



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV AUTOMATIZACE A INFORMATIKY

INSTITUTE OF AUTOMATION AND COMPUTER SCIENCE

**ALGEBRAICKÁ KRITÉRIA V TEORII STABILITY
LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ**

ALGEBRAIC CRITERIA FOR STABILITY OF LINEAR SYSTEMS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Veronika Gáčová

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Mgr. Monika Dosoudilová, Ph.D.

BRNO 2020

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav automatizace a informatiky
Studentka: **Veronika Gáčová**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce: **Mgr. Monika Dosoudilová, Ph.D.**
Akademický rok: 2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Algebraická kritéria v teorii stability lineárních systémů

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Posouzení stability regulačního obvodu s využitím matematického aparátu (algebraická kritéria). Efektivita tohoto přístupu.

Cíle bakalářské práce:

Popis regulačního obvodu.

Využití teorie diferenciálních rovnic v teorii přenosu.

Podrobný popis algebraických kritérií.

Aplikace jednotlivých kritérií na konkrétních příkladech.

Srovnání algebraických kritérií s jinými přístupy (frekvenční kritéria, stabilita řešení diferenciální rovnice).

Seznam doporučené literatury:

ŠVARC, I., MATOUŠEK, R., ŠEDA, M., VÍTEČKOVÁ, M.: Automatické řízení. CERM, Brno 2011.

KALAS, J., RÁB, M.: Obyčejné diferenciální rovnice. MU, Brno 2001.

ŠKRÁŠEK, J., TICHÝ, Z.: Základy aplikované matematiky II. SNTL, Praha 1986.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

doc. Ing. Radomil Matoušek, Ph.D.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se zabývá stabilitou lineárních systémů a jejím posouzením s využitím zejména algebraických kritérií. Teoretická část práce je věnována popisu regulačního obvodu, významu diferenciálních rovnic v teorii přenosu a popisu kritérií pro určování stability. Hlavní náplní práce je srovnání náročnosti algebraických a frekvenčních kritérií při určování stability regulačního obvodu na konkrétním příkladě. Kromě tohoto přístupu nás bude zajímat i stabilita řešení odpovídající homogenní diferenciální rovnice. Závěry budou demonstrovány použitím softwaru Matlab.

ABSTRACT

This bachelor's thesis deals with stability of linear systems and its assessment using especially algebraic criteria. The theoretical part is dedicated to description of control system, meaning of differential equations in the theory of transfer function and description of stability criteria. The main goal of the thesis is to compare difficulty of use of algebraic and frequency stability criteria on a specific example. In addition to this approach, we will be interested in stability of solution of corresponding homogenous differential equation too. Conclusions will be demonstrated using Matlab software.

KLÍČOVÁ SLOVA

stabilita lineárních systémů, regulační obvod, algebraická kritéria stability, frekvenční kritéria stability, Laplaceova transformace

KEYWORDS

stability of linear systems, control system, algebraic stability criteria, frequency stability criteria, Laplace transformation

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

GÁČOVÁ, Veronika. *Algebraická kritéria v teorii stability lineárních systémů*. Brno, 2020. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/124721>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav automatizace a informatiky.

PODĚKOVÁNÍ

Na tomto místě bych chtěla poděkovat vedoucí práce Mgr. Monice Dosoudilové, Ph.D., za odborné vedení, podnětné připomínky, ochotu a trpělivost při psaní mé bakalářské práce. Dále bych chtěla poděkovat všem svým blízkým, a především svým rodičům za podporu po celou dobu mého studia.

ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že tato práce je mým původním dílem, zpracovala jsem ji samostatně pod vedením Mgr. Moniky Dosoudilové, Ph.D., a s použitím literatury uvedené v seznamu literatury.

V Brně dne 26. 6. 2020

.....

Veronika Gáčová

OBSAH

1	ÚVOD.....	15
2	LINEÁRNÍ SPOJITÉ ŘÍZENÍ.....	17
2.1	Úvodní pojmy	17
2.1.1	Blokové schéma.....	18
2.1.2	Popis regulačního obvodu	19
2.1.3	Praktický příklad regulačního obvodu.....	19
2.2	Dynamické vlastnosti regulačních členů	20
2.2.1	Diferenciální rovnice systému	20
2.2.2	Laplaceova transformace v teorii regulace	21
2.2.3	Přenos	23
2.2.4	Impulsní a přechodová funkce.....	25
2.2.5	Frekvenční přenos.....	27
2.3	Základní regulační členy	28
2.4	Bloková algebra	29
2.5	Regulátory	32
2.5.1	P-regulátor (proporcionální)	33
2.5.2	I-regulátor (integrační)	33
2.5.3	D-složka regulátoru (derivační).....	34
2.5.4	PI-regulátor (proporcionálně-integrační).....	34
2.5.5	PD-regulátor (proporcionálně-derivační)	34
2.5.6	PID-regulátor (proporcionálně-integračně-derivační).....	34
3	HOMOGENNÍ LODRN.....	36
3.1	Konstrukce řešení homogenní LODRn	36
3.2	Stabilita řešení homogenní LODRn	37
3.3	Příklad.....	38
4	KRITÉRIA STABILITY	41
4.1	Stabilita regulačního obvodu	41
4.1.1	Podmínky stability	42
4.2	Algebraická kritéria	44
4.2.1	Hurwitzovo kritérium stability	45
4.2.2	Routhovo kritérium stability	47
4.2.3	Routh-Schurovo kritérium stability	49
4.3	Frekvenční kritéria.....	51
4.3.1	Nyquistovo kritérium.....	52
4.3.2	Michajlov-Leonhardovo kritérium	52
5	EFEKTIVITA ALGEBRAICKÝCH KRITÉRIÍ	55
6	ZÁVĚR	63
7	SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....	65
8	SEZNAM OBRÁZKŮ	67
9	SEZNAM TABULEK.....	68

1 ÚVOD

V dnešní době je stále větší snaha o automatizaci technologických procesů. Ta představuje náhradu fyzické práce člověka pomocí různých přístrojů. Jednou z hlavních složek automatizace je regulace. Ta je uskutečňována prostřednictvím speciálních regulačních obvodů a jejím hlavním úkolem je zajistit dodržování stanovených podmínek, za kterých má daný technologický proces probíhat.

Regulační obvod představuje uzavřený systém, který se primárně skládá z regulované soustavy a regulátoru. Dále pak obsahuje různé měřicí a ovládací prvky. Jak název napovídá, jeho hlavním úkolem je regulovat pomocí regulátoru určitou regulovanou soustavu. To znamená regulátorem nastavit a udržovat technologickou veličinu regulované soustavy na nějaké požadované hodnotě.

Regulace se děje pomocí signálů procházejících obvodem. Tyto signály lze popsat diferenciálními rovnicemi. Hledání řešení těchto diferenciálních rovnic a posuzování jejich stability je však dosti pracné. V návaznosti na to byla vytvořena algebraická kritéria stability, pomocí kterých lze určování stability regulačního obvodu značně zjednodušit. Abychom ale mohli algebraická kritéria použít, je potřeba nejprve převést diferenciální rovnice na rovnice algebraické. K tomu se využívá Laplaceovy transformace.

Jedním z hlavních požadavků na takový regulační obvod je, aby byl stabilní. Cílem práce je předvést metody určování stability pomocí algebraických kritérií a zhodnotit jejich efektivitu srovnáním s jinými přístupy.

V první části práce, která je rozdělena do tří kapitol, je uveden základní popis regulačního obvodu, charakteristika jednotlivých prvků obvodu a princip jeho fungování. Následuje seznámení s Laplaceovou transformací, která je důležitá pro definování přenosu. Další kapitola je věnována konstrukci řešení homogenních diferenciálních rovnic a stabilitě těchto řešení. Závěrem této části nás zajímá stabilita regulačního obvodu. Zde jsou popsána jednotlivá algebraická kritéria, u nichž jsou uvedeny konkrétní příklady stabilních i nestabilních obvodů. Vedle nich jsou představeny také principy řešení stability pomocí kritérií frekvenčních.

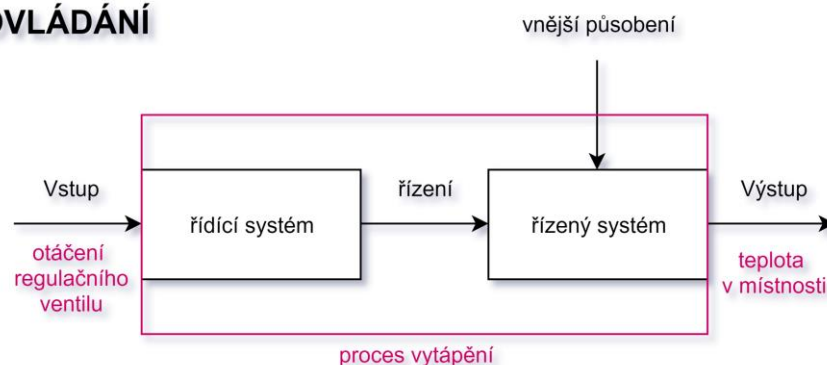
Druhá část práce je věnována efektivitě algebraických kritérií. Je vybrán konkrétní příklad, na kterém jsou demonstrována jednotlivá algebraická kritéria. Stabilita daného příkladu je následně řešena také pomocí teorie diferenciálních rovnic, frekvenčních kritérií a v neposlední řadě i, dnes nejpraktičtější metodou určování stability regulačních obvodů, pomocí softwaru Matlab.

