůbec.^[3]

Jako alternativa k necentrálním schématům se nabízí použít na hranici centrální schémata, kdy se bude postupně snižovat počet použitých bodů, jak lze vidět

	SF ₄₆	SF ₃₇	SF ₂₈	SF ₁₅
d_{-4}	0,009095822490			
d_{-3}	0,013892091123	-0,000054596010		
d_{-2}	-0,060031967800	0,042124772446	0,052523901012	
d_{-1}	0,356344029930	-0,173103107841	-0,206299133811	-0,057717512738
d_0	-0,488142768372	0,299615871352	0,353527998250	0,199278374994
d_1	0,276991103162	-0,276543612935	-0,348142394842	-0,292668277650
d_2	0,002551524249	0,131223506571	0,181481803619	0,244537361546
d_3	-0,076307201417	-0,023424966418	-0,009440804370	-0,134605018019
d_4	0,032996715648	0,013937561779	-0,077675100452	0,056184263460
d_5	-0,006091786366	-0,024565095706	0,044887364863	-0,015009191593
d_6		0,013098287852	-0,009971961849	
d_7		-0,002308621090	0,000113359420	
d_8			0,000113359420	

Tab. 6.1: Koeficienty necentrálních schémat selektivních filtrů.

na obrázku 6.2. Když se blížíme k hranici, použijeme postupně 13-, 11-, 9-, 7-, 5-, 3-bodové schéma. Při výpočtu hodnoty derivace v krajním bodě použijeme jednostrannou diferenci.

Při implementaci jsem použila standardní schémata odvozená z Taylorových rozvoů, které mají vyšší formální řád přesnosti než optimalizovaná schémata. S ubývajícím počtem bodů se ale snižuje. Poslední jednostranná difference je řádu 1. Koeficienty centrálních schémat metody konečných diferencí i selektivních filtrů lze najít např. v [3].

6.1.2 Sponge zóna

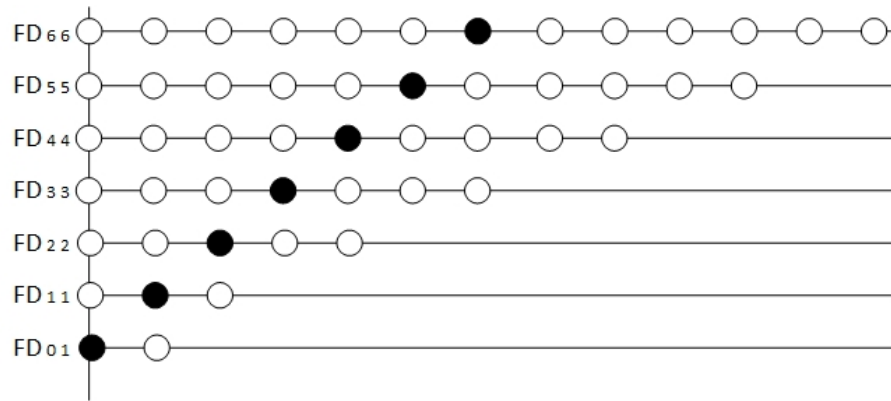
Uvažujme rovnici advekce

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (6.2)$$

kterou budeme řešit dále v kapitole 7.2.3.

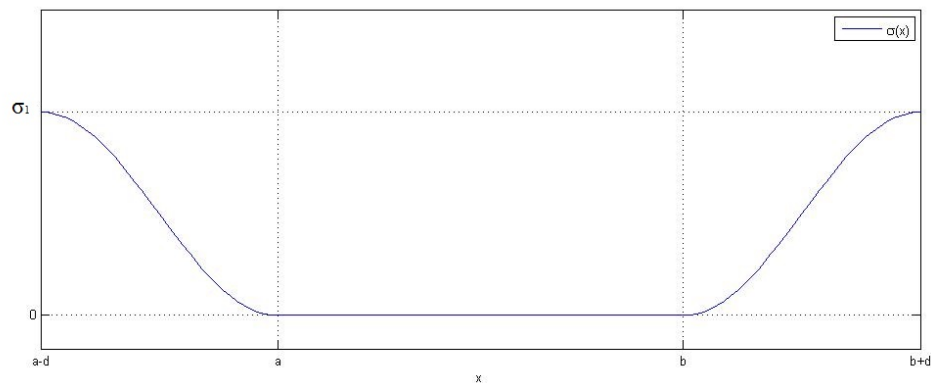
Řešme tuto rovnici na intervalu $\langle a, b \rangle$. Použití sponge zóny se zakládá na významném rozšíření výpočetní oblasti o část, kde budeme tlumit přicházející vlny. Tlumící člen jednoduše přidáme na pravou stranu rovnice 6.2.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma(x)(u_{ref} - u), \quad x \in \langle a, b \rangle, \quad t > 0$$



Obr. 6.2: Centrální schémata metody konečných diferencí a jejich označení. Vyplněná kolečka značí bod x_0 , prázdná kolečka body, které použijeme k výpočtu hodnoty $\partial u / \partial x$ v bodě x_0 .

kde $\sigma(x)$ je funkce určující sílu tlumení a u_{ref} je nějaký referenční stav, obvykle pro lineární systémy pokládáme $u_{ref} = 0$. $\sigma(x)$ musí být nulová na původní výpočetní oblasti.



Obr. 6.3: Tvar funkce $\sigma(x)$.

Sponge zóna je jednoduchým a přesto účinným prostředkem pro numerické řešení volné hranice. Při jejím použití je však důležité zvolit vhodnou funkci $\sigma(x)$ a její parametry. Silnější tlumení může navíc způsobit nestabilitu v tlumící vrstvě, která potom může ovlivnit celé řešení

Jako tlumící funkci $\sigma(x)$ lze použít funkci

$$\sigma(x) = \begin{cases} \frac{\sigma_1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi(x-a+d)}{d}\right) & \text{pro } x \in \langle a-d, a \rangle \\ 0 & \text{pro } x \in (a, b) \\ \frac{\sigma_1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi(x-b+d)}{d}\right) & \text{pro } x \in \langle b, b+d \rangle \end{cases}$$

kde d je šířka sponge zóny, jak je vidět na obrázku 6.3, a σ_1 je konstanta určující sílu tlumení. Průběh této funkce je vykreslen na obrázku 6.3. Jde vidět, že na okraji přilehlém k simulované oblasti je tlumení nulové a na okraji celkové výpočetní oblast tlumení sahá až k hodnotě σ_1 . Tlumení se nepoužívá uvnitř původní oblasti.

