



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**FRÖLICHEROVA-NIJENHUISOVA ZÁVORKA A JEJÍ
APLIKACE V GEOMETRII A VARIÁČNÍM POČTU**

THE FRÖLICHER-NIJENHUIS BRACKET AND ITS APPLICATIONS IN GEOMETRY AND CALCULUS OF VARIATIONS

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Kristína Šramková

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. RNDr. Miroslav Kureš, Ph.D.

BRNO 2018

Zadání diplomové práce

Ústav: Ústav matematiky
Studentka: **Bc. Kristína Šramková**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **doc. RNDr. Miroslav Kureš, Ph.D.**
Akademický rok: 2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Frölicherova–Nijenhuisova závorka a její aplikace v geometrii a variačním počtu

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Úkolem diplomanta bude nastudovat rozsáhlý aparát z diferenciální geometrie a algebry (variety, Lieovy grupy a algebry, prostory diferenciálních forem, derivace na okruzích) a zaměřit se na vlastnosti Frölicherovy–Nijenhuisovy závorky a dalších operací podobného typu (Lieova závorka, Schoutenova závorka). Měly by být přehledně uvedeny různé aplikace, v geometrii i variačním počtu. Vybraná aplikace, například torze konexí, bude studována hlouběji s předpokladem odvození nových výsledků.

Cíle diplomové práce:

1. Objasnit význam Frölicherovy–Nijenhuisovy závorky a dalších operací podobného typu.
2. Uvést řešené příklady.
3. Přehledně ukázat známé aplikace v geometrii a variačním počtu.
4. Zabývat se vybranou aplikací a odvodit nové výsledky.

Seznam doporučené literatury:

KOLÁŘ, I., P. W. MICHOR a J. SLOVÁK. Natural Operations in Differential Geometry. New York: Springer, 1993. ISBN 03-875-6235-4.

WASSERMAN, R. H. Tensor and Manifolds. 2. vyd. New York: Oxford University Press. ISBN 01-98-1059-4.

MICHOR, P. W. Remarks on the Frölicher-Nijenhuis bracket. Differential geometry and its applications. Brno, 1986. 197-220, Math. Appl. (East European Ser.), 27, Reidel, Dordrecht, 1987.

KOLÁŘ, I. a M. MODUGNO. Torsions of connections on some natural bundles. Differential Geom. Appl. 2, 1992. no. 1, 1-16.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Diplomová práca objasňuje význam Frölicher-Nijenhuisovej zátvorky a jej aplikácií vo fyzikálnych problémoch. Základným aparátom pre tieto aplikácie je diferenciálna geometria na varietach, tenzorový počet a diferenciálne formy, čomu je venovaná prvá časť práce. V druhej časti je súhrn základnej teórie variačného počtu na varietach spolu s vybranými aplikáciami v oblasti fyziky. Posledná časť práce je venovaná aplikáciám Frölicher-Nijenhuisovej zátvorky pri odvodení Maxwellových rovníc a tiež pri popise geometrie obyčajných diferenciálnych rovníc.

Abstract

This Master's thesis clarifies the significance of Frölicher-Nijenhuis bracket and its applications in problems of physics. The basic apparatus for these applications is differential geometry on manifolds, tensor calculus and differential forms, which are contained in the first part of the thesis. The second part summarizes the basic theory of calculus of variations on manifolds and its selected applications in the field of physics. The last part of the thesis is devoted to the applications of Frölicher-Nijenhuis bracket in the derivation of Maxwell's equations and to the description of the geometry of ordinary differential equations.

Kľúčové slová

varieta, diferenciálna geometria, tenzorový počet, Lieova zátvorka, Frölicher-Nijenhuisova zátvorka, Maxwellove rovnice, variačný počet

Key words

manifold, differential geometry, tensor calculus, Lie bracket, Frölicher-Nijenhuis bracket, Maxwell's equations, calculus of variations

Bibliografická citácia

ŠRAMKOVÁ, K. *Frölicherova-Nijenhuisova závorka a její aplikace v geometrii a variačním počtu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 79 s. Vedoucí diplomové práce doc. RNDr. Miroslav Kureš, Ph.D..

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že predložená diplomová práca je pôvodná a spracovala som ju samostatne. Prehlasujem, že citácie použitých prameňov sú úplné, že som v svojej práci neporušila autorské práva (v zmysle Zákona č. 121/2000 Sb., o práve autorskom a o právach súvisiacich s právom autorským).

V Brne dňa 22. mája 2018

.....
Kristína Šramková

Pod'akovanie

Na tomto mieste by som sa chcela poďakovať vedúcemu mojej diplomovej práce doc. RNDr. Miroslavovi Kurešovi, Ph.D. za odborné vedenie práce, podnetné postrehy a čas venovaný konzultáciám.

Obsah

ÚVOD	15
1 TENZOROVÝ POČET	16
1.1 Tenzory	16
1.2 Operácie s tenzormi	18
2 DIFERENCIÁLNA GEOMETRIA	19
2.1 Diferencovateľné variety	19
2.2 Tangenciálny priestor	21
2.3 Fibrovaný priestor	22
2.4 Jety	23
2.5 Vektorové pole	24
2.6 Distribúcie	26
3 DIFERENCIÁLNE FORMY	27
3.1 Operácie s diferenciálnymi formami	29
3.2 Vlastnosti diferenciálnych foriem	31
4 LIEOVA ZÁTVORKA	33
4.1 Príklady	36
4.2 Akcia grúp	38
5 KONEXIA	40
6 FRÖLICHER-NIJENHUIISOVA ZÁTVORKA	45
6.1 Vlastnosti	45
6.2 Príklady	47
7 VARIÁČNÝ POČET	51
7.1 Lagrangián	51
7.2 Prvá variačná formula	52
7.3 Extremály	53
7.4 Inverzný problém	53
7.5 Aplikácie variačného počtu	54
7.5.1 Vlnové rovnice	55
7.5.2 Maxwelllove rovnice	56
8 MAXWELLOVE ROVNICE	58
8.1 Pozorovateľ na Lorentzovej variete	58

8.2	Všeobecná konexia na fibrovanom priestore	60
8.2.1	Konexia	60
8.2.2	Liftovanie vektorov	61
8.2.3	Kovariantná derivácia rezu	61
8.2.4	Krivosť	62
8.2.5	Hlavný fibrovaný priestor a skrútenie	63
8.3	Maxwellove rovnice v M^3 a M^4	63
8.3.1	Zavedenie Maxwellovych rovníc M^3	64
8.3.2	Zavedenie Maxwellovych rovníc v M^4	66
8.4	Rozklad elektromagnetického poľa	68
8.5	Zhrnutie	71
9	GEOMETRICKÝ VÝZNAM OBYČAJNÝCH	
	DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC	72
	ZÁVER	74
	ZOZNAM POUŽITÝCH ZDROJOV	75
	ZOZNAM OBRÁZKOV	78
	ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV	79

ÚVOD

Hlavným cieľom práce je objasniť význam Frölicher-Nijenhuisovej zátvorky a prehľadne ukázať jej aplikácie v diferenciálnej geometrii a variačnom počte. Pre splnenie tohto cieľa však bude potrebné naštudovať a zaviesť široký aparát diferenciálnej geometrie, na ktorom budeme fyzikálne aplikácie stavať.

Prvá kapitola práce bude venovaná tenzorovému počtu, ako aparátu slúžiacemu k popisu veličín, s ktorými budeme v práci ďalej pracovať. Budú to veličiny, ktorých matematický popis si vyžaduje zložitejšiu algebraickú štruktúru ako sú skaláry a vektory.

V druhej kapitole sa budeme zaoberať modernou diferenciálnou geometriou, postupne zavedieme základné pojmy ako je varieta, fibrovaný priestor a jety. Dôležitým aspektom tejto matematickej disciplíny je, že manipulácia so zavedenými pojmami je oslobodená od potreby definovania konkrétneho súradnicového systému. Práve vďaka tejto vlastnosti diferenciálna geometria predstavuje spoločný jazyk veľkej časti modernej fyziky, čoho dôkazom budú aj fyzikálne aplikácie v tejto práci.

Tretia kapitola bude pojednávať o diferenciálnych formách, ktoré sú vlastne matematickým zovšeobecnením funkcií na hladkých varietach. V tejto kapitole ich formálne definujeme, popíšeme ich vlastnosti a zavedieme operácie, ktoré s nimi môžeme vykonávať.

Ďalšia kapitola bude venovaná Lieovej zátvorke, teda operátoru vektorových polí. Jej geometrický význam, t.j. popis nekomutativity tokov generovaných vektorovými poľami, bude ilustrovaný na názornom príklade z oblasti diferenciálne riadených robotov.

V piatej kapitole bude objasnený pojem konexie, ktorá definuje „priamy smer“ v zakrivenom priestore. Na základe tohto pojmu následne definujeme dve dôležité vlastnosti - krivosť a torziu konexie.

Šiesta kapitola sa bude zaoberať kľúčovým pojmom celej diplomovej práce - Frölicher-Nijenhuisovou zátvorkou. V tejto kapitole je zátvorka definovaná a sú popísané jej vlastnosti, pre lepšie pochopenie je tiež uvedený názorný príklad.

Významná rola variačného počtu a diferenciálnej geometrie vo fyzikálnych úlohách bude rozobratá v kapitole číslo sedem. Variačný počet je disciplína, ktorá sa zaoberá vyšetrovaním extrémov funkcionálov, ktoré popisujú nejakú fyzikálnu situáciu. V tejto kapitole budú uvedené fyzikálne aplikácie demonštrujúce význam variačného počtu.

Posledné dve kapitoly budú objasňovať rolu Frölicher-Nijenhuisovej zátvorky v aplikáciách. Najskôr sa budeme nachádzať na Lorentzovej variete, kde vďaka tejto zátvorke zavedieme Maxwellove rovnice, popisujúce zákony elektromagnetického poľa, nezávisle na voľbe súradnicového systému. V poslednej kapitole zhrnieme druhú aplikáciu, kde pomocou Frölicher-Nijenhuisovej zátvorky môžeme zaviesť dynamickú kovariantnú deriváciu. Vďaka tomuto operátoru budeme môcť geometricky pracovať so systémom diferenciálnych rovníc.

1 TENZOROVÝ POČET

Vo fyzike, mechanike a tiež v mnohých iných disciplínach pracujeme s veličinami, k popisu ktorých je potrebných viac hodnôt ako pri použití skalárov alebo vektorov. Takéto veličiny môžeme popísať tenzormi, čo je všeobecnejšia veličina. Tenzorový počet sa zaoberá práve týmito veličinami, ich vlastnosťami a operáciami, ktoré s nimi môžeme vykonávať.

1.1 Tenzory

V tejto časti zavedieme základný pojem tenzor, pre lepšiu predstavu uvedieme niekoľko jednoduchých príkladov a vlastností. K presnej definícii však budeme najskôr potrebovať pojem vektorového priestoru a priestoru k nemu duálnemu.

Definícia 1.1. (Vektorový priestor)

Množinu V a pole $\mathbb{R}$, na ktorých zavedieme nasledujúce dve operácie, sčítanie vektorov

$$+ : V \times V \rightarrow V, \quad (v, w) \mapsto v + w \quad (1.1)$$

a násobenie skalárom

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V, \quad (c, v) \mapsto cv \quad (1.2)$$

nazývame *vektorový priestor*, ak $(V, +)$ je abelovská grupa a pre násobenie skalárom platí

$$\begin{aligned} 1v &= v, \\ c(v + u) &= cv + cu, \\ (v + u)c &= cv + cu, \\ (c_1 c_2)v &= c_1(c_2 v), \end{aligned} \quad (1.3)$$

pre všetky $u, v \in V$ a pre všetky $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. [1]

Definícia 1.2. (Duálny vektorový priestor)

Nech V je vektorový priestor. Priestor všetkých lineárnych foriem $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$ sa nazýva *duálny vektorový priestor* k vektorovému priestoru V . Značíme V^* a je to opäť vektorový priestor s rovnakou dimenziou ako $\dim V$.

Definícia 1.3. (Multilineárne zobrazenie)

Nech $V_1, V_2, \dots, V_n, W$ sú vektorové priestory. Zobrazenie $\phi : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ nazveme *multilineárne*, ak je lineárne v každom svojom argumente. [2]

Definícia 1.4. (Tenzor)

Tenzor T typu (r, s) môžeme definovať ako multilineárne zobrazenie

$$T : \underbrace{V_s^r = V \otimes \dots \otimes V}_{r\text{-krát}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{s\text{-krát}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

kde V je vektorový priestor konečnej dimenzie a V^* je vektorový priestor duálny k priestoru V . T sa nazýva r -krát *kontravariantný* a s -krát *kovariantný* tenzor na V . Číslo $r + s$ nazývame *stupeň tenzoru*. [2]

Poznámka. V diplomovej práci bude používaná tzv. *Einsteinova*¹ sumačná konvencia, teda budeme vynechávať symbol $\sum$, ale sčítať sa bude automaticky, keď bude jeden index vo výraze použitý 2-krát, raz ako horný a druhý-krát ako dolný index. Napríklad

$$e_i v^i = \sum_{i=1}^3 e_i v^i.$$

Poznámka. Tenzory môžeme popisovať pomocou súradníc. Ak $\{e_1, \dots, e_n\}$ je báza V a $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$ je duálna báza V^* , potom môžeme všeobecne tenzor $T \in V_s^r$ zapísať jednoznačne v tvare:

$$T = T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \dots \otimes \varepsilon^{j_s}. \quad (1.5)$$

Použili sme Einsteinovu sumačnú konvenciu, suma výrazu je cez $\sum_{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s}$. Čísla $T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}$ sa nazývajú *súradnice* alebo *komponenty* tenzoru T . [2]

Poznámka. (Príklady tenzorov)

Skaláry sú tenzory typu $(0, 0)$.

Vektory sú 1-krát kontravariantné tenzory, teda tenzory typu $(1, 0)$, sú teda zobrazením $V^* \rightarrow \mathbb{R}$.

Vektorová forma je tenzorom typu $(1, k)$, kde $k \in \mathbb{N}$.

Lineárne formy/Funkcie/Funkcionály/1-formy sú 1-krát kovariantné tenzory, teda tenzory typu $(0, 1)$. Sú zobrazením $V \rightarrow \mathbb{R}$, teda sú prvkami V^* .

Bilineárna forma je tenzorom typu $(0, 2)$. Príkladom je metrický tenzor.

Zmiešaný súčin vektorov v $\mathbb{R}^3$ u. $(v \times w)$ je tenzor typu $(0, 3)$.

Poznámka. Tenzor typu (r, s) , kde $s \geq 1$, $r \geq 1$ sa nazýva *zmiešaný*.

Definícia 1.5. (Symetrický tenzor)

Ak sa hodnota tenzoru nezmení vymenením dvoch kovariantných argumentov alebo dvoch kontravariantných argumentov, potom tento tenzor nazveme *symetrický* v týchto dvoch argumentoch. [2]

Definícia 1.6. (Antisymetrický tenzor)

Ak sa vymenením dvoch kovariantných argumentov alebo dvoch kontravariantných argumentov tenzoru zmení jeho znamienko, potom tento tenzor nazveme *antisymetrický* v týchto dvoch argumentoch. [2]

¹ Albert Einstein (1879-1955) - teoretický fyzik narodený v Nemecku, je považovaný za jedného z najvýznamnejších vedcov 20. storočia, za jeho najvýznamnejšiu prácu sa považuje formulácia všeobecnej teórie relativity

1.2 Operácie s tenzormi

Definícia 1.7. (Tenzorový súčet)

Nech T_1, T_2, T_3 sú tenzory typu (s, r) , ďalej majme ich súradnice $A_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \in T_1$, $B_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \in T_2$, $C_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \in T_3$, pre ktoré platí

$$C_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} = A_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} + B_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}. \quad (1.6)$$

Potom tenzor T_3 nazveme *tenzorovým súčtom* tenzorov T_1 a T_2 .

Poznámka. (Tenzorový súčet)

Vidíme, že tenzorový súčet je definovaný iba pre tenzory rovnakého typu. Tenzorový súčet je komutatívny.

Definícia 1.8. (Násobenie skalárom)

Nech T je tenzor typu (s, r) , ďalej majme tenzor α typu $(0, 0)$ (skalár) a súradnice $A_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \in T$. Tenzor $\tilde{T}$ vznikne násobením tenzoru T skalárom α , tento tenzor má súradnice $\tilde{A}_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \in \tilde{T}$, pre ktoré platí

$$\tilde{A}_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} = \alpha A_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}. \quad (1.7)$$

Takto definovanú operáciu nazveme *násobením tenzoru skalárom*.

Poznámka. (Násobenie skalárom)

Vidíme, že pri násobení tenzoru skalárom sa nemení typ tenzoru.

Definícia 1.9. (Tenzorový súčin)

Nech V, W sú vektorové priestory. Množinu všetkých bilineárnych zobrazení priestoru $V^* \times W^* \rightarrow \mathbb{R}$ označíme symbolom $V \otimes W$ a budeme ju nazývať *tenzorový súčin* vektorových priestorov V a W . Pre dvojicu vektorov $v \in V, w \in W$ môžeme tenzorový súčin definovať analogicky a označíme $v \otimes w$.

Ak $e_1, \dots, e_m$ je bázou vektorového priestoru V a $f_1, \dots, f_n$ je bázou vektorového priestoru W , potom prvky $e_i \otimes f_j$ pre $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$ tvoria bázu vektorového priestoru $V \otimes W$, ktorého dimenzia je $m.n$. [3]

Poznámka. (Tenzorový súčin)

Tenzorový súčin je asociatívna, nie však komutatívna operácia.

Poznámka. Priestor všetkých tenzorov typu (r, s) značíme $\otimes^r V \otimes \otimes^s V^*$. Alebo tiež $T_s^r V$, potom $T_0^1 V = V^*, T_1^0 V = V, T_0^0 V = \mathbb{R}$. [4]

2 DIFERENCIÁLNA GEOMETRIA

V tejto kapitole sa budeme zaoberať základnými pojmami modernej diferenciálnej geometrie. Kľúčový pojem tejto disciplíny je varieta, ktorú najskôr zavedieme a potom na nej postupne vybudujeme potrebné štruktúry - mapy, tangenciálny priestor, fibrovaný priestor, rezy variety, jetové predĺženia, vektorové polia, toky nimi generované a na záver distribúcie.

Tieto pojmy sú veľmi dôležité pre celistvé pochopenie diferenciálnej geometrie na varietach, ktorá je vlastne spojením geometrie a matematickej analýzy. Znalosť pojmov z tejto kapitoly sa ukáže užitočná neskôr pri fyzikálnych aplikáciách variačného počtu, ako aj pri aplikáciách Frölicher-Nijenhuisovej zátvorky.

2.1 Diferencovateľné variety

Definícia 2.1. (Topologický priestor)

Topologický priestor je množina M spolu so systémom T otvorených podmnožín $T_i \subset M$ s vlastnosťami:

1. $\emptyset, M \subset T$,
2. $T_i \in T, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in T$,
3. $T_i \in T, i \in I, I$ je konečná $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} U_i \in T$.

Definícia 2.2. (Hausdorffov priestor)

Topologický priestor X sa nazýva *Hausdorffov*, ak v ňom platí axióm oddeliteľnosti:

$$x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow \exists \mathcal{O}(x_1), \mathcal{O}(x_2) : \mathcal{O}(x_1) \cap \mathcal{O}(x_2) = \emptyset. \quad (2.1)$$

Definícia 2.3. (Separabilný priestor)

Topologický priestor je *separabilný*, ak má spočítateľnú hustú podmnožinu.

Definícia 2.4. (Homeomorfizmus)

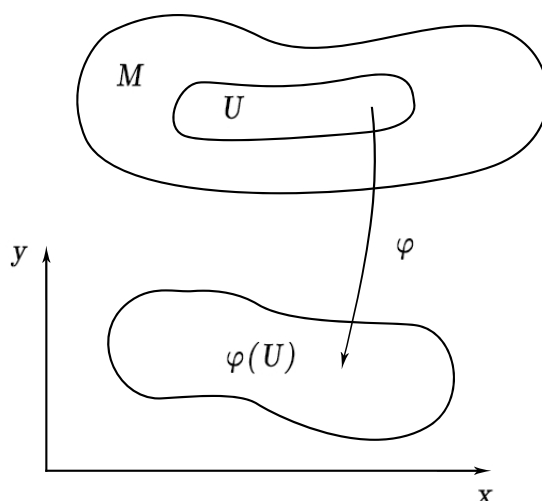
Homeomorfizmus je spojité bijektívne zobrazenie, ktorého inverzné zobrazenie je tiež spojité.

Definícia 2.5. (Topologická varieta)

Topologická varieta je separabilný Hausdorffov priestor M , ktorý je lokálne homeomorfný s $\mathbb{R}^n$. Teda $\forall x \in M$ existuje homeomorfizmus

$$\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n, \quad (2.2)$$

kde U je otvorené okolie bodu x v M a $\varphi(U)$ je otvorená podmnožina $\mathbb{R}^n$. [5]



Obr. 1: Topologická varieta - mapa, Zdroj: vlastný

Definícia 2.6. (Mapa, súradnicový systém)

Dvojica (U, φ) z predchádzajúcej definície sa nazýva *mapa* alebo tiež *súradnicový systém* na M , kde U je definičný obor a obraz $\varphi(p)$ nejakého bodu $p \in M$ môže byť vyjadrený n -ticou reálnych čísel $(x^1, \dots, x^n)$, ktorú nazývame *súradnice* bodu p . [5]

Definícia 2.7. (Atlas)

Sústava máp $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ na variete M taká, že U_α tvorí pokrytie variety M sa nazýva *atlas*. [5]

Príklad 2.8. (Príklady variet)

Jednorozmerná varieta - kružnica, elipsa, parabola, šróbovica alebo ich časti.

Dvojrozmerná varieta - sféra, anuloid, rotačný paraboloid, rotačný hyperboloid, valcová plocha alebo ich časti.

Definícia 2.9. (C^k -atlas)

Atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ na variete M sa nazýva C^k -atlas, ak všetky prechodové zobrazenia

$$\varphi_{\alpha\beta} : \varphi_\beta(U_{\alpha\beta}) \rightarrow \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta})$$

sú diferencovateľné triedy C^k . [5]

Definícia 2.10. (C^k -ekvivalencia)

Dva C^k -atlasy sa nazývajú C^k -ekvivalentné, ak ich zjednotenie je opäť C^k -atlasom na variete M . [5]

Definícia 2.11. (C^k -štruktúra)

Trieda ekvivalencie C^k -atlasov sa nazýva C^k -štruktúra na variete M . [5]

Definícia 2.12. (Diferencovateľná varieta)

Diferencovateľnou varietou triedy C^k nazývame topologickú varietu spolu s C^k štruktúrou a každá mapa na tejto variete je mapou patriacou do nejakého atlasu štruktúry C^k . [5]

Definícia 2.13. (Podvarieta)

Nech M je n -rozmerná varieta a m celé číslo také, že platí $1 \leq m < n$ Podmnožina $Y \subset M$

sa nazýva m -rozmerná *podvarieta* variety M , ak ku každému bodu $x_0 \in Y$ existuje súradnicový systém (U, φ) , kde $\varphi = (x^i)$ v bode x_0 na M tak, že $U \cap Y = \{x \in U | x^{m+1}(x) = 0, \dots, x^n(x) = 0\}$. [6]

Definícia 2.14. (Kúsok variety)

Nech M je n -rozmerná varieta. Kompaktná súvislá n -rozmerná podvarieta Ω variety M s hranicou $\partial\Omega$ sa nazýva *kúsok variety* M . [7]

2.2 Tangenciálny priestor

Teraz je potrebné zaviesť konštrukciu lokálneho súradnicového systému a máp na variete. K tomu je nutné poznať ako sú na variete zavedené vektory.

