

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE A JEJICH UŽITÍ VE FYZICE

ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR APPLICATIONS IN PHYSICS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

LUBOMÍR SOUKUP

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

DOC. RNDr. JAN ČERMÁK, CSc.

BRNO 2010

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky

Akademický rok: 2009/2010

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Lubomír Soukup

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Obyčejné diferenciální rovnice a jejich užití ve fyzice

v anglickém jazyce:

Ordinary differential equations and their applications in physics

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Obyčejné diferenciální rovnice jsou matematickým vyjádřením řady klíčových fyzikálních zákonů a principů. Tyto rovnice proto hrají významnou roli ve většině odvětví klasické a moderní fyziky. Úkolem je popsat některé z aplikací obyčejných diferenciálních rovnic ve fyzice, se zaměřením na témata probíraná v rámci výuky na FSI.

Cíle bakalářské práce:

Cílem bakalářské práce by mělo být uvedení přehledu základních aplikací diferenciálních rovnic v teorii mechaniky, příp. v dalších odvětvích fyziky. Předpokládá se přitom nejen odvození těchto rovnic na základě příslušných fyzikálních principů, ale také nalezení a diskuse jejich řešení.

Abstrakt

Mnohé úlohy inženýrské praxe vedou na obyčejné diferenciální rovnice. Tyto rovnice jsou v řadě případů matematickou formalizací příslušných fyzikálních zákonů. Cílem této práce je uvést některé z těchto úloh, a to zejména s ohledem na látku probíranou v rámci studia na FSI VUT v Brně.

Abstract

Numerous tasks of engineering practice lead to ordinary differential equations. In many cases these equations exist as mathematic formalization of appropriate physical laws. The aim of this thesis is to mention some of these problems especially with regard to the topic discussed within the studies at FSI VUT in Brno.

klíčová slova

Obyčejné diferenciální rovnice, fyzikální zákony, matematická formalizace

key words

Ordinary differential equations, physical laws, mathematical formalization

SOUKUP, L. *Obyčejné diferenciální rovnice a jejich užití ve fyzice*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2010. 32 s. Vedoucí bakalářské práce doc. RNDr. Jan Čermák, CSc.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Obyčejné diferenciální rovnice a jejich užití ve fyzice* vypracoval samostatně pod vedením doc. RNDr. Jana Čermáka, CSc. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Lubomír Soukup

Děkuji svému školiteli doc. RNDr. Janu Čermákovi, CSc. za přínosné rady a připomínky při vedení mé bakalářské práce.

Lubomír Soukup

Obsah

1	Úvod	7
2	Fyzikální zákony a odvození užitých derivací	8
2.1	Užití fyzikální zákony	8
2.2	Fyzikální význam užitých derivací	9
3	Základní rovnice pohybu hmotného bodu	11
3.1	Vrh svislý	11
3.2	Vrh šikmý	12
3.3	Mechanické kmity - oscilátory	13
3.3.1	Lineární harmonický oscilátor - netlumené kmity	13
3.3.2	Lineární harmonický oscilátor - netlumené kmity v gravitačním poli	14
3.3.3	Lineární harmonický oscilátor - tlumené kmity	15
3.3.4	Lineární harmonický oscilátor - vynucené kmity při tlumení	18
3.4	Matematické kyvadlo	20
4	Další vybrané úlohy	22
4.1	Kapaliny v pohybu	22
4.2	Návrh tvaru nosníku	24
4.3	Křivka rovnoměrně zatíženého mostního lana - řetězovka	25
4.4	Kondenzátor v RC obvodu (napětí a proud)	29
5	Závěr	31

1 Úvod

Obyčejné diferenciální rovnice (ODR) jsou tradiční součástí matematické analýzy. Touto problematikou se v jejích počátcích zabývali Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz, Leonhard Euler a další. Zájem o tuto problematiku v poslední době výrazně narůstá, neboť je velmi využívána v mnoha inženýrských oborech.

Tato bakalářská práce je zaměřena převážně na sestavení vybraných ODR, které jsou matematickým modelem řady rozmanitých problémů. Využíváme zde fyzikálních zákonů, které po jejich matematické interpretaci vytvoří základ pro sestavení příslušné ODR.

Jedním ze smyslů práce bylo vytvořit text, který by mohli využívat i studenti FSI VUT v Brně, zejména v souvislosti s výukou předmětů Matematika III, Fyzika I, Fyzika II, případně dalších odborných předmětů. Z prostorových důvodů zde není zařazena ani teorie ODR, ani (až na výjimky) popis metod řešení. Proto čtenáře při studiu teorie ODR odkážeme například na skriptu [2].

Tato bakalářská práce má následující strukturu. V teoretické části (kapitola 2) uvedeme fyzikálními zákony, které následně využíváme při sestavování diferenciálních rovnic v praktické části. Dále zde vysvětlíme fyzikální význam derivací, které při sestavování a řešení ODR využíváme. Praktická část (kapitoly 3 a 4) je stěžejní částí této práce, neboť zde vysvětlíme možnosti využití fyzikálních zákonů při sestavování ODR. Kapitola 3 řeší odvození základních pohybových rovnic, včetně popisu kmitů harmonických oscilátorů. V kapitole 4 uvedeme další vybrané úlohy vedoucí na řešení pomocí ODR. Oddíl 4.1 popisuje průběh vypouštění kapaliny otvorem na dně válcové nádoby. V oddílech 4.2 a 4.3 aplikujeme ODR na problematiku mostních konstrukcí. Závěr praktické části věnujeme odvození rovnic popisujících průběh napětí a proudu v kondenzátoru zapojeném v RC obvodu.

2 Fyzikální zákony a odvození užitých derivací

2.1 Užité fyzikální zákony

V této části uvedeme přehled fyzikálních zákonů, které následně využijeme při sestavování ODR v kapitolách 3 a 4. Půjde zejména o druhý Newtonův zákon, vztah rovnováhy sil, zákon zachování energie, Hookův zákon a druhý Kirchhoffův zákon.

• **Druhý Newtonův zákon.** Druhý Newtonův zákon (někdy též zvaný zákon sil) je znám ve tvaru

$$\sum \vec{F} = m\vec{a},$$

kde $\sum \vec{F}$ je vektorový součet všech sil působících na těleso, m je hmotnost, $\vec{a}$ je výsledný vektor zrychlení. Fyzikální interpretace tohoto zákona tedy je, že výslednice sil působících na těleso o hmotnosti m udělí tělesu přímo úměrné zrychlení $\vec{a}$.

Rovnováha sil. Vztah pro rovnováhu sil vychází z druhého Newtonova zákona. Pokud se těleso vzhledem ke zvolené soustavě nepohybuje se zrychlením, tedy vektor zrychlení $\vec{a} = \vec{0}$, pak i výslednice vektorového součtu sil $\sum \vec{F}$ působících na těleso musí být nulová, tj.

$$\vec{a} = 0 \Rightarrow \sum \vec{F} = 0. \quad (2.1)$$

• **Zákon zachování mechanické energie.** Tento zákon pojednává o celkové mechanické energii izolované soustavy na kterou působí pouze interakční síly. Energie této soustavy je konstantní. Jeho tvar je

$$E_{k,1} + E_{p,1} = E_{k,2} + E_{p,2}, \quad (2.2)$$

kde $E_{k,1} + E_{p,1}$ je součet energie kinetické a potenciální v daném časovém okamžiku a $E_{k,2} + E_{p,2}$ je součet energie kinetické a potenciální v jiném časovém okamžiku pozorované soustavy. Jinak vyjádřeno, součet kinetické a potenciální energie je v kterémkoliv okamžiku stálý.

• **Hookův zákon.** Pro případy pružné síly platí zobecněná forma Hookova zákona

$$F_p = -ky, \quad (2.3)$$

která říká, že pružná síla F_p je přímo úměrná výchylce tělesa z rovnovážné polohy do vzdálenosti y . Konstanta $k > 0$ je konstantou úměrnosti a její fyzikální význam je míra tuhosti pružiny. Znaménko mínus vyjadřuje orientaci pružné síly, která směřuje opačným směrem oproti vychýlení y .

• **Druhý Kirchhoffův zákon.** Druhý Kirchhoffův zákon (někdy též zvaný smyčkové pravidlo) je znám ve tvaru

$$\sum U_\varepsilon = \sum U_\Omega, \quad (2.4)$$

jenž říká, že algebraický součet všech elektromotorických napětí $\sum U_\varepsilon$ je roven součtu všech ohmických napětí $\sum U_\Omega$ v kterémkoliv místě uzavřené smyčky. Jinak řečeno, součet napětí všech zdrojů je roven součtu napětí všech "spotřebičů" na pozorované smyčce.

2.2 Fyzikální význam užitých derivací

V této části vysvětlíme význam derivací, které využíváme při výpočtech v kapitole 3 a kapitole 4. V dalších úvahách budeme ztotožňovat pohyb tělesa s hmotným bodem. Hmotným bodem rozumíme myšlený objekt, který má z hlediska vzájemného působení na jiné objekty všechny znaky tělesa, které reprezentuje, ovšem jeho geometrické vlastnosti (rozměry, tvar) se v daném problému neprojevují. Nejčastějším případem hmotného bodu je těžiště daného tělesa.