2 LINEÁRNÍ SPOJITÉ ŘÍZENÍ

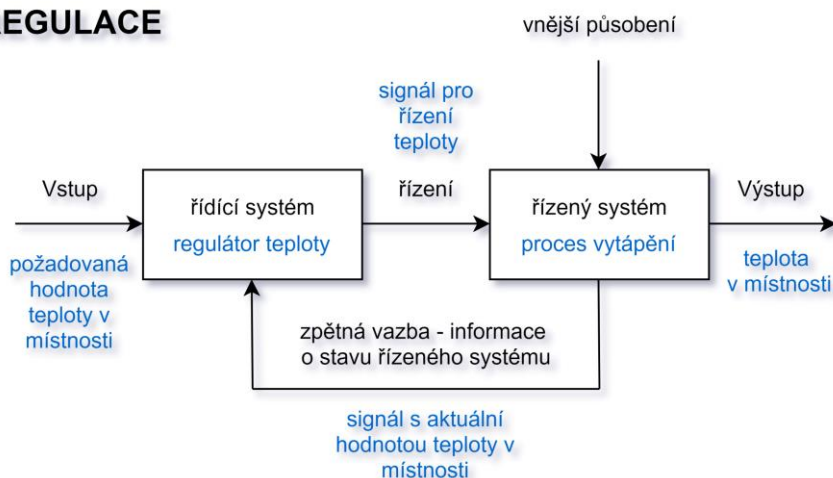
2.1 Úvodní pojmy

Proces náhrady fyzické práce člověka stroji a mechanismy se nazývá **mechanizace**. Pojem **automatizace** pak představuje proces, kdy je činností různých přístrojů a zařízení nahrazována nejen fyzická, ale i řídicí lidská činnost. Řídicí činnost neboli **řízení** můžeme obecně definovat jako cílevědomé působení na řízený objekt tak, abychom jej přinutili k požadované činnosti. Proces řízení přitom zahrnuje jak zpracování a zhodnocení informací o řízeném objektu, tak i jeho následnou úpravu k dosažení určeného cíle. Řízení může být buď ruční nebo automatické. Je-li řízení uskutečňováno zcela bez účasti člověka, tedy samočinně nějakým zařízením nebo systémem, označujeme ho jako **řízení automatické**. To lze dělit podle přívodu energie na **přímé** (energii bere ze soustavy) a **nepřímé** (potřebuje vlastní zdroj energie). Automatické řízení můžeme dále rozdělit na řízení bez zpětné vazby, též **ovládání** nebo **řízení dopředné** a na řízení se zpětnou vazbou neboli **regulaci**. Jejich srovnání můžeme vidět na *obr. 1*. V dnešní době se také v rámci automatického řízení stále více rozvíjí **vyšší formy řízení**, kam patří *optimální řízení, adaptivní řízení, učení a umělá inteligence*. [1, 2, 3]

OVLÁDÁNÍ



REGULACE



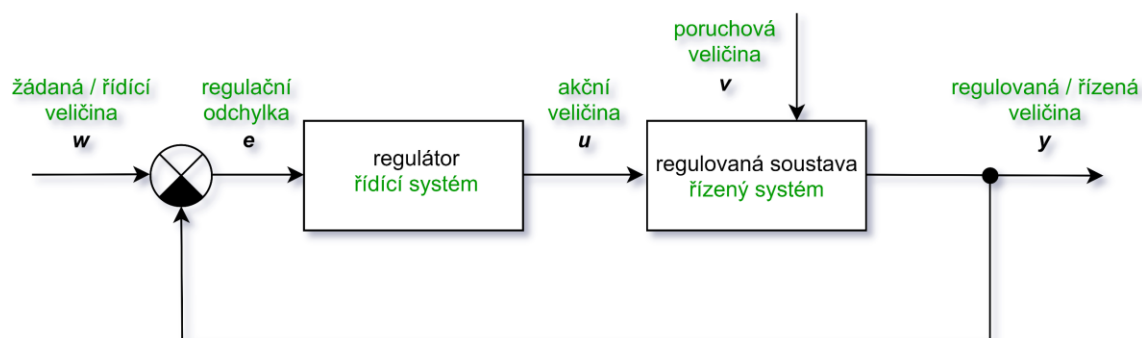
Obr. 1: Ovládání a regulace

Automatické řízení lze uskutečnit několika metodami v závislosti na způsobu působení řídicího systému na systém řízený. Jednou z těchto metod je **logické řízení**, které k řízení používá dvouhodnotové veličiny (hodnoty 0 a 1), ty označujeme jako *logické proměnné*. Závislost výstupní logické proměnné na vstupní pak nazýváme *logickou funkcí* a jejich systémy *logickými obvody*. Dalším typem je **řízení spojitě** (analogové), které využíváme při vyhodnocování stavu řízeného objektu, kde nestačí dvouhodnotový výstup a akční zásah využívaný při logickém řízení. Všechny veličiny systému (vstupní i výstupní) jsou spojitě proměnné v čase a daný spojitý systém má souvislou vazbu mezi vstupy a výstupy. S nespojitými veličinami, kde je vztah mezi vstupy a výstupy daný posloupností impulsů snímaných v časovém sledu pomocí vzorkovací periody pracuje **řízení diskrétní**. Pro řízení logické a diskrétní se dnes využívají především tzv. *programovatelné automaty*. [1, 2, 3]

2.1.1 Blokové schéma

Protože regulační soustava i regulátor bývají zpravidla složeny z několika různých členů, které jsou často poměrně složitými jednotkami (měřicí přístroje, zesilovače), používáme pro grafické znázorňování regulačních obvodů **bloková schémata**. Jedno takové blokové schéma jsme mohli vidět již na *obr. 1*. Jednotlivé členy obvodu jsou zde zobrazeny jako bloky. Každý blok udává vztah mezi proměnnou vycházející z bloku a proměnnou vstupující do bloku. Jejich vzájemné působení je znázorněno pomocí spojovacích čar, kde šipkou zaznačíme směr daného působení. Tato působení představují jednotlivé veličiny obvodu, které nazýváme signály. Směr šipky pak značí směr působení signálu. Místa, ve kterých se tyto signály spojují, se označují symbolem křížku v kroužku a nazýváme je součtovými členy. Vyčerněná část pak znázorňuje odečítání příslušného signálu, symbol bez vyčerněné části představuje sčítání. Případné odbočení nebo rozdělení signálu se znázorní tečkou mezi jednotlivými čarami působení daného signálu. [1, 2, 3]

Na následujícím obrázku *obr. 2* můžeme vidět blokové schéma regulačního obvodu, který je následně podrobněji popsán.



Obr. 2: Regulační obvod

2.1.2 Popis regulačního obvodu

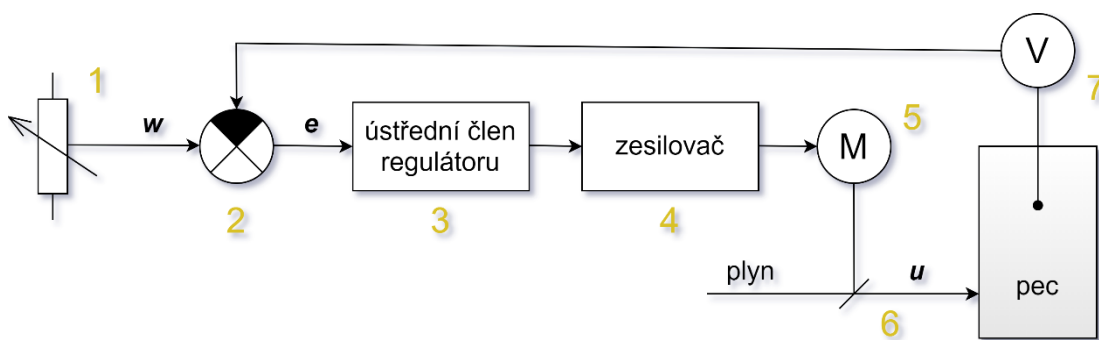
Regulační obvod zajišťuje již zmíněné zpětnovazební řízení – **regulaci**. Jeho hlavním úkolem je nastavení technických veličin (tlak, teplota, otáčky) na požadovanou hodnotu a následně je na této hodnotě udržet při působení poruchových veličin. [1, 2]

Na *obr. 2* můžeme vidět základní členy regulačního obvodu. Dva hlavní bloky představují řídicí a řízený systém obvodu. Řídicím systémem je objekt, který uskutečňuje regulaci – v tomto případě **regulátor**. Řízený systém je naopak předmětem dané regulace (některá jeho veličina má být regulována regulátorem) a označujeme jej jako **regulovanou soustavu**. Výstupem regulované soustavy je řízená veličina. Ta se regulací udržuje na předepsané hodnotě a nazýváme ji **veličinou regulovanou y** . Řídicí neboli **žádaná veličina w** udává hodnotu regulované veličiny, na které má být udržována. Rozdíl mezi žádanou a regulovanou veličinou pak nazýváme **regulační odchylkou e** . Jakmile je hodnota regulační odchylky nenulová, provádí regulátor akční zásah prostřednictvím **akční veličiny u** a snaží se tuto odchylku minimalizovat. Příčinou jejího vzniku jsou **poruchové veličiny v** , které do systému zasahují a nepříznivým způsobem ovlivňují regulovanou veličinu. Všechny výše uvedené veličiny budeme chápat jako funkce času. [1, 2]

Princip regulované soustavy založené na analogovém řízení je tedy založen na neustálém porovnávání regulované veličiny na výstupu, upravované prostřednictvím regulátoru, s žádanou hodnotou na vstupu. Hlavní úlohou regulačního obvodu je zajištění shody žádané veličiny s veličinou regulovanou a snížení vlivu poruchových veličin. [1, 2]

2.1.3 Praktický příklad regulačního obvodu

Základní funkce regulačního obvodu je vysvětlena na příkladu regulace teploty v plynem vytápěné peci s přímým nasáváním spalovacího vzduchu znázorněném na *obr. 3*.