Na zakrivenej variete však nemôžeme definovať vektorový priestor spôsobom uvedeným v definícii 1.1. Nie je jednoznačné, ako sčítať vektory v rôznych bodoch variety. To vedie ku konceptu tangenciálneho priestoru, pretože lokálne definované vektory majú stále význam v zmysle infinitizimálneho posunutia v rámci dostatočne malého okolia bodu.

Definícia 2.15. (Tangenciálny vektor)

Nech M je varieta, $a \in M$ a nech $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ je hladké zobrazenie, pre ktoré platí $\gamma(0) = a$. Povieme, že lineárne zobrazenie $X_a : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ je *tangenciálny vektor* ku krivke γ v bode a variety M , ak platí

$$X_a(f) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0),$$

pre všetky funkcie $f \in C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$. [3]

Definícia 2.16. (Tangenciálny priestor)

Nech M je diferencovateľná varieta, $x \in M$. Množinu všetkých tangenciálnych vektorov v bode x ku všetkým krivkám γ na variete M , pre ktoré platí $\gamma(0) = x$, označíme $T_x M$ a nazveme *tangenciálny priestor* k variete M v bode x . [3]

Poznámka. Vektory na variete sme definovali na základe lineárneho zobrazenia z priestoru hladkých funkcií do reálnych čísel. Všetkých prvkov z duálneho priestoru k priestoru $C^\infty(M)$ je však podstatne viac ako tangenciálnych vektorov, ktoré sme definovali pomocou tangenciálnych vektorov ku krivke. Existuje ďalšia, všeobecnejšia možnosť ako charakterizovať tangenciálne vektory, a to pomocou Leibnizovej² vlastnosti derivácií (vlastnosť (2.3)). [3]

Tvrdenie 2.17. Lineárne zobrazenie $X_x : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ patrí do $T_x M$ práve vtedy, keď pre všetky $f, g \in C^\infty(M)$ platí: [3]

$$X_x(f \cdot g) = X_x(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot X_x(g). \quad (2.3)$$

²Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) - nemecký filozof, vedec a matematik, nezávisle na Newtonovi objavil diferenciálny a integrálny počet, dodnes sa používa jeho značenie

Definícia 2.18. (Kotangenciálny priestor)

Nech $T_x M$ je tangenciálny priestor k variete M v bode x . Priestor duálny k tangenciálnemu priestoru $T_x M$, priestor kovektorov v bode $x \in M$, nazveme *kotangenciálny priestor* variety M v bode x a budeme značiť $T_x^* M$

2.3 Fibrovaný priestor**Definícia 2.19. (Submerzia)**

Zobrazenie $f : Y \rightarrow M$ medzi varietami sa nazýva *submerzia* v bode $x \in Y$, ak hodnosť lineárneho zobrazenia $T_x f : T_x Y \rightarrow T_{f(x)} M$ je rovná $\dim M$. Táto hodnosť je rovná hodnosti Jacobiho matice ľubovoľného súradnicového vyjadrenia zobrazenia f . Zobrazenie f sa nazýva *submerzia*, ak je submerziou v každom bode $x \in Y$. [5]

Definícia 2.20. (Imerzia)

Zobrazenie $f : Y \rightarrow M$ medzi varietami sa nazýva *imerzia* v bode $x \in Y$, ak hodnosť zobrazenia $T_x f : T_x Y \rightarrow T_{f(x)} M$ je rovná $\dim Y$. Táto hodnosť je rovná hodnosti Jacobiho matice ľubovoľného súradnicového vyjadrenia zobrazenia f . Zobrazenie f sa nazýva *imerzia*, ak je imerziou v každom bode $x \in Y$. [5]

Definícia 2.21. (Fibrovaná varieta)

Fibrovanou varietou rozumieme trojicu (Y, π, M) , kde Y a M sú diferencovateľné variety, kde $\dim M = n$ a $\dim Y = n + m$, a zobrazenie $\pi : Y \rightarrow M$ je surjektívna submerzia. Varieta Y sa nazýva *totálny priestor*, M sa nazýva *báza* fibrovanej variety a zobrazenie π sa nazýva *projekcia*. [5]

Definícia 2.22. (Vektorový fibrovaný priestor)

Uvažujme zobrazenie $\pi : E \rightarrow M$. Trojicu (E, π, M) nazveme *vektorový fibrovaný priestor*, ak $\forall x \in M$, inverzné zobrazenie $\pi^{-1}(x)$ má štruktúru reálneho vektorového priestoru, ktorý sa nazýva *fiber* nad bodom $x \in M$. [8]

Poznámka. V špeciálnom prípade $E = T(M)$, fiber nad bodom x je tangenciálny priestor $T_x M$ variety M v bode x .

Definícia 2.23. (Tangenciálny fibrovaný priestor)

Tangenciálny fibrovaný priestor variety M nazývame trojicu (TM, π_M, M) , kde TM je disjunktné zjednotenie $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$ a π_M je projekcia

$$\pi_M : TM \rightarrow M \quad \text{daná} \quad \pi_M(T_x M) = x, \quad (2.4)$$

ktorá tangenciálnemu vektoru priradí jeho bod dotyku. Inými slovami, fibry $\pi^{-1}(x)$ tangenciálneho fibrovaného priestoru sú tangenciálny priestory $T_x M$ pre $x \in M$. [3]

Definícia 2.24. (Fibrovaný súradnicový systém)

Nech (Y, π, M) je fibrovaný priestor a (V, ψ) je súradnicový systém (mapa) na Y . Ďalej, nech (U, φ) je súradnicový systém na M taký, že platí

1. $U = \pi(V)$

2. $pr \circ \psi = \varphi \circ \pi$, kde $pr : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ je kartézská projekcia na prvý faktor.

Dvojicu (V, ψ) nazveme *fibrovaný súradnicový systém* na Y a (U, φ) je s ním *asociovaný súradnicový systém* na M .

Súradnicové funkcie potom značíme $\psi = (x^i, y^\sigma)$ a $\varphi = (x^i)$, $1 \leq i \leq n, 1 \leq \sigma \leq m$.

Definícia 2.25. (Kotangenciálny fibrovaný priestor)

Kotangenciálny fibrovaný priestor variety M je vektorový fibrovaný priestor $T^*M = (TM)^*$, ktorý je duálnym priestorom k tangenciálnemu fibrovanému priestoru. [5]

2.4 Jetý

Definícia 2.26. (Rez fibrovanej variety)

(*Lokálnym*) *rezom* fibrovanej variety (Y, π, M) nazveme hladké zobrazenie $\gamma : U \rightarrow Y$, kde $U \subseteq M$, ktoré spĺňa $\pi \circ \gamma = id_U$ a $\gamma(\pi(x)) = x$ pre každé $x \in Y$, kde U je otvorené okolie $\pi(x)$ v M . Ak $U = M$, potom sa jedná o *globálny rez*. [5]

Poznámka. Súradnicové vyjadrenie rezu p podľa definície 2.24 je v tvare

$$\begin{aligned}\gamma : x \in U &\rightarrow \gamma(x) \in Y \\ \gamma(x) &= (x^j \gamma(x^i), y^\sigma \gamma(x^i))\end{aligned}$$

analogicky značíme v mechanike ($n = 1$), kde namiesto x používame t

$$\begin{aligned}\gamma : t \in U &\rightarrow \gamma(t) \in Y \\ \gamma(t) &= (t \gamma(t), q^\sigma \gamma(t))\end{aligned}$$

Poznámka. Množinu všetkých rezov projekcie π s definičným oborom U budeme značiť $\Gamma_U(\pi)$. Množinu všetkých rezov projekcie π definovaných na otvorených podmnožinách variety M budeme značiť $\Gamma(\pi)$.

Definícia 2.27. (Kontakt rádu r)

Povieme, že dva rezy $\gamma_1, \gamma_2 : U \subseteq M \rightarrow Y$ majú v bode $t \in U$ *kontakt rádu r* , ak platí

1. $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$,
2. existuje fibrovaný súradnicový systém (V, ψ) na Y s asociovaným súradnicovým systémom $(\pi(V), \phi)$ na M tak, že platí
$$\begin{aligned}\frac{d^k q^\sigma \gamma_1(t)}{dt^k} &= \frac{d^k q^\sigma \gamma_2(t)}{dt^k}, & 1 \leq k \leq r & \quad \text{v mechanike } (n = 1) \\ \frac{\partial^k y^\sigma \gamma_1(x^i)}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}} &= \frac{\partial^k y^\sigma \gamma_2(x^i)}{\partial x^{i_1} \dots \partial x^{i_k}}, & 1 \leq k \leq r, 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n & \quad \text{v teórii poľa } (n > 1)\end{aligned}$$

Takto definovaný vzťah je reláciou ekvivalencie. Trieda ekvivalencie reprezentovaná rezom $\gamma : t \rightarrow \gamma(t) = (t, q^\sigma \gamma(t))$ sa nazýva *r-jet rezu* γ v bode t a značíme $J_t^r \gamma$.

Definícia 2.28. (r-té jetové predĺženie)

Nech (Y, π, M) je fibrovaná varieta. Množinu $J^r Y$ všetkých *r-jetov* lokálnych rezov variety Y , definovanú

$$J^r Y = \bigcup_{t \in M} J_t^r \gamma, \quad \text{kde } \gamma \text{ prebieha množinu všetkých rezov } \Gamma(\pi), \quad (2.5)$$

nazývame *r-té jetové predĺženie* Y . [9]

Poznámka. *r-té jetové predĺženie* variety (Y, π, M) je fibrovaná varieta $(J^r Y, \pi_r, M)$, dimenzia tejto variety je $\dim J^r Y = (r+1)m + 1$.

2.5 Vektorové pole

Definícia 2.29. (Vektorové pole)

Vektorové pole X na variete M je hladký rez tangenciálneho fibrovaného priestoru, teda hladké zobrazenie $X : M \rightarrow TM$, ktoré každému bodu $x \in M$ priradí tangenciálny vektor $v \in TM$. Množinu všetkých vektorových polí na variete M budeme značiť $\mathfrak{X}(M)$. Spolu so sčítaním bod po bode a násobením skalárom, definovanými

$$[X + Y](x) := X(x) + Y(x) \quad (2.6)$$

$$[aX](x) := a(X(x)) \quad (2.7)$$

tvorí $\mathfrak{X}(M)$ vektorový priestor. [5]

Poznámka. Bázy vektorového poľa sú

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right), \quad i = 1, \dots, n & \quad \text{báza na variete } M \\ \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^\sigma} \right), \quad i = 1, \dots, n, \sigma = 1, \dots, m & \quad \text{báza na variete } Y. \end{aligned}$$

Súradnicové vyjadrenie vektorového poľa vyzerá nasledovne

$$X = X^0(t, q^\nu) \frac{\partial}{\partial t} + Z^\sigma(t, q^\nu) \frac{\partial}{\partial q^\sigma} \quad (\text{v mechanike})$$

$$X = X^i(x^j, y^k) \frac{\partial}{\partial x^i} + Z^\sigma(x^j, y^k) \frac{\partial}{\partial y^\sigma} \quad (\text{v teórii poľa})$$

Definícia 2.30. (π -projektabilné vektorové pole)

Nech (Y, π, M) je fibrovaný priestor. Vektorové pole X na variete Y sa nazýva *π -projektabilné*, ak existuje vektorové pole X_0 na M také, že platí $T\pi \circ X = X_0 \circ \pi$. Vektorové pole je teda *π -projektabilné*, ak jeho tangenciálny obraz pri projekcii π je opäť vektorové pole na variete M . [7]

Poznámka. Vlastnosť π -projektibility je ekvivalentná požiadavke na nezávislosť zložiek vektorového poľa pozdĺž bázy

Poznámka. Vertikálne vektorové pole je špeciálnym prípadom projektabilného vektorového poľa.

Poznámka. Súradnicové vyjadrenie π -projektabilného vektorového poľa je nasledujúce

$$X = X^0(t) \frac{\partial}{\partial t} + Z^\sigma(t, q^\nu) \frac{\partial}{\partial q^\sigma}.$$

Definícia 2.31. (π -vertikálne vektorové pole)

Nech X je π -projektabilné vektorové pole, ak pre jeho súradnice navyše platí $X^0(t) = 0$, hovoríme, že vektorové pole X je π -vertikálne.

Definícia 2.32. (Integrálne krivky)

Nech X je vektorové pole na variete M . Potom krivky $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ také, že tangenciálny vektor $\dot{\gamma}(t)$ definovaný

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t), \quad (2.8)$$

je identický s vektorovým poľom, $\dot{\gamma} = X$, nazývame *integrálne krivky*. [1]

Definícia 2.33. (Tok generovaný vektorovým poľom)

Tok generovaný vektorovým poľom X je množina zobrazení $\phi: M \rightarrow M$ definovaných [10]

$$\phi_t: \gamma(t_0) \rightarrow \gamma(t_0 + t). \quad (2.9)$$

Poznámka. Tokom rozumieme posunutie bodu $p = \gamma(t) \in M$ pozdĺž integrálnej krivky $\gamma(t)$ generovanej poľom X o vzdialenosť parametru t do nového bodu $\tilde{p} = \gamma(t_0 + t)$. [10]

Poznámka. Tok generovaný vektorovým poľom má nasledujúce vlastnosti: [11]

1. ϕ_0 je identita,
2. $\phi_s(\phi_t(p)) = \phi_{s+t}(p) = \phi_t(\phi_s(p))$,
3. $\phi_{-t}(\phi_t(p)) = p$, t.j. ϕ_{-t} je inverzné zobrazenie k ϕ_t .

Definícia 2.34. (Pull-back)

Nech M, N sú variety a $\phi: M \rightarrow N$ je zobrazenie. Funkcia f definovaná v bode $q \in N$ môže byť definovaná v bode $p \in M$ využitím vzťahu $q = \phi(p)$ nasledovne

$$\phi^* f: M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi^* f(p) = (f \circ \phi)(p) = f(\phi(p)). \quad (2.10)$$

Zobrazenie ϕ^* sa nazýva *pull-back*. [1]

Poznámka. Pull-back teda umožňuje zobrazíť vektory z tangenciálneho priestoru V_p variety M v bode p na vektory z tangenciálneho priestoru V_q variety N v bode q .

Definícia 2.35. (Push-forward)

Nech M, N sú variety. Na funkciu f definovanú v bode $q \in N$ aplikujeme pull-back do bodu $p \in M$ a potom na to ešte aplikujeme vektor v . Výsledkom bude zobrazenie ϕ_* definované ako

$$\phi_* : \mathbb{R} \rightarrow M, \quad \phi_* v(f(q)) = v(\phi^* f(q)) = v(f \circ \phi)(q) = v(f(\phi(q))). \quad (2.11)$$

Zobrazenie ϕ_* sa nazýva *push-forward*. [1]

Poznámka.

ϕ^* „ťahá“ (pull) funkciu f definovanú na variete N „späť“ (back) na varietu M .

ϕ_* „tlačí“ (push) vektory z tangenciálneho priestoru variety M v bode p „do“ (forward) tangenciálneho priestoru variety N v bode q .

Veta 2.36. Pull-back a push-forward sú navzájom inverzné zobrazenia, t.j.

$$\phi_* = (\phi^*)^{-1}. \quad (2.12)$$

Definícia 2.37. (Vlastný priestor)

Množinu všetkých vlastných vektorov príslušným k rovnakému vlastnému číslu spolu s nulovým vektorom nazveme *vlastný priestor* alebo tiež *charakteristický priestor*.

2.6 Distribúcie

Definícia 2.38. (k-distribúcia)

Nech M je varieta. k -distribúciou na M rozumieme hladký rez $D : M \rightarrow DM$, teda zobrazenie, ktoré každému bodu x_0 priradí k -dimenzionálny podpriestor. Priradenie

$$D(x) = \text{span} \{X_1(x), \dots, X_k(x)\},$$

kde $X_1, \dots, X_k$ sú lineárne nezávislé hladké vektorové polia. [12]

Definícia 2.39. (Integrálna varieta)

Nech D je k -distribúcia na M a N , kde N je podvarieta M a $\dim N = n$, $n \leq k$. Potom povieme, že N je *integrálna varieta* distribúcie D , ak $T_{x_0} N \subseteq D(x_0)$. [12]

Definícia 2.40. (Integrabilná distribúcia)

k -distribúcia D na M sa nazýva *integrabilná distribúcia*, ak každý bod variety M leží v nejakej integrálnej variete. [12]

Definícia 2.41. (Involutívna distribúcia)

Ak $[X, Y]$ leží v D pre všetky X, Y ležiace v D , povieme, že distribúcia D je *involutívna distribúcia*. $[X, Y]$ je Lieova zátvorka, bude definovaná v definícii 4.1. [12]

Teorém 2.42. (Frobeniov teorém)

D je integrabilná distribúcia práve vtedy, keď je D involutívna distribúcia. [12]

3 DIFERENCIÁLNE FORMY

Táto kapitola pojednáva o diferenciálnych formách, ich vlastnostiach, grafickej predstave a operáciách, ktoré s nimi môžeme vykonávať. Znalosti práce s diferenciálnymi formami využijeme v aplikáciách pri odvodzovaní a dokazovaní vlastností systémov, kde nám umožnia prístup nezávislý na konkrétnom súradnicovom systéme.

Definícia 3.1. (k-forma)

Nech V je reálny vektorový priestor. Lineárne zobrazenie $\alpha : \underbrace{V \times \dots \times V}_k \rightarrow \mathbb{R}$, ktoré je homomorfizmom nazveme *k-forma*.

Definícia 3.2. (1-forma)

Zobrazenie $dx^i : V \rightarrow \mathbb{R}$, ktoré priradí vektoru jeho i -tu zložku $dx^i(v) = v^i$ nazveme *1-forma*.

Definícia 3.3. (2-forma)

Zobrazenie $\alpha : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definované $\alpha(v_1, v_2) = \alpha_{ij}v_1^i v_2^j = \alpha_{ij}dx^i dx^j$ nazveme *2-forma*.

Definícia 3.4. (Symetrická 2-forma)

2-forma α , pre ktorú platí $\alpha(v_1, v_2) = \alpha(v_2, v_1)$ pre všetky $v_1, v_2 \in V$, to znamená $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ pre všetky $i, j = 1, \dots, n$ sa nazýva *symetrická 2-forma*. Zapisujeme $\beta_{ij}dx^i \odot dx^j$, kde platí $i \leq j$ a $\beta_{ij} = 2\alpha_{ij}$ pre $i \neq j$.

Definícia 3.5. (Antisymetrická 2-forma)

2-forma α , pre ktorú platí $\alpha(v_1, v_2) = -\alpha(v_2, v_1)$ pre všetky $v_1, v_2 \in V$, to znamená $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$ pre všetky $i, j = 1, \dots, n$ sa nazýva *antisymetrická 2-forma*. Zapisujeme $\beta_{ij}dx^i \wedge dx^j$, kde platí $i < j$ a $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$.

Definícia 3.6. (Tensorové pole)

Tensorové pole typu (r, s) na variete M je hladký rez vektorového fibrovaného priestoru

$$\bigotimes^r TM \otimes \bigotimes^s T^*M. \quad (3.1)$$

Budeme používať názov (r, s) -tenzorové pole. [5]

Poznámka. $(1, 0)$ -tenzorové pole je vektorové pole.

Poznámka. Rez kotangenciálneho fibrovaného priestoru T^*M je diferenciálna 1-forma.

Poznámka. Nahradením vektorového priestoru V priestorom vektorových polí $\mathfrak{X}(M)$ dostávame z k -foriem dostávame diferenciálne k -formy.

Definícia 3.7. (Diferenciálna k-forma)

Diferenciálna k-forma je zobrazenie

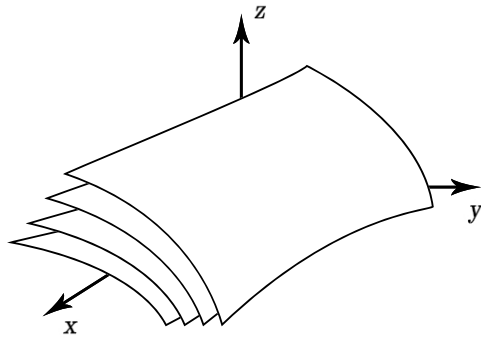
$$\omega : \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M)}_k \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}), \quad (3.2)$$

ktoré je k -lineárne a antisymetrické

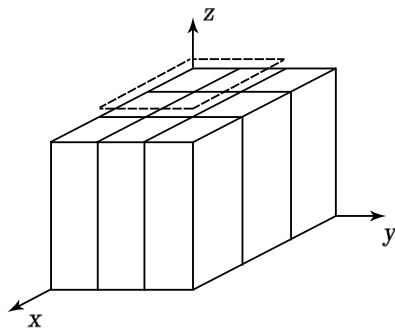
$$\omega(v_1, \dots, v_k) = \text{sgn } \sigma \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}), \quad (3.3)$$

pre všetky permutácie $\sigma : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$. [5]

Poznámka. Diferenciálna 1-forma môže byť graficky znázornená napríklad obrázkom 2, je ilustrovaná ako paralelné plochy, ktoré reprezentujú ekvipotenciály poľa. Na obrázku 3 je zobrazená 2-forma, ide konkrétne o formu $dx \wedge dy$. Táto forma pozostáva z dvoch množín paralelných rovín, jedna je kolmá k osi x a druhá k osi y , ktoré sa pretínajú a vytvárajú akési „trubice“ rozšahujúce sa v smere osi z . [13]



Obr. 2: Diferenciálna 1-forma, Zdroj: [13]



Obr. 3: Diferenciálna 2-forma, Zdroj: [13]

Poznámka. Diferenciálna k -forma je rezom vektorového fibrovaného priestoru $\bigwedge^k T^*M$.

Poznámka. Diferenciálna forma na variete je kovariantné antisymetrické tenzorové pole.