Okamžitá rychlost. Popis pohybu tělesa zavedeme pomocí vztažného bodu. Nejčastěji se jedná o počátek souřadných os v kartézské soustavě. Polohu hmotného bodu v takovém systému popíšeme polohovým vektorem

$$\vec{r} = (x, y, z),$$

což je spojnice vztažného bodu a hmotného bodu, kde x, y, z jsou složky polohového vektoru $\vec{r}$, (které budeme dále chápat v závislosti na čase t .)

Okamžitou rychlost $\vec{v}$ lze odvodit z vektoru průměrné rychlosti $\vec{v}_p$

$$\vec{v}_p = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (2.5)$$

Symbol Δ ve fyzice v obecném smyslu vyjadřuje změnu (přírůstek, úbytek) dané veličiny. V tomto případě $\Delta \vec{r}$ je změna polohy tělesa za daný čas Δt . Rozepsáním vztahu (2.5) do složek získáme vektor průměrné rychlosti

$$\vec{v}_p = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t} \right).$$

Okamžitá rychlost $\vec{v}$ je limitní případ průměrné rychlosti $\vec{v}_p$ pro $\Delta t \rightarrow 0$. Jedná se tedy o derivaci polohového vektoru $\vec{r}$ podle času

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right).$$

Dále budeme užívat standardního označení

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \quad (2.6)$$

Okamžité zrychlení. Pokud vektor rychlosti $\vec{v}$ mění směr nebo velikost, jedná se o pohyb s určitým zrychlením $\vec{a}$. Okamžité zrychlení $\vec{a}$ odvodíme z průměrného zrychlení $\vec{a}_p$, které je rovno poměru změny rychlosti $\vec{v}$ za určitý čas t . Za pomoci výše vysvětleného významu symbolu Δ lze tento poměr změny rychlosti za určitý čas zapsat jako

$$\vec{a}_p = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (2.7)$$

Okamžité zrychlení je pak limitním případem vztahu (2.7), kdy $\Delta t \rightarrow 0$. Jde tedy o derivaci rychlosti $\vec{v}$ podle času

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}). \quad (2.8)$$

Užitím (2.8) lze například druhý Newtonův zákon přepsat na tvar

$$\sum \vec{F} = m\ddot{\vec{r}} = m(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}), \quad (2.9)$$

kde m je hmotnost tělesa, $\ddot{\vec{r}}$ je výsledný vektor zrychlení.

Okamžitý elektrický proud. Prochází-li elektrický proud I průřezem vodiče rovnoměrně, pak lze říci, že vodičem prochází průměrný elektrický proud, který je definován vztahem

$$I_p = \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

kde ΔQ je množství přeneseného náboje za čas Δt . V limitním případě, kdy $\Delta t \rightarrow 0$, se jedná o časovou derivaci náboje Q . Získáme tak vztah pro okamžitý proud protékající vodičem ve tvaru

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (2.10)$$

3 Základní rovnice pohybu hmotného bodu

V první části této kapitoly odvodíme pohybové rovnice pro výpočet svislého vrhu (například uvolnění jablka v určité výšce), šikmého vrhu (například hod kamenem do dálky) a vodorovného vrhu (například výstřel z vodorovně umístěné pušky). Pro větší srozumitelnost jednotlivá odvození výše zmíněných případů pohybu provedeme v různých dimenzích n , kde $n = 1, 2$ volíme v závislosti na typu pohybu. Při výpočtu úloh tohoto charakteru zanedbáme pro zjednodušení vlivy okolního prostředí. Neuvažujeme odpor vzduchu a z hlediska interakcí s okolními tělesy zahrnujeme pouze gravitační zrychlení Země. Užíváme znaménka mínus pokud gravitační zrychlení působí proti směru vertikální osy, v opačném případě používáme znaménka plus. Pohyb hmotného bodu je podrobně vysvětlen v [3] nebo [4].

3.1 Vrh svislý

Tento typ příkladu je názornou ukázkou odvození základní rovnice popisující pohyb tělesa po přímce. Volíme tedy dimenzi $n = 1$. Jedná se o pohyb hmotného bodu v poli zemské tíže, tedy o pohyb rovnoměrně zrychlený, kde

$$a = -g,$$

přičemž g je gravitační zrychlení působící proti směru osy y (orientované vzhůru). Odvodíme rovnice pro rychlost a polohu hmotného bodu v případě svislého vrhu:

Nechť $y(t)$ je funkce popisující výšku hmotného bodu v závislosti na čase t . Pak rychlost $v = v(t)$ a zrychlení $a = a(t)$ lze podle (2.6) a (2.8) zapsat ve tvaru

$$v = \dot{y}, \quad a = \ddot{y}.$$

Z druhého Newtonova zákona (2.9) vyplývá (ve skalárním případě) vztah

$$F = m\ddot{y}.$$

Jedinou silou působící na těleso je tíhová síla Země $F_g = -mg$, kde m je hmotnost tělesa. Získáváme tak ODR druhého řádu

$$\ddot{y} = -g,$$

odkud dvojí integrací dostáváme obecné řešení ve tvaru

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2.$$

Integrační konstanty C_1 a C_2 získáme z počátečních podmínek v čase $t = 0$

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = v_0,$$

kde y_0 je počáteční výška, v_0 je počáteční rychlost. Dosazením těchto počátečních podmínek do obecného řešení získáme $C_1 = v_0$, $C_2 = y_0$. Zpětným dosazením konstant C_1, C_2 do obecného řešení získáváme partikulární řešení pro polohu hmotného bodu v případě svislého vrhu ve tvaru

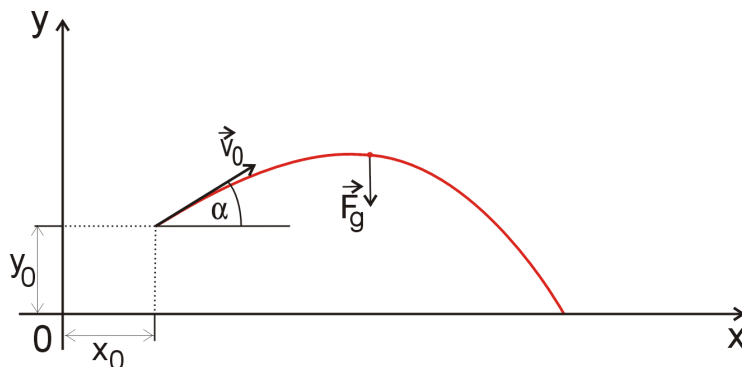
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0. \quad (3.11)$$

Okamžitou rychlost hmotného bodu získáme derivací (3.11) podle času, tj.

$$v = -gt + v_0.$$

3.2 Vrh šikmý

Šikmý vrh si představme například jako hod kamene o hmotnosti m rychlostí $\vec{v}_0$ pod úhlem α (viz Obr. 1). Šikmý vrh popíšeme v dimenzi $n = 2$, tedy v rovině.



Obr. 1 Vrh šikmý

Jedinou silou působící na hmotný bod je síla gravitační

$$\vec{F}_g = (0, -mg),$$

Ze vztahu (2.9) pak plyne soustava ODR druhého řádu

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g,$$

kterou řešíme postupnou integrací. Obecné řešení této soustavy je

$$x = C_1 t + C_2. \quad (3.12)$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_4. \quad (3.13)$$

Integrační konstanty těchto obecných řešení dostaneme z počátečních podmínek. Vektor počáteční polohy $\vec{r}_0$ v čase $t = 0$ předpokládáme ve tvaru

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0),$$

odkud vyplývají počáteční podmínky

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

Vektor počáteční rychlosti je

$$\vec{v}_0 = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha),$$

přičemž význam rychlosti v_0 a úhlu α je znázorněn na Obr. 1. Odtud máme další počáteční podmínky

$$\dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha.$$

Dosazením těchto počátečních podmínek do (3.12) a (3.13) získáme integrační konstanty

$$C_1 = v_0 \cos \alpha, \quad C_2 = x_0, \quad C_3 = v_0 \sin \alpha, \quad C_4 = y_0.$$

Dosadíme-li hodnoty těchto konstant zpětně do (3.12) a (3.13), získáme řešení partikulární

$$x = v_0 \cos \alpha t + x_0,$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t + y_0.$$

Rychlost hmotného bodu bychom získali časovou derivací analogicky jako v případě svislého vrhu.

Poznámka. Zvláštním případem šikmého vrhu je vrh vodorovný. Představme si například vodorovně umístěnou pušku. Požadujeme vyjádřit vztah popisující polohu vystřeleného náboje rychlosti $\vec{v}_0$ v libovolném čase t . Pokud je puška umístěna vodorovně, pak svírá s osou x úhel $\alpha = 0$. Dosazením tohoto předpokladu do partikulárního řešení šikmého vrhu získáme vyjádření polohy vodorovného vrhu ve tvaru

$$x = v_0 t + x_0$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0.$$

3.3 Mechanické kmity - oscilátory

Nechť na hmotný bod pohybující se po přímce působí pružná síla F_p , která je přímo úměrná výchylce y z rovnovážného stavu a směr jejího působení je orientován proti směru výchylky. Tuto sílu popisuje Hookův zákon (2.3). Systém vykonávající kmity podle uvedeného pravidla se nazývá lineární harmonický oscilátor.