6.2 Pevná hranice

Nyní uvažujme obdélníkovou oblast v \mathbb{R}^2 s ekvidistantní sítí. Horní a dolní stěny budou pevné, vlevo bude vtok a na pravé straně bude výtok. Budeme uvažovat neviskózní kapalinu.

Okrajovou podmínku na pevné stěně realizujeme tak, že předepíšeme normálovou rychlost $v = 0$.

Fyzikálně stěna vyvine tlak na kapalinu. Při numerickém řešení můžeme přidat vrstvu bodů v proměnné p (ghost points). Hodnota proměnné p se zde určí tak, aby na stěně platilo $v = 0$. Tento postup je blíže popsán v [9].

	FD ₄₆	FD ₃₇	FD ₂₈
a_{-4}	0,016756572303		
a_{-3}	-0,117478455239	-0,013277273810	
a_{-2}	0,411034935097	0,115976072920	0,046246319744
a_{-1}	-1,130286765151	-0,617479187931	-0,462989982072
a_0	0,341435872100	-0,274113948206	-0,459203180244
a_1	0,556396830543	1,086208764655	1,205900619436
a_2	-0,082525734207	-0,402951626982	-0,423956587692
a_3	0,003565834658	0,131066986242	0,102329382027
a_4	0,001173034777	-0,028154858354	-0,006253229685
a_5	-0,000071772607	0,002596328316	-0,002025942780
a_6	-0,000000352272	0,000128743150	-0,000016793609
a_7		0	-0,000015302561
a_8			-0,000015302561

	FD ₁₉	FD ₀₁₀
a_{-1}	-0,180022054228	
a_0	-1,237550583044	-2,391602219538
a_1	2,484731692990	5,832490322294
a_2	-1,810320814061	-7,650218001182
a_3	1,112990048440	7,907810563576
a_4	-0,481086916514	-5,922599052629
a_5	0,126598690230	3,071037015445
a_6	-0,015510730165	-1,014956769726
a_7	0,000021609059	0,170022256519
a_8	0,000156447571	0,002819958377
a_9	-0,000007390277	-0,004791009708
a_{10}		-0,000013063429

Tab. 6.2: Koeficienty necentrálních 11-bodových schémat metody konečných diferencí

7 PŘÍKLADY

V této kapitole popisuji simulované příklady. Vybrala jsem takové příklady, u kterých jsme schopni spočítat přesné řešení a určit tedy přesnost simulace.

Při implementaci uvedených postupů jsem začala od příkladu v jedné dimenzi, tedy na přímce. V čase $t = 0$ je umístěn počáteční impuls, který se šíří po přímce směrem doprava, přičemž chceme, aby při numerickém řešení zůstal beze změny.

Dále jsem program přepracovala do 2D, na čtvercovou ekvidistantní síť. Udělala jsem několik výpočtů - do středu oblasti jsem umístila akustický puls, vorticity a entropický puls.

Jak bylo popsáno výše, obecně při numerickém řešení podobných příkladů je problémem okraj oblasti nebo překážky uvnitř oblasti. Různé druhy okrajových podmínek popsaných v kapitole 6 jsem vyzkoušela jak na příkladu v 1D, tak ve 2D.

Protože jsem postupovala podle Bogeyho a Baillyho^{[4],[3]}, hodnotu CFL čísla a tedy i délku časového kroku jsem určovala pokusem.

7.1 Příklad v 1D

7.1.1 Rovnice advekce

Jako první testovací problém jsem zvolila rovnici advekce

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (7.1)$$

kde $u = u(x, t)$ a $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Příklad řeším s počáteční podmínkou $u(x, 0) = u_0(x)$.

Je to rovnice (2.1) při volbě $d = 1$, $s = 1$, $x = x_1$, $\mathbf{w} = w_1 = u$ a $\mathbf{f}_1(\mathbf{w}) = au$. $\mathbb{A}_1 = a$.

Řešením je

$$u(x, t) = u_0(x - at)$$

Rovnice (7.1) tedy popisuje pohyb veličiny u konstantní rychlostí a .

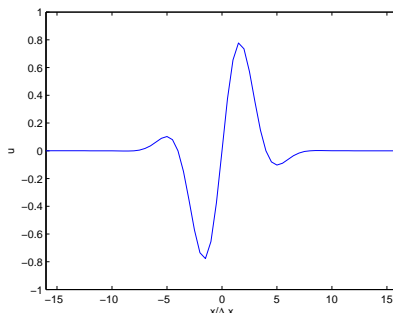
Tento příklad jsem použila pro porovnání jednotlivých schémat metody konečných diferencí.

7.1.2 Počáteční podmínka

Rovnici (7.1) jsem řešila s počáteční podmínkou

$$u_0(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{\alpha \Delta x}\right) \exp\left(-\ln(2) \left(\frac{x}{\beta \Delta x}\right)^2\right). \quad (7.2)$$

při volbě parametrů $\alpha = 8$, $\beta = 3$. Počáteční impuls je vykreslený na obrázku 7.1.



Obr. 7.1: Tvar funkce u_0 .