Obr. 3: Regulační obvod plynem vytápěné pece

Regulovanou veličinou y je zde aktuální teplota v peci, kterou chceme regulovat na požadovanou hodnotu, tedy hodnotu žádané veličiny w . Ta se zadává potenciometrem 1 jako elektrické napětí. Teplota v peci je měřena termočlánekem 7 a závisí na míře příkonu plynu do pece. Ten zde představuje akční veličinu u a je korigován otevíráním škrtící

klapky 6 v potrubí plynu před hořákem. Tato klapka je otáčena elektrickým motorem 5. Žádaná hodnota a skutečná hodnota jsou porovnávány v součtovém členu 2. Jejich rozdíl tvoří regulační odchylku e . Základním požadavkem na funkci regulátoru je dosažení nulové regulační odchylky, kdy se žádaná a regulovaná veličina shodují. Časový průběh regulační odchylky vyhodnocuje ústřední člen regulátoru a vypočítává z něj časový průběh akční veličiny tak, aby tuto regulační odchylku odstranil. Daný časový signál je následně zesílen koncovým zesilovačem 4 a působí na motor, který pohání regulační klapku v potrubí plynu. [4]

Pokud je teplota v peci pod požadovanou hodnotou, pak je regulační odchylka kladná, akční veličina vzroste a přívod plynu do pece se zvýší. V opačném případě, kdy je teplota v peci vyšší než požadovaná, se regulační odchylka stává zápornou, akční veličina klesne a příkon plynu do pece se zmenší. [4]

Poruchovými veličinami jsou zde např. změna tlaku plynu, která způsobí změnu jeho průtoku, a tím i změnu teploty v peci. Dále jimi mohou být změna tepelného obsahu vsázky během ohřevu nebo také důsledek otevírání sázecích vrat pece, kterým se teplota v peci opět sníží. [4]

2.2 Dynamické vlastnosti regulačních členů

Dynamické vlastnosti popisují regulační členy při změnách vstupních a výstupních veličin. **Statické vlastnosti** naopak popisují vlastnosti regulačních členů v ustáleném stavu. Jelikož nás v rámci regulace nezajímá ustálený stav, ale průběh přechodného děje, zaměříme se blíže na dynamické vlastnosti regulačních členů a systémů. Konkrétně nás při popisu dynamických vlastností v rámci lineárních spojitých systémů bude zajímat jeho **vnější popis**. To je popis systému založený pouze na vztahu výstupní a vstupní veličiny, kdy neuvažujeme konstrukci a fyzikální realizaci systému. Patří sem popis systému prostřednictvím jeho diferenciální rovnice, časového nebo frekvenčního přenosu, impulzní a přechodové funkce nebo pomocí polohy pólů a nul přenosu. [1]

2.2.1 Diferenciální rovnice systému

Lineární spojitý systém nebo regulační člen lze obecně popsat diferenciální rovnicí

$$\begin{aligned} a_n \cdot y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \cdot y'(t) + a_0 \cdot y(t) = \\ = b_m \cdot u^{(m)}(t) + b_{m-1} \cdot u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 \cdot u'(t) + b_0 \cdot u(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

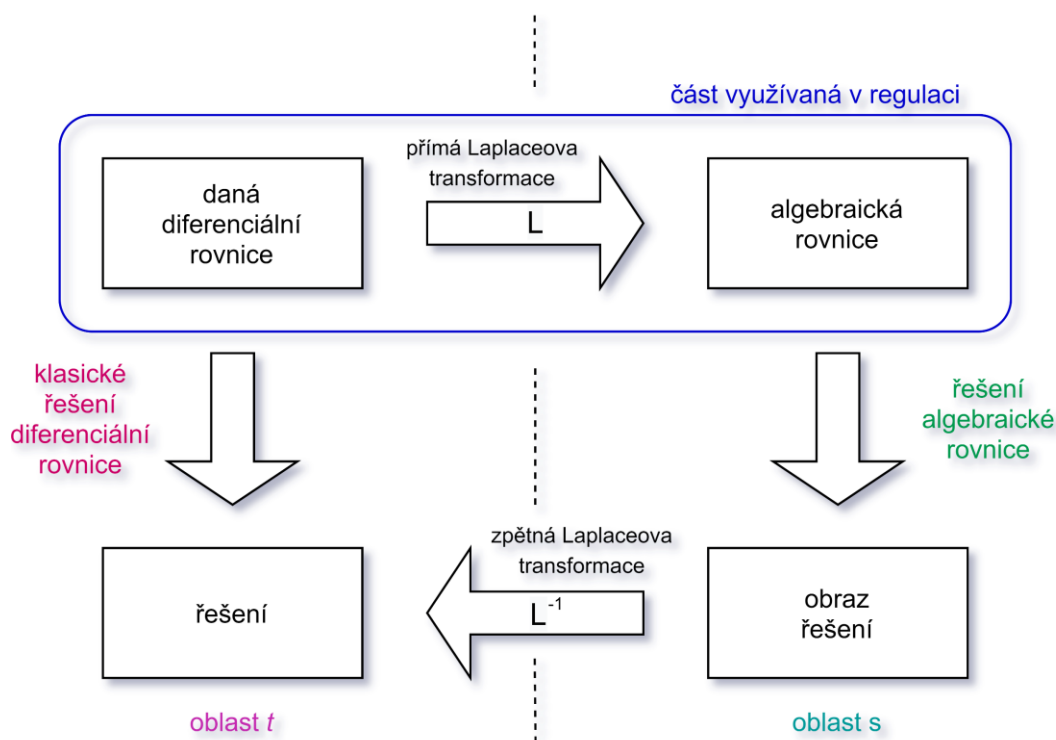
s konstantními koeficienty a_i , b_i , přičemž $u(t)$ je vstupní veličina soustavy a $y(t)$ je výstupní veličina soustavy. Z podmínky fyzikální realizovatelnosti plyne, že řád nejvyšší derivace výstupní veličiny musí být vždy větší nebo roven řádu nejvyšší derivace veličiny vstupní $m \leq n$. Diferenciální rovnice (2.1) nám následně umožňuje určit odezvu systému, známe-li průběh vstupní veličiny a n počátečních podmínek veličiny výstupní. [1, 2]

Diferenciální rovnici s konstantními koeficienty a jejímu řešení bude podrobněji věnována kapitola 3. Mnohem praktičtější způsobem pro vnější popis jak celého

systému, tak jednotlivých regulačních členů je přenos. Abychom mohli přenos zadefinovat, je potřeba připomenout teorii Laplaceovy transformace.

2.2.2 Laplaceova transformace v teorii regulace

Pro řešení diferenciálních rovnic spojitých lineárních systémů se s oblibou využívá **Laplaceovy transformace**. Obecně pojem transformace z matematického hlediska popisuje proces, kdy se původní funkce mění na jinou. Ta je jistým způsobem, co se týče výpočtu a další manipulace s ní, výhodnější. V tomto případě umožňuje Laplaceova transformace převod lineární obyčejné diferenciální rovnice na rovnici algebraickou, kterou lze již snadno řešit. Základem této transformace je, že každé funkci $f(t)$ z jedné množiny proměnných t přidružíme funkci $F(s)$ z množiny funkcí komplexní proměnné s viz následující obrázek obr. 4. [1, 2, 5]



Obr. 4: Laplaceova transformace

V oblasti automatického řízení má tato transformace ještě hlubší význam, neboť díky ní lze popsat regulační členy namísto diferenciálních rovnic tzv. **přenosovými funkcemi** (přenosy). Z přenosů jednotlivých regulačních členů je pak možné velmi jednoduše získat přenos celého systému nebo obvodu. [1, 2]

Laplaceova transformace se zároveň řadí mezi tzv. *integrální transformace*, jelikož je definována určitým integrálem závislým na nějakém parametru. Můžeme ji popsat následujícím vztahem

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt, \quad (2.2)$$

který platí pro všechna čísla s , pro která daný integrál konverguje. Funkci $f(t)$ označujeme jako **originál** a předpokládáme, že je to po částech hladká reálná funkce času, která má pro $t < 0$ nulovou hodnotu a je definovaná na intervalu $(0, \infty)$. Funkce $F(s)$ je pak funkcí komplexní proměnné s a nazýváme ji **obrazem** dané funkce. [1, 5]

Zpětný proces neboli přechod od obrazu $F(s)$ k jeho originálu $f(t)$ nazýváme **zpětnou Laplaceovou transformací**

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t). \quad (2.3)$$

Při provádění zpětné transformace je potřeba danou lomenou funkci, která je nejčastější podobou funkce $F(s)$, nejprve rozložit na parciální zlomky a až poté hledat její originál. [1, 2]

Výpočet integrálu podle definice (2.2) při hledání obrazu k dané funkci nebo naopak při zpětném určování jejího originálu (2.3) by byl značně pracný a mnohdy i poměrně obtížný. Proto se obvykle využívá tzv. **slovníku Laplaceovy transformace**, který slouží pro převod mezi originálem a obrazem funkce. V jeho levém sloupci jsou zobrazeny časové funkce $f(t)$ a v pravém sloupci najdeme jejich obrazy $F(s)$. Slovník nejběžněji používaných funkcí je uveden v následující tabulce *tab. 1*. [1]