V této kapitole uvedeme různé případy kmitů, jako je pohyb netlumený, pohyb tlumený, vynucené kmity, na které působí periodicky se měnící síla, a pohyb kyvadla, jehož vratným elementem je gravitační síla Země. S výjimkou matematického kyvadla v následujícím textu představuje pružný element oscilátoru pružina o tuhosti k , na jejímž konci je zavěšen hmotný bod. Maximální výchylku nazýváme amplituda A . Ve všech případech zanedbáme vliv tření vznikající v mechanismech. Odvození provedeme pro lineární oscilátory v dimenzi $n = 1$. Tvar druhého Newtonova zákona (2.9) tedy uvažujeme ve skalárním případě. Pro matematické kyvadlo pak volíme dimenzi $n = 2$.

3.3.1 Lineární harmonický oscilátor - netlumené kmity

Mějme hmotný bod zavěšený na pružině. Na tento hmotný bod působí pouze pružná síla F_p , kterou vyjadřuje Hookův zákon (2.3). Z druhého Newtonova zákona (2.9) sestavíme lineární ODR druhého řádu

$$m\ddot{y} = -ky,$$

po úpravě

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \quad \text{kde } \omega^2 = \frac{k}{m}. \quad (3.14)$$

Jedná se o homogenní lineární ODR druhého řádu, jejíž charakteristická rovnice je tvaru

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0.$$

Řešením této kvadratické rovnice získáme kořeny $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Obecné řešení rovnice (3.14) je pak ve tvaru

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (3.15)$$

kde $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Ekvivalentnost obou tvarů obecného řešení je dána vztahy

$$C_1 = A \sin \varphi, \quad C_2 = A \cos \varphi,$$

kde $A > 0$ je amplituda, výraz $(\omega t + \varphi)$ se nazývá fáze harmonických kmitů. Hodnota této fáze v čase $t = 0$ je rovna φ a proto se tato fázová konstanta nazývá fázový posun, pro který platí $-\pi \leq \varphi \leq \pi$. Konstanta ω se nazývá úhlová frekvence (kruhová frekvence), její jednotkou je $[s^{-1}]$. Uplatníme-li počáteční podmínky v čase $t = 0$ ve tvaru

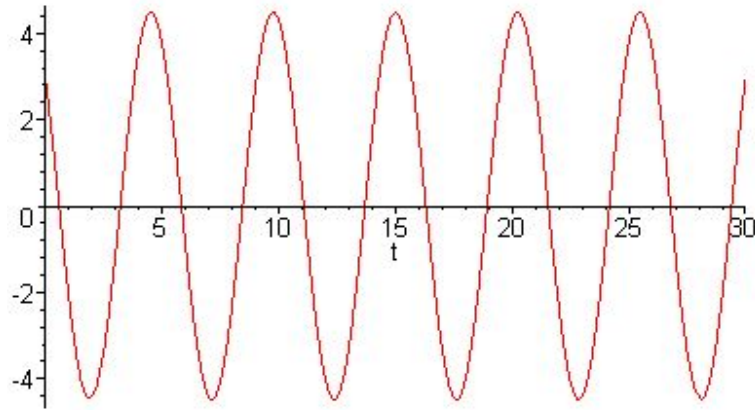
$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = v_0, \quad (3.16)$$

kde y_0 je počáteční výchylka a v_0 počáteční rychlost, pak z obecného řešení získáme konstanty

$$C_1 = y_0, \quad C_2 = \frac{v_0}{\omega}.$$

Zpětným dosazením těchto konstant do (3.15) získáme partikulární řešení ve tvaru

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t.$$



Obr. 2. Závislost výchylky netlumeného kmitání na čase t
Zvoleno: $t \in < 0; 30 >$, $y_0 = 3 \text{ m}$, $v_0 = 4 \text{ ms}^{-1}$, $\omega = 1.2 \text{ N(mkg)}^{-1}$.

3.3.2 Lineární harmonický oscilátor - netlumené kmity v gravitačním poli

Vyšetřeme případ lineárního harmonického oscilátoru, který se nachází v gravitačním poli Země. Mějme hmotný bod, na který působí tíhová síla

$$F_g = -mg$$

a také síla pružná (2.3). Užitím druhého Newtonova zákona (2.9) získáme nehomogenní lineární ODR druhého řádu

$$m\ddot{y} = -ky - mg$$

nebo-li

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -g, \quad kde \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Obečným řešením příslušné homogenní rovnice je podle předcházející části výraz

$$y_h = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \quad (3.17)$$

Metodou neurčitých koeficientů dostaneme partikulární řešení ve tvaru

$$y_p = -\frac{g}{\omega^2}. \quad (3.18)$$

Obečné řešení je dáno součtem vztahů (3.17) a (3.18), tj.

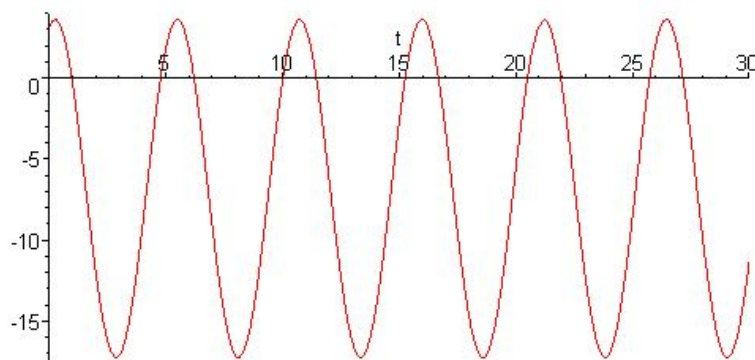
$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - \frac{g}{\omega^2} \quad (3.19)$$

Při počátečních podmínkách (3.16) získáme z obečného řešení hodnoty konstant

$$C_1 = y_0 + \frac{g}{\omega^2}, \quad C_2 = \frac{v_0}{\omega}$$

a dosazením těchto konstant do (3.19) získáme řešení ve tvaru

$$y = \frac{1}{\omega^2} [(y_0 \omega^2 + g) \cos(\omega t) + v_0 \omega \sin \omega t - g].$$



Obr. 3. Závislost výchylky netlumeného kmitání na čase t v tíhovém poli Země
Zvoleno: $t \in < 0; 30 >$, $y_0 = 3 \text{ m}$, $v_0 = 4 \text{ ms}^{-1}$, $\omega = 1.2 \text{ N(mkg)}^{-1}$, $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$.

3.3.3 Lineární harmonický oscilátor - tlumené kmity

V předchozích příkladech jsme ukázali, že pokud na hmotný bod působí pouze pružná síla F_p nebo tíhová síla F_g , bude hmotný bod vykonávat kmity s konstantní amplitudou A . V reálném případě je ovšem pohyb oscilátoru ovlivněn brzdou silou. U mechanických oscilátorů se jedná především o sílu vznikající odporem prostředí. Tato síla působí proti směru kmitání a při malých rychlostech je přímo úměrná okamžité rychlosti hmotného bodu $v = \dot{y}$. Konstantu úměrnosti brzdě síly $b > 0$ nazýváme součinitel útlumu a závisí na vlastnostech prostředí a hmotného bodu. Takový oscilátor pak nazveme tlumený oscilátor. Brzdnou sílu vyjádříme vztahem

$$F_b = -b\dot{y}. \quad (3.20)$$

Užitím Hookeova zákona (2.3) a brzděné síly (3.20) lze říci, že na hmotný bod působí celková síla

$$F_c = -ky - b\dot{y}.$$

Z druhého Newtonova zákona (2.9) plyne

$$m\ddot{y} = -ky - b\dot{y},$$

odkud úpravou získáme lineární ODR druhého řádu

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega^2 y = 0, \quad (3.21)$$

kde $2\delta = \frac{b}{m}$ a $\omega^2 = \frac{k}{m}$. Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0, \quad (3.22)$$

je opět kvadratická a její kořeny jsou ve tvaru

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}.$$

V závislosti na konstantách δ, ω je možné získat tři odlišné případy řešení:

a) Pokud $\delta < \omega$, pak oba kořeny rovnice (3.22) jsou komplexní. Označme $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$. Obecné řešení rovnice (3.21) je tvaru

$$y = e^{-\delta t}(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_1 t + \varphi). \quad (3.23)$$

Integrační konstanty A, φ lze užitím počátečních podmínek (3.16) specifikovat jako