Definícia 3.8. (Priestor diferenciálnych foriem)

Keď položíme $\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$. Potom priestor: [5]

$$\Omega(M) = \bigoplus_{k=0}^{\dim M} \Omega^k(M) \quad (3.4)$$

je algebrou s nasledujúcou operáciou. Pre $\phi \in \Omega^k(M)$ a $\psi \in \Omega^l(M)$ a pre $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ platí

$$(\phi \wedge \psi)(X_1, \dots, X_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \text{sgn } \sigma \phi(X_{\sigma_1}, \dots, X_{\sigma_k}) \phi(X_{\sigma_{k+1}}, \dots, X_{\sigma_{k+l}}). \quad (3.5)$$

Takto definovaná operácia je:

- asociatívna, t.j. $(\phi \wedge \psi) \wedge \omega = \phi \wedge (\psi \wedge \omega)$,
- gradovane komutatívna, t.j. $\phi \wedge \psi = (-1)^{kl} \psi \wedge \phi$.

Poznámka. (Označenie priestorov)

Priestor všetkých diferenciálnych k -foriem na variete M budeme značiť $\Omega^k(M)$.

Priestor všetkých diferenciálnych foriem na variete M budeme značiť $\Omega(M)$, je to gradovaná komutatívna algebra.

Priestor všetkých vektorovo-hodnotových foriem na variete M budeme značiť $\Omega(M, TM)$.

Priestor vektorových polí na variete M budeme značiť $\mathfrak{X}(M)$.

k -tu vonkajšiu mocninu duálneho tangenciálneho priestoru variety M budeme značiť $\wedge^k T^*M$. Tento priestor obsahuje kovariantné antisymetrické tenzory.

3.1 Operácie s diferenciálnymi formami

Definícia 3.9. ((k, l)-prehodenie)

Permutáciu $\sigma : \{1, \dots, k, k+1, \dots, k+l\} \rightarrow \{1, \dots, k, k+1, \dots, k+l\}$, ktorá spĺňa

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(k) \quad \text{a} \quad \sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+l)$$

sa nazýva (k, l) -prehodenie.

Definícia 3.10. (Vonkajší súčin)

Nech M je varieta. Binárnu operáciu $\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^l(M) \rightarrow \Omega^{k+l}(M)$ definovanú

$$\omega = \alpha \wedge \beta = e_\alpha \beta, \quad \omega_{i_1, \dots, i_{k+l}} = \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma \alpha_{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)}} \beta_{i_{\sigma(k+1)}, \dots, i_{\sigma(k+l)}}, \quad (3.6)$$

kde σ je (k, l) -prehodenie, nazveme *vonkajší súčin*.

Definícia 3.11. (Vnútorový súčin)

Nech M je varieta. Vnútorový súčin vektorového poľa $A \in \mathfrak{X}(M)$ a k -formy $\omega \in \Omega^k M$ je definovaný ako

$$i_A \omega = A \lrcorner \omega = \omega(A, \dots). \quad (3.7)$$

Nech ω je diferenciálna k -forma a $v \in V$ je vektor. Potom zobrazenie

$$V \times \bigwedge^k \rightarrow \bigwedge^{k-1}$$

definované vzťahom

$$i_v \omega(v_1, \dots, v_{k-1}) = \omega(v, v_1, \dots, v_{k-1})$$

sa nazýva *vnútorový súčin* a platí $i_v \omega = 0$, ak ω je 0-forma. [1]

Definícia 3.12. (Vonkajšia derivácia)

Nech M je varieta. Unárnu operáciu $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ definovanú

$$d(\alpha) = d\alpha, \quad d(\alpha_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = \left(\frac{\partial \alpha_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x^i} dx^i \right) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \quad (3.8)$$

nazveme *vonkajšia derivácia*.

Veta 3.13. *Vonkajšia derivácia má vlastnosti [11]:*

1. Vonkajšia derivácia je aditívna: $d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$.
2. Ak α je 0-forma (funkcia), $d\alpha$ je diferenciál funkcie α .
3. Ak α je r -forma a β je s -forma potom platí

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta.$$

4. Pre každú r -formu α platí

$$d^2 \alpha = d(d\alpha) = 0.$$

Definícia 3.14. (Hodgeov hviezdičkový operátor)

Unárny operátor

$$\star : \bigwedge^k(V) \rightarrow \bigwedge^{n-k}(V),$$

alebo tiež

$$\star : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{n-k}(M),$$

kde $n = \dim V$ alebo $n = \dim M$, ktorý je definovaný priradením bázy z $\bigwedge^{n-k}(V)$ k báze z $\bigwedge^k(V)$ nasledujúcim spôsobom

$$\star : e_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge e_{\sigma(k)} \mapsto e_{\sigma(k+1)} \wedge \dots \wedge e_{\sigma(n)},$$

pre ľubovoľné $(k, n-k)$ -prehodenie σ , nazveme *Hodgeov hviezdičkový operátor*.

Veta 3.15. *Vonkajší súčin má nasledujúce vlastnosti [14]:*

1. Vonkajší súčin je distributívny

$$dx^i \wedge (dx^j + dx^k) = dx^i \wedge dx^j + dx^i \wedge dx^k. \quad (3.9)$$

2. Vonkajší súčin je antikomutatívny

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i. \quad (3.10)$$

3. Platí

$$dx^i \wedge dx^i = 0. \quad (3.11)$$

Príklad 3.16. (Vonkajší súčin v $\mathbb{R}^3$)

Majme diferenciálne formy $\omega = f_1 dx^1 + f_2 dx^2 + f_3 dx^3$, $\eta = g_1 dx^1 + g_2 dx^2 + g_3 dx^3$. Vonkajší súčin vypočítame

$$\begin{aligned}\omega \wedge \eta &= (f_1 dx^1 + f_2 dx^2 + f_3 dx^3) \wedge (g_1 dx^1 + g_2 dx^2 + g_3 dx^3) \\ &= f_1 dx^1 \wedge g_1 dx^1 + f_1 dx^1 \wedge g_2 dx^2 + f_1 dx^1 \wedge g_3 dx^3 \\ &\quad + f_2 dx^2 \wedge g_1 dx^1 + f_2 dx^2 \wedge g_2 dx^2 + f_2 dx^2 \wedge g_3 dx^3 \\ &\quad + f_3 dx^3 \wedge g_1 dx^1 + f_3 dx^3 \wedge g_2 dx^2 + f_3 dx^3 \wedge g_3 dx^3.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Členy obsahujúce $dx^i \wedge dx^i$ pre $i = 1, 2, 3$ sú rovné nule podľa (3.11). A zvyšné členy upravíme použitím (3.10) do tvaru

$$\begin{aligned}\omega \wedge \eta &= (f_1 g_2 - f_2 g_1) dx^1 \wedge dx^2 + (f_1 g_3 - f_3 g_1) dx^1 \wedge dx^3 \\ &\quad + (f_2 g_3 - f_3 g_2) dx^2 \wedge dx^3.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Veta 3.17. Pre diferenciálne formy platí [11] :

1. Nech α je r -forma a β je s -forma, potom platí tzv. komutatívne pravidlo

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs} \beta \wedge \alpha.\tag{3.14}$$

2. V $\mathbb{R}^3$ platí

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta &\Leftrightarrow a \times b, \\ d(\alpha \wedge \beta) &\Leftrightarrow \operatorname{div} a \times b, \\ d\alpha &\Leftrightarrow \operatorname{curl} a,\end{aligned}\tag{3.15}$$

kde α, β sú 1-formy a a, b sú príslušné vektory.

3.2 Vlastnosti diferenciálnych foriem

Definícia 3.18. (Uzavretá forma)

Nech β je p -forma. Povieme, že forma je *uzavretá*, ak platí $d\beta = 0$. [11]

Definícia 3.19. (Exaktná forma)

Nech β je p -forma. Povieme, že p -forma β je *exaktná*, ak platí $\beta = d\alpha$, pre nejakú $(p-1)$ -formu α . [11]

Teorém 3.20. (Stokesov teorém)

Nech M je n -rozmerná varieta a oblasť $V \subset M$ je kompaktná s hladkou hranicou ∂V . Potom pre každú spojitú $(p-1)$ -formu ω platí [11] :

$$\int_V d\omega = \int_{\partial V} \omega.$$

Definícia 3.21. (Pull-back)

Nech $F : M^n \rightarrow W^r$ je diferencovateľné zobrazenie a nech α je kovariantný tenzor na W . Potom zobrazenie

$$F^* : \bigwedge^p W \rightarrow \bigwedge^p M,$$

pre ktoré platí

$$F^* \alpha(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p) = \alpha(F_* \mathbf{v}_1, \dots, F_* \mathbf{v}_p)$$

nazveme *pull-back* kovariantného tenzoru. [11]

Definícia 3.22. (Horizontálna forma)

Diferenciálna forma ω na Y sa nazýva *π -horizontálna*, ak pre každé π -vertikálne vektorové pole ξ na Y platí $i_\xi \omega = 0$. [16]

4 LIEOVA ZÁTVORKA

Túto kapitolu začneme zavedením dôležitého operátora vektorových polí - Lieovej zátvorky. Postupne definujeme jej vlastnosti a budeme sa venovať jej geometrickému významu. Práve to, že je operátorom, ktorý vystihuje nekomutativitu tokov generovaných vektorovými poľami z nej robí dôležitý nástroj v rade aplikácií. Uvedené budú tiež ilustratívne príklady pre lepšie pochopenie výpočtu a aplikácie Lieovej zátvorky. V závere kapitoly sa budeme venovať Lieovej grupe a jej pôsobeniu na variete.

Definícia 4.1. (Lieova zátvorka)

Nech X, Y sú vektorové polia na variete M . Potom zobrazenie, ktoré každej funkcii $f \in C^\infty(M)$ priradí funkciu:

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \quad (4.1)$$

sa nazýva *Lieova zátvorka* vektorových polí X a Y . [3]

Veta 4.2. (Vlastnosti Lieovej zátvorky)

Lieova zátvorka $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ má nasledujúce vlastnosti: [15]

- je antisymetrické zobrazenie, t.j. $[X, Y] = -[Y, X],$
- platí Jakobiho identita $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]],$
- je bilinéarne zobrazenie, t.j. $[aX_1 + bX_2, Y] = a[X_1, Y] + b[X_2, Y].$

Definícia 4.3. (Lieova algebra)

Lieovou algebrou rozumieme vektorový priestor L , na ktorom je definované zobrazenie $[\cdot, \cdot] : L \times L \rightarrow L$, ktoré má vlastnosti z vety 4.2.

Poznámka. Dvojica $(\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot])$ je príkladom Lieovej algebry.

Definícia 4.4. (Gradovaná Lieova algebra)

Gradovanou Lieovou algebrou nazveme Lieovu algebru, označme L spolu s gradáciou vektorových priestorov

$$L = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} L_i$$

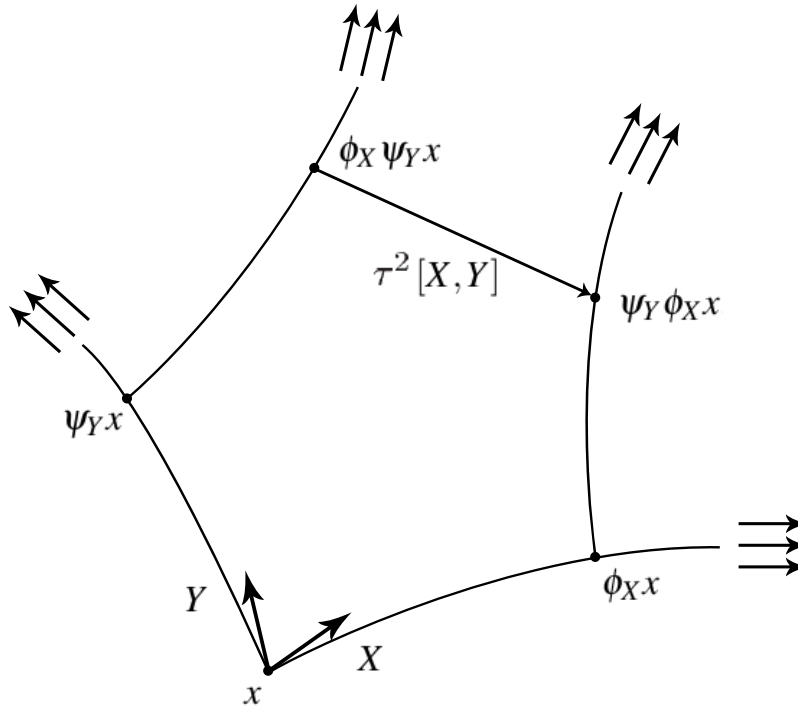
tak, že Lieova zátvorka rešpektuje gradáciu

$$[L_i, L_j] \subseteq L_{i+j}.$$

Poznámka. (Geometrický význam Lieovej zátvorky)

Geometrický význam Lieovej zátvorky $[X, Y]$ by sme mohli charakterizovať ako nekomutativitu tokov, ktoré generujú tieto polia X, Y . Graficky znázornenú situáciu môžeme vidieť na obrázku 4. Tok generovaný poľom X značíme ϕ_X a tok generovaný poľom Y označíme ψ_Y .

Na obrázku začíname v bode x , odkiaľ sa najskôr posunieme podľa poľa X do bodu $\phi_X x$ a odtiaľ podľa poľa Y do bodu $\psi_Y \phi_X x$. Druhou možnosťou je ako prvé sa posunúť podľa poľa Y do bodu $\psi_Y x$ a potom podľa poľa X do bodu $\phi_X \psi_Y x$. Rozdiel medzi koncovými bodmi, do ktorých sme sa dostali týmito dvomi spôsobmi predstavuje Lieova zátvorka $[X, Y]$ vektorových polí X a Y . [17]



Obr. 4: Geometrický význam Lieovej zátvorky, Zdroj: [17]

Teorém 4.5. Ak X a Y sú hladké vektorové polia definované na okolí z , potom platí: [18]

$$[X, Y](z) = DY(X(z)) - DX(Y(z)). \quad (4.2)$$

Poznámka. Výpočet rovnice (4.2) v súradniciach je nasledovný. Vektorové polia X, Y vyjadríme ako stĺpcové vektory

$$X(z) = \begin{bmatrix} f_1(z) \\ \vdots \\ f_n(z) \end{bmatrix}, \quad Y(z) = \begin{bmatrix} g_1(z) \\ \vdots \\ g_n(z) \end{bmatrix}$$

a Lieova zátvorka $[X, Y](z)$ sa vypočíta ako

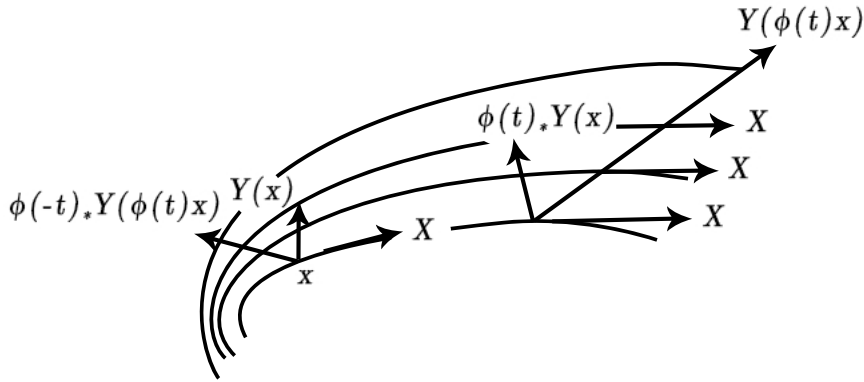
$$[X, Y](z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial z_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial z_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}.$$

Definícia 4.6. (Lieova derivácia)

Nech X, Y sú vektorové polia na variete M a nech $\phi(t) = \phi_t$ je lokálny tok generovaný poľom X . Potom $\phi_t x$ je bod na dráhe toku, ktorá v čase 0 začína v bode x , pričom je tento bod vzdialený t sekúnd od počiatočného bodu pozdĺž integrálnej krivky X . Potom *Lieovu deriváciu* poľa Y podľa X môžeme definovať ako vektorové pole $\mathcal{L}_X Y$, ktorého hodnota v bode x je

$$[\mathcal{L}_X Y]_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[Y_{\phi_t x} - \phi_{t*} Y_x]}{t}, \quad (4.3)$$

kde $\phi_{t*} Y_x$ je push-forward Y_x do bodu $\phi_t x$ v zmysle diferenciálu. [11]



Obr. 5: Lieova derivácia, Zdroj: [11]

Poznámka. Lieova derivácia je prirodzeným zobecnením klasickej derivácie vzhľadom k času, charakterizuje zmenu pozdĺž vektorového poľa.

Veta 4.7. Nech X, Y sú vektorové polia. Potom platí: [15]

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]. \quad (4.4)$$

Definícia 4.8. (Lieova derivácia diferenciálnej formy)

Nech X je vektorové pole, ω je diferenciálna forma a α_u je integrálna krivka vektorového poľa X prechádzajúca bodom u . Potom

$$\partial_X \omega = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\alpha_u^* \omega - \omega}{u}$$

sa nazýva *Lieova derivácia* diferenciálnej formy ω v smere vektorového poľa X . Táto derivácia určuje mieru zmeny diferenciálnej formy po smere toku vektorového poľa. [16]

Poznámka. Lieova derivácia funkcie je vlastne špeciálnym prípadom tejto definície, keď $\omega = f$ je funkcia, teda diferenciálna 0-forma. Potom platí

$$\partial_\xi f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \xi^i.$$

Veta 4.9. Vlastnosti Lieovej derivácie sú:

1. linearita: $\partial_X(a\omega_1 + b\omega_2) = a\partial_X\omega_1 + b\partial_X\omega_2$,
2. rád formy sa Lieovou deriváciou nemení,
3. záměna s vonkajšou deriváciou: $d\partial_X\omega = \partial_X(d\omega)$,
4. vonkajší súčin: $\partial_X(\omega \wedge \eta) = (\partial_X\omega) \wedge \eta + \omega \wedge (\partial_X\eta)$,
5. Cartanova formula: $\partial_X\omega = i_X d\omega + di_X\omega$,

kde $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^l(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

4.1 Príklady

Príklad 4.10. Máme dané dve vektorové polia v $\mathbb{R}^3$ v súradniciach (x, y, z) ako

$$X = [3y + z, z^3, x^4]^T, \quad Y = [4x^2 + z, 3y^2, x + y^2 - 3]^T. \quad (4.5)$$

Vypočítame Jakobiány DX, DY

$$DX = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3z^2 \\ 4x^3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad DY = \begin{bmatrix} 8x & 0 & 1 \\ 0 & 6y & 0 \\ 1 & 2y & 0 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

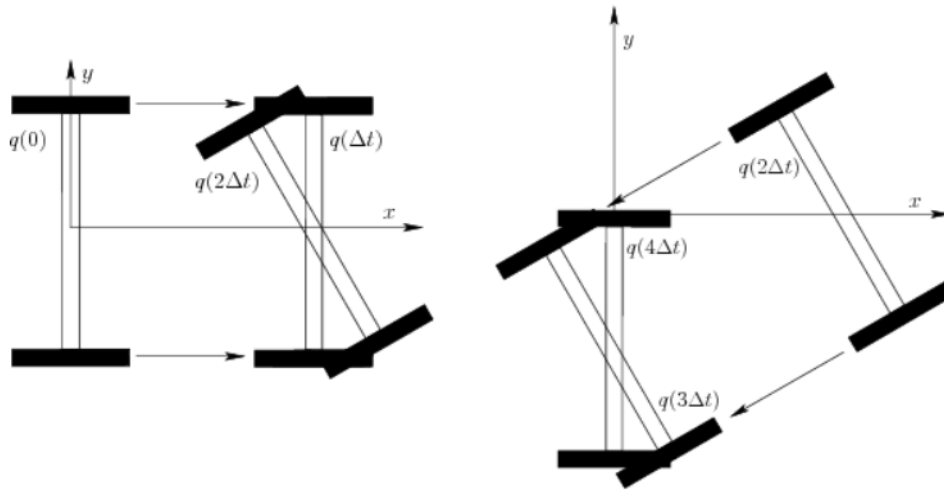
Ďalej podľa vzťahu (4.2) vypočítame Lieovu zátvorku vektorový polí X a Y

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \begin{bmatrix} 8x & 0 & 1 \\ 0 & 6y & 0 \\ 1 & 2y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3y + z \\ z^3 \\ x^4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3z^2 \\ 4x^3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4x^2 + z \\ 3y^2 \\ x + y^2 - 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x^4 + 24xy + 8xz \\ 6yz^3 \\ 3y + 2yz^3 + z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x + 10y^2 - 3 \\ 3z^2(x + y^2 - 3) \\ 16x^5 + 4x^3z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x(x^3 + 24y + 8z - 1) - 10y^2 + 3 \\ 3z^2(-x - y^2 + 2yz + 3z) \\ 4x^3(-4x^2 + z) + y(2z^3 + 3) + z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Príklad 4.11. S Lieovou zátvorkou sa môžeme stretnúť aj v oblasti diferenciálne riadených robotov. V tomto príklade sa budeme zaoberať najjednoduchším typom robota, ktorý má len dve kolesá. Trajektória robota pozostáva z dvoch pohybov - translácie a rotácie. Skladaním týchto

pohybov môžeme docieľiť polohu robota, ktorá by sa mohla zdať nemožná. Z bežného života je to napríklad ako pozdĺžne parkovanie auta, auto takto nezaparkujeme jedným pohybom, ale práve zložením už spomínaných rotácií a translácií. Na obrázku 6 vidíme situáciu, ktorou sa budeme zaoberať. Počiatočný bod je $q = (0,0,0)$ - ťažisko v bode $(0,0)$ a nulové natočenie. Ďalej vidíme postupnosť možných pohybov - ako prvé je to posun dopredu, druhé je otočenie dopredu, potom posunutie dozadu a posledné je otočenie dozadu. Po častiach spojitú akciu trajektórie na intervale $[0, 4t]$ popisuje táto funkcia

$$u(t) = \begin{cases} (1, 0) & \text{pre } t \in [0, t) \\ (0, 1) & \text{pre } t \in [t, 2t) \\ (-1, 0) & \text{pre } t \in [2t, 3t) \\ (0, -1) & \text{pre } t \in [3t, 4t) \end{cases} \quad (4.7)$$



Obr. 6: Diferenciálne riadený robot, Zdroj: [19]

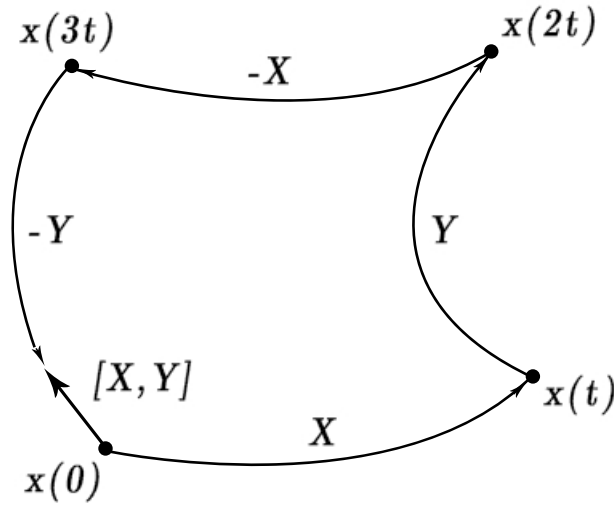
Lieova zátvorka vyjadrí, či sú možné pohyby robota do strán. V tomto prípade sa teda jedná o systém rovníc

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}}_X u_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_Y u_2. \quad (4.8)$$

Ďalej vypočítame Jakobián vektorových polí X, Y a dosadíme do vzťahu (4.2)

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \cos \theta \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= [\sin \theta, -\cos \theta, 0]^T. \end{aligned}$$

Na obrázku 7 môžeme vidieť Lieovu zátvorku vektorových polí X a Y . Vidíme, že zloženie týchto pohybov nie je komutatívne, teda nevrátíme sa opäť do počiatočného bodu.