7.1.3 Testovací příklad 1D

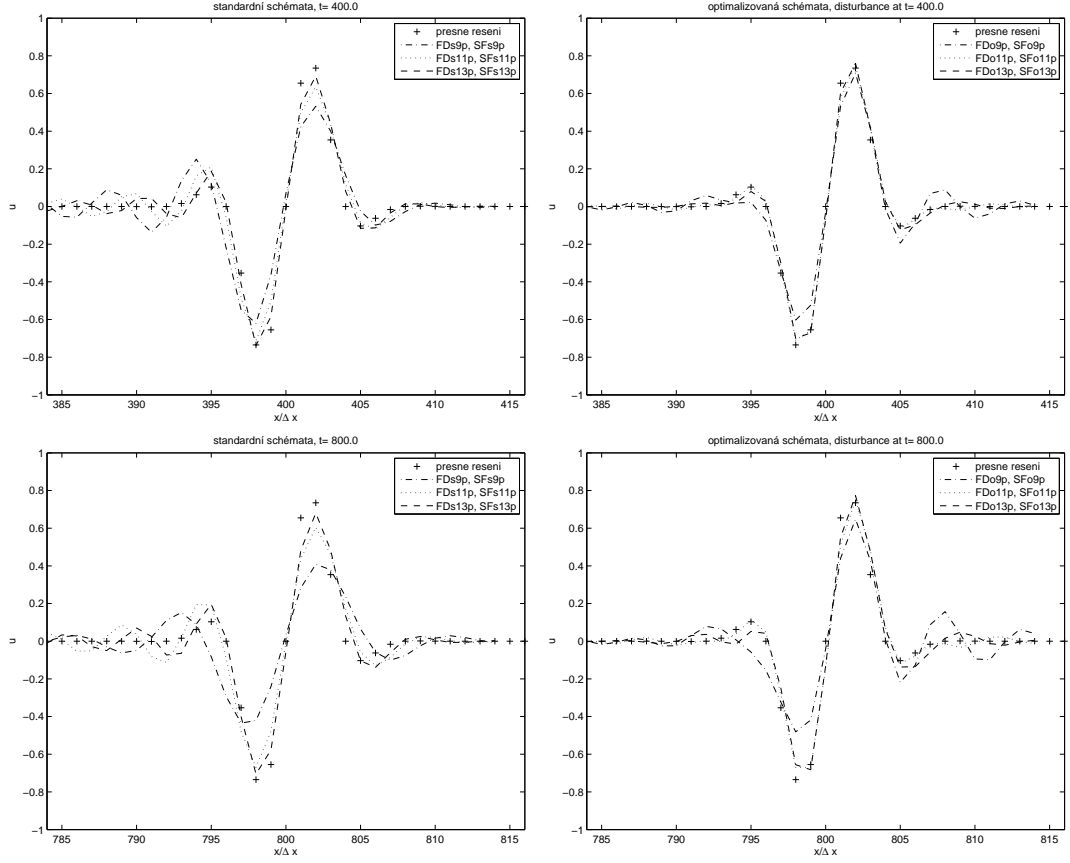
V tomto příkladu řeším rovnici (7.1), kde rychlost $a = 1$ s počáteční podmínkou (7.2) s parametry $\alpha = 8$, $\beta = 3$. Řešila jsem ho s použitím optimalizovaného šestistupňového schématu Runge-Kutta RKo6s a s různými schématy metody konečných diferencí. Řešení na obrázku 7.2 nahoře je vykreslené pro čas $t = 400$. Řešení na obrázku 7.2 dole je v $t = 800$. Na obrázcích nalevo je řešení standardními 9-, 11- a 13-bodovými schématy konečných diferencí, napravo je řešení za použití optimalizovaných schémat.

Řešení jsem provedla pro $\Delta x = 1$. Časový krok jsem určila ze vztahu 4.5, při hodnotě CFL = 0.8.

Jde vidět, že standardní schémata jsou vysoce disipativní i disperzivní. Výsledky s použitím optimalizovaných schémat jsou výrazně lepší. Optimalizovaná schémata jsou méně disipativní, ale i u nich můžeme pozorovat nestabilitu při dlouhém čase řešení. K disperzi dochází jen málo. Výsledky jsou srovnatelné s výsledky zveřejněnými v [4].

7.2 2D Implementace

Mějme obdélníkovou oblast $\Omega = \langle -a, a \rangle \times \langle -b, b \rangle$ v \mathbb{R}^2 . Provedeme diskretizaci v prostorových proměnných x a y . Předpokládejme, že kladný směr osy x míří doprava a kladný směr osy y míří nahoru. Na obdélníku zvolíme rovnoměrné dělení. Na ose x budeme dělit na m stejných dílků délky Δx a na ose y budeme dělit na n stejných dílků délky Δy . Tak dostaneme síť s uzly (x_i, y_j) , kde $x_i = -a + i\Delta x, i = 0, 1, \dots, m$ a $y_j = -b + j\Delta y, j = 0, 1, \dots, n$.



Obr. 7.2: Řešení pro $t=400$ a pro $t=800$ s použitím standardních a optimalizovaných schémat metody konečných diferencí a selektivních filtrů.

7.2.1 Akustický puls

Budeme řešit soustavu (2.3) linearizovaných Eulerových rovnic v \mathbb{R}^2

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \mathbb{A}_1(\mathbf{u}_0) \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x} + \mathbb{A}_2(\mathbf{u}_0) \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial y} = \mathbf{0}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0$$

$\mathbf{u}_0 = (\rho_0, u_0, v_0, p_0)^T$ uvažujeme konstantní, pro $\mathbf{u}' = (\rho', u', v', p')$ předepíšeme počáteční podmínku

$$\mathbf{u}'(x, y, 0) = \mathbf{u}'_0(x, y) = \begin{pmatrix} \rho_0(x, y) \\ u_0(x, y) \\ v_0(x, y) \\ p_0(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 e^{\kappa_1 r^2} \\ 0 \\ 0 \\ \varepsilon_1 e^{\kappa_1 r^2} \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

kde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Do počátku souřadné soustavy umístíme Gaussovský puls. Jako parametry pulsu jsem zvolila $\varepsilon_1 = 1$ a $\kappa_1 = \frac{\ln 2}{b_1^2}$, kde $b_1 = 2$. b_1 určuje šířku funkce. ε_1 je amplituda pulsu.

parametr	označení proměnné v programu	použitá hodnota
celkový čas	tfinal	10
schéma FDM	schemaFD	FDo13p
schéma sel. filtru	schemaSF	SFo13p
parametr filtru σ	sigma	0.2
RK schéma	schemaRK	RKo6s

Tab. 7.1: Parametry výpočtu příkladu kapitoly 7.2.1.

Příklad jsem spočítala se schématem konečných diferencí FDo13p a selektivním filtrem SFo13p. Pro časovou integraci jsem použila Runge-Kuttovu metodu se schématem RKo6s. Parametry středního toku jsou

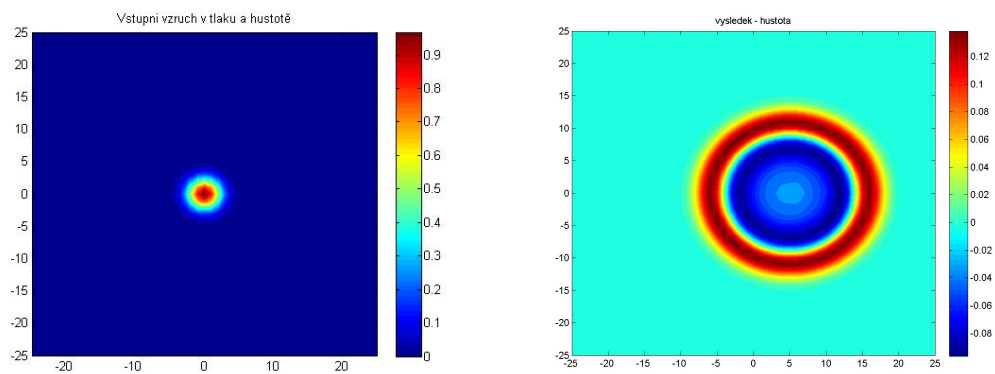
$$\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ u_0 \\ v_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \\ 5/7 \end{pmatrix}, \quad (7.4)$$

puls bude tedy unášen doprava rychlostí $u_0 = 0.5$.