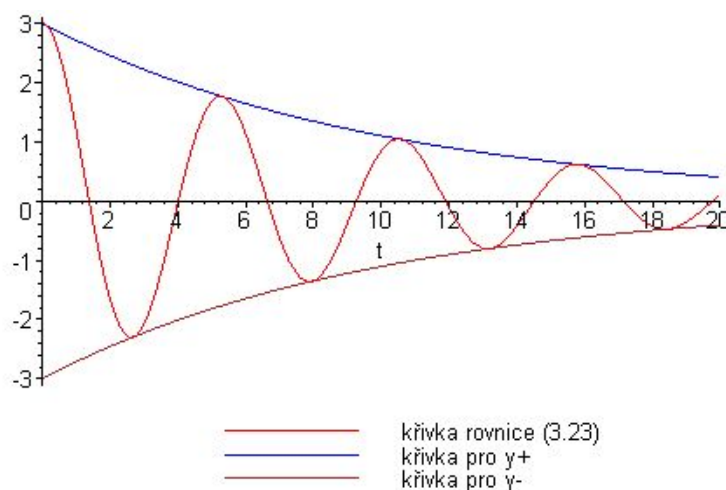
$$C_1 = A \sin \varphi = y_0, \quad C_2 = A \cos \varphi = \frac{v_0 + y_0 \delta}{\omega_1}.$$

Dosazením těchto konstant do (3.23) získáme partikulární řešení

$$y = e^{-\delta t} \left(y_0 \cos \omega_1 t + \frac{v_0 + y_0 \delta}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right).$$

Pohyb tohoto typu nazýváme podkritický tlumený pohyb. Důsledkem podkritického tlumení je na fyzikální úrovni snižování frekvence. Tlumený kmitavý pohyb tak vzniká pouze v případě, kdy tlumící síla je dostatečně slabá. Křivka vyjadřující pohyb tlumeného oscilátoru je sevřena mezi dvěma exponenciálními funkcemi (viz Obr. 4).

$$y_+ = y_0 e^{-\delta t}, \quad y_- = -y_0 e^{-\delta t}.$$



Obr. 4. Závislost výchylky na čase t podkriticky tlumeného kmitání
 Zvoleno: $t \in < 0; 20 >$, $y_0 = 3 \text{ m}$, $v_0 = 0 \text{ ms}^{-1}$, $\omega = 1.2 \text{ N(mkg)}^{-1}$, ms^{-2} ,
 $\delta = 0.1 \text{ (kgs)}^{-1}$.

Podkriticky tlumený pohyb je nejčastějším případem kmitavého pohybu. Výchylka kmitání y se s rostoucím časem zmenšuje. Kmitání ustává teoreticky až za nekonečně dlouhou dobu. Tento pohyb lze pozorovat například u standartních tlumičů vybrací.

b) Pokud $\delta = \omega$, pak kořeny rovnice (3.22) jsou $\lambda_{1,2} = -\delta$. Obecné řešení rovnice (3.21) získáme ve tvaru

$$y = e^{-\delta t}(C_1 t + C_2). \quad (3.24)$$

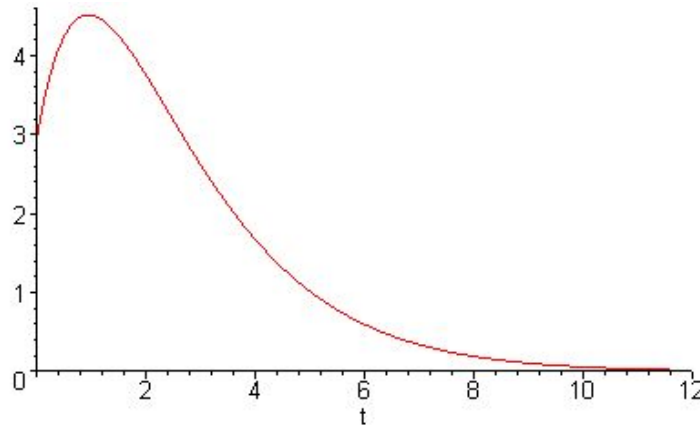
Z počátečních podmínek (3.16) určíme integrační konstanty

$$C_1 = v_0 + \delta y_0, \quad C_2 = y_0$$

Dosazením těchto konstant do (3.24) získáme partikulární řešení

$$y = e^{-\delta t}((v_0 + \delta y_0)t + y_0).$$

Tento případ znázorňuje Obr. 5. Říkáme, že pohyb je tlumen kriticky.



Obr. 5. Závislost výchylky kmitů na čase t při kritickém tlumení
 Zvoleno: $t \in < 0; 12 >$, $y_0 = 3 \text{ m}$, $v_0 = 4 \text{ ms}^{-1}$, $\omega = \delta = 1.2 \text{ N(mkg)}^{-1}$.

V tomto případě se výchylka podle Obr. 5 zmenšuje. Oscilátor se rovnovážné poloze blíží rychleji než v případě $\delta > \omega$ (tento případ je uveden v následujícím odstavci). Do rovnovážné polohy se vrací asymptoticky, tedy teoreticky ji dosáhne až za nekonečně dlouhou dobu. Tohoto tlumeného pohybu se využívá například u měřicích přístrojů, které vyžadují co nejrychlejší dosažení rovnovážné polohy.

c) Pokud $\delta > \omega$, pak oba kořeny rovnice (3.22) jsou reálné, různé a záporné. Obecné řešení (3.21) je tvaru

$$y = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (3.25)$$

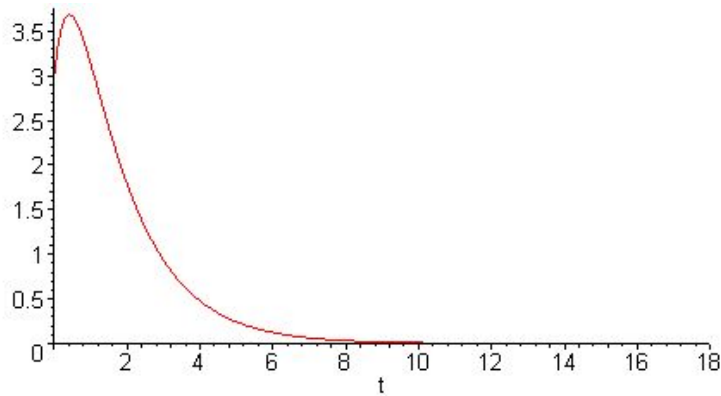
Integrační konstanty určíme z počátečních podmínek (3.16) ve tvaru

$$C_1 = y_0 - \frac{v_0 - \lambda_1 y_0}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad C_2 = \frac{v_0 - \lambda_1 y_0}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Dosazením těchto konstant do (3.25) získáme partikulární řešení ve tvaru

$$y = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} ((\lambda_2 y_0 - v_0) e^{\lambda_1 t} - (\lambda_1 y_0 - v_0) e^{\lambda_2 t}).$$

V tomto případě říkáme, že pohyb je tlumen nadkriticky. Výchylka klesá s časem pomaleji než při kritickém tlumení. Při velkém tlumení tedy nenastává periodický pohyb vůbec stejně jako v odstavci b). Vychýlený oscilátor se z počáteční polohy y_0 přibližuje do rovnovážné polohy pozvolna aniž by ji překročil. Stejně jako v odstavcích a), b) se tedy do rovnovážné polohy dostane teoreticky až za nekonečně dlouhou dobu (viz Obr. 6).



Obr. 6. Závislost výchylky kmitů na čase t při kritickém tlumení
Zvoleno: $t \in < 0; 18 >$, $y_0 = 3 \text{ m}$, $v_0 = 4 \text{ ms}^{-1}$, $\omega = 1, 2 \text{ N(mkg)}^{-1}$, $\delta = 1, 4 \text{ (kgs)}^{-1}$.

3.3.4 Lineární harmonický oscilátor - vynucené kmity při tlumení

Požadujeme-li v reálném případě kmitání lineárního harmonického oscilátoru bez útlumu kmitů, pak je nutné na oscilátor působit určitou vnější periodickou silou F_v

$$F_v = Q \sin \Omega t,$$

kde Q je amplituda této síly a Ω její úhlová frekvence. Předpokládejme dále, že na oscilátor působí pružná síla F_p (2.3) a brzdná síla F_b (3.20). Získáme tak celkovou sílu

$$F_c = F_p + F_b + F_v.$$

Dosazením do (2.9) dostáváme

$$m\ddot{y} = -ky - b\dot{y} + Q \sin \Omega t,$$

kteřou po úpravě přepíšeme na nehomogenní lineární ODR druhého řádu

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega^2 y = \frac{Q}{m} \sin \Omega t. \quad (3.26)$$

Uvažujme případ, kdy $\delta < \omega$. Homogenní rovnice je totožná s rovnicí (3.21), a její řešení je podle (3.23) tedy tvaru

$$y_h = A e^{-\delta t} \sin(\omega_1 t + \varphi).$$

K určení obecného řešení rovnice (3.26) je třeba určit její partikulární řešení y_p . Podle metody neurčitých koeficientů rozlišíme dva případy:

a) Necht' $\Omega \neq \omega$. Pak

$$y_p = B \cos \Omega t + C \sin \Omega t. \quad (3.27)$$

Vyjádřením derivací

$$\dot{y}_p = -B\Omega \sin \Omega t + C\Omega \cos \Omega t, \quad \ddot{y}_p = -B\Omega^2 \cos \Omega t - C\Omega^2 \sin \Omega t.$$

a jejich dosazení do (3.26) lze po úpravě porovnat koeficienty:

$$\begin{aligned} \cos \Omega t : \quad & B(\Omega^2 - \omega^2) + C\Omega\delta = 0 \Rightarrow B = 0, \\ \sin \Omega t : \quad & C(\Omega^2 - \omega^2) - B\Omega\delta = \frac{Q}{m} \Rightarrow C = \frac{Q}{m(\Omega^2 - \omega^2)}. \end{aligned}$$