Tab. 1: Slovník Laplaceovy transformace

	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$\eta(t)$	$\frac{1}{s}$
3	a	$\frac{a}{s}$
4	t	$\frac{1}{s^2}$
5	t^2	$\frac{2}{s^3}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
7	$\frac{1}{a} \cdot (1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s \cdot (s+a)}$
8	$\sin bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}$
9	$\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}$
10	$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a) \cdot (s+b)}$

Hlavní věty Laplaceovy transformace

Věta o linearitě $\mathcal{L}\{a \cdot f(t) + b \cdot g(t)\} = a \cdot F(s) + b \cdot G(s)$ (2.4)

Věta o obrazu derivace $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^{(n)}F(s) - s^{(n-1)}f(0) - s^{(n-2)}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$ (2.5)

Věta o obrazu integrálu $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t) \cdot dt\right\} = \frac{1}{s} \cdot F(s)$ (2.6)

Věta o počáteční hodnotě $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ (2.7)

Věta o konečné hodnotě $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ (2.8)

Věta o posunutí $\mathcal{L}\{f(t - a)\} = e^{-as}F(s)$ (2.9)

V případě obecné lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty (2.1), lze pro nulové počáteční podmínky provést její transformaci na rovnici algebraickou tzv. **obrazovou funkci**

$$a_n \cdot s^n \cdot Y(s) + a_{n-1} \cdot s^{n-1} \cdot Y(s) + \dots + a_0 \cdot Y(s) = b_0 \cdot U(s) + b_1 \cdot s \cdot U(s) + \dots + b_m \cdot s^m \cdot U(s), \quad (2.10)$$

kde $Y(s)$ je obraz výstupní veličiny $y(t)$ a $U(s)$ je obraz vstupní veličiny $u(t)$. Zároveň musí být splněna podmínka fyzikální realizovatelnosti $m \leq n$ (řád nejvyšší derivace vstupní veličiny musí být menší nebo roven řádu nejvyšší derivace veličiny výstupní). Pro obraz $Y(s)$ funkce $y(t)$ pak platí [2]

$$Y(s) = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + \dots + b_m \cdot s^m}{a_0 + a_1 \cdot s + \dots + a_n \cdot s^n} \cdot U(s). \quad (2.11)$$

Laplaceovu transformaci využíváme především při popisu přenosu daného lineárního systému.

2.2.3 Přenos

Přenosová funkce (přenos) systému je popsána rovnicí

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)}, \quad (2.12)$$

kteřá představuje podíl Laplaceova obrazu výstupní veličiny ku Laplaceovu obrazu veličiny vstupní za předpokladu nulových počátečních podmínek. Spojením (2.11) a (2.12) dostáváme základní vztah pro určení přenosu z diferenciální rovnice

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + \dots + b_m \cdot s^m}{a_0 + a_1 \cdot s + \dots + a_n \cdot s^n}. \quad (2.13)$$

Ze známého obrazu vstupního signálu $U(s)$, pak lze pomocí přenosu daného systému $G(s)$ určit obraz jeho odezvy $Y(s)$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s), \quad (2.14)$$

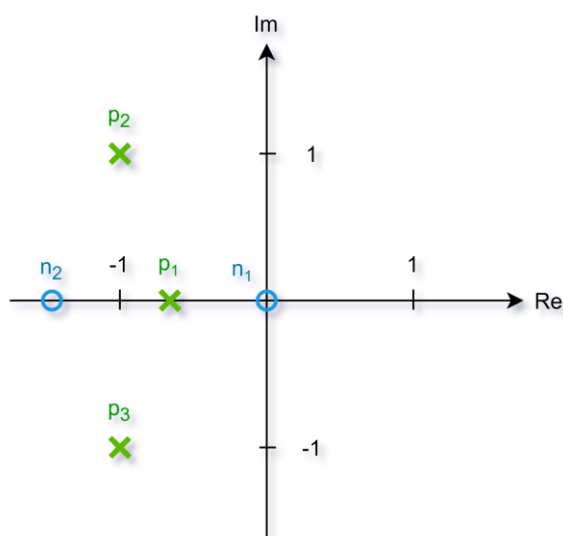
který lze následně přepsat na rovnici pro originál odezvy daný zpětnou Laplaceovou transformací [1, 2]

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s) \cdot U(s)\}. \quad (2.15)$$

Mimo vztah (2.13) existují ještě další dva běžně používané tvary pro popis přenosu. Prvním z nich je tvar vyjádřený **póly a nulami**. Rozložíme-li polynomy v čitateli a ve jmenovateli přenosu na součiny kořenových činitelů, dostaneme tvar pro popis přenosu vyjádřený pomocí pólů a nul

$$G(s) = \frac{b_m(s - n_1) \cdot (s - n_2) \cdot \dots \cdot (s - n_m)}{a_n(s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot \dots \cdot (s - p_n)}. \quad (2.16)$$

Kořeny čitatele označujeme jako *nuly přenosu* n_i . Jsou to hodnoty proměnné s , pro které přenos nabývá nulových hodnot. Kořeny jmenovatele naopak nazýváme *póly přenosu* p_i a jsou to hodnoty proměnné s , pro které přenos nabývá hodnot nekonečných. Popis systému pomocí pólů a nul je podstatným matematickým aparátem k popisu regulačních systémů. Póly i nuly mohou být čísla reálná, komplexně sdružená nebo ryze imaginární. Jejich rozložení v komplexní rovině zcela charakterizuje dynamické vlastnosti daného lineárního systému. Póly obvykle značíme křížkem a nuly kroužkem. Jejich značení a možné rozložení v komplexní rovině je znázorněno na obr. 5. [1, 2]



Obr. 5: Póly a nuly přenosu

Platí, že pokud je některý z pólů komplexní, je přechodný děj kmitavý. Leží-li pól přímo na imaginární ose, pak bude systém kmitat netlumenými kmity o stále stejně velké amplitudě. Neleží-li póly na imaginární ose a vedle složky komplexní obsahují i zápornou reálnou složku, pak mluvíme o soustavě s tlumenými kmity. S rostoucí vzdáleností pólů

od imaginární osy je přechodový děj kratší, neboť je více tlumen. Budou-li všechny póly přenosu reálné, je daný systém nekmitavý. Leží-li všechny póly nalevo od imaginární osy, je daný systém stabilní. V opačném případě mluvíme o systému nestabilním. Póly v počátku znamenají integrační charakter, naopak nuly v počátku značí vždy charakter derivační. Zároveň jsou-li póly blíže imaginární ose než nuly, bude převládat integrační složka a naopak. Integrační a derivační členy, ke kterým se tato charakteristika vztahuje, jsou popsány v kapitole 2.4. [1]

Druhým tvarem používaným pro vyjádření přenosu je tvar vyjádřený pomocí **časových konstant**. Pokud jsou póly i nuly přenosu záporná čísla, pak jejich záporně vzaté převrácené hodnoty nazveme *časové konstanty*

$$T_i = -\frac{1}{p_i}; \quad \tau_i = -\frac{1}{n_i}. \quad (2.17)$$

Přenos vyjádřený pomocí těchto časových konstant je pak ve tvaru [1, 2]

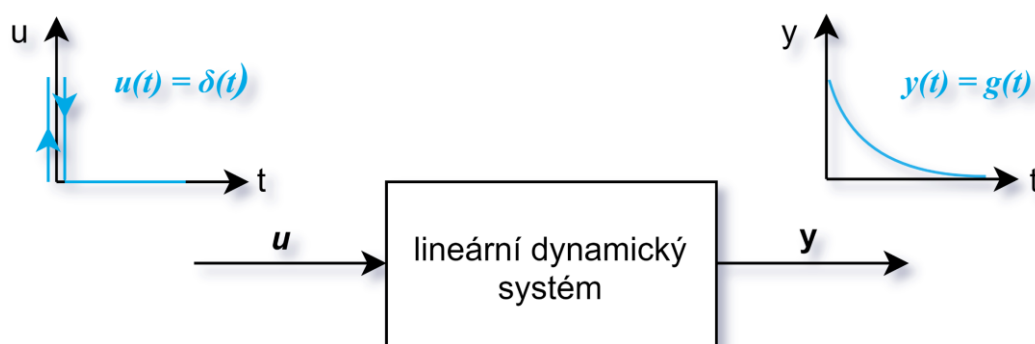
$$G(s) = \frac{b_0 (\tau_1 \cdot s + 1) \cdot (\tau_2 \cdot s + 1) \cdot \dots \cdot (\tau_m \cdot s + 1)}{a_0 (T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1) \cdot \dots \cdot (T_n \cdot s + 1)}. \quad (2.18)$$

2.2.4 Impulsní a přechodová funkce

Při popisu dynamických vlastností lineárního systému nás tedy zajímá odezva daného systému v čase v závislosti na vstupním signálu. Rozlišujeme dva základní druhy vstupních signálů. Prvním z nich je tzv. **Diracův (jednotkový) impuls $\delta(t)$** , který lze definovat jako nekonečně krátký obdélníkový impuls o nekonečně velké amplitudě, jehož plocha i Laplaceův obraz jsou rovny jedné

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{pro } t = 0 \\ 0 & \text{pro } t \neq 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1. \quad (2.19)$$

Odezvou lineárního systému na daný vstupní impuls je tzv. **impulsní funkce $g(t)$** . Grafem impulsní funkce je **impulsní charakteristika**, kterou můžeme vidět na obr. 6.