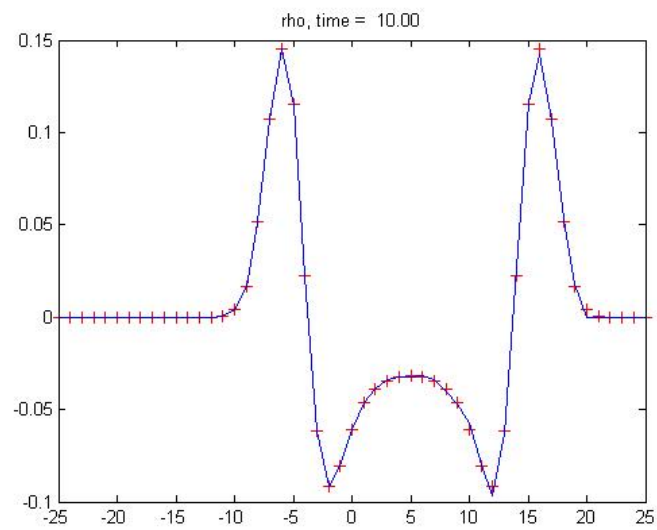
V tomto příkladě není vyřešena okrajová podmínka. Úlohu jsem tedy řešila jen do času $t = 10$. V tomto čase se počáteční vzruch ještě nerozšíří do okrajové části. Na obrázku 7.3 je vykreslena hustota na počátku a výsledek v čase $t = 10$.

Parametry použité pro výpočet jsou uvedeny v tabulce 7.1.

Na obrázku 7.4 je srovnání s přesným řešením. Přesné výsledky jsou spočítány pomocí programu Ing. Jaroslava Bajka, zveřejněného v jeho diplomové práci.^[2]



Obr. 7.3: Hustota v $t = 0$ a v $t = 10$.



Obr. 7.4: Srovnání hodnot numerického řešení s přesným řešením v hustotě v čase $t = 10$

7.2.2 Jednoduchý akustický puls

Na oblasti $\Omega = \langle -a, a \rangle \times \langle -b, b \rangle$ budeme řešit rovnici (2.3), tentokrát však budeme uvažovat v počáteční podmínce mimo akustického pulsu ještě vírový a entropický (viz např. [8], [9]). Akustický a vírový puls umístíme do bodu $X_a = (x_a, y_a) = (-9, 0)$ a entropický puls umístíme do bodu $X_e = (x_e, y_e) = (9, 0)$, jak je znázorněno na obrázku 7.5.

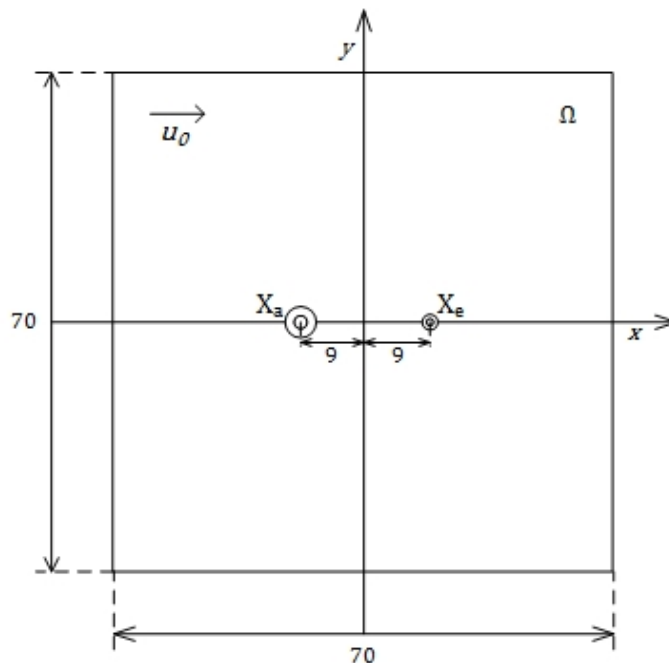
Řešíme tedy rovnici

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \mathbb{A}_1(\mathbf{u}_0) \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x} + \mathbb{A}_2(\mathbf{u}_0) \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial y} = \mathbf{0}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0$$

s počáteční podmínkou

$$\mathbf{u}(x, y, 0) = \mathbf{u}'_0(x, y) = \begin{pmatrix} \rho'_0(x, y) \\ u'_0(x, y) \\ v'_0(x, y) \\ p'_0(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 e^{\kappa_1 r_a^2} + \varepsilon_2 e^{\kappa_2 r_e^2} \\ \varepsilon_3 (y - y_a) e^{\kappa_3 r_a^2} \\ \varepsilon_3 (x - x_a) e^{\kappa_3 r_a^2} \\ \varepsilon_1 e^{\kappa_1 r_a^2} \end{pmatrix}$$

kde $r_a = \sqrt{(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2}$ a $r_e = \sqrt{(x - x_e)^2 + (y - y_e)^2}$ a parametry $\kappa_j = \frac{\ln 2}{b_j^2}$, $j = 1, 2, 3$ určují amplitudu a šířku pulzů. Parametry pulzů použité při výpočtech jsou uvedeny v tabulce 7.2.



Obr. 7.5: Schéma zadání příkladu

$\varepsilon_1 = 0,01$	$b_1 = 3$
$\varepsilon_2 = 0,02$	$b_2 = 3$
$\varepsilon_3 = 0,008$	$b_3 = 3$

Tab. 7.2: Parametry pulsů použité při výpočtu příkladu 7.2.2.

parametr	označení proměnné v programu	použitá hodnota
celkový čas	tfinal	40
schéma FDM	schemaFD	FDo11p
schéma sel. filtru	schemaSF	-
parametr filtru σ	sigma	-
RK schéma	schemaRK	RKo6s
okrajová podmínka	boundary	B - necentrální schémata

Tab. 7.3: Parametry výpočtu příkladu kapitoly 7.2.2.