Obr. 7: Lieova zátvorka - robot, Zdroj: [19]

Nakoniec interpretujeme získaný výsledok. Ak do Lieovej zátvorky dosadíme počiatočný bod $q = (0, 0, 0)$, dostaneme výsledok $[0, -1, 0]^T$, tento vektor potvrdzuje situáciu z obrázku 6, po postupnosti pohybov sa z počiatočného bodu robot posunie do strany v smere $-y$. [19]

4.2 Akcia grúp

Definícia 4.12. (Lieova grupa)

Lieovou grupou nazveme množinu G s dvomi štruktúrami: G je grupa a G je hladká varieta tak, že násobenie a inverzia sú spojité zobrazenia. [20]

Definícia 4.13. (Ľavá akcia grupy)

Nech G je Lieova grupa. Ľavou akciou grupy G na variete M rozumieme hladké zobrazenie $G \times M \rightarrow M$, ktoré dvojici prvkov (g, m) priradí prvok $L_g m = g.m$ a zobrazenie spĺňa podmienky:

1. $L_e(m) = m$,
2. $L_g(L_h(m)) = L_{g.h}(m)$,

kde $e \in G$ je neutrálny prvok grupy G a $g, h \in G$. [20]

Definícia 4.14. (Pravá akcia grupy)

Nech G je Lieova grupa. Pravou akciou grupy G na variete M rozumieme hladké zobrazenie $G \times M \rightarrow M$, ktoré dvojici prvkov (g, m) priradí prvok $R_g m = m.g$ a zobrazenie spĺňa podmienky:

1. $R_e(m) = m$,
2. $R_g(R_h(m)) = R_{h.g}(m)$,

kde $e \in G$ je neutrálny prvok grupy G a $g, h \in G$. [20]

Poznámka. Ak je grupa G komutatívna, potom ľavá a pravá akcia sú totožné zobrazenia.

Poznámka. Akcii grupy G na variete M inými slovami tiež hovoríme, že grupa G pôsobí na variete M .

Definícia 4.15. (Orbita)

Nech M je varietu a G grupa. Ďalej nech grupa G pôsobí na M a nech $z \in M$. *Orbitou* z nazveme množinu bodov z variety M , ktoré sú obrazom bodu z pri pôsobení grupy [18]

$$O(z) = \{g.z \mid g \in G\}.$$

Definícia 4.16. (Foliácia)

Majme n -rozmernú varietu M . p -rozmernou *foliáciou* variety M nazveme pokrytie variety mapami U_i spolu so zobrazeniami $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$. Pre $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ sú definované funkcie $\varphi_{ij} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi_{ij} = \varphi_j \varphi_i^{-1}$. Tieto funkcie majú pre x, y , kde x je prvých $n - p$ súradníc a y zvyšných p súradníc, tvar

$$\varphi_{ij}(x, y) = (\varphi_{ij}^1(x), \varphi_{ij}^2(x, y)),$$

kde $\varphi_{ij}^1, \varphi_{ij}^2$ sú zobrazenia $\varphi_{ij}^1 : \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R}^{n-p}$ a $\varphi_{ij}^2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Poznámka. Príkladom foliácie je, ak varietu M môžeme zapísať ako zjednotenie orbít pôsobenia Lieovej grupy, dostaneme *foliáciu* variety M . Každú orbitu potom nazveme *list* rozvrstvenia. [18]

Definícia 4.17. (Hlavný fibrovaný priestor)

Nech $\pi : P \rightarrow M$ je fibrovaný priestor, G nech je Lieova grupa a $R : G \times P \rightarrow P$ nech je jej pravá akcia. Povieme, že (P, π, M) je *hlavný fibrovaný priestor*, ak platí:

1. R zachováva fibry, t.j. $\pi(u.g) = \pi(u)$, $\forall u \in P, \forall g \in G$,
2. R je na každom fibre P_x jednoducho tranzitívna akcia, t.j. $\forall u, v \in P_x \exists! g \in G \quad v = u.g$.

5 KONEXIA

Ako už bolo spomenuté, štruktúra variety nedovoľuje jednoducho porovnávať vektory, ktoré sú prvkami tangenciálneho priestoru v dvoch rôznych bodoch. Preto je potrebné zaviesť štruktúru, ktorá umožňuje posúvať vektory z jedného bodu do druhého. Posúvanie vektorov po uzavretých dráhach v rovnom Euklidovskom priestore je intuitívne, avšak zakrivenie priestoru túto prácu značne komplikuje.

Zakrivenie môžeme chápať ako vychýlenie vektorov po posunutí pozdĺž uzavretej krivky. Z tohto dôvodu musíme najskôr zaviesť spôsob posúvania vektorov pozdĺž kriviek. Začneme zovšeobecnením konceptu smerovej derivácie z $\mathbb{R}^n$ definovaním klasickej lineárnej konexie, ktorá nám pomôže objasniť, čo rozumieme pod pojmom „priamy smer“ na zakrivenom priestore.

Budeme rozlišovať tri základné druhy konexie - všeobecnú konexiu, lineárnu konexiu a klasickú lineárnu konexiu. Postupne si tieto pojmy definujeme.

Definícia 5.1. (Všeobecná konexia)

Pre ľubovoľnú fibrovanú variety (Y, π, M) uvažujme jej prvé jetové predĺženie J^1Y . Všeobecnou konexiou potom rozumieme ľubovoľný rez $\Gamma : Y \rightarrow J^1Y$. [9]

Definícia 5.2. (Lineárna konexia)

Uvažujme vektorový fibrovaný priestor (E, π, M) a jeho prvé jetové predĺženie J^1E . Lineárnou konexiou rozumieme rez $\Gamma : E \rightarrow J^1E$, ktorý je lineárny na fibroch. [9]

Definícia 5.3. (Klasická lineárna konexia)

Lineárna konexia na tangenciálnom vektorovom fibrovanom priestore, teda ak $E = TM$ sa nazýva klasická lineárna konexia. [9]

Veta 5.4. Klasická lineárna konexia, t.j. zobrazenie $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ má nasledujúce vlastnosti:

$$\nabla_{(X_1+X_2)}(Y_1+Y_2) = \nabla_{X_1}Y_1 + \nabla_{X_2}Y_1 + \nabla_{X_1}Y_2 + \nabla_{X_2}Y_2, \quad \text{bilinearita} \quad (5.1)$$

$$\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_XY, \quad \text{Leibnitzovo pravidlo} \quad (5.2)$$

$$\nabla_{fX}Y = f\nabla_XY, \quad (5.3)$$

pre všetky hladké funkcie f a pre všetky $X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$. Tenzorové pole ∇_XY potom nazývame kovariantná derivácia vektorového poľa Y pozdĺž X . [9]

Poznámka. (Christoffelove symboly)

Klasickú lineárnu konexiu ∇ môžeme vyjadriť v lokálnych súradniciach

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

kde Γ_{ij}^k sú Christoffelove symboly. [4]

Definícia 5.5. (Symetrická konexia)

Klasická lineárna konexia, pre ktorú platí

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

sa nazýva *symetrická konexia*. [9]

Definícia 5.6. (Torzia)

Nech ∇ je klasická lineárna konexia na M a $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. *Torziou* nazveme tenzorové pole $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, pre ktoré platí: [8]

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \quad (5.4)$$

Definícia 5.7. (Krivosť)

Nech ∇ je klasická lineárna konexia na M a $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. *Krivosťou* nazveme tenzorové pole $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, pre ktoré platí: [8]

$$R(X, Y)(Z) = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z. \quad (5.5)$$

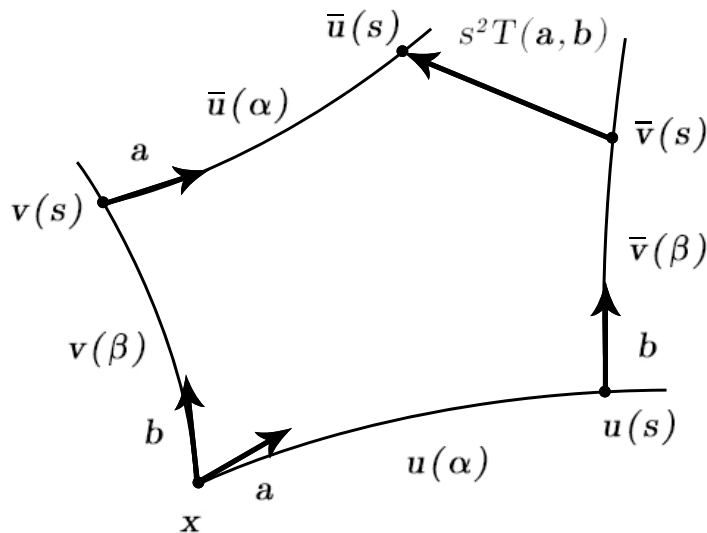
Poznámka. Kovariantná derivácia je $(1, 1)$ -tenzorové pole, torzia je $(1, 2)$ -tenzorové pole a krivosť je $(1, 3)$ -tenzorové pole.

Poznámka. (Geometrický význam torzie)

Tenzor torzie môžeme interpretovať ako mieru toho, nakoľko sa neuzatvára „rovnobežník“ zložený zo štyroch po dvoch rovnakých „úsečiek“. Na obrázku 8 je znázornená táto situácia. V bode x máme dva vektory a, b . V smere týchto vektorov pretiahneme „úsečky“ u a v (časti geodetík $u(\alpha)$ a $v(\beta)$ s tangenciálnymi vektormi a a b). „Dĺžky“ obidvoch „úsečiek“ zvolíme úmerné „veľkosti“ vektorov a a b s koeficientom s . Ďalej pozdĺž „úsečky“ u rovnobežne prenesieme vektor b z bodu $u(0) = x$ do bodu $u(s)$ a odtiaľ vedieme ďalšiu „úsečku“ $\bar{v}$ v smere preneseného vektoru b s dĺžkou úmernou veľkosti vektoru b s koeficientom s do bodu $\bar{v}(s)$. Rovnako vedieme „úsečku“ $\bar{v}$ z bodu x do bodu $v(s)$ v smere vektoru a a ďalej tiež „úsečku“ $\bar{u}$ do bodu $\bar{u}(s)$. Takto zostrojený „rovnobežník“ sa vo všeobecnom prípade neuzatvára, t.j. $\bar{v}(s) \neq \bar{u}(s)$. Rozdiel medzi týmito bodmi je daný práve tenzorom torzie. Môžeme zapísať

$$\bar{v}(s) - \bar{u}(s) \approx -s^2 T(a, b), \quad (5.6)$$

tento zápis nie je úplne presný, ale slúži pre názornú predstavu. [17]



Obr. 8: Geometrický význam torzie, Zdroj: [17]

Veta 5.8. Ak $T(X, Y) = 0$, práve vtedy, keď je ∇ symetrická konexia. [1]

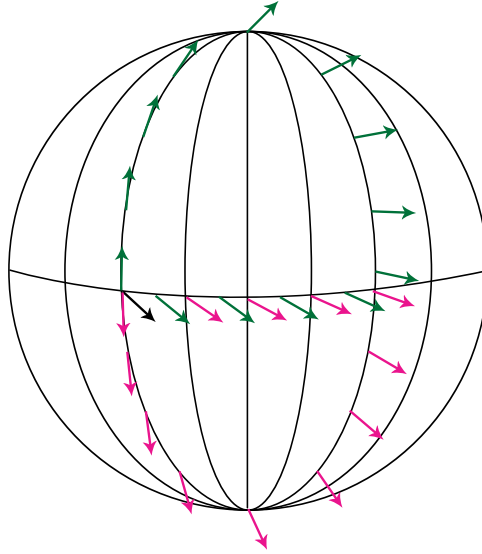
Poznámka. Z geometrického hľadiska v prípade symetrickej konexie dôjde k uzatvoreniu „rovnoobežníka“ z obrázku 8, tzn. $\bar{v}(s) = \bar{u}(s)$.

Poznámka. (Paralelný prenos vektorov pozdĺž krivky)

Na diferencovateľných varietach neexistuje pojem globálnej rovnobežnosti, a to kvôli zakriveniu priestoru. V zakrivenom priestore môžeme zaviesť len trochu slabší typ rovnobežnosti a to *paralelný prenos vektoru pozdĺž krivky*. Jedná sa o prenos vektoru z jedného bodu do druhého pozdĺž konkrétnej krivky. Tento pojem nebudeme formálne definovať, zavedieme ho len intuitívne na obrázku 9.

Na tomto obrázku môžeme vidieť, ako paralelný prenos vektorov na variete, konkrétne na guli závisí na dráhe, po ktorej sa pohybujeme. Situácia je taká, posúvame čierny vektor dvomi rôznymi trajektóriami - môžeme ich nazvať horný a dolný „trojuholník“. Po hornom „trojuholníku“ je posúvajúci vektor značený zelenou farbou a dráha prechádza severným pólom. Posun po dolnom „trojuholníku“ značíme farbou ružovou, vektor prechádza cez pól južný. V oboch prípadoch je prvá časť dráhy rovnaká - pohybujú sa po poludníku, ďalej sa ich dráhy líšia. Vidíme, že nakoniec, keď sa dostaneme do bodu, z ktorého sme vychádzali, ani jednou trajektóriou nedostaneme rovnobežný vektor s počiatočným čiernym vektorom. Ale navyše ešte každou z dráh dostaneme inak orientovaný vektor.

V rovinnom priestore paralelný prenos nezávisí na dráhe, teda prenosom po uzavretej krivke nakoniec zložky preneseného vektoru splývajú so zložkami vektoru pôvodného. V zakrivenom priestore platí, že paralelný prenos vektoru lokálne nezávisí na dráhe práve vtedy, keď je varieta plochá, t.j. krivosť je nulová.



Obr. 9: Paralelný prenos vektorov, Zdroj: vlastný

Poznámka. Zavedená klasická lineárna konexia ∇ nie je definovaná unikátne. Unikátna definícia môže byť zavedená pomocou Riemannovej metriky a Riemannovej variety. [1]

Definícia 5.9. (Riemannova metrika)

Nech M je hladká varieta. *Riemannova metrika* g na M je skalárny súčin $g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ na každom tangenciálnom priestore $T_x M$ variety M . Inými slovami, pre každé $x \in M$, $g = g_x$ spĺňa: [21]

1. $g(u, v) = g(v, u)$, pre všetky $u, v \in T_x M$
2. $g(u, u) \geq 0$, pre všetky $u \in T_x M$
3. $g(u, u) = 0 \iff u = 0$.

Definícia 5.10. (Riemannova varieta)

Hladká varieta M spolu s Riemannovou metrikou g sa nazýva *Riemannova varieta* (M, g) .

Definícia 5.11. (Kompatibilita konexie s metrikou)

Nech M je hladká Riemannova varieta s metrikou g . Povieme, že konexia ∇ na variete M je *kompatibilná* s metrikou g na variete M , ak pre každú dvojicu vektorových polí X, Y na variete M a pre každý vektor $v \in T_x M$ platí *Ricciho identita*

$$v(g(X, Y)) = g(\nabla_v X, Y) + g(X, \nabla_v Y). \quad (5.7)$$

Táto podmienka je ekvivalentná s $\nabla g = 0$. [21]

Tvrdenie 5.12. Nech M je hladká Riemannova varieta s metrikou g . Potom existuje jediná konexia ∇ na variete M , ktorá je symetrická a kompatibilná s metrikou g .

Poznámka. Konexia z tvrdenia 5.12 sa nazýva *Levi-Civitova konexia* alebo tiež *Riemannova konexia*. [1]

Definícia 5.13. (Christoffelove symboly pre Levi-Civitovu konexiu)

Christoffelove symboly v prípade Levi-Civitovej konexie sú dané vzťahom

$$\Gamma_{ij}^k(u^1, \dots, u^n) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \tilde{g}^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} \right), \quad i, j, k = 1 \dots n \quad (5.8)$$

kde $(\tilde{g}^{ij})$ je matica inverzná k matici (g_{ij}) . [4]

Definícia 5.14. (Vertikálny fibrovaný priestor)

Nech (E, π, M) je fibrovaný priestor, uvažujeme tangenciálne zobrazenie $T\pi : TE \rightarrow TM$ a jeho jadro $\ker T\pi =: VE$, ktoré sa nazýva *vertikálny fibrovaný priestor* priestoru E . [5]

Definícia 5.15. (Horizontálny fibrovaný priestor)

Horizontálnym fibrovaným priestorom HE priestoru E nazveme priestor komplementárny k vertikálnemu, teda taký, že platí $TE = VE \oplus HE$. [5]

Poznámka. Všeobecnú konexiu môžeme definovať rôznymi spôsobmi, teraz spomenieme dve hlavné ekvivalentné definície:

1. Môžeme ju definovať ako lineárne zobrazenie $\kappa : TY \rightarrow TY$, ktoré spĺňa $\kappa \circ \kappa = \kappa$ a $\text{Im } \kappa = VY$. Takže platí $\kappa|_{VY} = id_{VY}$ a $\kappa|_{HY} = 0$. Navyše platí $T_y Y = V_y Y + H_y Y$ pre každý bod y .
2. Horizontálny priestor $H(y)$ môžeme stotožniť s prvým jetovým predĺžením $J^1 Y$ na totálnom priestore Y . Potom je konexia definovaná ako rez $H : Y \rightarrow J^1 Y$. (Takto bola všeobecná konexia zavedená aj na začiatku tejto kapitoly v definícii 5.1, kde sme rez značili Γ .)

6 FRÖLICHER-NIJENHUISOVA ZÁTVORKA

Frölicher-Nijenhuisova zátvorka je rozšírením Lieovej zátvorky z vektorových polí na vektorovo-hodnotové diferenciálne formy. V tejto kapitole si tento pojem, ktorý je pre prácu kľúčový, definujeme, uvedieme jeho vlastnosti a ukážeme názorné príklady, pre lepšie porozumenie podstaty tohto operátora.

Budeme sa tiež venovať Nijenhuisovmu tenzoru, ktorý sa vypočíta pomocou Frölicher-Nijenhuisovej zátvorky. Práve vďaka tomuto tenzoru budeme môcť formulovať tri základné vety, ktoré nám objasnia pôsobenie Frölicher-Nijenhuisovej zátvorky na vlastnosti štruktúry variety.

Definícia 6.1. (Frölicher-Nijenhuisova zátvorka)

Nech M je hladká varieta. Ďalej nech $K \in \Omega^k(M, TM)$ a $L \in \Omega^l(M, TM)$. Platí

$$[\mathcal{L}(K), \mathcal{L}(L)] = \mathcal{L}([K, L]_{FN}) \quad (6.1)$$

pre jednoznačne danú $[K, L]_{FN} \in \Omega^{k+l}(M, TM)$. Takto definovanú vektorovo-hodnotovú formu $[K, L]_{FN}$ nazveme *Frölicher-Nijenhuisova zátvorka*. [22]

6.1 Vlastnosti

Teorém 6.2. Nech $K_1 \in \Omega^{k_1}(M, TM)$, $K_2 \in \Omega^{k_2}(M, TM)$ a $K_3 \in \Omega^{k_3}(M, TM)$.

Potom platí: [5]

$$\begin{aligned} [K_1, K_2]_{FN} &= -(-1)^{k_1 k_2} [K_2, K_1]_{FN} \\ [K_1, [K_2, K_3]]_{FN} &= [[K_1, K_2], K_3]_{FN} + (-1)^{k_1 k_2} [K_2, [K_1, K_3]]_{FN}. \end{aligned}$$

Veta 6.3. V špeciálnom prípade pre K, L vektorovo-hodnotové 1-formy, Frölicher-Nijenhuisova zátvorka je vektorovo-hodnotová 2-forma, ktorej hodnota pre dve vektorové polia X a Y je: [23]

$$\begin{aligned} [K, L]_{FN}(X, Y) &= [KX, LY] - [KY, LX] - L[KX, Y] + L[KY, X] \\ &\quad - K[LX, Y] + K[LY, X] + LK[X, Y] + KL[X, Y]. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Veta 6.4. Nech $K \in \Omega^k(M, TM)$ a $L \in \Omega^l(M, TM)$. Potom pre Frölicher-Nijenhuisovu zátvorku platí: [22]

$$\begin{aligned}
[K, L]_{FN}(X_1, \dots, X_{k+l}) &= \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma \left[K(X_{\sigma 1}, \dots, X_{\sigma k}), L(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+l)}) \right] \\
&+ \frac{-1}{k!(l-1)!} \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma L \left([K(X_{\sigma 1}, \dots, X_{\sigma k}), X_{\sigma(k+1)}], X_{\sigma(k+2)}, \dots \right) \\
&+ \frac{(-1)^{kl}}{(k-1)!l!} \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma K \left([L(X_{\sigma 1}, \dots, X_{\sigma l}), X_{\sigma(l+1)}], X_{\sigma(l+2)}, \dots \right) \\
&+ \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!(l-1)!2!} \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma L \left(K([X_{\sigma 1}, X_{\sigma 2}], X_{\sigma 3}, \dots), X_{\sigma(k+2)}, \dots \right) \\
&+ \frac{(-1)^{(k-1)l}}{(k-1)!(l-1)!2!} \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma K \left(L([X_{\sigma 1}, X_{\sigma 2}], X_{\sigma 3}, \dots), X_{\sigma(l+2)}, \dots \right).
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Veta 6.5. Ak je všeobecná konexia Γ na ľubovoľnej fibrovanej variete (E, π, M) totožná s horizontálnou projekciou, ktorá je vektorovo-hodnotová 1-forma na E , potom sa krivosť tejto konexie Γ zhoduje s Frölicher-Nijenhuisovou zátvorkou $\frac{1}{2} [\Gamma, \Gamma]$. [23]

Frölicher-Nijenhuisova zátvorka vyjadruje prekážku v integrabilite v rôznych situáciách, v nasledujúcich troch vetách ju formulujeme a vysvetlíme bližšie túto situáciu:

1. **Veta 6.6.** Nech $J : TM \rightarrow TM$ je skoro komplexná štruktúra, potom J je komplexná štruktúra práve vtedy, keď Nijenhuisov tenzor $\frac{1}{2} [J, J]_{FN} = 0$.