Obr. 6: Odezva systému na Diracův impuls

Povšimněme si, že mezi impulsní funkcí a přenosem je inverzní vztah – stejně jako mezi obrazem a originálem v Laplaceově transformaci. Známe-li přenos daného systému, lze impulsní funkci určit ze vztahu

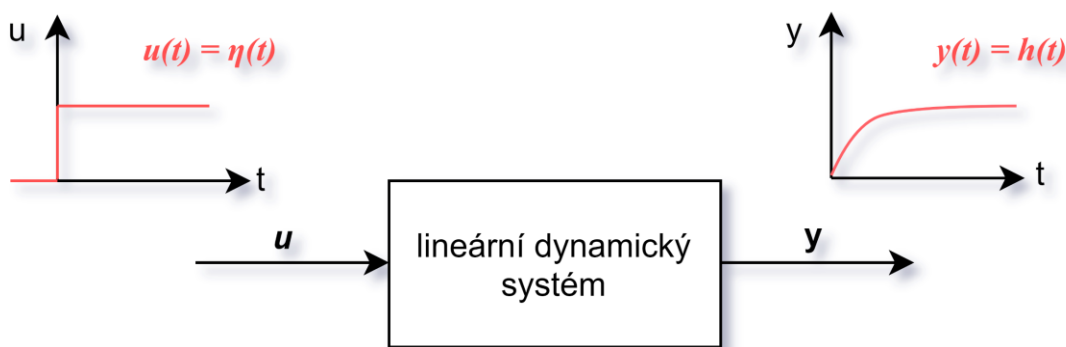
$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}, \quad (2.20)$$

proto označení impulsní funkce písmenem g (v návaznosti na přenos G). [1, 2]

Dalším, z hlediska regulace významnějším, vstupním signálem je tzv. **jednotkový skok** $\eta(t)$. Tento skok lze popsat jako časovou funkci, která má do času $t = 0$ nulovou hodnotu, poté skočí na hodnotu jedna a tu si následně udržuje

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \geq 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0 \end{cases} \quad \mathcal{L}\{\eta(t)\} = \frac{1}{s}. \quad (2.21)$$

Odezvou systému na vstupní jednotkový skok je tzv. **přechodová funkce** $h(t)$. Jejím grafem je **přechodová charakteristika**, která je znázorněná na obr. 7.



Obr. 7: Odezva systému na jednotkový skok

Ze známého přenosu systému určíme přechodovou funkci pomocí zpětné Laplaceovy transformace

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}. \quad (2.22)$$

Přechodovou funkci lze však určit i přímo, bez převodu na přenos, ze známé diferenciální rovnice systému. Využití přechodových charakteristik má mimo jiné velký význam u popisu systémů, u nichž neznáme dobře jejich dynamické vlastnosti. [1, 2]

Co se týče vztahu mezi impulsní a přechodovou funkcí, pak vzhledem k linearitě derivace a dynamického systému lze impulsní funkci získat derivací funkce přechodové, a naopak funkci přechodovou integrací funkce impulsní [1, 2]

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad (2.23)$$

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau. \quad (2.24)$$

2.2.5 Frekvenční přenos

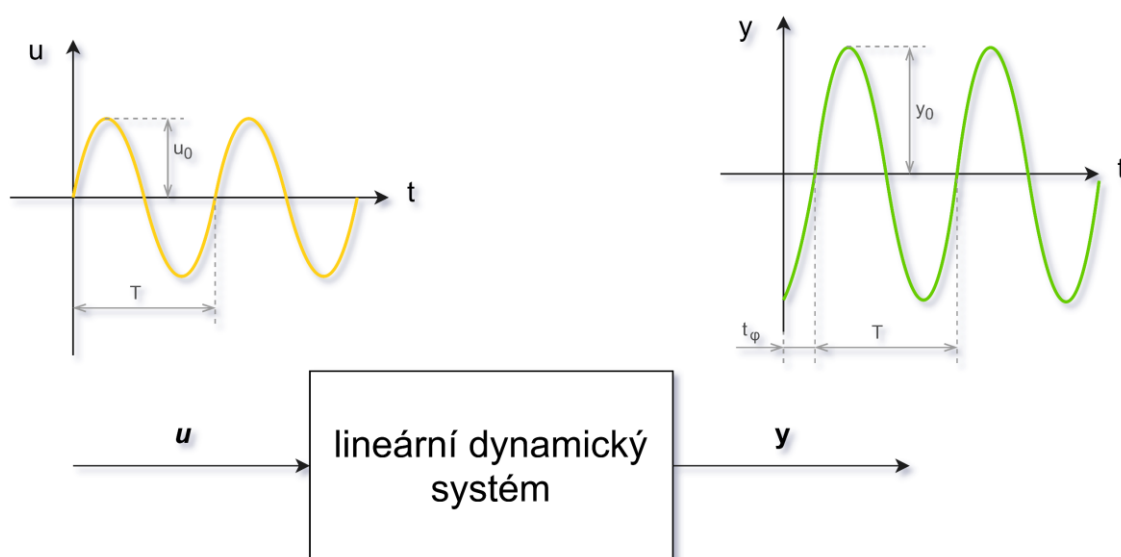
Průběh vstupů a výstupů systému lze vedle časové oblasti popsat také v oblasti frekvenční (kmitočtové). Na vstupu takového systému je **budící harmonický signál**

$$u(t) = u_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (2.25)$$

kmitající s amplitudou u_0 o úhlové frekvenci ω . Na výstupu po odeznění přechodových dějů vznikne tzv. **vynucený harmonický signál**

$$y(t) = y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad (2.26)$$

s amplitudou y_0 . Ten kmitá se stejnou úhlovou frekvencí ω a je oproti původnímu signálu fázově posunutý o úhel φ . Průběh vstupního a výstupního signálu můžeme vidět na Obr. 8.



Obr. 8: Průběh harmonického signálu

Vyjádříme-li funkce (2.25), (2.26) v komplexním tvaru

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 \cdot e^{j(\omega \cdot t)} \\ y(t) &= y_0 \cdot e^{j(\omega \cdot t + \varphi)}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

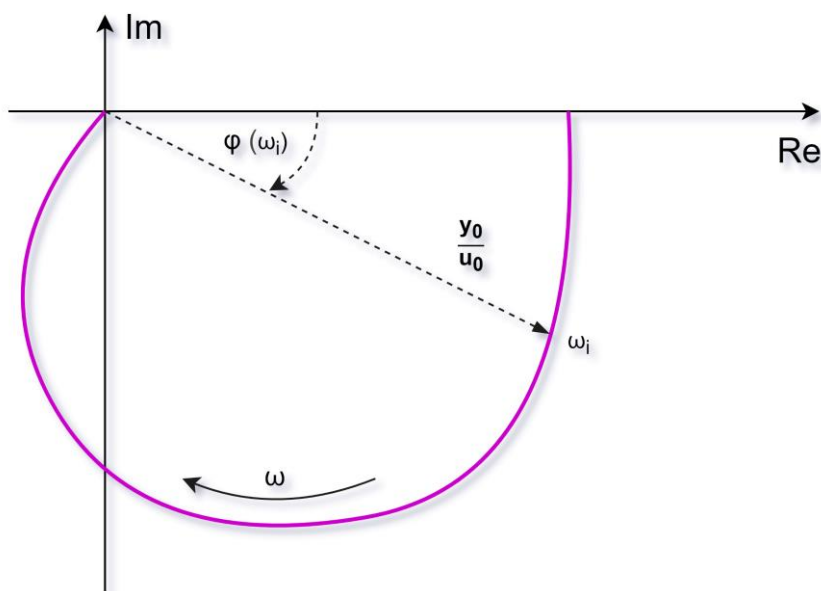
lze **frekvenční přenos** systému zapsat jako

$$G(j\omega) = \frac{y(t)}{u(t)} = \frac{y_0}{u_0} \cdot e^{j\varphi}, \quad (2.28)$$

kde $\frac{y_0}{u_0}$ je poměr amplitud. Frekvenční přenos lze stejně jako přenos (2.13) zapsat prostřednictvím diferenciální rovnice. Dosazením vztahů (2.27) do diferenciální rovnice (2.1) dostáváme vztah pro frekvenční přenos ve tvaru

$$G(j\omega) = \frac{b_0 + b_1 \cdot (j\omega) + \dots + b_m \cdot (j\omega)^m}{a_0 + a_1 \cdot (j\omega) + \dots + a_n \cdot (j\omega)^n}. \quad (2.29)$$

Srovnáním vztahů (2.29) a (2.13) vidíme, že frekvenční přenos získáme z přenosu dosazením výrazu $j\omega$ za proměnnou s a naopak. Grafickým vyjádřením frekvenčního přenosu je **frekvenční charakteristika**. Tu znázorňujeme v komplexní rovině a sestojíme ji dosazením hodnot v rozmezí 0 až ∞ za úhlovou frekvenci ω , viz obr. 9.