Na tomto příkladu jsem vyzkoušela okrajové podmínky z odstavce 6.1.1, necentrální i centrální schémata. Protože jsem měla k dispozici pouze 11-bodová okrajová schémata z tabulky 6.2, osvědčilo se mi při řešení použití optimalizovaných 11-bodových schémat metody konečných diferencí. K časové integraci jsem použila optimalizovanou 6-stupňovou Runge-Kuttovou metodou RKo6s. Výsledky pro hustotu průběžně v časech $t = 2, 10, 20, 30$ jsou uvedeny na obrázku 7.6. Výsledky pro všechny veličiny v čase $t = 40$ jsou vykresleny na obrázku 7.7.

Při použití selektivního filtru docházelo k poškození řešení. Příklad jsem proto řešila bez něj.

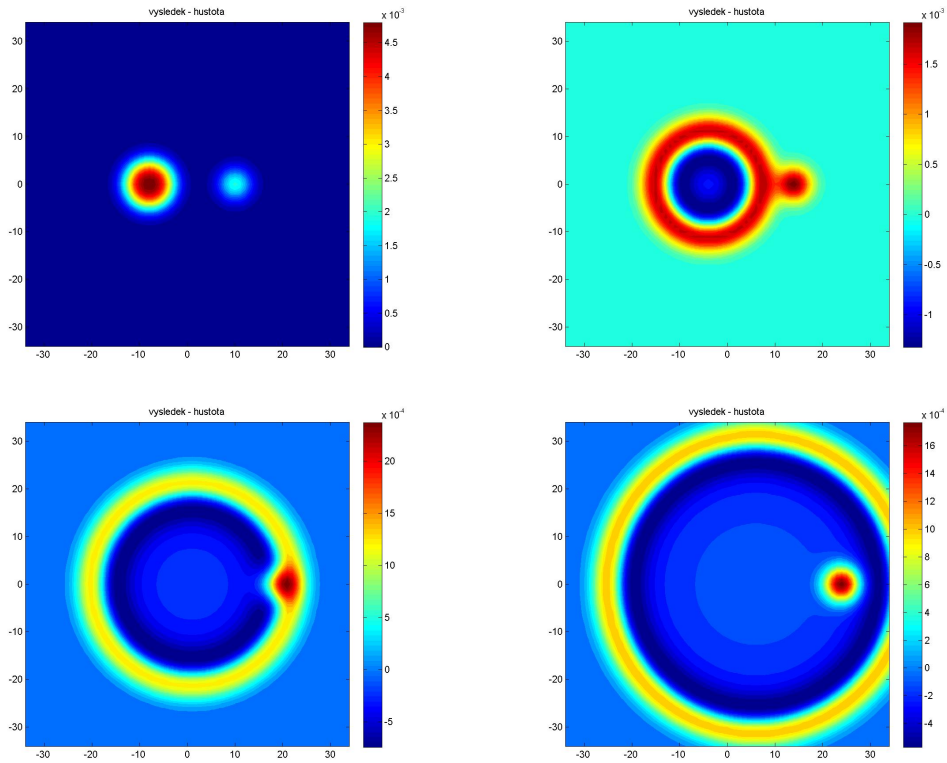
Konstantní parametry středního toku jsou

$$\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ u_0 \\ v_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \\ 5/7 \end{pmatrix},$$

puls bude tedy unášen doprava rychlostí $u_0 = 0.5$.

Při výpočtu jsem použila parametry uvedené v tabulce 7.3. Porovnání s přesným řešením je na obrázku 7.8. Při výpočtu nebyl použit selektivní filtr.

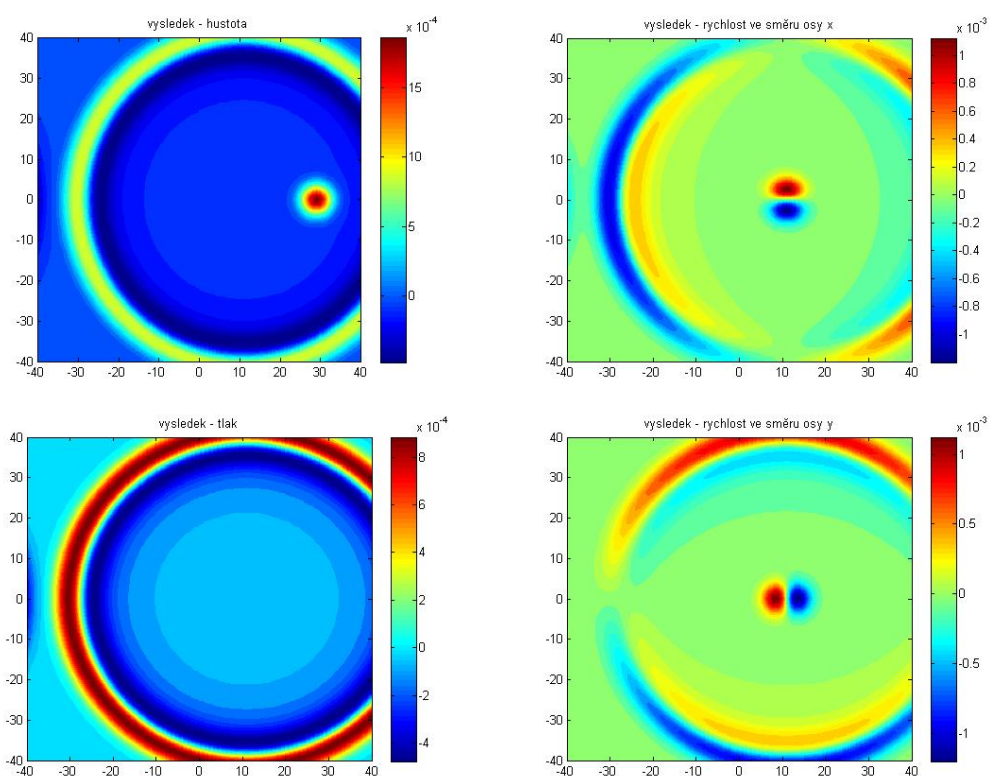
Při použití centrálních schémat na okrajové podmínce docházelo při procházení vlny hranicí k rozkmitání řešení. Vzhledem k 11-bodovým necentrálním schématům