Definícia 6.7. (Skoro komplexná štruktúra)

Nech M je varieta. Povieme, že tenzorové pole $J : TM \rightarrow TM$ na variete M má skoro komplexnú štruktúru, ak platí $J^2 = -\text{id}$.

Existencia komplexnej štruktúry indukuje existenciu skoro komplexnej štruktúry, to je prirodzené. Avšak otázkou je, či platí opačné tvrdenie. Opačne to už nie je také triviálne a neplatí to vo všeobecnosti. Na každej skoro komplexnej variete môžeme komplexnú štruktúru zaviesť lokálne na okolí nejakého bodu. Ak sa nám to podarí v každom bode variety, potom môžeme povedať, že máme komplexnú štruktúru, ktorá indukuje zobrazenie J . Môžeme formulovať Newlander-Nirenbergov teorém.

Teorém 6.8. (Newlander-Nirenbergov teorém)

Skoro komplexná štruktúra je integrabilná práve vtedy, keď Nijenhuisov tenzor je rovný nule. [24]

Môžeme teda definovať komplexnú štruktúru.

Definícia 6.9. (Komplexná štruktúra)

Existencia integrabilnej skoro komplexnej štruktúry je ekvivalenstná existencii komplexnej štruktúry.

2. **Veta 6.10.** Ak $P : TM \rightarrow TM$ je fibrovaná projekcia na tangenciálnych priestoroch fibrovaného priestoru $M \rightarrow Y$, potom $[P, P]_{FN}$ je jednou z možností definovania krivosti.

Odvolenie platnosti tohto tvrdenia uvidíme v príklade v kapitole 8, kde pomocou Frölicher-Nijenhuisovej zátvorky definujeme krivosť vzťahom (8.4).

3. **Veta 6.11.** Ak $A : TM \rightarrow TM$ je fibrovaná diagonalizovateľná projekcia, ktorej vlastné čísla sú reálne s konštantnou násobnosťou, potom vlastný priestor zobrazenia A je integrabilný práve vtedy, keď $[A, A]_{FN} = 0$.

6.2 Príklady

Príklad 6.12. Máme dané dve $(1, 1)$ -tenzorové polia K a L

$$K = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y^2 \\ -z & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & y \\ -x^2 & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 \end{bmatrix}.$$

Ďalej máme dané dve vektorové polia v $\mathbb{R}^3$ v súradniciach (x, y, z) ako

$$X = [z^2, 3y, -x]^T, \quad Y = [4x, y^2, -z]^T.$$

Naším cieľom je vypočítať Frölicher-Nijenhisovu zátvorku $[K, L]_{FN}(X, Y)$. Výpočet bude realizovaný pomocou vzťahu (6.2), kde si jednotlivé členy pre lepšiu prehľadnosť výpočtu označíme písmenami A-H

$$\begin{aligned} [K, L]_{FN}(X, Y) = & \overbrace{[KX, LY]}^A - \overbrace{[KY, LX]}^B - \overbrace{L[KX, Y]}^C + \overbrace{L[KY, X]}^D \\ & - \underbrace{K[LX, Y]}_E + \underbrace{K[LY, X]}_F + \underbrace{LK[X, Y]}_G + \underbrace{KL[X, Y]}_H. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Jedná sa vlastne o výpočet siedmych Lieových zátvoriek, ktoré budeme počítat podľa vzťahu (4.2). Najskôr si napočítame vektorové polia KX , KY , LX , LY a ich Jakobiány $D(KX)$, $D(KY)$, $D(LX)$, $D(LY)$ a tiež Jakobiány DX a DY .

$$KX = \begin{bmatrix} 3xy \\ -xy^2 \\ -z^3 \end{bmatrix}, \quad D(KX) = \begin{bmatrix} 3y & 3x & 0 \\ -y^2 & -2xy & 0 \\ 0 & 0 & -3z^2 \end{bmatrix}, \quad DX = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2z \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$KY = \begin{bmatrix} xy^2 \\ -y^2z \\ -4xz \end{bmatrix}, \quad D(KY) = \begin{bmatrix} y^2 & 2xy & 0 \\ 0 & -2yz & -y^2 \\ -4z & 0 & -4x \end{bmatrix}, \quad DY = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$LX = \begin{bmatrix} -xy \\ -x^2z^2 \\ -3yz \end{bmatrix}, \quad D(LX) = \begin{bmatrix} -y & -x & 0 \\ -2xz^2 & 0 & -2x^2z \\ 0 & -3z & -3y \end{bmatrix},$$

$$LY = \begin{bmatrix} -yz \\ -4x^3 \\ -y^2z \end{bmatrix}, \quad D(LY) = \begin{bmatrix} 0 & -z & -y \\ -12x^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2yz & -y^2 \end{bmatrix},$$

Teraz postupne napočítame členy A-H, výpočet spočíva iba v klasickom maticovom násobení, budeme uvádzať iba výsledky:

• **A:** $[KX, LY] = D(LY) KX - D(KX) LY$

$$[KX, LY] = \begin{bmatrix} 12x^4 + xy^2z + 3y^2z + yz^3 \\ -8x^4y - 36x^3y - y^3z \\ 2xy^3z - 2y^2z^3 \end{bmatrix},$$

• **B:** $[KY, LX] = D(LX) KY - D(KY) LX$

$$[KY, LX] = \begin{bmatrix} 2x^3yz^2 + xy^2z \\ 8x^3z^2 - 2x^2y^2z^2 - 2x^2yz^3 - 3y^3z \\ -4xyz + 3y^2z^2 \end{bmatrix},$$

• **C:** $L[KX, Y] = L(D(Y) KX - D(KX) Y)$

$$L[KX, Y] = \begin{bmatrix} -2yz^3 \\ 3x^3y^2 \\ -4xy^2z \end{bmatrix},$$

• **D:** $L[KY, X] = L(D(X) KY - D(KY) X)$

$$L[KY, X] = \begin{bmatrix} -4x^2y - xy^3 + 4yz^3 \\ 6x^3y^2 + 8x^3z^2 + x^2y^2z^2 \\ xy^2z - 3y^2z^2 \end{bmatrix},$$

• **E:** $K[LX, Y] = K(D(Y) LX - D(LX) Y)$

$$K[LX, Y] = \begin{bmatrix} -2x^3yz^2 + 6x^3z^2 \\ 3y^4z \\ -xy^2z \end{bmatrix},$$

- **F:** $K[LY, X] = K(D(X)LY - D(LY)X)$

$$K[LY, X] = \begin{bmatrix} -12x^4 + 12x^3z^2 \\ -xy^4 + 6y^4z + y^3z \\ xyz + 2y^2z^3 - 3yz^2 \end{bmatrix},$$

- **G:** $LK[X, Y] = LK(D(Y)X - D(X)Y)$

$$LK[X, Y] = \begin{bmatrix} -6yz^3 \\ -3x^3y^2 \\ -5xy^2z \end{bmatrix},$$

- **H:** $KL[X, Y] = KL(D(Y)X - D(X)Y)$

$$KL[X, Y] = \begin{bmatrix} -6x^3z^2 \\ -3y^4z \\ -5xyz \end{bmatrix}.$$

Teraz už stačí vypočítané členy len sčítať podľa vzťahu (6.4) a dostaneme výsledok. Frölicher-Nijenhuisova zátvorka $[K, L]_{FN}(X, Y)$ sa teda rovná

$$[K, L]_{FN}(X, Y) = \begin{bmatrix} -4x^2y - xy^3 + 3y^2z + yz^3 \\ -8x^4y - 36x^3y + 3x^2y^2z^2 + 2x^2yz^3 - xy^4 + 3y^3z \\ 2xy^3z + xy^2z - 6y^2z^2 - 3yz^2 \end{bmatrix}.$$

Príklad 6.13. Teraz si uvedieme príklad využitia Frölicher-Nijenhuisovej zátvorky pri zavedení torzie všeobecnej a klasickej lineárne konexie na fibrovanom priestore.

Budeme uvažovať tangenciálny fibrovaný priestor (TM, π, M) , ďalej Weilovu algebru združenú s funktorom T je $\mathbb{D} = \mathbb{R}[t]/\langle t^2 \rangle$, teda faktorový okruh polynómov v premennej t , kde $\langle t^2 \rangle$ označuje ideál generovaný polynómom t^2 . $\mathbb{D}$ nazývame algebra duálnych čísel. Prvky algebry duálnych čísel $\mathbb{D}$ majú tvar $a + bt$ a máme tu definované násobenie ako $(a + bt)(c + dt) = ac + (ad + bc)t$. Prvok $t \in \mathbb{D}$ definuje tzv. afinor $Q(t) = Q$ na každom TM . Afinorom rozumíme $Q: TM \rightarrow TM$ ľubovoľnú kanonickú tangenciálne-hodnotovú formu na M . Ak máme všeobecnú konexiu Γ na TM , potom Frölicher-Nijenhuisovu zátvorku $[\Gamma, Q]$ nazývame *torzia* τ konexie Γ .

Torziu τ môžeme vyjadriť pomocou zátvorkových operátorov tak, že pre všetky vektorové polia X, Y na variete M platí

$$2\tau(X, Y) = [\Gamma X, p^*Y] - [\Gamma Y, p^*X] - p^*([X, Y]),$$

kde $p^*: TM \rightarrow VTM$ je pull-back, kde VTM je vertikálny fibrovaný priestor. Toto vyjadrenie môžeme prepísať v zmysle kovariantnej derivácie, pretože kovariantná derivácia $\nabla_X p^*Y$

vzhľadom ku konexii Γ je totožná so zátvorkou $[\Gamma X, p^*Y]$. Vyjadrenie pomocou kovariantnej derivácie potom vyzerá nasledovne

$$2\tau(X, Y) = \nabla_X p^*Y - \nabla_Y p^*X - p^*([X, Y]). \quad (6.5)$$

Pre špeciálny prípad konexie, ktorým je klasická lineárna konexia, ktorej súradnice sú Christoffelove symboly môžeme zjednodušiť vyjadrenie použitím

$$\nabla_X p^*Y = p^*(\nabla_X Y), \quad (6.6)$$

kde $\nabla_X Y$ je tenzorové pole odpovedajúce zavedeniu kovariantnej derivácii v klasickom zmysle. Môžeme aplikovať vzťah (6.6) do vyjadrenia torzie pomocou kovariantnej derivácie (6.5)

$$2\tau(X, Y) = p^*(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y])$$

takto dostaneme torziu pre klasickú lineárnu konexiu. [23]

7 VARIÁČNÝ POČET

V tejto kapitole budeme formulovať teóriu variačného počtu na fibrovaných varietach. Rozdielom oproti klasickému variačnému počtu je práca s geometrickými objektmi, ktoré umožňujú bezsúradnicový prístup pri riešení úloh variačného počtu.

Začneme definíciou základných pojmov, ako je lagrangián, funkcia akcie a variácia. Potom odvodíme prvú variačnú formulu, zavedieme pojem extrémala a vysvetlíme čoho sa týka inverzný problém variačného počtu. V závere kapitoly sú uvedené aplikácie variačného počtu na základné fyzikálne problémy.

7.1 Lagrangián

Pojem Lagrangián je jedným z kľúčových pojmov variačného počtu.

Definícia 7.1. (Lagrangián)

Nech (Y, π, M) je fibrovaná varieta, kde $\dim M = n$ a $\dim Y = m + n$. *Lagrangiánom* r -tého rádu na fibrovanej variete rozumieme horizontálnu n -formu λ na r -tom jetovom predĺžení fibrovanej variety $J^r Y$. V súradniciach môžeme Lagrangián zapísať ako

$$\lambda = L(x^i, y^\sigma, y_{j_1}^\sigma, \dots, y_{j_1, \dots, j_r}^\sigma) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = L \omega_0. \quad (7.1)$$

Funkcia L sa nazýva *Lagrangeova funkcia*. Forma $\omega_0 = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ sa nazýva *objemový element*. [7]

Definícia 7.2. (Funkcia akcie)

Nech Ω je kúsok variety M a $\Gamma_\Omega(\pi)$ je množina všetkých rezov fibrovanej variety (Y, π, M) . Potom pre každý rez $\gamma \in \Gamma_\Omega(\pi)$ je pull-back $J^r \gamma^* \lambda$ diferenciálnou n -formou na okolí Γ . Integrovaním tejto n -formy na Γ dostaneme zobrazenie $S : \Gamma_\Omega(\pi) \rightarrow \mathbb{R}$

$$S : \gamma \rightarrow \int_{\Omega} J^r \gamma^* \lambda, \quad (7.2)$$

ktoré sa nazýva *funkcia akcie Lagrangiánu* λ na Ω . [25]

Definícia 7.3. (Lagrangeova štruktúra)

Dvojicu (π, λ) nazveme *Lagrangeova štruktúra*. [16]

Poznámka. Podobne ako v klasickom variačnom počte, aj na varietach riešime minimalizačný problém. V tomto prípade však minimalizujeme namiesto funkcionálu funkciu akcie Lagrangiánu. Za účelom hľadania extrémov používame prvú a druhú deriváciu, avšak priestor, na ktorom sa nachádzame, nemá Euklidovskú štruktúru a preto tu nepoznáme derivácie. Namiesto klasických derivácií preto budeme používať tzv. variácie, z čoho je odvodený aj názov tejto disciplíny - variačný počet.

Definícia 7.4. (Prvá variácia)

Zobrazenie $\delta S : \Gamma_\Omega(\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ definované ako

$$\delta S : \gamma \rightarrow \int_{\Omega} J^r \gamma^* \partial_{J^r \xi} \lambda, \quad (7.3)$$

kde $\partial_{J^r \xi}$ je Lieova derivácia v smere π -projektibilného vektorového poľa ξ , sa nazýva *prvá variácia* funkcie akcie Lagrangiánu λ . [16]

Poznámka. (Druhá a vyššie variácie) Na funkciu δS sa môžeme pozeráť tiež ako na funkciu akcie Lagrangiánu $\partial_{J^r \xi} \lambda$. V takom prípade pre ďalšie vektorové pole η môžeme určiť prvú variáciu funkcie akcie δS ako zobrazenie

$$\gamma \rightarrow \int_{\Omega} J^r \gamma^* \partial_{J^r \eta} \partial_{J^r \xi} \lambda. \quad (7.4)$$

Toto zobrazenie sa nazýva *druhá variácia* funkcie akcie S . Podobne môžeme definovať aj variácie vyšších rádov niekoľko násobnou aplikáciou Lieovej derivácie vzhľadom k rôznym vektorovým poliam. [25]

7.2 Prvá variačná formula

Prvá variácia funkcie akcie nás privádza k jednej z najdôležitejších rovníc variačného počtu a to k *prvej variačnej formuli*. Tú dostaneme rozložením integrálu $\int_{\Omega} J^r \gamma^* \partial_{J^r \xi} \lambda$ na súčet dvoch členov. Jeden člen reprezentuje Euler-Lagrangeove rovnice a druhý člen reprezentuje zachovávané veličiny. Integrál môžeme rozložiť nezávisle na súradniciach. Aplikovaním Cartanovej formule dostávame

$$\int_{\Omega} J^1 \gamma^* \partial_{J^1 \xi} \lambda = \int_{\Omega} J^1 \gamma^* i_{J^1 \xi} d\lambda + \int_{\Omega} J^1 \gamma^* di_{J^1 \xi} \lambda = \int_{\Omega} J^1 \gamma^* i_{J^1 \xi} d\lambda + \int_{\Omega} dJ^1 \gamma^* i_{J^1 \xi} \lambda,$$

kde však prvý integrál závisí na použitých súradniciach. [25]

Teorém 7.5. *Nech $\lambda = L \omega_0$ je Lagrangián na $J^1 Y$. Potom existuje kontaktná forma v na $J^1 Y$ taká, že pre každé γ je výraz $J^1 \gamma^* \partial_{J^1 \xi} (\lambda + v)$ nezávislý na deriváciách komponent vektorového poľa ξ . Platí*

$$v = \frac{\partial L}{\partial y_j^\sigma} \omega^\sigma \wedge \omega_j + \mu, \quad (7.5)$$

$$\text{kde } \omega^\sigma = dy^\sigma - y_j^\sigma dx^j$$

$$\omega_j = i_{\partial/\partial x^j} \omega_0,$$

μ je ľubovoľná forma kontaktnosti aspoň 2. [7]

Forma (7.5) sa nazýva *Lepageov ekvivalent Lagrangiánu* λ . Funkcia akcie Lagrangiánu λ a $\lambda + v$ sú rovnaké, rovnako aj variácie funkcií akcií. Preto pri odvodení invariantnej prvej

variačnej formule môžeme použiť formu $\lambda + \nu$, tiež môžeme použiť jej špeciálny tvar, Poincaré-Cartanovu formu θ_λ . *Poincaré-Cartanova forma* je forma $\theta_\lambda = \lambda + \frac{\partial L}{\partial y_j^\sigma} \omega^\sigma \wedge \omega_j$.

Integrálny tvar prvej variačnej formule je

$$\boxed{\int_{\Omega} J^1 \gamma^* \partial_{J^1 \xi} \lambda = \int_{\Omega} J^1 \gamma^* i_{J^1 \xi} d\theta_\lambda + \int_{\partial \Omega} J^1 \gamma^* i_{J^1 \xi} \theta_\lambda} \quad (7.6)$$

7.3 Extremály

Definícia 7.6. (Extremála)

Rez $\gamma \in \Gamma_\Omega(\pi)$ definovaný na otvorenej množine $U \subset X$ nazveme *extremála*, ak pre každé π -projektabilné vektorové pole ξ na Y a každú $\Omega \subset U$ platí: [16]

$$\delta S[\gamma] = 0. \quad (7.7)$$

Poznámka. Extremály popisuje tiež nasledujúca rovnica, ktorá je dôsledkom definície a prvej variačnej formule:

$$\int_{\Omega} J^1 \gamma^* i_{J^1 \xi} d\theta_\lambda = 0, \quad (7.8)$$

pre každý π -projektabilné vektorové pole ξ na Y . [16]

Teorém 7.7. *Nech λ je Lagrangián na $J^1 Y$, potom sú tvrdenia ekvivalentné: [7]*

1. Rez $\gamma: M \rightarrow Y$ je extremálou Lagrangiánu λ .
2. Pre každé projektibilné vektorové pole ξ na Y platí $\int_{\Omega} J^1 \gamma^* i_{J^1 \xi} d\theta_\lambda = 0$.
3. Pre každé vertikálne vektorové pole ξ na Y platí $\int_{\Omega} J^1 \gamma^* i_{J^1 \xi} d\theta_\lambda = 0$.
4. Zobrazenie γ spĺňa systém diferenciálnych rovníc - Euler-Lagrangeove rovnice

$$\frac{\partial L}{\partial y^\sigma} - d_j \frac{\partial L}{\partial y_j^\sigma} = 0, \quad 1 \leq \sigma \leq m, \quad (7.9)$$

kde d_j je operátor j -tej totálnej derivácie

$$d_j = \frac{\partial}{\partial x^j} + y_j^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu} + y_{kj}^\nu \frac{\partial}{\partial y_k^\nu}. \quad (7.10)$$

7.4 Inverzný problém

Pohybové rovnice fyzikálneho systému s m stupňami voľnosti sú väčšinou popísané sústavou m diferenciálnych rovníc druhého stupňa $E_\sigma \circ J^2 \gamma = 0$, $1 \leq \sigma \leq m$, kde E_σ sú funkcie na predĺžení fibrovanej variety $J^2 Y$ afinné v druhých deriváciách.

Inverzný problém variačného počtu je riešenie opačnej otázky, a to, či ku každej diferenciálnej rovnici druhého stupňa existuje príslušný variačný funkcionál, t.j. či existuje lagrangián λ taký, že existuje forma $E = E_\sigma \omega^\sigma \wedge \omega_0$, ktorá je Euler-Lagrangeovou formou.

Teraz uvedieme niekoľko tvrdení, ktoré nám pomôžu určiť, kedy je forma E variačná.

Teorém 7.8. *Forma $E = E_\sigma \omega^\sigma \wedge \omega_0, 1 \leq \sigma \leq m$ na $J^s Y$ je variačná práve vtedy, keď existuje jej uzavretý Lepageov ekvivalent. [16]*

Teorém 7.9. *Nech $E = E_\sigma \omega^\sigma \wedge \omega_0$ je forma na $J^s Y$. E je variačná práve vtedy, keď ku každému bodu z z jej definičného oboru existuje okolie a mapa (V, ψ) na Y taká, že toto okolie je podmnožinou $\pi_{s,0}^{-1}$ a platia tzv. Helmholtzove³ podmienky, pre $0 \leq l \leq s$: [16]*

$$\frac{\partial E_\sigma}{\partial q_l^\sigma} - (-1)^l \frac{\partial E_v}{\partial q_l^\sigma} - \sum_{j=l+1}^s (-1)^j \binom{j}{l} \frac{d^{j-l}}{dt^{j-l}} \left(\frac{\partial E_v}{\partial q_j^\sigma} \right) = 0 \quad (7.11)$$

v mechanike,

$$\frac{\partial E_\sigma}{\partial y_{p_1 \dots p_l}^\sigma} - (-1)^l \frac{\partial E_v}{\partial y_{p_1 \dots p_l}^\sigma} - \sum_{j=l+1}^s (-1)^j \binom{j}{l} d_{p_{l+1}} \dots d_{p_j} \left(\frac{\partial E_v}{\partial y_{p_1 \dots p_l p_{l+1} \dots p_j}^\sigma} \right) = 0 \quad (7.12)$$

v teórii polí.

Teorém 7.10. *Nech $E = E_\sigma \omega^\sigma \wedge \omega_0$ je forma na $J^s Y$. E je lokálne variačná definovaná na otvorenej podmnožine W priestoru $J^s Y$ a existuje zobrazenie $\chi : [0, 1] \times W \rightarrow W$ definované*

$$\chi(u, (x^i, y^\mu, y_{p_1}^\mu, \dots, y_{p_1 \dots p_s}^\mu)) = (x^i, u y^\mu, u y_{p_1}^\mu, \dots, u y_{p_1 \dots p_s}^\mu).$$

Potom povieme, že E je Euler-Lagrangeova forma lagrangiánu s -tého rádu, tzv. Vainberg-Tontiho lagrangiánu [16]

$$\Lambda = y^\sigma \left(\int_0^1 (E_\sigma \circ \chi) du \right) \omega_0. \quad (7.13)$$

7.5 Aplikácie variačného počtu

Pomocou variačného počtu bolo odvodených mnoho fyzikálnych zákonov a pohybových rovníc. Sú teda riešením Euler-Lagrangeových rovníc správne formulovanej úlohy variačného počtu. Predstavujú v istom zmysle najlepšiu trajektóriu fyzikálneho systému, ktorú reprezentujú stacionárne body príslušného funkcionálu.