Dostáváme tak obecné řešení rovnice (3.26) ve tvaru

$$y = y_h + y_p = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_1 t + \varphi) - \frac{Q}{m(\Omega^2 - \omega^2)} \cos \Omega t.$$

b) Necht' $\Omega = \omega$ (případ tzv. rezonance). V tomto případě je nutno tvar (3.27) násobit proměnnou t , neboť člen obsahující $D \cos \omega t$ je obsažen v y_h . Dostáváme tak

$$y_p = Dt \cos \omega t + Et \sin \omega t. \quad (3.28)$$

Konstanty D, E nalezneme časovými derivacemi vztahu (3.28), tj.

$$\dot{y}_p = \cos \omega t (D + Et\omega) + \sin \omega t (E - Dt\omega),$$

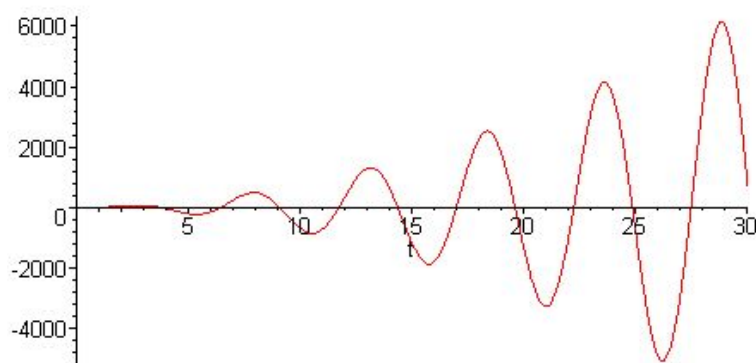
$$\ddot{y}_p = \cos \omega t (2E\omega - D\omega^2 t) + \sin \omega t (-E\omega^2 t - 2D\omega).$$

Analogicky jako v odstavci a) dosazením těchto derivací a partikulárního řešení (3.28) do (3.26) získáme konstanty

$$\begin{aligned} E &= \frac{Q\delta}{2m[\delta^2 + \omega^2(1 + \delta t)^2]}, \\ D &= -\frac{Q\delta\omega(1 + \delta t)}{2m[\delta^2 + \omega^2(1 + \delta t)^2]}. \end{aligned}$$

Obecné řešení je tedy tvaru

$$y = y_h + y_p = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) - \frac{Q}{2m[\delta^2 + \omega^2(1 + \delta t)^2]} [(1 + \delta t)\omega t \cos \omega t - \delta t \sin \omega t].$$



Obr. 7. Závislost výchylky tlumeného kmitání na čase t v případě rezonance
 Zvoleno: $t \in < 0; 30 >$, $y_0 = 2 \text{ m}$, $\omega = \delta = 1.2 \text{ N(mkg)}^{-1}$, $Q = 100 \text{ N}$, $m = 10 \text{ kg}$.

Rezonance je fyzikální jev, který lze pozorovat v případě vynucených kmitů. Frekvence vlastních kmitů je při tomto procesu shodná s frekvencí budící síly. Malá budící síla je tak schopna vyvolat velké změny, při kterých amplituda nucených kmitů rychle vzrůstá a dosahuje maxima (viz Obr. 7.). Frekvence, při níž tento jev nastává se nazývá rezonanční frekvence.

Poznamenejme, že problematiku lineárních oscilátorů lze podrobněji studovat v [1] nebo [2].

3.4 Matematické kyvadlo

Do kategorie nelineárních harmonických oscilátorů patří kyvadla. Představme si hmotný bod o hmotnosti m zavěšený na nepružném vlákně délky l , jehož hmotnost můžeme vzhledem k hmotnosti hmotného bodu zanedbat. Vychýlíme jej o úhel φ a poté uvolníme (neuvažujeme odpor prostředí). Tento pohyb vyjádříme jako funkci okamžité úhlové výchylky φ v čase t . Vratným elementem v tomto případě není jako u příkladů lineárních oscilátorů stlačení a protažení pružiny, ale tíhová síla F_g

$$F_g = -mg,$$

kterou rozložíme do tečného a normálového směru. Z Obr. 8 je zřejmé, že složka ve směru normály působí proti tažné síle F_t vlákna, a jejich výslednice je tedy nulová. Tečná složka gravitační síly je tvaru

$$F_g = -mg \sin \varphi.$$

Hmotný bod urazí za čas t vzdálenost

$$s = l\varphi,$$

po úpravě

$$\ddot{s} = l\ddot{\varphi}.$$

Užitím druhého Newtonova zákona (2.9) získáme

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi.$$

Dostáváme tak nelineární ODR druhého řádu

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0, \quad (3.29)$$

kterou řešíme v závislosti na velikosti výchylky:

a) Řešení pro malé výchylky φ provedeme tzv. linearizací. Znamená to tedy, že nelineární rovnici (3.29) upravíme na lineární. Tuto úpravu lze na základě vztahu $\frac{\sin \varphi}{\varphi} \rightarrow 1$ pro $\varphi \rightarrow 0$. Dostáváme tak lineární ODR druhého řádu ve tvaru

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0.$$

Označíme-li

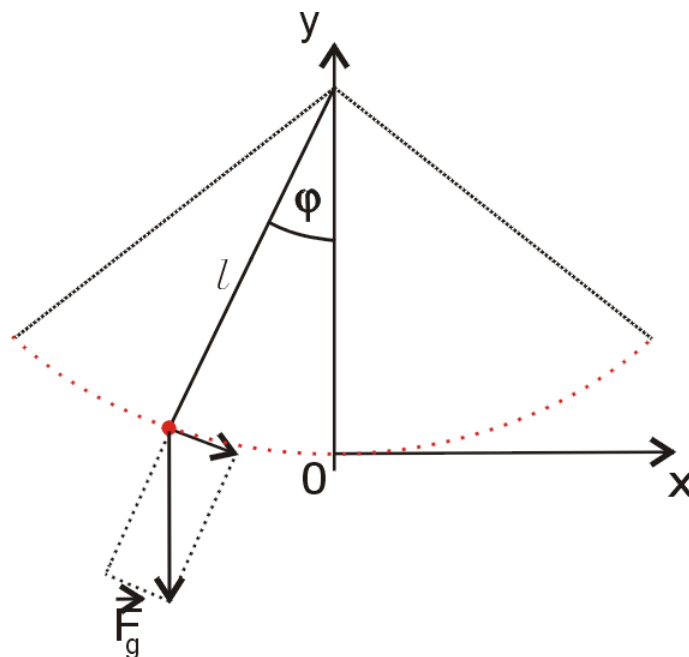
$$\frac{g}{l} = \omega^2,$$

získáme ODR druhého řádu

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0.$$

Tuto diferenciální rovnici řešíme stejným způsobem jako (3.14).

b) Řešení pro velké výchylky nelze určit jednoduchou metodou jako je uvedeno výše, neboť se v tomto případě setkáváme s nelineární ODR druhého řádu, kterou je nutno řešit přibližně. Jeden z možných postupů je vysvětlen například v [2].



Obr. 8. Matematické kyvadlo

Poznámka. Jiný případ nelineárních oscilátorů je popsán Duffingovou rovnicí

$$F_p = -ky^3.$$

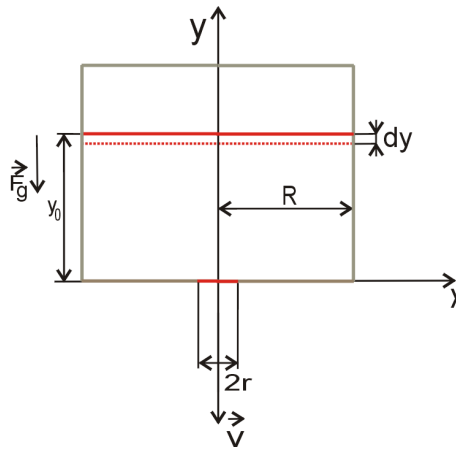
Jedná se o rovnici popisující nelineární oscilátory s kubickou (polynomiální) pružnou silou F_p , která je přímo úměrná třetí mocnině výchylky y z rovnovážné polohy, konstanta k je opět míra tuhosti pružného elementu. Oscilátory popsané Duffingovou rovnicí nejsme schopni řešit analytickými metodami. Tuto problematiku řeší metody numerické, které jsou založeny na přibližných metodách výpočtů.

4 Další vybrané úlohy

V této kapitole provedeme sestavení diferenciálních rovnic pro další vybrané problémy. Zaměříme se na výtok kapaliny, mostní konstrukce a elektřinu. Jedná se o kapitolu, která podá náhled na možnosti uplatnění diferenciálních rovnic v jiných případech, než je pohyb hmotného bodu.