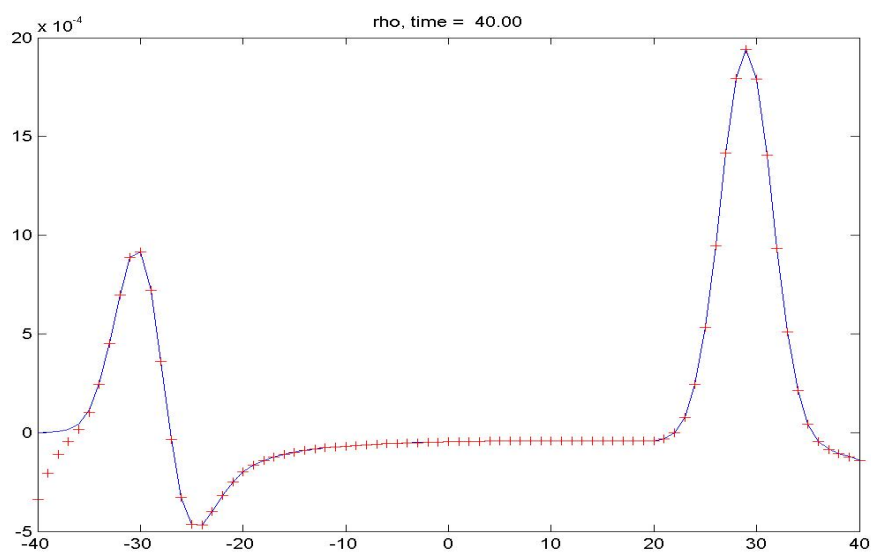
Obr. 7.6: Hustota v $t = 2, 10, 20, 30$

na okrajové podmínce nebylo vhodné použít třináctibodové schéma, přestože je méně disipativní a méně disperzivní.

Při procházení vlny hranicí výpočetní oblasti nedochází k odrazu ani vracení falešných vln. Na vtokové straně (vlevo) je řešení poškozené. Výsledky byly dobré při nulové rychlosti u_0 . Při nenulové rychlosti u_0 dochází k poškození výsledku na vtokové oblasti, kde se akustický puls šíří k hranici a současně je unášen rychlostí (viz obrázek 7.8).



Obr. 7.7: Výsledky v čase $t = 40$



Obr. 7.8: Porovnání numerických výsledků příkladu 7.2.2 s přesným řešením v čase $t = 40$.

parametr	označení proměnné v programu	použitá hodnota
celkový čas	tfinal	60
$\Delta x, \Delta y$	dx, dy	1
CFL	CFL	0.5
schéma FDM	schemaFD	FDo11p
schéma sel. filtru	schemaSF	SFo11p
parametr filtru σ	sigma	0.2
RK schéma	schemaRK	RKo6s
okrajová podmínka	boundary	B - necentrální schémata
šířka sponge zóny	d	20
parametr sponge zóny σ_1	sigma0	0.05

Tab. 7.4: Parametry výpočtu příkladu kapitoly 7.2.3.

7.2.3 Příklad s pevnou stěnou

Na tomto příkladu jsem ověřila použití sponge zóny a pevné stěny.

Uvažujme obdélníkovou oblast $\Omega = \langle -40, 40 \rangle \times \langle -20, 20 \rangle$ podle obrázku 7.9 s akustickým Gaussovým pulsem. Hranice Γ této oblasti je rozdělená na dvě části. Na horním a spodním okraji Γ_s je pevná stěna, na pravém a levém okraji je volný konec. Akustický puls se šíří rovnoměrnou rychlostí všemi směry, na horní a dolní hranici se odráží od stěny.

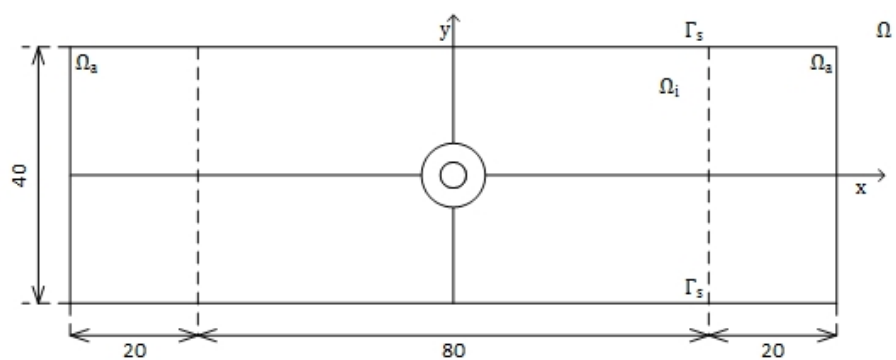
Pevnou hranici řešíme předepsáním rychlosti $v = 0$ na hranici. Vtok a výtok je modelován sponge zónou a necentrálními okrajovými schématy FDM.

Počáteční puls (7.3) s parametry $\varepsilon_1 = 1$ a $b_1 = 2$ umístíme do počátku souřadné soustavy. Parametr tlumicí funkce spongezóny je $\sigma_1 = 0,05$. Šířka sponge zóny je $d = 20$, viz obrázek 7.9.