Medzi známe príklady využitia variačného počtu patrí odvodenie *Snellovho zákona*, ktorý popisuje lom svetla na hranici medzi dvomi prostrediami, ktoré majú rôzne vlastnosti. Z pohľadu variačného počtu môžeme tento problém popísať ako problém hľadania trajektórie paprsku svetla, ktorý prechádza rovinných rozhraním, za predpokladu minimalizácie času.

³Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894) - nemecký fyziológ, fyzik a matematik

Ďalšou známou aplikáciou je *úloha o brachistochrone*, je to problém hľadania tvaru trajektórie medzi dvomi danými bodmi, po ktorej sa hmotný bod najrýchlejšie dostane z pokoja v bode, ktorý sa nachádza vyššie do nižšieho bodu, bez akejkolvek inej ako gravitačnej sily, vplyv trenia je tiež zanedbaný. Opäť ide o úlohu, v ktorej sa minimalizuje čas.

V tejto časti uvedieme niekoľko podrobnejších aplikácií inverzného problému variačného počtu vo fyzike - konkrétne na vlnovom a Maxwellových rovniciach. Táto podkapitola je inšpirovaná [16].

7.5.1 Vlnové rovnice

S vlnovými rovnicami sa stretávame v rôznych oblastiach fyziky - v elektrodynamike je to vlnenie svetla, v mechanike sú to akustické vlny, ale tiež vlny na hladine kvapaliny. Budeme uvažovať vlnovú rovnicu funkcie $y(x, t)$, kde t je čas a x je priestorová súradnica, v ktorej smere sa šíri vlnenie

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (7.14)$$

kde v je konštantná fázová rýchlosť, jej hodnota závisí na fyzikálnom probléme, ktorý riešime. V mechanike volíme $v = \sqrt{\frac{E}{s}}$, kde E je Youngov modul⁴ a s je hustota materiálu. Pre svetelné vlny vo vákuu platí $v = c$, kde c je rýchlosť svetla vo vákuu. Budeme uvažovať jednotky, v ktorých $c = 1$.

Prejdeme do jazyka diferenciálnych foriem. Ľavú stranu rovnice (7.14) môžeme vyjadriť ako $E = E_1 \omega^1 \wedge dt \wedge dx$ na $J^2 Y$, kde máme fibrovaný priestor $(Y, \pi, X) = (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \pi, \mathbb{R})$. Na Y máme mapu (V, ψ) , kde $\psi = (t, x, y)$ a združená mapa na X je $(\pi(V), \varphi)$, kde $\varphi = (t, x)$. Ďalej máme fibrované mapy, mapu $(\pi_{1,0} x^{-1}(V), \psi_1)$, kde $\psi_1 = (t, x, y, y_t, y_x)$ na $J^1 Y$ a mapu $(\pi_{2,0} x^{-1}(V), \psi_2)$, kde $\psi_2 = (t, x, y, y_t, y_x, y_{tt}, y_{tx}, y_{xx})$ na $J^2 Y$. Potom môžeme formu odpovedajúcu vlnovej rovnici zapísať ako

$$E = E_1 \omega^1 \wedge dt \wedge dx = (y_{xx} - y_{tt}) \omega^1 \wedge dt \wedge dx, \quad \omega^1 = dy - y_t dt - y_x dx.$$

Teraz overíme, či je takto definovaná forma variačná, teda overíme platnosť Hemholtzových variačných podmienok (7.12)

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_\sigma}{\partial y^v} - \frac{\partial E_v}{\partial y^\sigma} + d_i \frac{\partial E_v}{\partial y_i^\sigma} - d_i d_j \frac{\partial E_v}{\partial y_{ij}^\sigma} &= 0, \\ \frac{\partial E_\sigma}{\partial y_i^v} + \frac{\partial E_v}{\partial y_i^\sigma} - 2 d_j \frac{\partial E_v}{\partial y_{ij}^\sigma} &= 0, \\ \frac{\partial E_\sigma}{\partial y_{ij}^v} - \frac{\partial E_v}{\partial y_{ij}^\sigma} &= 0. \end{aligned}$$

⁴Youngov modul je materiálová konštanta, ktorá charakterizuje mieru deformácie materiálu pri zaťažovaní. Vypočíta sa ako pomer napätia a deformácie ním spôsobenej.

Pre našu formu E je $1 \leq i, j \leq 2, \sigma = \nu = 1$. Tieto podmienky sú pre našu formu splnené triviálne. Ďalší krok je nájdenie Vainberg-Tontiho lagrangiánu Λ , ktorý dostaneme jednoduchou integráciou formy E

$$\Lambda = \left[y \int_0^1 (u y_{xx} - u y_{tt}) du \right] dt \wedge dx = \frac{y}{2} (y_{xx} - y_{tt}) dt \wedge dx.$$

Keďže tento lagrangián je druhého rádu, po odčítaní triviálneho lagrangiánu

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} (d_x(y y_x) - d_t(y y_t))$$

dostaneme lagrangián prvého rádu

$$\lambda = \frac{1}{2} (y_t^2 - y_x^2) dt \wedge dx. \quad (7.15)$$

Z lagrangiánu nám plyní tvar Lagrangeovej funkcie $L(t, x, y, y_t, y_x) = \frac{1}{2} (y_t^2 - y_x^2)$, ktorej interpretáciou je rozdiel kinetickej a potenciálnej energie daného fyzikálneho problému, napr. struny.

7.5.2 Maxwellove rovnice

Maxwellove rovnice predstavujú pohybové rovnice v elektrodynamike, ich znenie je

$$\epsilon_0 \operatorname{div} E = \rho, \quad \operatorname{curl} B = \mu_0 j + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}, \quad (7.16)$$

$$\operatorname{curl} E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \operatorname{div} B = 0, \quad (7.17)$$

kde E je intenzita elektrického poľa, B je magnetická indukcia, ρ je hustota voľného náboja, j je hustota prúdu, μ_0 je permeabilita prostredia a ϵ_0 je permitivita prostredia. Máme tiež k dispozícii rovnice

$$B = \operatorname{curl} A, \quad E = -\operatorname{grad} U - \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (7.18)$$

kde A je vektorový potenciál a U je skalárny potenciál. Teraz chceme ukázať, že rovnice (7.18) plynú z variačného princípu.

Najskôr si zavedieme fibrovanú varietu $(Y, \pi, X) = (\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4, \pi, \mathbb{R}^4)$, kde báza X je časopriestor, na ktorom máme súradnice $(x^0, x^1, x^2, x^3) \in X$, kde prvá súradnica x^0 odpovedá času t . Pre metrický tenzor platí $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$. Na fibroch sú súradnice (A_0, A_1, A_2, A_3) , ktorých zložky sú $A_i = g_{ij} A^j$, $A^i = g^{ij} A_j$, kde (g_{ij}) je inverzná matica k (g^{ij}) . Rovnice (7.16) môžeme v značení na zavedenej variete zapísať

$$-\frac{1}{c} \left(j^i + \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} \right) = 0, \quad 0 \leq i, j \leq 3, \quad (7.19)$$

kde (F_{ij}) a (F^{ij}) sú kovariantné a kontravariantné zložky tenzoru elektromagnetického poľa F , pre ktoré platí $F_{ij} = g_{ik}g_{jl}F^{kl}$ a tiež $F_{ij} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}$. Na predĺženom fibrovanom priestore (J^1Y, π, X) máme súradnice $(x^i, A_i, A_{i,j})$, $0 \leq i, j \leq 3$, kde $A_{i,j} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j}$. Kovariantný tenzor (F_{ij}) a kontravariantný tenzor (F^{ij}) sú

$$(F_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & E^1/c & E^2/c & E^3/c \\ -E^1/c & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E^2/c & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E^3/c & B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (F^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -E^1/c & -E^2/c & -E^3/c \\ E^1/c & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2/c & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3/c & B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z toho vidíme, že rovnica (7.19) pre $i = 0$ dáva $\epsilon_0 \operatorname{div} E = \rho$ a pre $i = 1, 2, 3$ dostávame rovnicu $\operatorname{curl} B = \mu_0 j + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ v prípade, že $c^{-2} = \epsilon_0 \mu_0$. Teraz môžeme sústavu pohybových rovníc (7.19) prepísať pomocou diferenciálnej formy E , ktorej zložky sú

$$E^i = -\frac{1}{2} \left[g^{ik} j_k + \frac{1}{\mu_0} g^{ij} g^{kl} (A_{l,jk} - A_{j,lk}) \right]. \quad (7.20)$$

Teraz môžeme overiť platnosť Helmholtzových podmienok (7.12). Tie sú opäť splnené. Môžeme prejsť k Vainberg-Tontiho lagrangiánu

$$\begin{aligned} \Lambda &= -\frac{1}{c} A_i \int_0^1 \left[\left(g^{il} j_l + \frac{1}{\mu_0} g^{ij} g^{kl} (A_{l,jk} - A_{j,lk}) \right) u \right] du \\ &= -\frac{1}{c} \left[A_i j^i + \frac{1}{2\mu_0} g^{ij} g^{kl} A_i (A_{l,jk} - A_{j,lk}) \right]. \end{aligned}$$

Odčítaním triviálneho lagrangiánu

$$\lambda_0 = d_k [A_i (A_{l,j} - A_{j,l})] = A_{i,k} (A_{l,j} - A_{j,l}) + A_i (A_{l,jk} - A_{j,lk}),$$

dostaneme lagrangián prvého rádu

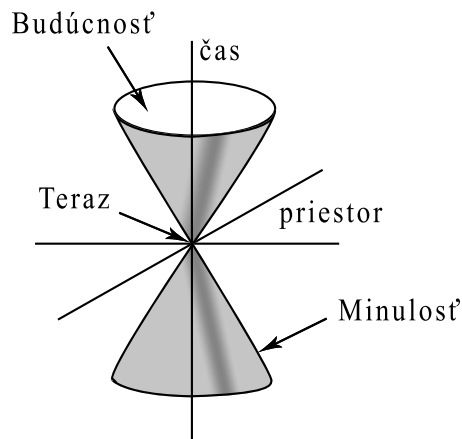
$$\lambda = -\frac{1}{c} \left(j^i A_i + \frac{1}{4\mu_0} F_{ik} F^{ik} \right). \quad (7.21)$$

8 MAXWELLOVE ROVNICE

Pojem konexia na fibrovanom priestore sme zaviedli na grupovej štruktúre. Toto zavedenie však niekedy zakrýva geometrický význam tohto konceptu, a to najmä v prípadoch, ktoré nie sú charakteristické žiadnou symetriou. V tejto kapitole sa budeme zaoberať konexiou, ktorá nie je zavedená nad grupovou štruktúrou. Táto konexia je potom zavedená v zmysle $(1, 1)$ -tenzorového poľa a tenzor krivosti je interpretovaný na základe Fröhlicher-Nijenhuisovej zátvorky. Táto kapitola bude inšpirovaná [26], [11].

8.1 Pozorovateľ na Lorentzovej variete

Nech M je Lorentzov priestoročas, teda 4-rozmerná (zakrivená) pseudo-Riemannova varietá s metrickým tenzorom g so signatúrou $(+ - - -)$. Priestoročas⁵ si môžeme predstaviť ako svetelný kužel, zobrazený na obrázku 10. Priestoročas tvorí základný rámec pre možnosti realizácie fyzikálnych zákonov nezávisle od vzáľajnej sústavy, zjednocuje priestor a čas, ktoré umožňuje vnímať nezávisle.



Obr. 10: Priestoročas - svetelný kužel, Zdroj: [17]

Pozorovateľom rozumieme kongruenciu času-podobných kriviek na M . (Individuálny pozorovateľ je reprezentovaný jednou času-podobnou krivkou v M .) Pozorovateľ môže byť tiež reprezentovaný ako normalizované do budúcnosti orientované vektorové pole

$$T \in \mathfrak{X}(M), \quad |T|^2 = g(T, T) = 1.$$

Pole smerov $\mathcal{T} := \text{span} \{T\}$ budeme nazývať *časová distribúcia* na M . Definujeme 1-formu $\tau = g(T, \cdot) \in \Lambda^1 M$. Distribúciu $\mathcal{S} := \ker \tau$ budeme nazývať *priestorová distribúcia* pozorova-

⁵Priestoročas zaviedol Herman Minkowski(1864-1909) - nemecko-poľský matematik, venoval sa teórii čísel a klasickej geometrii

teľa T . Existujú dva spôsoby výberu pozorovateľa, prvý obnáša stanovenie dvojice distribúcií $\mathcal{T} \in D^1M$ a $\mathcal{S} \in D^3M$, ktoré sú vzájomne ortogonálne a v každom bode v M tvoria lineárny obal tangenciálneho priestoru, teda platí

$$\mathcal{T} \perp \mathcal{S} \quad \text{a} \quad \mathcal{T} \oplus \mathcal{S} = TM.$$

Druhým spôsobom je zafixovanie dvojice $\{T, \tau\}$, kde

$$\begin{aligned} \text{TIME} &= \mathcal{T} = \text{span } T \\ \text{SPACE} &= \mathcal{S} = \ker \tau. \end{aligned}$$

Ak je priestorová distribúcia $\mathcal{S}$ integrabilná (pozri definícia 2.40), pozorovateľ sa nazýva *holonómny*, v opačnom prípade sa nazýva *neholonómny*. Poznamenajme, že podľa Frobenio-vho teorému (pozri teorém 2.42), priestorová distribúcia je integrabilná, ak $\tau \wedge d\tau = 0$. V tejto kapitole sa budeme ďalej zaoberať všeobecným pozorovateľom.

Pomocou dvojice (T, τ) môžeme konštruovať $(1, 1)$ -tenzorové pole v priestoročase

$$\kappa = \tau \otimes T. \quad (8.1)$$

Tvrdenie 8.1. *Pozorovateľovo $(1, 1)$ -tenzorové pole splňa*

$$(i) \quad [T, \kappa]_{FN} = (\mathcal{L}_T \tau) \otimes T,$$

$$(ii) \quad [\kappa, \kappa]_{FN} = -2i_T(d\tau \wedge \tau) \otimes T,$$

kde zátvorky predstavujú Fröhlicher-Nijenhuisovu zátvorku.

Dôkaz.

$$(i) \quad [T, \kappa]_{FN} = \mathcal{L}_T \kappa = \mathcal{L}_T(\tau \otimes T) = (\mathcal{L}_T \tau) \otimes T + \underbrace{\tau(\mathcal{L}_T T)}_{=0} = (\mathcal{L}_T \tau) \otimes T$$

$$(ii) \quad [\kappa, \kappa]_{FN} = [\tau \otimes T, \tau \otimes T]_{FN} = \underbrace{\tau \wedge \tau \otimes [T, T]_{FN}}_{a)} + \underbrace{\tau \wedge \mathcal{L}_T \tau \otimes T}_{b)} - \underbrace{\mathcal{L}_T \tau \wedge \tau \otimes T}_{c)} - \underbrace{d\tau \wedge i_T \tau \otimes T}_{d)} - \underbrace{i_T \tau \wedge d\tau \otimes T}_{e)}$$

$$a) = 0$$

$d)$ a $e)$: vyrušia sa vďaka antisymetrii $\wedge$

$$b) \text{ a } c) = -2\mathcal{L}_T \tau \wedge \tau \otimes T$$

dostávame

$$[\kappa, \kappa]_{FN} = -2\mathcal{L}_T \tau \wedge \tau \otimes T = -2(i_T d\tau \wedge \tau + di_T \tau \wedge \tau) \otimes T = -2i_T(d\tau \wedge \tau) \otimes T$$

□

Teraz môžeme Lorentzov priestoročas s pozorovateľom interpretovať ako fibrovaný priestor s konexiou. Zavedme reláciu ekvivalencie $\sim$ tak, že prvky sú ekvivalentné práve vtedy, keď patria k rovnakej integrálnej krivke z $\mathcal{T}$. Môžeme definovať *zdanlivý priestor* pozorovateľa T ako 3-rozmernú varietu tried ekvivalencie $\sim$, to znamená, $S = M / \sim$. Na priestoročas M sa teda môžeme pozeráť ako na fibrovaný priestor nad S s prirodzenou projekciou $\pi : M \rightarrow S$, t.j. (M, π, S) , vybavený konexiou danou „horizontálnou“ distribúciou $\mathcal{S}$. Konexia splýva s $\kappa = \tau \otimes T$ definovanou rovnicou (8.1). Je zrejmé, že platí $\kappa(\mathcal{S}) = 0$ a $\kappa(\mathcal{T}) = T$.

Fibrovaný fibrovaný priestor (M, π, S) je hlavný fibrovaný priestor. Grupa $\{\exp tT\}$ definuje akciu cez posun pozdĺž integrálnych kriviek z T . Hoci táto akcia grupy nie je vo všeobecnosti kongruentná s horizontálnou distribúciou, to znamená κ nie je hlavná konexia. Odchýlka od toho, aby bola κ hlavnou konexiou môže byť meraná Lieovou deriváciou κ pozdĺž T . Túto odchýlku nazveme *skrútenie* pozorovateľa

$$\text{Torq}(\kappa) = (\mathcal{L}_T \tau) \otimes T. \quad (8.2)$$

Ľubovoľnú priestoru-podobnú 3-rozmernú varietu na M môžeme vnímať ako rez $\Psi : S \rightarrow M$. Potom kovariantná derivácia $\nabla \Psi$ meria „nekompatibilitu“ Ψ ako kandidáta na priestor vzhľadom k pozorovateľovi T . Všimnime si, že $\nabla_v \Psi = g(T, \Psi_* v)$.

Skrútenie a krivosť konexie κ môžeme definovať pomocou Fröhlicher-Nijenhuisovej zátvor-ky takto

$$\text{Torq}(\kappa) = [T, \kappa]_{FN} = (\mathcal{L}_T \tau) \otimes T, \quad (8.3)$$

$$\text{Curv}(\kappa) = \frac{1}{2}[\kappa, \kappa]_{FN} = -i_T(d\tau \wedge \tau) \otimes T. \quad (8.4)$$

V ďalšom texte budú tieto definície skrútenia a krivosti konexie κ analyzované podrobnejšie a nakoniec sa pokúsime pomocou nich formulovať Maxwelllove rovnice.

8.2 Všeobecná konexia na fibrovanom priestore

V tejto časti bude rozobratý koncept všeobecnej konexie na fibrovanom priestore bez grupovej štruktúry a formálne zavedieme a rozanalyzujeme krivosť a skrútenie konexie.

8.2.1 Konexia

Nech M je n -rozmerná varietu. Uvažujme fibrovaný priestor $\pi : E \rightarrow M$ nad M s $\dim E = n + N$. Vo všeobecnosti konexiou na tomto fibrovanom priestore rozumieme ľubovoľnú n -rozmernú distribúciu $H \subset D^n E$, danú $H : p \rightarrow H_p$, podpriestorov komplementárnych k fibrom. Preto konexia určuje dekompozíciu tangenciálnych priestorov pre každý bod p

$$T_p E \cong H_p \oplus V_p,$$

kde $V \in D^N E$ je vertikálna distribúcia definovaná $V_p = \{v \in T_p E \mid \pi_* v = 0\}$. Z dekompozície plynie, že každý tangenciálny vektor $X \in TE$ môžeme jednoznačne rozložiť na jeho vertikálnu a horizontálnu zložku $X = X_V + X_H$. Potom konexia H sa nazýva horizontálna distribúcia.

Tento rozklad môžeme zaviesť aj pomocou endomorfizmu na E , teda pomocou lineárneho zobrazenia $\kappa : T_p E \rightarrow T_p E$ splňujúceho podmienky

$$(i) \quad \kappa \circ \kappa = \kappa,$$

$$(ii) \quad \kappa|_H = 0 \quad \text{a} \quad \kappa|_V = id.$$

Aplikáciou zobrazenia κ na tangenciálny vektor X teda dostávame jeho vertikálnu zložku, teda $\kappa(X) = X_V$. Operátor κ je $(1, 1)$ -tenzorové pole.

8.2.2 Liftovanie vektorov

Horizontálna distribúcia H definuje liftovanie vektorov z bázej variety M na totálny priestor E . Pre ľubovoľný bod $p \in E$ a $\pi(p) \in M$ môžeme pre ľubovoľné $v \in TM$ definovať lineárne zobrazenie $\tilde{\cdot} : T_{\pi(p)} M \rightarrow T_p E$ také, že

$$(i) \quad \tilde{v} \in H,$$

$$(ii) \quad \pi_*(\tilde{v}) = v.$$

Toto zobrazenie môžeme rozšíriť na vektorové polia na M , ktoré sú liftované na horizontálne vektorové polia na E . Definície môžeme zhrnúť ako postupnosť zobrazení

$$0 \rightarrow T_{\pi(p)} M \xrightarrow{\tilde{\cdot}} T_p E \xrightarrow{\kappa} T_p E \xrightarrow{\pi_*} T_{\pi(p)} M \rightarrow 0. \quad (8.5)$$

Spomínané rozšírenie operácií $\tilde{\cdot}$ a κ na vektorové polia je

$$(i) \quad \tilde{\cdot} : \mathfrak{X} M \rightarrow \mathfrak{X}_H E,$$

$$(ii) \quad \kappa : \mathfrak{X} E \rightarrow \mathfrak{X}_V E,$$

kde $\mathfrak{X}_H$ značí horizontálne vektorové pole a $\mathfrak{X}_V$ vertikálne vektorové pole.