Obr. 9: Frekvenční charakteristika

V praktickém sestrojování frekvenční charakteristiky je však potřeba nejprve upravit obecný tvar frekvenčního přenosu $G(j\omega)$ na složkový tvar a následně dosazováním různých hodnot ω od 0 do ∞ sestavit pro dopočítané hodnoty $\text{Re}[G(j\omega)]$ a $\text{Im}[G(j\omega)]$ odpovídající tabulku, podle které frekvenční charakteristiku zkonstruujeme. [1, 2]

2.3 Základní regulační členy

Na základě charakteru přechodové funkce rozlišujeme několik regulačních členů. Vyjdeme z věty o konečné hodnotě (2.8) a ze skutečnosti, že se přechodová charakteristika regulačního členu v čase $t \rightarrow \infty$ ustálí na konkrétní hodnotě $h(\infty)$. Tato ustálená hodnota přechodové charakteristiky je tedy dána limitním vztahem

$$h(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s). \quad (2.30)$$

Dosazením rovnice pro přenos (2.13) a výpočtem limity lze tento vztah upravit na

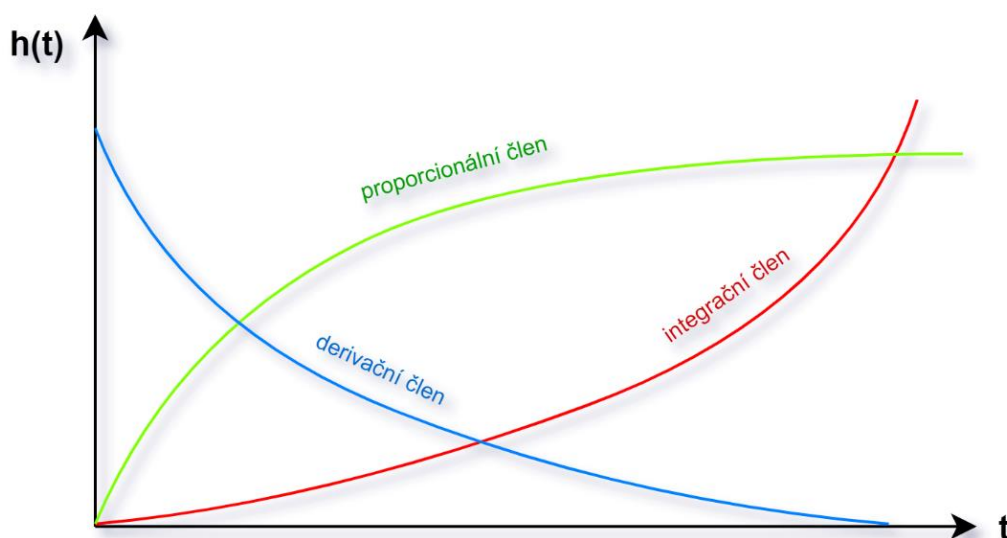
$$h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{b_0 + b_1 \cdot s + \dots + b_m \cdot s^m}{a_0 + a_1 \cdot s + \dots + a_n \cdot s^n} = \frac{b_0}{a_0}. \quad (2.31)$$

Z tohoto vztahu pro ustálenou hodnotu přechodové charakteristiky můžeme odvodit tři základní skupiny regulačních členů – **proporcionální**, **derivační** a **integrační**. Jejich charakteristika je uvedena v tab. 2. [1]

Tab. 2: Charakteristika regulačních členů

Typ členu	Charakteristika členu	Obecný přenos
Proporcionální	$a_0 \neq 0; b_0 \neq 0$ → $h(t)$ se ustálí na konkrétní hodnotě	$G(s) = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + \dots + b_m \cdot s^m}{a_0 + a_1 \cdot s + \dots + a_n \cdot s^n}$
Derivační	$a_0 \neq 0; b_0 = 0$ → $h(t)$ se ustálí na nulové hodnotě	$G(s) = \frac{s^r \cdot (b_0 + b_1 \cdot s + \dots + b_m \cdot s^m)}{a_0 + a_1 \cdot s + \dots + a_n \cdot s^n}$
Integrační	$a_0 = 0; b_0 \neq 0$ → $h(t)$ se neustálí na konečné hodnotě	$G(s) = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + \dots + b_m \cdot s^m}{s^q \cdot (a_0 + a_1 \cdot s + \dots + a_n \cdot s^n)}$

Podíváme-li se blíže na přenosy jednotlivých regulačních členů viz tab. 2, můžeme obecně říct, že pokud lze v čitateli rovnice přenosu vytknout s^r , jedná se o člen derivační r -tého řádu se setrvačností n -tého řádu. Naopak lze-li vytknout s^q ve jmenovateli, mluvíme o členu integračním q -tého řádu s příslušnou setrvačností n -tého řádu. Na obr. 10 jsou vyobrazeny přechodové charakteristiky jednotlivých regulačních členů. [1]



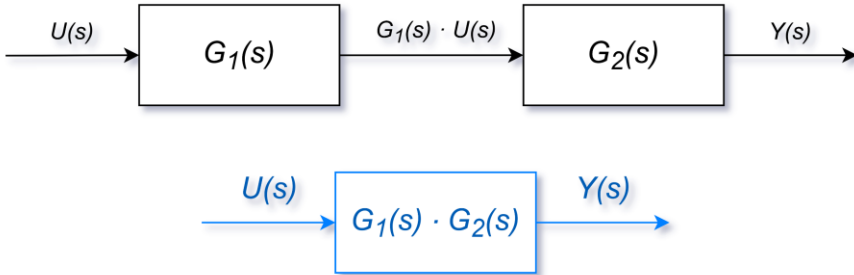
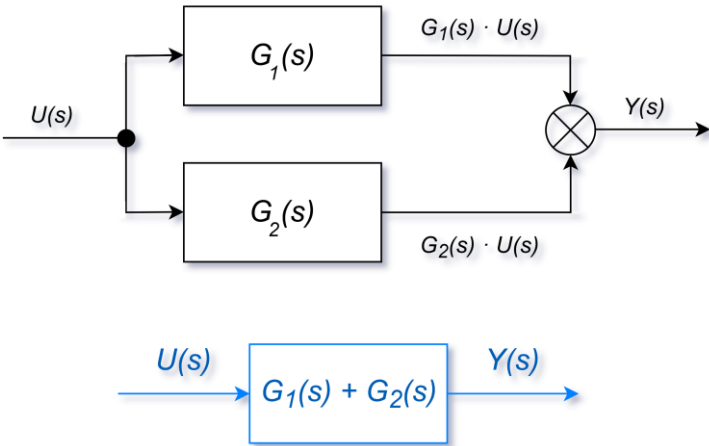
Obr. 10: Regulační členy

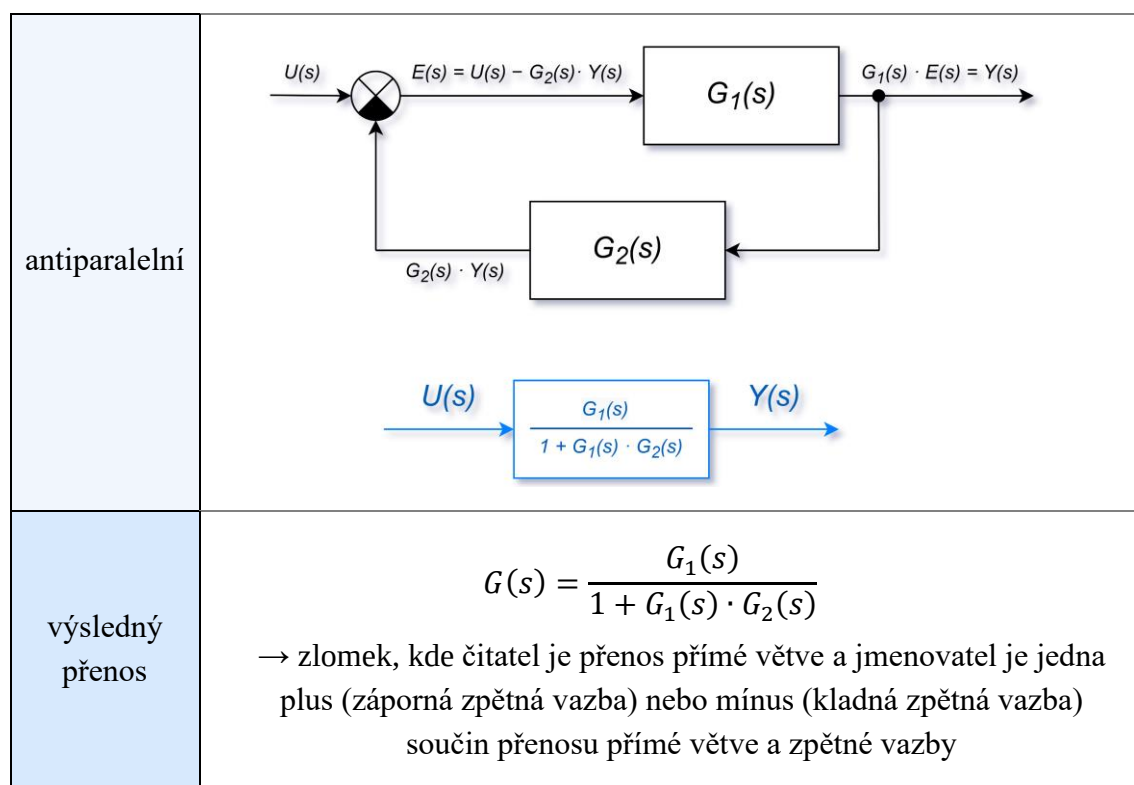
2.4 Bloková algebra

Přenos lineárního systému $G(s)$ popisuje vztah mezi obrazem vstupní $U(s)$ a výstupní veličiny $Y(s)$. V praxi se běžně setkáváme se složitějšími systémy, u kterých výsledný přenos stanovujeme pomocí známých přenosů jednotlivých dílčích členů a jejich vzájemného propojení. Pro znázornění jednotlivých členů a jejich vazeb využíváme