4.1 Kapaliny v pohybu

Představme si válcovou nádobu o poloměru R naplněnou kapalinou do určité výšky. Na dně této nádoby je malý kruhový otvor o poloměru r , jenž v čase $t = 0$ uvolníme. Nechť funkce $y = y(t)$ popisuje výšku hladiny v nádobě. Tento případ tedy uvažujeme v dimenzi $n = 2$, ovšem výtok kapaliny, respektive výšku hladiny lze popsat skalární funkcí $y(t)$ (viz Obr. 9).



Obr. 9. Kapaliny v pohybu

Předpokládejme výtok z otevřené nádoby do volného prostoru (okolní tlak tedy neuvažujeme). Při proudění kapaliny výtokovým otvorem se mění velikost výtokové rychlosti v v čase t , kde v je složka vektoru výtokové rychlosti ve směru osy y . Takové proudění je neustálené (nestacionární). Podrobnější úvahu o proudění kapalin lze nalézt například v [6] nebo [8]. Pro odvození diferenciálních rovnic využijeme tzv. rovnost objemových toků

$$Q_1 = Q_2$$

kde Q_1 je objemový tok který do výtokového otvoru vteče a Q_2 je objemový tok, který z výtokového otvoru vyteče. Ze zákona zachování energie (2.3) získáme

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gy}. \quad (4.30)$$

Tento vztah je často nazýván Torricelliho vztah pro výpočet rychlosti. Konstanta m je hmotnost kapaliny v nádobě, y je výška hladiny v daném okamžiku a g je gravitační zrychlení. Z rovnosti objemových toků plyne po úpravě vztah

$$\dot{y} = -\frac{s}{S}v, \quad (4.31)$$

kde s je obsah výtoku otvoru a S je obsah řezu nádoby kolmý na osu y . Dosazením (4.30) do (4.31) dostáváme

$$\dot{y} = -\frac{s}{S}\sqrt{2gy}.$$

Označíme-li $k = \frac{s}{S}\sqrt{2g} > 0$, získáme diferenciální rovnici (pro výtok, tedy $\sqrt{y} \geq 0$) ve tvaru

$$\dot{y} = -k\sqrt{y}. \quad (4.32)$$

Nechť T je doba, za kterou kapalina z nádoby vyteče. Užitím metody separace proměnných získáme obecné řešení ve tvaru

$$y = \begin{cases} \frac{1}{4}(-kt + C)^2 & \text{pro } t < T \\ 0 & \text{pro } t \geq T. \end{cases}$$

Uplatníme-li počáteční podmínku

$$y(0) = y_0,$$

kde y_0 je počáteční výška hladiny, z obecného řešení pak získáme hodnotu konstanty

$$C = 2\sqrt{y_0}.$$

Dosazením dodatečné podmínky

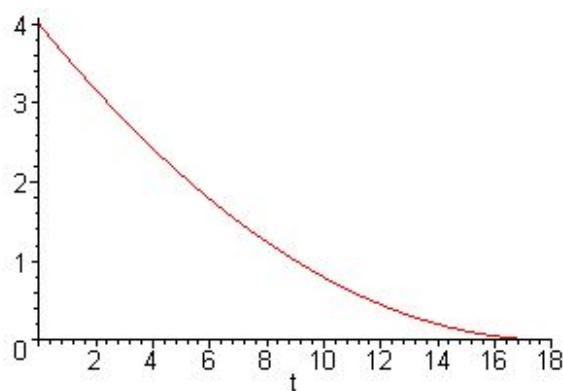
$$y(T) = 0,$$

do (4.32) získáme čas T potřebný k vypuštění nádrže

$$T = -\frac{2\sqrt{y_0}}{k}.$$

Zpětným dosazením těchto konstant a konstanty $k = \frac{s}{S}\sqrt{2g}$ do obecného řešení tak získáme partikulární řešení ve tvaru

$$y = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(-\frac{s}{S}\sqrt{2g}t + 2\sqrt{y_0}\right)^2 & \text{pro } t < 2\sqrt{y_0}\left(\frac{s}{S}\sqrt{2g}\right)^{(-1)} \\ 0 & \text{pro } t \geq 2\sqrt{y_0}\left(\frac{s}{S}\sqrt{2g}\right)^{(-1)}. \end{cases}$$



Obr. 10. Závislost hladiny při vypouštění kapaliny z otevřené nádoby na čase t
Zvoleno: $y_0 = 4 \text{ m}$, $s = 0.1 \text{ m}^2$, $S = 2 \text{ m}^2$. Hodnota $T = 18.061 \text{ s}$

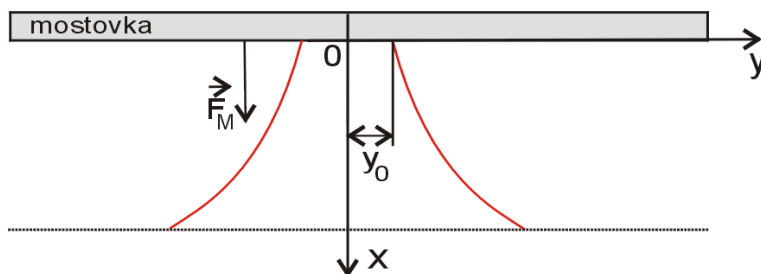
4.2 Návrh tvaru nosníku

Představme si případ rotačního nosníku, u kterého požadujeme, aby v každém řezu kolmém na osu rotace působil předem daný konstantní tlak p . Rotačním nosníkem by mohl být válec, ovšem v takovém případě by rozložení tlaku nebylo konstantní, neboť na horní plochu působí pouze tíhová síla mostovky F_M , ovšem čím níže se od horní plochy nosníku nacházíme, tím větší je působení tíhové síly nosníku F_N . Pro názornost si uvedeme případ působení celkové síly $F_c = F_M + F_N$ na válcový nosník. Na horní plochu mostovky působí pouze tíhová síla mostovky $F_c = Mg$, kde M je hmotnost mostovky a g gravitační zrychlení. V půli výšky nosníku je celková síla $F_c = Mg + \frac{1}{2}mg$, kde $\frac{1}{2}m$ je hmotnost válcového nosníku v půli jeho výšky. Konečně na spodní podstavu válcového nosníku působí celková síla $F_c = Mg + mg$. Ze vztahu pro výpočet tlaku

$$p = \frac{F_c}{S},$$

je zřejmé, že požadujeme-li tlak v kterémkoliv místě řezu konstantní, musí se nosník od vrchní plochy směrem k ploše spodní rozšiřovat. Naším úkolem je tedy navrhnout tvar křivky ($y = y(x)$), jejíž rotací kolem osy rotace vznikne rotační nosník s požadovaným rozšířením (viz Obr. 11). Tento případ je popsán v [5].

Případ řešíme v dimenzi $n = 2$, ovšem působení tíhových sil se projevuje pouze ve vertikálním směru, proto při samotném odvození diferenciální rovnice uvažujeme pouze složky vektorů v tomto směru. V následujícím textu tak neuvádíme šipky nad vektory. Idealizaci v tomto případě provedeme na samotném nosníku, ten považujeme za nepružný, tedy rozměrově stálý. Poznamenejme, že z důvodu obvyklosti zápisu $y = y(x)$ horizontální osu v tomto případě značíme y a vertikální osu x , která je orientována směrem dolů (viz Obr. 11).



Obr. 11. Rozšíření rotačního nosníku

Jelikož nosník je rotační těleso, pak každý řez kolmý na osu rotace má tvar kružnice, jejíž poloměr je roven hodnotě y (viz Obr. 11). Celková síla působící na nosník v jeho kterémkoliv místě je obecně vyjádřena vztahem

$$F_c = F_M + F_N = Mg + mg,$$

kde F_M je konstantní. Tíhová síla nosníku F_N ovšem konstantní není, neboť s měnící se výškou nosníku se mění také jeho objem a tedy i jeho hmotnost. Objem nosníku je dán vztahem

$$V = \pi \rho g \int_0^x y^2 dr,$$

kde ρ je hustota materiálu z něhož je nosník vyroben, y je poloměr kružnice v řezu kolmém na osu rotace a dr je nekonečně malý přírůstek výšky nosníku v intervalu $< 0, x >$. Tlak působící na nosník vyjádříme vztahem

$$p = \frac{F_M + \pi \rho g \int_0^x y^2 dr}{\pi y^2} \Rightarrow p \pi y^2 = F_M + \pi \rho g \int_0^x y^2 dr.$$