8.2.3 Kovariantná derivácia rezu

Horizontálna distribúcia jednoznačne definuje kovariantnú deriváciu rezu $\Psi : M \rightarrow E$ pozdĺž vektoru $v \in T_{\pi(p)} M$ ako vertikálny vektor

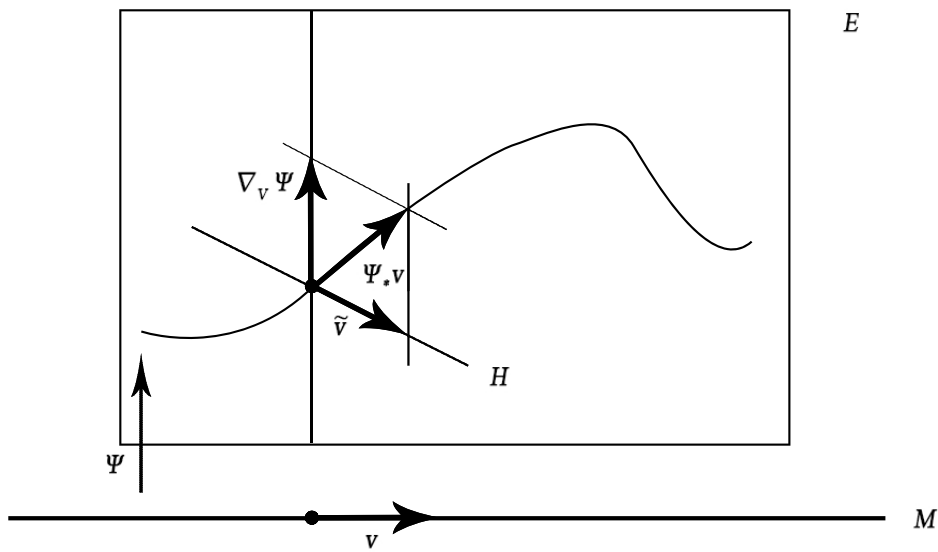
$$\nabla_v \Psi = \kappa(\Psi_*(v)) \in V_{\Psi(\pi(p))} \quad (8.6)$$

v bode $\Psi(\pi(p)) \in E$. Ekvivalentne, $\nabla_v \Psi = \Psi_* v - \tilde{v}$, kde $\tilde{v}$ je liftovaný vektor k bodom rezu $\Psi(M)$. Vo všeobecnosti, kovariantná derivácia rezu Ψ je definovaná ako lineárne zobrazenie $\Psi : T_{\pi(p)}M \rightarrow T_{\Psi(\pi(p))}E$ definované vzťahom

$$\nabla \Psi = \kappa \circ \Psi_*. \quad (8.7)$$

Opäť, ako pri predchádzajúcich dvoch operáciách, aj tu môžeme prejsť k rozšíreniu kovariantnej derivácie na vektorové polia. Dostaneme lineárne zobrazenie z vektorových polí na M na vertikálne vektorové polia pozdĺž obrazu $\Psi(M)$ rezu.

$$\nabla \Psi = \mathfrak{X}M \rightarrow \mathfrak{X}E|_{\Psi(\pi(p))} \quad (8.8)$$



Obr. 11: Kovariantná derivácia, Zdroj: [26]

8.2.4 Krivosť

Pripomeňme ako sme definovali krivosť (8.4) a zaveďme ju formálnejšie.

Definícia 8.2. Ak κ je $(1,1)$ -tenzor konexie, potom **krivosťou** rozumieme $(1,2)$ -tenzor definovaný

$$\Omega = \frac{1}{2}[\kappa, \kappa]_{FN}.$$

Je zrejmé, že Ω je vertikálna forma, t.j. $i_v \Omega = 0$ pre ľubovoľné v vertikálne. Ω je teda zobrazenie $\Omega : \mathfrak{X}E \times \mathfrak{X}E \rightarrow \mathfrak{X}E$.

Z toho, že vektorové formy tvoria gradovanú Lieovu algebru vyplýva Bianchiho identita

$$[\Omega, \kappa]_{FN} = 0. \quad (8.9)$$

Čo môžeme rozpísať ako $[\Omega, \kappa]_{FN} = [[\kappa, \kappa], \kappa]_{FN} = 0$ vďaka Jakobiho identite (pozri veta 4.2).

8.2.5 Hlavný fibrovaný priestor a skrútenie

Nech $\pi : E \rightarrow M$ je hlavný fibrovaný priestor, to znamená nech grupa G pôsobí voľne a tranzitívne na fibroch na E . Lieova algebra L grupy G je reprezentovaná vertikálnymi vektorovými poľami

$$\rho : L \rightarrow \mathfrak{X}_V E \quad (8.10)$$

indukovanými difeomorfizmami akcie grupy. Konexia κ je hlavná, ak je invariantná voči akcii grupy. Uvažujme všeobecnú konexiu na hlavnom fibrovanom priestore, ktorá nutne nemusí súhlasiť s akciou grupy.

Definícia 8.3. Skrútením všeobecnej konexie na hlavnom fibrovanom bandli rozumieme tenzor

$$\text{Torq}(\kappa) \in L^* \otimes T^{(1,1)}. \quad (8.11)$$

Dosadením $a \in L$ do 8.11 dostaneme

$$\text{Torq}(\kappa)(a) = \mathcal{L}_{\rho(a)} \kappa. \quad (8.12)$$

Z definície vidíme, že skrútenie je lineárne v a a meria odchýlku konexie od toho, aby bola hlavnou konexiou. Ak $\{e_p\}$ je bázou v L a $\{\varepsilon^p\}$ je bázou v duálnom priestore L^* , potom platí (suma cez p)

$$\text{Torq}(\kappa) = \varepsilon^p \otimes \mathcal{L}_{\rho(e_p)} \kappa \quad (8.13)$$

8.3 Maxwellove rovnice v M^3 a M^4

V tejto kapitole budeme pre lepšiu prehľadnosť značiť diferenciálne formy ako $\mathcal{E}, \mathcal{B}, \mathcal{J}$ a vektorové polia veľkým tučným písmom, t.j. $\mathbf{E}, \mathbf{B}$.

Uvažujme 3-dimenziálnu varietu M^3 s Riemannovou metrikou g , kde čas vystupuje ako parameter, nie ako súradnica. Potom Maxwellove rovnice môžeme formulovať nasledovne

$$\mathbf{d} * \mathcal{E} = \rho, \quad \mathbf{d} \mathcal{B} = 0, \quad (8.14)$$

$$\mathbf{d} \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}, \quad \mathbf{d} * \mathcal{B} = \mathcal{J} + \frac{\partial * \mathcal{E}}{\partial t}, \quad (8.15)$$

kde $\mathcal{E}$ je diferenciálna 1-forma, $\mathcal{B}$ je diferenciálna 2-forma a $\mathbf{d}$ je priestorová derivácia.

Keď budeme uvažovať 4-dimenziálny priestoročas M^4 , Maxwellove rovnice budú reprezentované len dvomi rovnicami

$$dF = 0, \quad (8.16)$$

$$d * F = j, \quad (8.17)$$

kde $F \in \Omega^2 M^4$ je diferenciálna 2-forma, ktorá reprezentuje elektromagnetické pole a $j \in \Omega^3 M$ je diferenciálna 3-forma reprezentujúca hustotu elektrického prúdu.

8.3.1 Zavedenie Maxwellových rovníc M^3

Budeme uvažovať elektrický náboj Q pôsobiaci na časticu a predpokladáme, že existuje 3-forma σ , ktorej zintegrovaním cez ľubovoľnú oblasť U dostaneme množstvo náboja v tejto oblasti

$$Q(U) = \int_U \sigma. \quad (8.18)$$

Zavedením Riemannovej metriky, ktorú na variete predpokladáme, môžeme σ vyjadriť ako $\sigma = \rho(x) \text{ vol}$, kde ρ je hustota náboja. Ďalej budeme predpokladať, že W je dvojstranná plocha, potom môžeme zaviesť *prúdovú 2-formu* $\mathcal{J}$, kde $\int_W \mathcal{J}$ predstavuje mieru prietoku náboja cez plochu W .

Budeme predpokladať platnosť *zákona zachovania elektrického náboja*, preto ak 2-rozmer-
ná plocha W je hranicou kompaktnej 3-rozmernej oblasti U , t.j $W = \partial U$, potom pre každú oblasť U platí, že miera, s akou náboj opúšťa oblasť U , musí byť rovná miere úbytku náboja vo vnútri oblasti U , čo môžeme matematicky vyjadriť

$$\int_{\partial U} \mathcal{J} = - \frac{d}{dt} \int_U \sigma = - \int_U \frac{\partial \sigma}{\partial t}. \quad (8.19)$$

Ak $\mathcal{J}$ je spojitě diferencovateľná, potom podľa Stokesovho teorému platí

$$\int_{\partial U} \mathcal{J} = \int_U \mathbf{d}\mathcal{J}. \quad (8.20)$$

Spojením rovníc (8.19) a (8.20) dostaneme

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \mathbf{d}\mathcal{J} = 0, \quad (8.21)$$

kde $\mathbf{d}$ značí *priestorovú deriváciu*.

Teraz môžeme zaviesť *prúdový vektor* $\mathbf{J}$, ktorý je pridružený k prúdovej 2-forme $\mathcal{J}$, ako $\mathcal{J} = i_{\mathbf{J}} \text{ vol}$. Čo môžeme v súradniciach vyjadriť ako $i_{\mathbf{J}} \text{ vol} = \sqrt{g} \rho (v^1 dy \wedge dz + v^2 dz \wedge dy + v^3 dx \wedge dy)$.

Ďalej pre 2-formu $\mathcal{J}$ a $\mathbf{J}$ vektor pridružený k tejto forme môžeme zaviesť *divergenciu* ako

$$\mathbf{d}\mathcal{J} = (\text{div } \mathbf{J}) \text{ vol}. \quad (8.22)$$

Potom použitím vzťahu (8.21) spolu s (8.22) dostávame *rovniciu kontinuity*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{J} = 0. \quad (8.23)$$

Niekedy sa používa tiež vyjadrenie prúdu ako *konvekčného prúdu*⁶, teda $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$, kde $\mathbf{v}$ je rýchlosť nabitej látky. Súradnicové vyjadrenie pridruženej 2-formy je potom $\mathcal{J} = \rho (v^1 dy \wedge dz + v^2 dz \wedge dy + v^3 dx \wedge dy)$.

⁶Konvekčný prúd je prúd, ktorý je vyvolaný mechanickým prúdením látky, v ktorej je náboj.

Ďalej budeme predpokladať rýchlosť svetla $c = 1$ a elektromagnetické pole $\mathbf{F}$ izolované od vonkajších síl. Potom môžeme zaviesť *Lorentzovu*⁷ silu

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (8.24)$$

ktorá udáva elektromagnetickú silu na bod hmoty s nábojom q pohybujúcim sa rýchlosťou $\mathbf{v}$. Takto definujeme elektrické pole $\mathbf{E}$ v bode x v okamihu t , ktoré meriame ako silu na jednotku náboja v pokoji a magnetické pole $\mathbf{B}$, ktoré meriame ako sily na jednotky nábojov pohybujúcich sa v smere jednotkových vektorov $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$. Sila $\mathbf{F}$ má smer nezávislý na orientácii priestoru M^3 .

Teraz by sme chceli zaviesť elektromagnetické pole nezávisle na súradniciach, s tým nám pomôže definovanie uvedených veličín pomocou ich kovariantných verzí. Elektrické pole priradíme k 1-forme $\mathcal{E}$, ktorej vyjadrenie v ľubovoľných súradniciach je

$$\mathcal{E} = E_1 dx^1 + E_2 dx^2 + E_3 dx^3. \quad (8.25)$$

Formu $\mathcal{E}$ teraz vnímame ako *intenzitu elektrického poľa*. Podobne magnetické pole pridružíme k 2-forme $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B} = B_{23} dx^2 \wedge dx^3 + B_{31} dx^3 \wedge dx^1 + B_{12} dx^1 \wedge dx^2, \quad (8.26)$$

ktorá reprezentuje *intenzitu magnetického poľa*. Potom môžeme Lorentzovu silu zapísať ako 1-formu v tvar

$$f = q(\mathcal{E} - i_{\mathbf{v}}\mathcal{B}). \quad (8.27)$$

V takto zavedenom systéme už môžeme formulovať Maxwelllove rovnice.

1. **Zákon spojitosti magnetického indukčného toku.** Pre každú kompaktnú orientovanú oblasť U platí

$$\iint_{\partial U} \mathcal{B} = 0.$$

Budeme predpokladať, že $\mathcal{B}$ má spojité prvé derivácie, potom $\iiint_U \mathbf{d}\mathcal{B} = \iint_{\partial U} \mathcal{B} = 0$. Keďže toto platí pre ľubovoľne malú oblasť U , platí

$$\boxed{\mathbf{d}\mathcal{B} = 0}, \quad (8.28)$$

čo môžeme zapísať tiež vektorovo $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$.

2. **Faradayov zákon.** Nech V je kompaktná orientovaná plocha s hranicou ∂V . Potom platí

$$\oint_{\partial V} \mathcal{E} = - \iint_V \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}.$$

⁷Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) - holandský fyzik, laureát Nobelovej ceny za fyziku z roku 1902 spolu s Pieterom Zeemanom za vysvetlenie Zeemanovho javu

Ak $\mathcal{E}$ má spojité prvé parciálne derivácie, platí $\iint_V \mathbf{d}\mathcal{E} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = 0$, pre všetky plochy V . Aplikovaním na malé obdĺžniky rovnobežné s rovinami xy , xz a yz , dostávame

$$\boxed{\mathbf{d}\mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}}, \quad (8.29)$$

čo môžeme vektorovo zapísať ako $\text{curl } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$.

Pre odvodenie zvyšných dvoch rovníc musíme predpokladať Riemannovu metriku. Potom môžeme zaviesť dve pseudoformy

$$\begin{aligned} *\mathcal{E} &= i_{\mathbf{E}} \text{vol} = \sqrt{g}(E^1 dx^2 \wedge dx^3 + E^2 dx^3 \wedge dx^1 + E^3 dx^1 \wedge dx^2) \\ *\mathcal{E} &= B_1 dx^1 + B_2 dx^2 + B_3 dx^3. \end{aligned}$$

Pseudoforma $*\mathcal{E}$ je 2-forma a $*\mathcal{B}$ je 1-forma.

3. **Gaussov zákon.** Nech U je ľubovoľná kompaktná oblasť, potom

$$\iint_{\partial U} *\mathcal{E} = 4\pi \iiint_U \sigma = 4\pi Q(U)$$

meria množstvo náboja, ktorý obsahuje oblasť U . Keď budeme predpokladať spojité derivácie, dostaneme

$$\boxed{\mathbf{d}*\mathcal{E} = 4\pi\sigma}, \quad (8.30)$$

čo môžeme zapísať vektorovo $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$.

4. **Ampér-Maxwellov zákon.** Nech M je kompaktná dvojstranná plocha, potom

$$\oint_{\partial M} *\mathcal{B} = \iint_M 4\pi j + \frac{\partial *\mathcal{E}}{\partial t}.$$

Za predpokladu spojitých derivácií $\mathcal{E}$, môžeme prepísať

$$\boxed{\mathbf{d}*\mathcal{B} = 4\pi j + \frac{\partial *\mathcal{E}}{\partial t}}, \quad (8.31)$$

vektorovo zapísané $\text{curl } \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$.

8.3.2 Zavedenie Maxwellových rovníc v M^4

Budeme predpokladať rýchlosť svetla $c = 1$. Uvažujme silu magnetického poľa ako 2-formu

$$F = \mathcal{E} \wedge dt + \mathcal{B},$$

kde $\mathcal{E}$ je 1-forma a $\mathcal{B}$ je 2-forma. Môžeme rozpísať

$$F = (E_1 dx + E_2 dy + E_3 dz) \wedge dt + B_1 dy \wedge dz + B_2 dz \wedge dx + B_3 dx \wedge dy,$$

alebo tiež

$$F = \sum_{i < j} F_{ij} dx^i \wedge dx^j,$$

$$[F_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

V Minkowského priestore máme časovo-priestorovú deriváciu

$$d = \mathbf{d} + dt \wedge \frac{\partial}{\partial t}.$$

Zderivovaním sily magnetického poľa $F = \mathcal{E}(t, \mathbf{x}) \wedge dt + \mathcal{B}(t, \mathbf{x})$, dostaneme

$$dF = \mathbf{d}\mathcal{E} \wedge dt + \mathbf{d}\mathcal{B} + dt \wedge \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = \left(\mathbf{d}\mathcal{E} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \right) \wedge dt + \mathbf{d}\mathcal{B}.$$

Z tejto rovnice plynie

$$\boxed{dF = 0} \Leftrightarrow \mathbf{d}\mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \quad \text{a zároveň} \quad \mathbf{d}\mathcal{B} = 0. \quad (8.32)$$

Vidíme, že rovnica $dF = 0$ je ekvivalentná prvým dvom Maxwellovým rovniciam (8.28) a (8.29).

Ďalej budeme vychádzať z Poincarého lemmy, ktorá zaisť platnosť $F = dA$, pre nejakú 1-formu $A = \phi dt + \mathcal{A}$, kde $\mathcal{A} = A_\alpha(t, \mathbf{x}) dx^\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$. Potom dosadením dostávame

$$F = dA$$

$$\mathcal{E} \wedge dt + \mathcal{B} = \left(\mathbf{d} + dt \wedge \frac{\partial}{\partial t} \right) (\phi dt + \mathcal{A})$$

$$\mathcal{E} \wedge dt + \mathcal{B} = \mathbf{d}\phi \wedge dt + \mathbf{d}\mathcal{A} + dt \wedge \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}$$

$$\mathcal{E} \wedge dt + \mathcal{B} = \left(\mathbf{d}\phi - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \right) \wedge dt + \mathbf{d}\mathcal{A}.$$

Z čoho plynie

$$\mathcal{E} = \mathbf{d}\phi - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}$$

$$\mathcal{B} = \mathbf{d}\mathcal{A}.$$

Vektorovým vyjadrením dostaneme rovnice $\mathbf{E} = \nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ a $\mathbf{B} = \text{curl}\mathbf{A}$. Kde ϕ je skalár a $\mathbf{A}$ je vektor potenciálu.

Ďalej budeme uvažovať nabitú látku s hustotou náboja ρ , ktorá sa pohybuje v $\mathbb{R}^3$ s lokálnym vektorom rýchlosti $\mathbf{v}$. Potom môžeme zaviesť vektor prúdu $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$, ďalej zavedieme prúdový 4-vektor $J = (\rho, \mathbf{j})$ a môžeme zaviesť pridruženú prúdovú 3-formu $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S} = i_J \text{vol} = \rho dx \wedge dy \wedge dz - (j_1 dy \wedge dz + j_2 dz \wedge dx + j_3 dx \wedge dy) \wedge dt,$$

$$\mathcal{S} = \sigma - \mathcal{J} \wedge dt.$$

Teraz môžeme definovať pseudo 2-formu $*F$

$$*F = -*\mathcal{B} \wedge dt + *\mathcal{E}, \quad (8.33)$$

na ktorú aplikujeme časovo-priestorovú deriváciu a dostaneme

$$d*F = \mathbf{d}*\mathcal{E} - \left(\mathbf{d}*\mathcal{B} - \frac{\partial *\mathcal{E}}{\partial t} \right) \wedge dt.$$

Dosadením Gaussovho a Ampér-Maxwellovho zákona, t.j. rovníc (8.30) a (8.31) dostaneme
2. *Maxwellovu rovnicu*

$$d*F = 4\pi(\sigma - \mathcal{J} \wedge dt)$$

$$\boxed{d*F = 4\pi\mathcal{S}}, \quad (8.34)$$

ktorú môžeme tiež zapísať ako $d\mathcal{S} = 0$, čo je opäť zákon zachovania elektrického náboja. Odvodené zákony môžeme zhrnúť v jednoduchom diagrame

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{d} & F & \xrightarrow{d} & 0 \\ & & \downarrow * & & \\ & & *F & \xrightarrow{d} & j \xrightarrow{d} 0 \end{array}$$

kde

$F \in \Omega^2 M$	je elektromagnetické pole,
$*F \in \Omega^2 M$	je duálne elektromagnetické pole,
$A \in \Omega^1 M$	je elektromagnetický potenciál,
$j \in \Omega^3 M$	je hustota elektrického prúdu.

8.4 Rozklad elektromagnetického poľa

Opäť uvažujme Lorentzov priestoročas s pozorovateľom $\{T, \tau\}$, kde platí $\tau(T) = 1$. Vďaka vzťahu $e_\tau \circ i_T + i_T \circ e_\tau = id$, ktorý umožňuje rozložiť formu τ na dve časti, z nich jedna je paralelná so smerom vektoru T a druhá je paralelná s opačným smerom. Potom vieme ľubovoľnú formu ω rozložiť na dva členy

$$\omega = e_\tau \circ i_T \omega + i_T \circ e_\tau \omega = e_\tau(T \lrcorner \omega) + i_T(\tau \wedge \omega) = \tau \wedge \omega_T + \omega_S. \quad (8.35)$$

Teraz môžeme tento vzťah aplikovať na elektromagnetické pole $F \in \Omega^2$, dostaneme opäť rozklad na dve časti

$$F = F_e + F_m,$$

z ktorých jedna bude čisto elektrická a druhá čisto magnetická

$$\begin{aligned} F_e &= e_\tau \circ i_T F = e_\tau(T \lrcorner F) = \tau \wedge (T \lrcorner F), \\ F_m &= i_T \circ e_\tau F = i_T(\tau \wedge F) = T \lrcorner (\tau \wedge F). \end{aligned}$$

Tento rozklad nám umožňuje chápať elektromagnetické pole F , ako súčet dvoch zložiek

$$\begin{aligned} F &= \mathcal{E} \wedge \tau + \mathcal{B}, \\ \text{kde} \quad \mathcal{E} &= -i_T F, \quad \mathcal{B} = i_T(\tau \wedge F). \end{aligned} \tag{8.36}$$

V tomto vzťahu 1-forma $\mathcal{E}$ predstavuje elektrické pole a 2-forma $\mathcal{B}$ predstavuje pole magnetické. Podobne môžeme rozložiť aj duálne pole $G = *F$ na súčet dvoch zložiek

$$\begin{aligned} G &= \tau \wedge \mathcal{H} + \mathcal{D}, \\ \text{kde} \quad \mathcal{H} &= i_T G, \quad \mathcal{D} = i_T(\tau \wedge G), \end{aligned} \tag{8.37}$$

kde $\mathcal{H}$ je 1-forma a $\mathcal{D}$ je 2-forma.

Zavedením priestorovej a časovej vonkajšej derivácie a následnou aplikáciou na rozložené formy môžeme Maxwellove rovnice vyjadriť pomocou skrútenia a krivosti. Najskôr teda zavedieme spomínané derivácie.