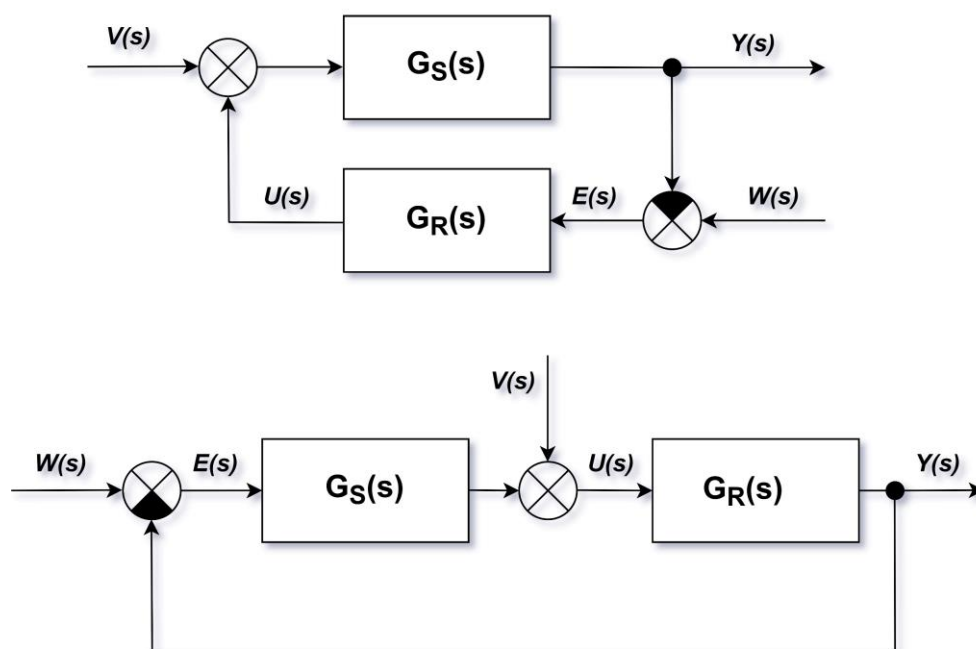
blokových schémat, které byly popsány v kap. 2.1.1. **Blokovou algebrou** pak nazýváme pravidla, podle kterých vytváříme přenos celého systému na základě dílčích přenosů jeho členů. Rozlišujeme tři základní druhy zapojení jednotlivých bloků: **sériové**, **paralelní** a **antiparalelní** (zpětnovazebné). Jednotlivé typy zapojení a jejich přenosy popisuje následující tabulka *tab. 3.* [1, 2]

Tab. 3: Zapojení bloků

zapojení	schéma zapojení
sériové	
výsledný přenos	$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) \rightarrow \text{součin jednotlivých členů}$
paralelní	
výsledný přenos	$G(s) = G_1(s) + G_2(s) \rightarrow \text{součet jednotlivých členů}$



Pravidla blokové algebry nyní aplikujeme na regulační obvod. Ten se skládá z regulované soustavy dané přenosem $G_S(s)$ a regulátoru s přenosem $G_R(s)$. Uvažujeme jednoduchý obvod s jednou poruchovou veličinou v vstupující do soustavy. Blokové schéma takového regulačního obvodu můžeme znázornit dvěma způsoby uvedenými na obr. 11.



Obr. 11: Bloková schémata regulačního obvodu

Jedno z takových schémat jsme mohli vidět již na *obr. 2*. Přejdeme-li k charakteru výsledného přenosu tohoto regulačního obvodu, potom přenos řízení určuje vztah

$$G_W(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_S(s) \cdot G_R(s)}{1 + G_S(s) \cdot G_R(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} \quad (2.32)$$

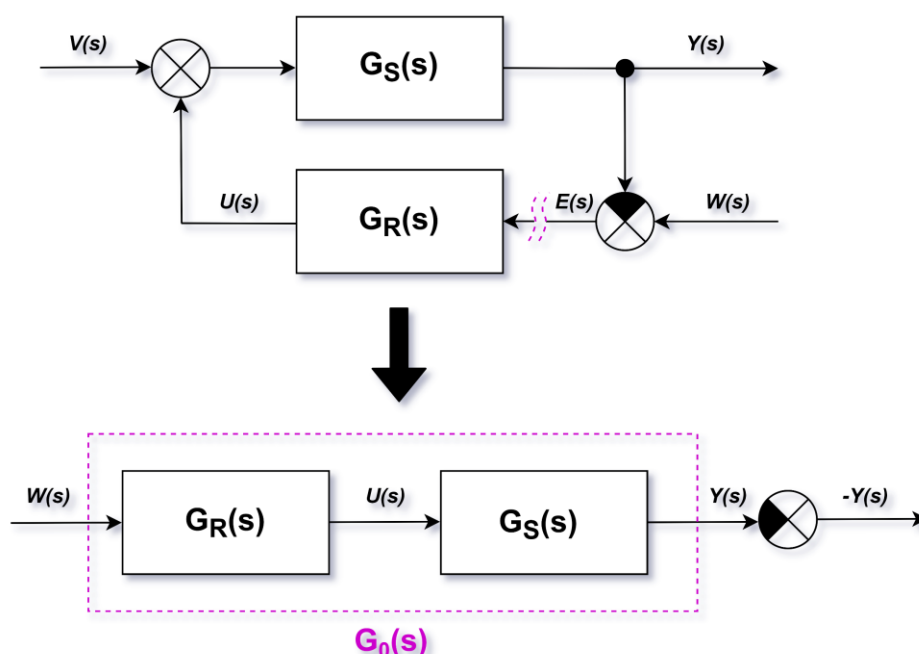
a přenos poruchy

$$G_v(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G_S(s)}{1 + G_S(s) \cdot G_R(s)} = \frac{G_S(s)}{1 + G_0(s)}, \quad (2.33)$$

kde $W(s)$ je obraz řídící veličiny $w(t)$ a $V(s)$ obraz poruchové veličiny $v(t)$. Vztah

$$G_0(s) = G_S(s) \cdot G_R(s) \quad (2.34)$$

značí přenos rozpojeného obvodu. Jedná se o sériové zapojení soustavy a regulátoru, které vzniklo z uzavřeného obvodu fiktivním přerušením viz *obr. 12*. [1, 2]

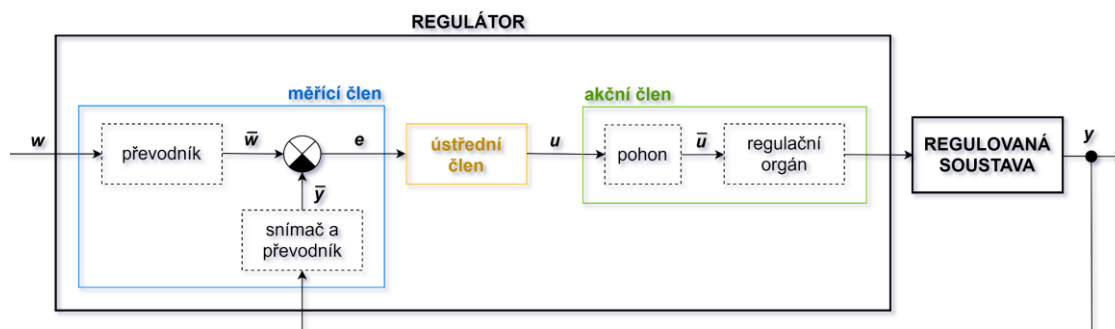


Obr. 12: Rozpojený regulační obvod

2.5 Regulátory

Jak jsme se zmínili v přechozí kapitole, v rámci regulačního obvodu rozlišujeme dvě hlavní části – regulovanou soustavu a regulátor. Pod pojem **regulátor** přitom zahrnujeme všechny ostatní členy obvodu s výjimkou regulované soustavy. Za regulátor je považováno zařízení, které samočinně provádí regulaci. To je proces, kdy akční veličina působí na regulovanou soustavu tak, aby se regulovaná veličina příliš nevychylovala od předepsané hodnoty, a tedy aby regulační odchylka byla minimální, nejlépe nulová. V širším slova smyslu mluvíme o regulátoru jako o prvku složeném ze tří částí zapojených za sebou v sérii. Jsou jimi **měřící**, **ústřední** a **akční člen** znázorněné

na obr. 13. V praxi činnost regulátoru vypadá tak, že měřicí člen (snímač) změří skutečnou hodnotu regulované veličiny $y(t)$, porovná ji s žádanou hodnotou $w(t)$ a z jejich rozdílu vytvoří regulační odchylku $e(t)$. Tu následně pomocí ústředního členu vhodně zpracuje a prostřednictvím akční veličiny $u(t)$ akčního členu působí na regulovanou soustavu tak, aby se regulační odchylka co nejvíce zminimalizovala. [1, 2]



Obr. 13: Popis regulátoru

Nyní se omezíme pouze na popis ústředního členu regulátoru, resp. popis jeho dynamických vlastností. Vstupem regulátoru je regulační odchylka $e(t)$ a jeho výstupem akční veličina $u(t)$. Podle požadavku na výsledný přenos může regulátor regulační odchylku **proporcionálně zesilovat**, **integrovat** nebo **derivovat**. Na základě toho rozlišujeme několik typů regulátorů. [1, 2]

2.5.1 P-regulátor (proporcionální)

Nastavuje hodnotu akční veličiny úměrně k regulační odchylce

$$u(t) = r_0 \cdot e(t), \quad (2.35)$$

kde r_0 je tzv. *proporcionální konstanta (zesílení)*. Přenos ideálního proporcionálního regulátoru je dán vztahem

$$G_R(s) = \frac{\mathcal{L}\{u(t)\}}{\mathcal{L}\{e(t)\}} = \frac{U(s)}{E(s)} = r_0, \quad (2.36)$$

kde $E(s)$ je obraz regulační odchylky $e(t)$. P-regulátor zasahuje okamžitě, ale je statickým systémem (systém je v ustáleném stavu), nemůže tak při řízení statického systému zajistit nulovou regulační odchylku.