Derivací této rovnice podle proměnné x získáme ODR ve tvaru

$$p \pi 2y \frac{dy}{dx} = \pi \rho g y^2,$$

kteřou řešíme metodou separace proměnných. Dostáváme tak obecné řešení

$$y = C e^{\frac{\rho g}{2p} x}, \quad (4.33)$$

kde C je integrační konstanta, jejíž hodnotu získáme z počáteční podmínky

$$y(0) = y_0,$$

kde y_0 je dosud nespecifikovaný poloměr kružnice na horní ploše ($S = \pi y_0^2$) nosníku, který určíme ze vztahu pro tlak působící na tuto plochu jako

$$p = \frac{F_M}{\pi y_0^2} \Rightarrow y_0 = \sqrt{\frac{F_M}{\pi p}}.$$

Vyjádřením y_0 a jeho dosazením do (4.33) získáme hodnotu integrační konstanty

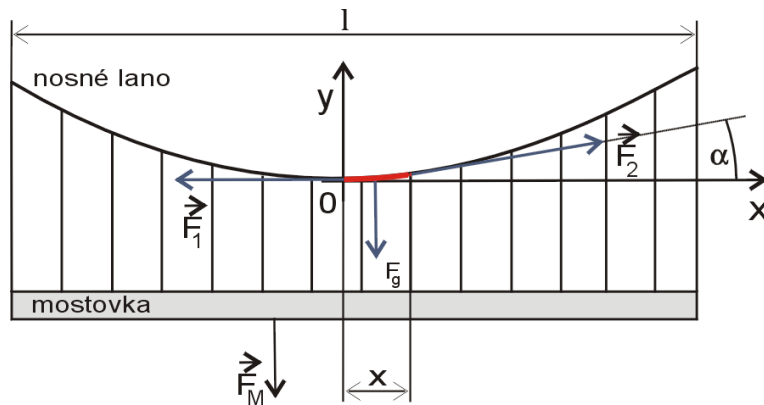
$$C = \sqrt{\frac{F_M}{\pi p}},$$

jejímž dosazením do rovnice (4.33) dostáváme partikulární řešení ve tvaru

$$y = \sqrt{\frac{F_M}{\pi p}} e^{\frac{\rho g}{2p} x}.$$

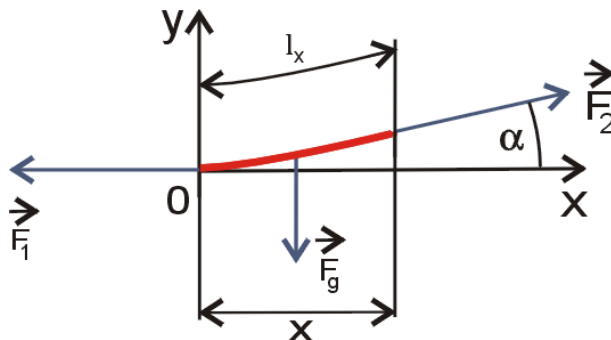
4.3 Křivka rovnoměrně zatíženého mostního lana - řetězovka

Představme si zavěšený most, jehož mostovku nese tzv. nosné lano (lano je nepružné, tedy rozměrově stálé - idealizace). Hmotnost nosného lana zanedbejme. Toto lano je rovnoměrně zatíženo svislými lany nesoucími mostovku. Naším cílem je vyjádřit funkci $y = y(x)$ popisující průhyb lana nesoucí mostovku v místě x . Odvození provedeme v rovinném případě, tedy v dimenzi $n = 2$. Horizontální osu označme x a vertikální osu y (viz Obr. 12).



Obr. 12. Křivka zatíženého nosního lana (tzv. řetězovka)

Zaměříme se na část nosního lana o délce l_x , jehož jeden krajní bod je umístěn v nejnižším místě průhybu (do tohoto bodu umístíme počátek soustavy souřadnic). Na tuto část lana působí tahové síly $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ a síla tíhová $\vec{F}_g$ (viz Obr. 13).



Obr. 13. Část lana o délce l_x

Vektor rovnoměrně rozložené části tíhové síly je ve tvaru

$$\vec{F}_g = (0, -\frac{l_x}{l}mg),$$

kde m je hmotnost mostovky, l je celková délka lana, g je gravitační zrychlení. Člen $\frac{l_x}{l}$ určuje poměr rozložení tíhové síly. Délku části lana l_x vyjádříme vztahem

$$l_x = \int_0^x \sqrt{\left[\left(\frac{dy}{dr}\right)^2 + 1\right]} dr, \quad (4.34)$$

kde dr je nekonečně malý přírůstek vzdálenosti na ose x . Část lana svírá s osou x úhel α , tahové síly tak lze vyjádřit ve tvaru

$$\vec{F}_2 = (F_2 \cos \alpha, F_2 \sin \alpha),$$

$$\vec{F}_1 = (-F_1, 0).$$

Most je ve statické rovnováze, lze tedy užít vztah (2.1). Z tahových sil lze rovnováhu sil ve směru osy x vyjádřit ve tvaru

$$-F_1 + F_2 \cos \alpha = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 \cos \alpha. \quad (4.35)$$

Analogicky využijeme vztah (2.1) pro složky sil ve směru osy y , tj.

$$F_2 \sin \alpha - \frac{l_x}{l} mg = 0 \Rightarrow F_2 \sin \alpha = \frac{l_x}{l} mg. \quad (4.36)$$

Pro úhel α platí vztah

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx}, \quad (4.37)$$

kde dy je přírůstek na ose y a dx přírůstek na ose x . Dále pro úhel α platí také vztah

$$\tan \alpha = \frac{F_2 \sin \alpha}{F_2 \cos \alpha}.$$

Užitím (4.35) a (4.36) lze tento vztah přepsat na tvar

$$\tan \alpha = \frac{l_x}{l} \frac{mg}{F_1}. \quad (4.38)$$

Porovnáním (4.37) a (4.38) a dosazením vztahu (4.34) získáme vztah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mg}{lF_1} \int_0^x \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1} dx.$$

Jeho derivací dostáváme ODR druhého řádu ve tvaru

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{mg}{lF_1} \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}. \quad (4.39)$$

Zavedeme substituci $\frac{dy}{dx} = \eta$, a tím převedeme (3.39) na rovnici prvního řádu

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{mg}{lF_1} \sqrt{\eta^2 + 1}.$$

Metodou separace proměnných pak získáme vztah

$$\frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2 + 1}} = \frac{mg}{lF_1} dx,$$

který řešíme postupnou integrací ve tvaru

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2 + 1}} = \int \frac{mg}{lF_1} dx. \quad (4.40)$$

K výpočtu integrálu levé strany (4.40) využijeme tabulkový vzorec

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2 + 1}} = \ln |\sqrt{\eta^2 + 1} + \eta|.$$

Po integraci a odlogaritmování tak dostaneme vztah

$$\sqrt{\eta^2 + 1} + \eta = \frac{1}{C_1} e^{\frac{mgx}{lF_1}},$$

jehož úpravou, kde vyjadřujeme na levé straně člen η , získáme řešení ve tvaru

$$\eta = \frac{1}{2C_1} e^{\frac{mgx}{lF_1}} - \frac{C_1}{2} e^{-\frac{mgx}{lF_1}}.$$

Zpětným dosazením $\eta = \frac{dy}{dx}$ dostaneme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2C_1} e^{\frac{mgx}{lF_1}} - \frac{C_1}{2} e^{-\frac{mgx}{lF_1}}. \quad (4.41)$$

Následnou integrací získáme po úpravě obecné řešení ve tvaru

$$y = \frac{mg}{2lF_1} \left(\frac{1}{C_1} e^{\frac{mgx}{lF_1}} + C_1 e^{-\frac{mgx}{lF_1}} \right) + C_2. \quad (4.42)$$

Členy v závorce upravíme pomocí vztahu

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2},$$

tj.

$$\frac{1}{C_1} e^{\frac{mgx}{lF_1}} + C_1 e^{-\frac{mgx}{lF_1}} = e^{\left(\frac{mgx}{lF_1} - \ln C_1\right)} + e^{-\left(\frac{mgx}{lF_1} - \ln C_1\right)} = 2 \cosh \left(\frac{mgx}{lF_1} - \ln C_1 \right).$$

Po dosazení tohoto vyjádření do rovnice (4.42) dostáváme

$$y = \frac{mg}{lF_1} \cosh \left(\frac{mgx}{lF_1} - \ln C_1 \right) + C_2. \quad (4.43)$$

Jelikož krajní body nosného lana jsou ve vodorovné poloze, pak v místě, kde $x = 0$ je

$$\frac{dy}{dx} = 0,$$

neboť v této poloze má křivka své minimum. Dosazením této skutečnosti do (4.41) získáme

$$\frac{1}{2C_1} - \frac{C_1}{2} = 0 \Rightarrow C_1 = 1.$$

Dosazením podmínky

$$y(0) = 0,$$

která udává hodnotu křivky na ose y v místě, kde $x = 0$, (počátek souřadné soustavy) do (4.43) dostáváme

$$0 = \frac{mg}{lF_1} \cosh(-\ln C_1) + C_2.$$

Dosadíme-li do tohoto vyjádření konstantu $C_1 = 1$, získáme hodnotu konstanty

$$C_2 = -\frac{mg}{lF_1}.$$

Zpětným dosazením těchto konstant do (4.43) získáme konečnou podobu rovnice popisující křivku tzv. řetězovky

$$y = \frac{mg}{lF_1} \left(\cosh \frac{mg}{lF_1} x - 1 \right).$$

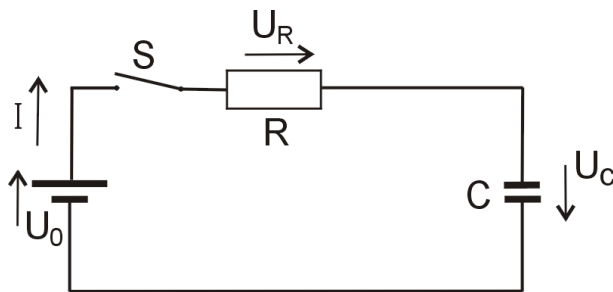
Tento příklad je řešen podobným způsobem v [9].