Definícia 8.4. (Priestorová a časová vonkajšia derivácia)

Nech $\omega \in \Omega^k M$, potom pre pozorovateľa $\{T, \tau\}$ môžeme zaviesť *priestorovú vonkajšiu deriváciu* d_3 a *časovú vonkajšiu deriváciu* nasledovne

$$\begin{aligned} d_3 \omega &= i_T \tau \wedge d\omega, \\ \dot{\omega} &= \mathcal{L}_T \omega. \end{aligned}$$

Lema 8.5. V referenčnom systéme pozorovateľa $\{T, \tau\}$ uvažujme diferenciálnu rovnicu $d\omega = \sigma$, ktorá umožňuje rozklad vonkajšej formy na dve časti, z ktorých prvá je čisto priestorová (aplikovaním i_T bude rovná nule) a druhá je čisto časová (aplikovaním e_τ bude rovná nule). Rozpad je nasledovný

$$d_3 \omega_S = \sigma_S + \text{Curv}(\tau) \lrcorner \omega, \tag{8.38}$$

$$-\dot{\omega}_S + d_3 \omega_T = \sigma_T - \text{Torq}(\tau) \lrcorner \omega, \tag{8.39}$$

kde

$$\text{Curv}(\tau) \lrcorner \omega = -i_T(\tau \wedge d\tau) \wedge i_T \omega = -i_T(\tau \wedge d\tau) \wedge \omega_T, \tag{8.40}$$

$$\text{Torq}(\tau) \lrcorner \omega = (\mathcal{L}_T \tau) \wedge i_T \omega = \dot{\tau} \wedge \omega_T. \tag{8.41}$$

Dôkaz. Budeme predpokladať $\sigma = d(\tau \wedge i_T \omega + i_T \tau \wedge \omega)$ z (8.35). Teraz na obe strany rovnice aplikujeme $i_T \wedge \tau$ a dostaneme

$$\begin{aligned}
i_T(\tau \wedge \sigma) &= i_T \left(\tau \wedge d(\underbrace{\tau \wedge i_T \omega}_{\omega_T} + \underbrace{i_T \tau \wedge \omega}_{\omega_S}) \right) \\
\sigma_S &= i_T \left(\tau \wedge (d\tau \wedge \omega_T - \tau \wedge d\omega_T + d\omega_S) \right) \\
&= i_T \left((\tau \wedge d\tau) \wedge \omega_T - \underbrace{(\tau \wedge \tau) \wedge d\omega_T}_0 + \tau \wedge d\omega_S \right) \\
&= \underbrace{i_T(\tau \wedge d\tau) \wedge \omega_T}_{-Curv(\tau) \lrcorner \omega} + \underbrace{i_T(\tau \wedge d\omega_S)}_{d_3 \omega_S} \\
\sigma_S &= -Curv(\tau) \lrcorner \omega + d_3 \omega_S.
\end{aligned}$$

Dokázali sme vzťah (8.38). Teraz na rovnicu z predpokladu $\sigma = d(\tau \wedge i_T \omega + i_T \tau \wedge \omega)$ aplikujeme i_T , dostávame tak

$$\begin{aligned}
i_T \sigma &= i_T \left(d(\underbrace{\tau \wedge i_T \omega}_{\omega_T} + \underbrace{i_T \tau \wedge \omega}_{\omega_S}) \right) \\
\sigma_T &= i_T \left(d\tau \wedge \omega_T - \tau \wedge d\omega_T + d\omega_S \right) \\
&= \underbrace{(i_T d\tau) \wedge \omega_T}_{\dot{\tau} = \mathcal{L}_T \tau} - \underbrace{i_T(\tau \wedge d\omega_T)}_{d_3 \omega_T} + \underbrace{i_T d\omega_S}_{\dot{\omega}_S = \mathcal{L}_T \omega_S} \\
&= \underbrace{(\mathcal{L}_T \tau) \wedge \omega_T}_{Torq(\tau) \lrcorner \omega} - d_3 \omega_T + \dot{\omega}_S \\
\sigma_T &= Torq(\tau) \lrcorner \omega - d_3 \omega_T + \dot{\omega}_S.
\end{aligned}$$

Dokázaný je teda aj vzťah (8.39). □

Vď aka vzťahom z lemy 8.5 môžeme vyjadriť Maxwelllove rovnice pomocou skrútenia a krivosti. Vyjadrenie

$$d_3 \mathcal{E} = -\dot{\mathcal{B}} + Torq(\tau) \lrcorner F \quad (8.42)$$

$$d_3 \mathcal{B} = Curv(\tau) \lrcorner F \quad (8.43)$$

$$d_3 \mathcal{H} = \dot{\mathcal{D}} + J - Torq(\tau) \lrcorner G \quad (8.44)$$

$$d_3 \mathcal{D} = \rho + Curv(\tau) \lrcorner G \quad (8.45)$$

Z rovnice (8.43) plyní, že $Curv(\tau) \lrcorner F$ môžeme interpretovať ako zdanlivý magnetický náboj, v rovnici (8.42) môžeme interpretovať $Torq(\tau) \lrcorner F$ ako zdanlivý magnetický prúd. Z druhej dvojice rovníc plynú podobné závery, z rovnice (8.45) vyplýva, že $Curv(\tau) \lrcorner G$ interpretujeme ako efektívny elektrický náboj a z rovnice (8.44), že $Torq(\tau) \lrcorner G$ interpretujeme ako efektívny elektrický prúd.

Rovnica kontinuity má potom tvar

$$\dot{\rho} + d_3 J = -\text{Torq}(\tau) \lrcorner \mathcal{J}. \quad (8.46)$$

Rovnice pre potenciál vyzerajú

$$\mathcal{E} = -\dot{A} + d_\phi - \text{Torq}(\tau) \lrcorner a, \quad (8.47)$$

$$\mathcal{B} = -d_3 A - \text{Curv}(\tau) \lrcorner a. \quad (8.48)$$

8.5 Zhrnutie

V tejto kapitole sme sa pohybovali na Lorentzovej variete, kde sme pomocou diferenciálnych foriem a vektorových polí mohli konštruovať $(1, 1)$ -tenzorové pole. Na tomto tenzorovom poli sme vďaka Fröhlicher-Nijenhuisovej zátvorke mohli zaviesť dve dôležité operácie - skrútenie a krivosť konexie. V ďalšej časti sme detailne rozobrali štruktúru priestoru, na ktorom sa nachádzame a definovali potrebné operácie. Následne sme zaviedli Maxwellove rovnice na 3- a 4-dimenziálnej variete, pracovali sme s diferenciálnymi formami, čo nám pomohlo zaviesť rovnice všeobecnejšie ako pri klasickom vektore zavedení.

Nakoniec sme všetky poznatky spojili, rozložili sme elektromagnetické pole na čisto elektrickú a čisto magnetickú časť, aplikovali sme na tieto časti priestorovú a časovú deriváciu, čím sa nám podarilo vyjadriť Maxwellove rovnice pomocou skrútenia a krivosti, to znamená pomocou Fröhlicher-Nijenhuisovej zátvorky. Toto vyjadrenie je významné najmä z hľadiska toho, že nie je závislé od voľby súradného systému pozorovateľa na variete.

9 GEOMETRICKÝ VÝZNAM OBYČAJNÝCH DIFERENCIÁLNYCH ROVNÍC

V tejto kapitole ukážeme súvislosť medzi sústavou obyčajných diferenciálnych rovníc (ďalej ODR) druhého rádu a Frölicher-Nijenhuisovou zátvorkou. Začneme zavedením geometrickej štruktúry a popisom ODR. Na tejto štruktúre pomocou Frölicher-Nijenhuisovej zátvorky zavedieme operátor nazývaný kovariantná derivácia, ktorý nám umožní geometricky pojednávať o systéme ODR.

Nachádzame sa na variete M a všetky objekty uvažujeme ako hladké. Ďalej budeme uvažovať tangenciálny fibrovaný priestor (TM, π, M) , ktorý budeme označovať TM , množinu všetkých vektorových polí na variete M budeme podobne ako v predchádzajúcom texte značiť $\mathfrak{X}(M)$. Kanonická submerzia $\pi : TM \rightarrow M$ indukuje foliaciu (rozvrstvenie) na TM , ktorej listy sú tangenciálne priestory $\pi^{-1}(p) = T_p M$ v bode $p \in M$.

Na variete M budeme používať lokálne súradnice (x^i) a na tangenciálnom fibrovanom priestore súradnice (x^i, y^j) . Zavedieme ešte tangenciálny fibrovaný priestor bez nulového rezu ako $TM \setminus \{0\} = \{(x, y) \in TM \mid y \neq 0\}$.

Ďalej nás budú zaujímať krivky na variete. Nech I je neprázdny interval v $\mathbb{R}$, potom môžeme zaviesť krivku $c : I \rightarrow M$, ktorej súradnice sú $c(t) = (x^i(t))$. Tangenciálnym liftom takto definovanej krivky budeme nazývať krivku $c' : I \rightarrow TM$, jej súradnice sú $c'(t) = (x^i(t), dx^i/dt)$.

Veta 9.1. *Krivku c nazveme regulárnou krivkou, ak platí $c'(t) \in TM \setminus \{0\}$.*

Systém obyčajných diferenciálnych rovníc druhého rádu môžeme vyjadriť pomocou semispreja, tento pojem si zavedieme.

Definícia 9.2. (Semisprej)

Nech M je varieta. Vektorové pole $S \in \mathfrak{X}(TM \setminus \{0\})$ také, že každá integrálna krivka $\gamma : I \rightarrow TM \setminus \{0\}$ v S je tvaru $\gamma = (\pi \circ \gamma)'$ sa nazýva *semisprej* na variete M . [27]

Semisprej S je v lokálnych súradniciach daný vzťahom

$$S = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad (9.1)$$

pre nejaké funkcie G^i definované na definičných oboroch (x, y) .

Definícia 9.3. (Geodetika)

Pre integrálnu krivku $\gamma : I \rightarrow TM \setminus \{0\}$ na S povieme, že krivka $c : I \rightarrow M$ je *geodetika*, ak platí $c = \pi \circ \gamma$.

Veta 9.4. *Regulárna krivka $\gamma : I \rightarrow TM \setminus \{0\}$ je geodetika práve vtedy, keď platí $S \circ c' = c''$*

Veta 9.5. *Regulárna krivka $c : I \rightarrow M$ je lokálne geodetikou S práve vtedy, keď spĺňa systém ODR druhého rádu*

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + 2G^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0. \quad (9.2)$$

Môžeme vidieť, že riešeniami systému ODR druhého rádu, ktorý je vyjadrený pomocou semispreja, sú regulárne krivky na variete M .

Tangenciálnou štruktúrou rozumieme $(1,1)$ -tenzorové pole na TM definované ako $J = \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes dx^i$. Vertikálna distribúcia je distribúcia daná $V : u \in TM \mapsto V_u TM = \text{Ker } J_u \subset T_u TM$. Na takto definovanej tangenciálnej štruktúre môžeme zaviesť *všeobecnú konexiu* nazývanú tiež horizontálna distribúcia. Všeobecná konexia H je doplnkom k vertikálnej distribúcii, je daná $H : u \in TM \setminus \{0\} \mapsto V_u TM \subset T_u TM$. Máme teda dekompozíciu $T_u TM = H_u \oplus V_u$ pre všetky $u \in TM \setminus \{0\}$. Príslušné vertikálne a horizontálne projektory budeme značiť v a h a keďže definujú dekompozíciu, platí $h + v = \text{Id}$. Tieto projektory môžeme súradnicovo zapísať ako

$$h = \frac{\delta}{\delta x^i} \otimes dx^i, \quad v = \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes \delta y^i, \quad (9.3)$$

kde

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta x^i} &= h \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) - N_i^j(x, y) \frac{\partial}{\partial y^j} \\ \delta y^i &= dy^i + N_j^i(x, y) dx^j. \end{aligned}$$

Pre semisprej S a príslušnú všeobecnú konexiu (h, v) , budeme uvažovať vertikálne hodnotové $(1,1)$ -tenzorové pole na $TM \setminus \{0\}$

$$\Phi = -v \circ \mathcal{L}_S v = v \circ \mathcal{L}_S h = v \circ \mathcal{L}_S \circ h, \quad (9.4)$$

ktoré nazývame *Jacobiho endomorfizmus*. Teraz môžeme definovať Frölicher-Nijenhuisovu zátvorku S a $(1,1)$ -tenzorového poľa A ako

$$[S, A]_{FN} = \mathcal{L}_S A = \mathcal{L}_S \circ A - A \circ \mathcal{L}_S. \quad (9.5)$$

Jacobiho endomorfizmus môžeme vyjadriť v lokálnych súradniciach

$$\Phi = R_j^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y^i} \otimes dx^j, \quad R_j^i = 2 \frac{\delta G^i}{\delta x^j} - S(N_j^i) + N_k^i N_j^k. \quad (9.6)$$

Zložky R_j^i sú považované za druhé geometrické invarianty semispreju, nazývame ich *zložky krivosti*. Pre dvojicu semispraju a konexie $(S, (h, v))$ budeme nakoniec uvažovať zobrazenie $\nabla : \mathfrak{X}(TM \setminus \{0\}) \rightarrow \mathfrak{X}(TM \setminus \{0\})$ dané vzťahom

$$\nabla = h \circ \mathcal{L}_S \circ h + v \circ \mathcal{L}_S \circ v = \mathcal{L}_S + h \circ \mathcal{L}_S h + v \circ \mathcal{L}_S v, \quad (9.7)$$

ktoré nazývame *dynamická kovariantná derivácia*. [27]

ZÁVER

V tejto práci sme sa zaoberali Frölicher-Nijenhuisovou zátvorkou a jej aplikáciami v geometrii a fyzike. Na začiatku bolo mojou úlohou najmä detailné naštudovanie rozsiahleho aparátu diferenciálnej geometrie na varietach, ktorá sa tiež označuje ako tzv. moderná diferenciálna geometria. Tento aparát bol základom pre zavedenie potrebných geometrických pojmov a tiež zátvorkových operátorov - Lieova a Frölicher-Nijenhuisovou zátvorka.

Ciele práce by sme mohli rozdeliť do troch čiastkových cieľov. Prvým cieľom bolo prehľadné zavedenie pojmov z diferenciálnej geometrie spolu s ich vlastnosťami preložené ilustratívnymi príkladmi a obrázkami. Ďalším cieľom bolo dokumentovať podstatu vzťahu diferenciálnej geometrie a variačného počtu a vyzdvihnúť univerzálnosť metód variačného počtu pri riešení fyzikálnych problémov. Posledným, najdôležitejším cieľom bolo rozobratie aplikácií Frölicher-Nijenhuisovej zátvorky.

Prvé tri kapitoly boli venované definíciám základných pojmov a tvrdeniam týkajúcich sa ich vlastností. V týchto kapitolách sme sa snažili o prehľadný text vysvetľujúci problematiku modernej diferenciálnej geometrie.

Nasledovalo zavedenie operátora - Lieova zátvorka, objasnenie jej vlastností a najmä jej geometrického významu. Kapitola bola na záver doplnená príkladmi, ktoré majú slúžiť k lepšiemu náhľadu do problematiky. V geometrickej časti práce bola ďalej uvedená kapitola vysvetľujúca konexiu a štruktúry definované prostredníctvom nej. Opäť bol kladený dôraz na geometrickú predstavu a interpretáciu. Zovšeobecnením pojmu Lieovej zátvorky sme sa dostali ku kľúčovému pojmu tejto diplomovej práce a to k pojmu Frölicher-Nijenhuisovej zátvorky. V tejto kapitole sa tiež pojednávalo o vlastnostiach operátora a na záver bola doplnená príkladmi.

V siedmej kapitole bola detailnejšie rozobratá teória variačného počtu na varietach, ktorej hlavnou výhodou je univerzálnosť metód na zavedenej štruktúre. Na fyzikálnych aplikáciách, konkrétne vlnových a Maxwellových rovniciach, bola demonštrovaná úvaha, či pohybová rovnica systému je odvoditeľná z nejakého variačného princípu. Tento problém sa nazýva inverzný problém variačného počtu.

Ďalšia kapitola je pre prácu veľmi dôležitá, práve v tejto kapitole bola dôkladne rozobratá aplikácia Frölicher-Nijenhuisovej zátvorky pri odvodení Maxwellových rovníc. Nachádzali sme sa na Lorentzovej variete a zmyslom bolo zaviesť takú štruktúru, pomocou ktorej bude možné odvodiť Maxwellove rovnice nezávisle na výbere súradnicového systému pozorovateľom.

V poslednej kapitole bola popísaná ešte jedna aplikácia Frölicher-Nijenhuisovej zátvorky z inej oblasti. Konkrétne sa jednalo o popis geometrického významu obyčajných diferenciálnych rovníc. O systéme diferenciálnych rovníc môžeme geometricky pojednávať v zmysle tenzorového operátora nazývaného dynamická kovariantná derivácia. Tento operátor je definovaný práve pomocou Frölicher-Nijenhuisovej zátvorky.

ZOZNAM POUŽITÝCH ZDROJOV

- [1] BARTELMANN, Matthias. *General Relativity* [online]. [cit. 2017-09-30]. Dostupné z: <http://www.ita.uni-heidelberg.de/research/bartelmann/files/relativity.pdf>
- [2] WASSERMAN, Robert H. *Tensors and manifolds: with applications to mechanics and relativity*. New York: Oxford University Press, 1992. ISBN 01-950-6561-1.
- [3] KRUMP, Lukáš, Vladimír SOUČEK a Jakub A. TĚŠÍNSKÝ. *Matematická analýza na varietách* [online]. Praha: Karolinum, 1998 [cit. 2017-11-05]. ISBN 80-718-4635-X.
- [4] DOUPOVEC, Miroslav. *Jety a konexe v diferenciální geometrii: Jets and connections in differential geometry : teze přednášky k profesorskému jmenovacímu řízení v oboru Aplikovaná matematika*. Brno: VUTUM, 2009. ISBN 978-80-214-3850-7.
- [5] KOLÁŘ, Ivan, Peter W. MICHOR a Jan SLOVÁK. *Natural operations in differential geometry*. New York: Springer-Verlag, c1993. ISBN 03-875-6235-4.
- [6] KRUPKA, Demeter. *Úvod do analýzy na varietách* [online]. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1986 [cit. 2018-04-05].
- [7] KRUPKOVÁ, Olga. *Variační počet na varietách* [online]. Ostrava, 2006 [cit. 2018-03-17].
- [8] HERMANN, Robert. *Differential geometry and the calculus of variations* [online]. New York: Academic Press, 1968 [cit. 2017-11-07].
- [9] KUREŠ, Miroslav. *Některé souvislosti variačního počtu a diferenciální geometrie z hlediska aplikací: Some relations between variational calculus and differential geometry from the applications point of view : zkrácená verze habilitační práce*. Brno: VUTUM, 2003. Vědecké spisy Vysokého učení technického v Brně. ISBN 80-214-2313-7.
- [10] PODOLSKÝ, Jiří. *Teoretická mechanika v jazyce diferenciální geometrie* [elektronický studijní text]. 2006 [cit. 2018-02-25].
- [11] FRANKEL, Theodore. *The geometry of Physics*. 3rd ed. Cambridge University Press, 2012. ISBN 978-1-107-60260.
- [12] KUREŠ, Miroslav. *From optimal control problems to foliations, some kinds of multifoliations and relations to generalised jets*. Journal of Quality Measurement and Analysis [online]. 2010, 6(2), 19-32 [cit. 2017-12-03].
- [13] WARNICK, Karl F. a Peter RUSSER. *Two, Three and Four-Dimensional Electromagnetics Using Differential Forms*. (2006).

- [14] NAGY, Jozef, Eva NOVÁKOVÁ a Milan VACEK. *Vektorová analýza: příručka pro vysoké školy technické*. Praha: SNTL, 1984. Matematika pro vysoké školy technické.
- [15] FECKO, Marián. *Differential Geometry and Lie Groups for Physicists* [online]. Leiden: Cambridge University Press, 2006 [cit. 2017-11-07]. ISBN 978-051-1245-213.
- [16] MUSILOVÁ, Jana a Stanislav HRONEK. *The calculus of variations on jet bundles as a universal approach for a variational formulation of fundamental physical theories*. Communications in Mathematics [online]. 2016, 24(2), 173-193 [cit. 2018-03-08].
- [17] KRTOUŠ, Pavel. *Geometrické metody ve fyzice* [elektronický studijný text]. 2013 [cit. 2017-09-22].
- [18] MANSFIELD, Elizabeth Louise. *A practical guide to the invariant calculus*. New York: Cambridge University Press, 2010. ISBN 978-0-521-85701-7.
- [19] LAVALLE, Steven M. *Planning Algorithms* [online]. Cambridge: Cambridge University Press, 2006 [cit. 2018-04-19]. ISBN 9780511546877.
- [20] KIRILLOV, Alexander A. *An introduction to Lie groups and Lie algebras* [online]. New York: Cambridge University Press, 2008 [cit. 2018-04-06]. ISBN 05-218-8969-3.
- [21] ANDREWS, Ben. *Lectures on Differential Geometry* [elektronický studijný text]. Dostupné z: <http://maths-people.anu.edu.au/~andrews/DG/> [cit. 2017-10-14].
- [22] MICHOR, P. W., *Remarks on the Frölicher-Nijenhuis bracket*. Differential geometry and its applications (Brno, 1986), 197-220, Math. Appl. (East European Ser.), 27, Reidel, Dordrecht, 1987
- [23] KOLÁŘ, I., Modugno, M., *Torsions of connections on some natural bundles*. Differential Geom. Appl. 2 (1992), no. 1, 1-16
- [24] MCMILLAN, Ben. *The Newlander-Nirenberg Theorem* [online]. [cit. 2018-04-25].
- [25] KRUPKA, Demeter. *Introduction to global variational geometry* [online]. Amsterdam: Atlantis Press, 2015 [cit. 2018-04-05]. Atlantis studies in variational geometry, volume 1. ISBN 978-94-6239-072-0.
- [26] KOCIK, Jerzy. *Relativistic observer and Maxwell's equations: an example of a non-principal Ehresmann connection* [online]. 2016 [cit. 2017-10-26]. Dostupné z: <https://arxiv.org/pdf/1604.00081.pdf>

- [27] BUCATARU, Ioan, Oana CONSTANTINESCU a Matias F. DAHL. *A geometric setting for systems of ordinary differential equations*. International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. 2011, 08(06), 1291-1327. DOI: 10.1142/S0219887811005701. ISSN 0219-8878.

ZOZNAM OBRÁZKOV

Obrázok 1: Topologická varieta - mapa	20
Obrázok 2: Diferenciálna 1-forma	28
Obrázok 3: Diferenciálna 2-forma	28
Obrázok 4: Geometrický význam Lieovej zátvorky	34
Obrázok 4: Lieova derivácia	35
Obrázok 6: Diferenciálne riadený robot	37
Obrázok 7: Lieova zátvorka - robot	38
Obrázok 8: Geometrický význam torzie	42
Obrázok 9: Paralelný prenos vektorov	43
Obrázok 10: Priestoročas - svetelný kužel	58
Obrázok 11: Kovariantná derivácia	62

ZOZNAM POUŽITÝCH SYMBOLOV

SYMBOL	VÝZNAM
V	vektorový priestor
V^*	duálny vektorový priestor k priestoru V
$v \otimes w$	tenzorový súčin vektorov v, w
$\wedge$	vonkajšie násobenie
M	diferencovateľná varieta
$T_x M$	tangenciálny priestor k variete M v bode x
$T_x^* M$	kotangenciálny priestor k variete M v bode x
TM	tangenciálny fibrovaný priestor k variete M
$T^* M$	kotangenciálny fibrovaný priestor k variete M
$Y, (Y, \pi, M), \pi : Y \rightarrow M$	fibrovaná varieta
E	vektorový fibrovaný priestor
X	vektorové pole
$\mathfrak{X}(M)$	množina všetkých vektorových polí
$[X, Y]$	Lieova zátvorka vektorových polí X, Y
$[K, L]_{\text{FN}}$	Fröhlicher-Nijenhuisova zátvorka $(1, 1)$ -tenzorových polí K, L
$J^r(M, N)$	množina všetkých r -jetov z M do N
∇	klasická lineárna konexia
Φ	všeobecná konexia
g	Riemannova metrika
VE	vertikálny fibrovaný priestor
HE	horizontálny fibrovaný priestor
ϕ	tok generovaný vektorovým poľom
ϕ^*	pull-back
ϕ_*	push-forward