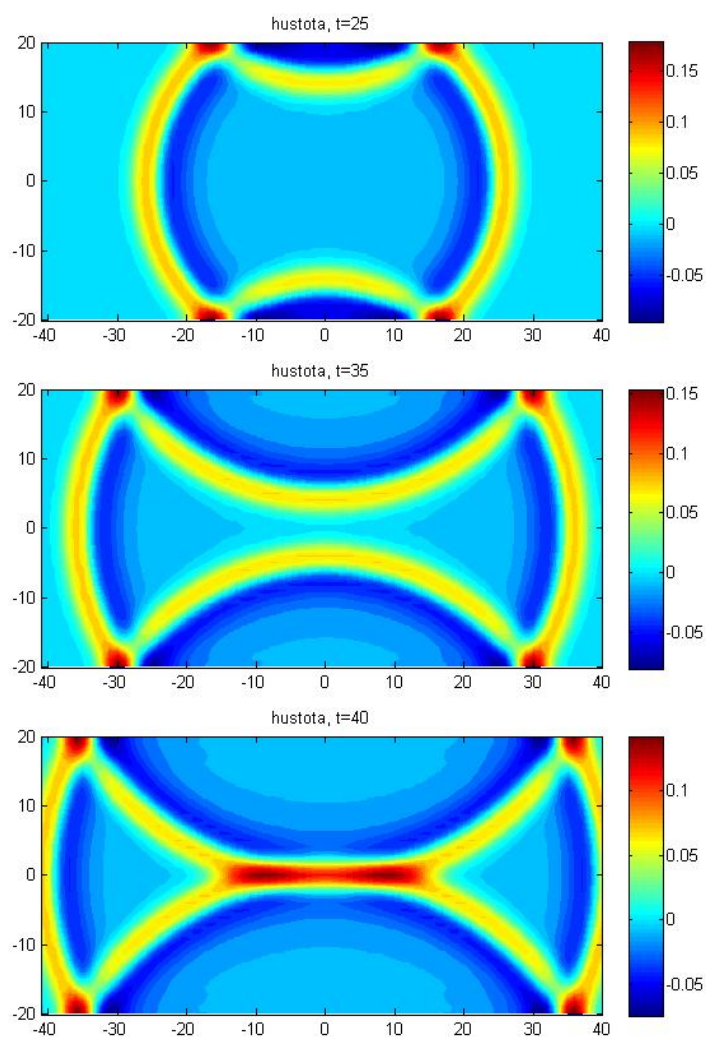
Pro výpočet jsem použila opět 11-bodové schéma metody konečných diferencí FDo11p a šestistupňovou metodu Runge-Kutta RKo6s. Parametry výpočtu jsou uvedeny v tabulce 7.4.

Při použití sponge zóny musíme volit citlivě parametr σ_1 . Když ho zvolíme příliš velký, poškodí sponge zóna řešení. Navíc musí být sponge zóna dostatečně velká.

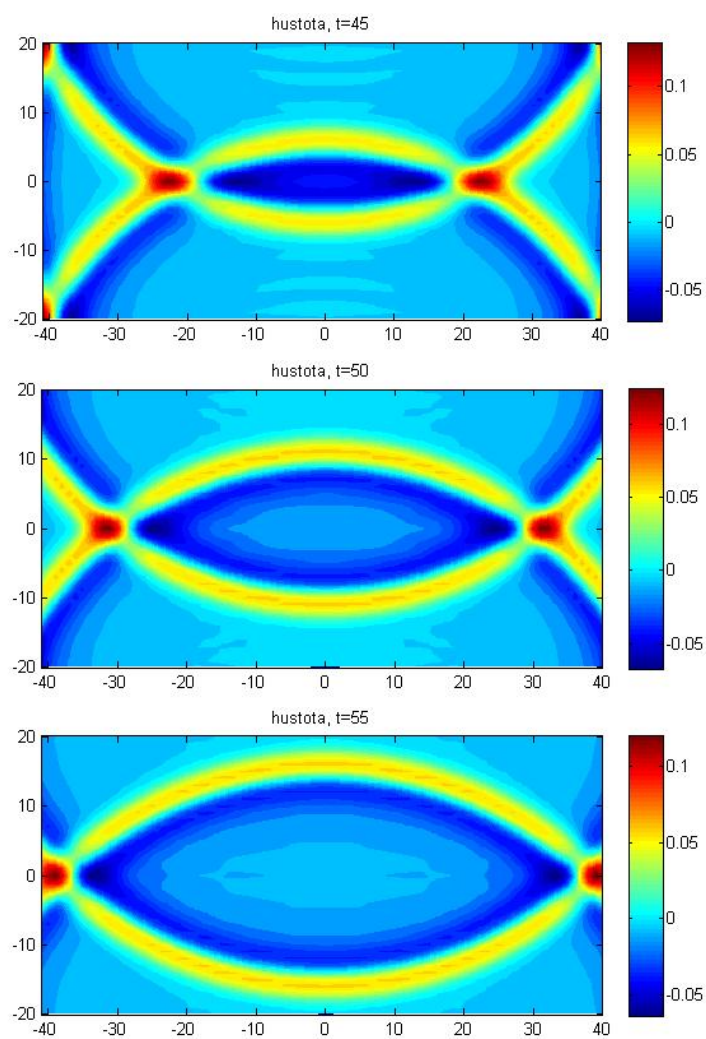
V tomto příkladě jsem vyzkoušela řešit příklad s použitím selektivního filtru i bez něj. S použitím selektivního filtru docházelo k poškozování řešení na okraji oblasti stejně jako v příkladu 7.2.1, ale řešení v centrální části více odpovídalo očekávání. Řešení na obrázcích 7.10 a 7.11 jsou spočítána s použitím selektivního filtru, ale jen do času, kdy řešení ještě není poškozené.



Obr. 7.9: Schéma zadání příkladu s pevnou stěnou



Obr. 7.10: Příklad , čas $t = 25, 35, 40$



Obr. 7.11: Výsledky posledního příkladu, $t = 45, 50, 55$

8 CO JE NA CD A OVLÁDÁNÍ PROGRAMU

Na přiloženém CD jsou programy v Matlabu využívající výše popsanych postupů a schémat.

Parametry výpočtů jsou nastaveny tak, aby po spuštění byly konečné výsledky uspokojivé. Některé parametry lze však měnit, ale je třeba brát ohled například na stabilitu výpočtu (obvykle je třeba změnit CFL konstantu). Při změně schémat metody konečných diferencí je potřeba změnit Δx , a podobně.

8.1 Program 1D

Ve složce 1D je soubor vlna1D.m. Tento program nevyžaduje žádné vstupy a počítá příklad 7.1.3 do času $t = 800$. Protože tento program počítá řešení na intervalu $\langle -50, 850 \rangle$, lze čas t pouze zkrátit. Při větším prodloužení by měla vlna vystoupit z oblasti, ale v příkladu nejsou implementovány okrajové podmínky. Ty lze najít a vyzkoušet v upraveném programu ve složce "1D hranice". Hlavní program se nazývá opět vlna1D.m a také nevyžaduje vstupní parametry.

V programu lze změnit typ počáteční podmínky. V tomto případě je pro získání dobrého výsledku nutné upravit CFL číslo.

8.2 Programy 2D

V dalších třech složkách jsou programy ve 2D z kapitoly 7. Jsou to složky

- 2D první příklad
- 2D druhý příklad
- 2D stěna

V těchto programech je soubor EulerEq.m. To je hlavní program. Lze v něm upravovat některé parametry. Je to především

- t_{final} - čas, do kterého se úloha řeší
- CFL - CFL číslo
- schéma FDM, schéma selektivního filtru a síla jeho tlumení
- typ okrajové podmínky

9 ZÁVĚR

Ověřila jsem použití metody konečných diferencí v numerických výpočtech aeroakustiky.