4.4 Kondenzátor v RC obvodu (napětí a proud)

RC obvod je elektronický obvod složený ze zdroje, rezistoru a kondenzátoru (viz Obr. 14). Kondenzátor je neaktivní prvek elektrického obvodu, jehož vlastností je schopnost akumulovat na svých mezi sebou izolovaných deskách (elektrodách) kladný a záporný elektrický náboj a uchovávat tak elektrické napětí U_c . Napětí a proud jsou skalární veličiny. Tento případ tedy řešíme v dimenzi $n = 1$. Předpokládejme, že obvod připojíme k ideálnímu zdroji stejnosměrného napětí, tedy $U_0 = \text{konst.}$ Náboj Q přenesený na kondenzátor je přímo úměrný napětí kondenzátoru U_c platí tedy vztah

$$Q = CU_c \Rightarrow U_c = \frac{Q}{C}. \quad (4.44)$$

Konstantu úměrnosti nazýváme kapacita kondenzátoru (jednotkou je *farad* [F]). Kapacita je pro libovolný kondenzátor konstantní veličina, neboť závisí pouze na geometrii elektrod kondenzátoru (na velikosti, vzdálenosti a tvaru elektrod).



Obr. 14. Kondenzátor zapojený v RC obvodu

Naším cílem je nalézt funkce $I = I(t)$, $U = U(t)$ popisující hodnotu proudu procházejícího kondenzátorem, respektive průběh napětí při nabíjení kondenzátoru v čase t . Dle Obr. 14 spojíme v čase $t = 0$ spínač S , do obvodu se tak dostává napětí zdroje U_0 , kondenzátorem prochází proud I a ten se začíná nabíjet. Aplikací druhého Kirchhoffova zákona (2.4) lze sestavit rovnici úbytku napětí

$$U_r + U_c - U_0 = 0,$$

kde $U_r = RI$ je napětí na rezistoru (R je odpor rezistoru). Dosazením vztahu (4.44) lze rovnici úbytku napětí přepsat na tvar

$$RI + \frac{Q}{C} - U_0 = 0,$$

derivací této rovnice podle času získáme

$$R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} = 0.$$

Využijeme-li vztah (2.10) pro okamžitou hodnotu proudu, dostaneme tak ODR pro proud procházející kondenzátorem ve tvaru

$$R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0.$$

Metodou separace proměnných získáme obecné řešení

$$I = K_1 e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (4.45)$$

Počáteční podmínky při sepnutí spínače v čase $t = 0$ jsou ve tvaru

$$U_c(0) = 0, \quad I(0) = I_0, \quad (4.46)$$

kde $U_c(0)$ vyjadřuje hodnotu napětí na kondenzátoru (kondenzátor je vybitý) a I_0 vyjadřuje proud protékající kondenzátorem v okamžiku sepnutí spínače. Dosazením této počáteční podmínky do (4.45) získáme hodnotu konstanty

$$K_1 = I_0.$$

Dostáváme tak partikulární řešení popisující velikost proudu protékajícího kondenzátorem ve tvaru

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (4.47)$$

Časovou derivací vztahu (4.44) získáme rovnici pro výpočet okamžitého napětí na kondenzátoru

$$\frac{dU_c}{dt} = \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt}.$$

Člen $\frac{dQ}{dt}$ je dle (2.10) roven vztahu (4.47). Dostáváme tak ODR pro hodnotu napětí v kondenzátoru ve tvaru

$$\frac{dU_c}{dt} = \frac{1}{C} I_0 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Obecné řešení získáme metodou variace konstant. Po úpravě tak dostáváme

$$U_c = -U_0 e^{-\frac{t}{RC}} + K_2. \quad (4.48)$$

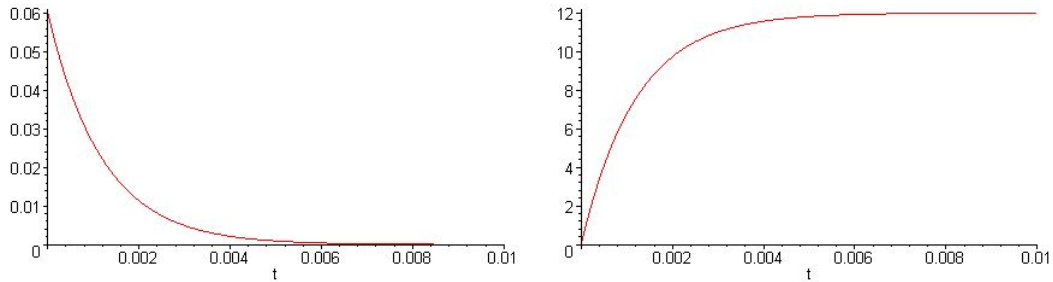
Integrační konstantu opět určíme z počáteční podmínky (4.46) určující napětí na kondenzátoru v čase $t = 0$. Ze vztahu (4.48) tak získáme hodnotu konstanty

$$K_2 = U_0.$$

Celkem tedy po dosazení této konstanty do (4.48) dostáváme partikulární řešení popisující průběh nabíjení kondenzátoru

$$U_c = U_0 (1 - e^{-\frac{t}{RC}}).$$

Snadno lze určit, že v čase $t = 0$ je hodnota napětí $U_c = 0$ a v čase $t \rightarrow \infty$ je $U_c = U_0$. V tomto okamžiku kondenzátorem již neprochází žádný proud, což vyjadřuje Obr. 15. Podrobné vysvětlení je možné nalézt v [7] nebo [8].



Obr. 15 Závislost proudu I na čase t Závislost napětí U_c na čase t
Zvoleno: $t \in < 0; 0,01 >$, $C = 6 \mu F$, $U = 12 V$, $R = 200 \Omega$

5 Závěr

Cílem této práce bylo vytvořit stručný, ale srozumitelný text pojednávající o vybraných aplikacích obyčejných diferenciálních rovnic ve fyzice, se zaměřením na látku probíranou v rámci studia na FSI. V tomto textu byly demonstrovány především způsoby sestavení obyčejných diferenciálních rovnic za pomoci několika fyzikálních zákonů. Bylo zde využito druhého Newtonova zákona, jehož aplikací byly odvozeny rovnice popisující pohyb hmotného bodu v poli zemské tíže a s využitím Hookeova zákona také kmitání oscilátorů. Dále za pomoci zákona zachování energie a objemového toku byly odvozeny rovnice pro výtok kapaliny z nádrže. Poté užitím rovnováhy sil byly odvozeny rovnice vyjadřující tvar mostního nosníku a křivku lana nesoucího mostovku. Aplikací druhého Kirchhoffova zákona v poslední kapitole byly vjádřeny rovnice pro výpočet okamžitého proudu a okamžitého napětí v kondenzátoru.

Na tuto práci je možné navázat užitím parciálních diferenciálních rovnic ve fyzice. Jedná se o rovnice, v nichž se vyskytují funkce obsahující dvě a více neznámé a jejich derivace. Parciální diferenciální rovnice řeší například problémy vedení tepla, kmity desek apod. Je tedy zřejmé, že oblast diferenciálních rovnic má významné postavení ve fyzice a také v jiných vědních disciplínách.

Reference

- [1] ARSENIN, V.J.: *Matematická fyzika*. Bratislava: Alfa, 1977.
- [2] ČERMÁK, J., ŽENÍŠEK, A.: *Matematika III.*, Brno, CERM, 2001.
- [3] HAJKA, V.: *Fyzika v příkladoch, 5. vydání*. Bratislava: Tisk, 1960.
- [4] HALLIDAY, D., RESENICK, R., WALKER, J.: *Fyzika I., II., III.*, Brno: VUTIUM, 2000.
- [5] HAVELKA, J., ČERMÁKOVÁ, H.: *Matematika II₄, Obyčejné diferenciální rovnice*. Brno: PC-DIR, 1995.
- [6] KNESCHKE, A.: *Používanie diferenciálnych rovníc v praxi*. Bratislava: ALFA, 1969.
- [7] KOKTAVÝ, B., KOKTAVÝ, P.: *Elektřina a magnetismus* Brno: PC-DIR, 1995.
- [8] MAĐAR, J.: MARTIŠOVITŠ, V.: *Všeobecná fyzika 1*. Bratislava: ALFA, 1978.
- [9] JAREŠOVÁ, M., VYBÍRAL, B.: *Diferenciální rovnice*. [online]
URL: <<http://fo.cuni.cz/texty/matematika/difro.pdf>> [cit. 25. 5. 2010]