V aeroakustice řešíme úlohy šíření vln, které mají obvykle malou amplitudu a šíří se na velké vzdálenosti. Kvůli tomu je potřeba dosáhnout vysoké přesnosti. Prokázalo se, že pro tyto úlohy je vhodné odvodit schémata metody konečných diferencí v zájmu snížení disipace a disperze šířených vln i za cenu snížení formálního řádu přesnosti.

Největším problémem použití metody konečných diferencí je realizace okrajových podmínek, v akustice zejména podmínka volného konce. Je nezbytné, aby nedocházelo ani k částečnému odrazu vlny. Při použití optimalizovaných schémat metody konečných diferencí je vhodné použít i tzv. selektivní filtry, které odstraní falešné vlny s malou vlnovou délkou.

V práci také řeším odvození Runge-Kuttovy metody tak, aby byla disipace a disperze šířených vln byla co nejmenší. Pro použití v CAA musí navíc být metoda jen málo náročná na paměť. Metoda uvedená v této práci uchovává pouze dvě staré hodnoty každé proměnné.

Ověřila jsem, že optimalizovaná schémata jsou pro použití v CAA lepší než standardní. Odvozené metody jsem implementovala pro příklad v 1D. Testovacím příkladem byla rovnice advekce s počáteční podmínkou, která se obvykle používá pro ověření přesnosti při šíření vln na dlouhé vzdálenosti. Jako nejlepší z vyzkoušených schémat jsem vyhodnotila optimalizované 13-bodové schéma. Ověřila jsem, že se zvyšujícím se počtem bodů schématu se výsledky zlepšují.

Ve 2D jsem řešila dva typy počáteční podmínky.

Dále jsem vyzkoušela několik druhů okrajových podmínek, a to několik možností realizace podmínky s volným koncem a jeden možný způsob simulace pevné stěny.

Z podmínky pro volný konec jsem vyhodnotila jako nejlepší necentrální schéma konečných diferencí.

Pokračováním této práce by mohlo být umístění překážek do simulované oblasti, rozšíření programu do 3D a umístění zdroje zvuku do simulované oblasti.

LITERATURA

- [1] BAILLY Ch., BOGEY Ch.: *An overview of numerical methods for acoustic wave propagation*. European Con
- [2] BAJKO J.: *Meshfree methods for computational aeroacoustics*. Brno University of Technology, Faculty of Mechanical Engineering, 2013 (77 pages). Supervisor doc. RNDr. Libor Čermák, CSc.
- [3] BERLAND J., BOGEY Ch., BAILLY Ch.: *Optimized explicit schemes: matching and boundary schemes and 4-th order Runge-Kutta algorithm*. 10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, AIAA 2004-2814.
- [4] BOGEY Ch., BAILLY Ch.: *A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations*. Journal of Computational Physics 194, 194-214, 2004.
- [5] Hu F. Q., HUSSAINI M. Y., MANTHEY J. L.: *Low-Dissipation and Low-Dispersion Runge-Kutta Schemes for Computational Acoustics*. Journal of Computational Physics 124, 177-191, 1996.
- [6] LUKÁČOVÁ-MEDVIĐOVÁ M.: *Mathematical methods in fluid dynamics*. 1. vyd. Brno: CERM, 2003, 81 s. ISBN 80-214-2511-3.
- [7] RAMBOER J., BROECKHOVEN T., SMIRNOV S., LACOR L.: *Optimization of time integration schemes coupled to spatial discretization for use in CAA applications*. Journal of Computational Physics 213, 777-802, 2006. Conference on Computational Fluid Dynamics, 2006.
- [8] ROECK W.D.: *Hybrid Methodologies for the computational Aeroacoustic Analysis of Confined, Subsonic Flows, doctoral thesis*. Katholieke Universiteit Leuven, ISBN 978-90-5682-803-5, 2007.
- [9] TAM Ch. K. W.: *Computational Aeroacoustics: a wave number approach*. 1st pub. Cambridge: Cambridge University Press, 2012, xiv, 481 s. Cambridge aerospace series. ISBN 978-0-521-80678-7.
- [10] TAM Ch. K. W., WEBB J. C.: *Dispersion-Relation-Preserving Difference Schemes for Computational Acoustics*. Journal of Computational Physics 107, 262-281, 1993.

SEZNAM SYMBOLŮ, VELIČIN A ZKRATEK

1D	jednodimenzionální úloha
2D	dvoudimenzionální úloha
3D	třídimenzionální úloha
CAA	výpočetní akustika - Computational Aeroacoustics
CFD	Computational fluid dynamics
FDM	metoda konečných diferencí - Finite difference method
LDDRK	Runge-Kuttovy metody časové integrace s nízkou disipací a nízkou disperzí - Low-dissipation low-dispersion Runge-Kutta algorithms
LEE	linearizované Eulerovy rovnice - Linearized Euler equations
RK	Runge-Kuttova metoda

\mathbb{N}	množina přirozených čísel
\mathbb{R}	množina reálných čísel
d	dimenze prostoru
$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$	prostorová proměnná
$t \in (0, \infty)$	časová proměnná
$\Omega \subset \mathbb{R}^d$	oblast v \mathbb{R}^d
$\rho(\mathbf{x}, t)$	hustota
$\mathbf{v} = (v_1(\mathbf{x}, t), \dots, v_d(\mathbf{x}, t))$	rychlost
$p = p(\mathbf{x}, t)$	tlak
$p = p(\mathbf{x}, t)$	tlak
γ	adiabatická konstanta
s	počet rovnic, $s = d + 2$
a	rychlost šíření
c_0	rychlost zvuku
$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$	vektor konzervativních proměnných
$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$	vektor primitivních proměnných
$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$	vektor akustických proměnných
$\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$	vektor stacionárních proměnných
\mathbf{H}	vektor derivací hodnot veličin středního toku
$\mathbf{f}_j(\mathbf{w})$	vektor toku ve směru j
$D(x)$	filtrovací funkce
σ_d	síla tlumení selektivního filtru
$\sigma(x)$	funkce tlumící funkce sponge zóny
$\sigma(x)$	síla tlumení sponge zóny
$\Gamma = \partial\Omega$	hranice oblasti