2.5.2 I-regulátor (integrační)

Nastavuje hodnotu akční veličiny úměrně integrálu regulační odchylky

$$u(t) = \frac{r_0}{T_i} \cdot \int e(t) dt, \quad (2.37)$$

kde T_i je *integrační konstanta* regulátoru. Přenos ideálního integračního regulátoru je

$$G_R(s) = \frac{L\{u(t)\}}{L\{e(t)\}} = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{r_0}{T_i \cdot s}. \quad (2.38)$$

I-regulátor zasahuje postupně až do dosažení nulové regulační odchylky. Ustálený stav může nastat pouze za předpokladu nulové regulační odchylky.

2.5.3 D-složka regulátoru (derivační)

Nastavuje hodnotu akční veličiny úměrně derivaci regulační odchylky

$$u(t) = r_0 T_d \cdot e'(t), \quad (2.39)$$

kde T_d je *derivační konstanta*. Přenos derivačního regulátoru představuje vztah

$$G_R(s) = \frac{L\{u(t)\}}{L\{e(t)\}} = \frac{U(s)}{E(s)} = r_0 T_d \cdot s. \quad (2.40)$$

Derivační složku však nelze samostatně použít, kvůli velkým odezvám D-regulátoru na rychlé změny regulační odchylky. To by mohlo vést až k nekontrolovatelnému rozkmitání regulačních orgánů.

2.5.4 PI-regulátor (proporcionálně-integrační)

Je kombinací proporcionálního a integračního regulátoru

$$u(t) = r_0 \cdot e(t) + \frac{r_0}{T_i} \cdot \int e(t) dt \quad (2.41)$$

a jeho přenos je

$$G_R(s) = r_0 \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} \right). \quad (2.42)$$

2.5.5 PD-regulátor (proporcionálně-derivační)

Představuje kombinaci proporcionálního a derivačního regulátoru

$$u(t) = r_0 \cdot e(t) + r_0 T_d \cdot e'(t) \quad (2.43)$$

s přenosem

$$G_R(s) = r_0 + r_0 T_d \cdot s = r_0 (1 + T_d \cdot s). \quad (2.44)$$

2.5.6 PID-regulátor (proporcionálně-integračně-derivační)

Vznikne spojením všech tří základních druhů regulátorů

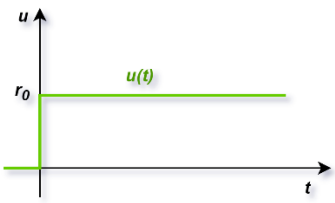
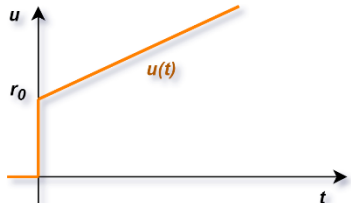
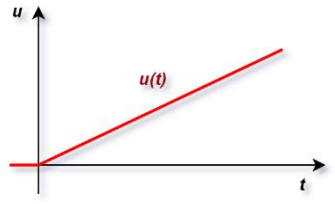
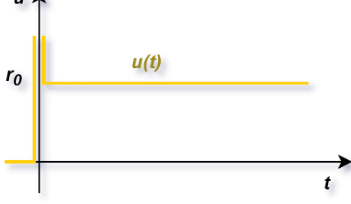
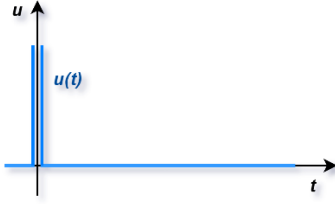
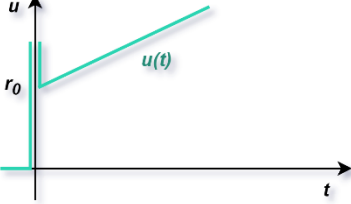
$$u(t) = r_0 \cdot e(t) + \frac{r_0}{T_i} \cdot \int e(t) dt + r_0 T_d \cdot e'(t). \quad (2.45)$$

Jeho přenos je dán vztahem

$$G_R(s) = r_0 + \frac{r_0}{T_i \cdot s} + r_0 T_d \cdot s = r_0 \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s \right) \quad (2.46)$$

Typy regulátorů a jejich popis jsou citovány z [1, 2]. Přechodové charakteristiky jednotlivých typů regulátorů jsou uvedeny v následující tabulce *tab. 4*.

Tab. 4: Přechodové charakteristiky regulátorů

Přechové charakteristiky regulátorů			
P regulátor		PI regulátor	
I regulátor		PD regulátor	
D složka regulátoru		PID regulátor	

3 HOMOGENNÍ LODR_n

3.1 Konstrukce řešení homogenní LODR_n

Většina regulačních obvodů může být popsána **lineární obyčejnou diferenciální rovnicí n -tého řádu** (LODR_n) s konstantními koeficienty, v níž nezávisle proměnnou je čas

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \cdot y'(t) + a_0 \cdot y(t) = b(t). \quad (3.1)$$

Homogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty rozumíme rovnicí typu

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \cdot y'(t) + a_0 \cdot y(t) = 0. \quad (3.2)$$

V následující kapitole bude vysvětleno, proč nás zajímá pouze řešení homogenní diferenciální rovnice. Nyní se budeme věnovat hledání jejího řešení. Tato rovnice je řádu n a její koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ jsou konstanty. Partikulární řešení této rovnice hledáme ve tvaru

$$y(t) = e^{\lambda t}. \quad (3.3)$$

Zde je potřeba určit příslušné číslo λ . Dosadíme-li výraz (3.3) do rovnice (3.2), dostaneme

$$e^{\lambda t}(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0) = 0. \quad (3.4)$$

Rovnost (3.4) bude splněna právě tehdy, když bude platit

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0. \quad (3.5)$$

Rovnici (3.5) nazýváme **charakteristickou rovnicí** diferenciální rovnice (3.2). Dále je třeba určit kořeny této charakteristické rovnice. Počet kořenů rovnice v oboru komplexních čísel je roven jejímu řádu. Ze známých kořenů lze následně určit n lineárně nezávislých řešení diferenciální rovnice (3.2), která tvoří *fundamentální systém řešení* dané rovnice. Velmi důležitá je lineární nezávislost těchto řešení. [5]

Nyní se budeme zabývat konstrukcí řešení homogenní diferenciální rovnice v závislosti na kořenech charakteristické rovnice. Kořeny rovnice mohou být buď čísla reálná nebo komplexní. Pro dané dva případy platí následující:

a) Každému k -násobnému reálnému kořenu λ charakteristické rovnice (3.5) náleží právě k lineárně nezávislých partikulárních řešení diferenciální rovnice (3.2). Tato řešení jsou ve tvaru

$$y_1(t) = e^{\lambda t}, y_2(t) = te^{\lambda t}, \dots, y_k(t) = t^{k-1}e^{\lambda t}. \quad (3.6)$$

b) Každému k -násobnému komplexnímu kořenu $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ ($b \neq 0$) náleží právě $2k$ lineárně nezávislých partikulárních řešení diferenciální rovnice (3.2). Tato řešení mají tvar

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{at} \cos(bt), y_2(t) = te^{at} \cos(bt), \dots, y_k(t) = t^{k-1} e^{at} \cos(bt) \\ y_{k+1}(t) &= e^{at} \sin(bt), y_{k+2}(t) = te^{at} \sin(bt), \dots, y_{2k}(t) = t^{k-1} e^{at} \sin(bt) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Řešení diferenciální rovnice (3.2) má obecný tvar

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}, \quad (3.8)$$

kde jsou $C_1, C_2, \dots, C_n$ vhodné konstanty. V této fázi je potřeba vyřešit **počáteční** (Cauchyovu) **úlohu** a jednotlivé konstanty dopočítat. To znamená určit řešení homogenní rovnice (3.2), které vyhovuje n počátečním podmínkám

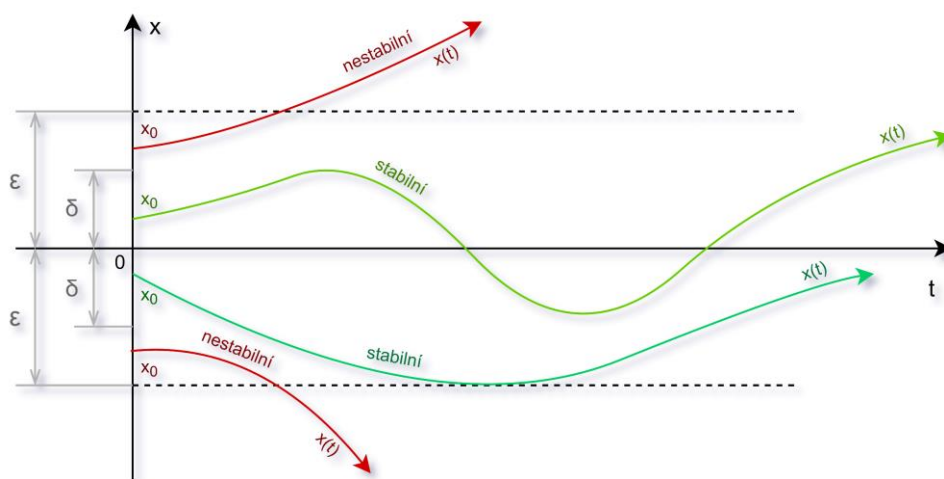
$$\begin{aligned} y(t_0) &= y_0 \\ y'(t_0) &= y_1 \\ &\dots \\ y^{(n-1)}(t_0) &= y_{n-1}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Tyto podmínky se nejčastěji předepisují v bodě, který představuje časový počátek. [5]

3.2 Stabilita řešení homogenní LODRn

Pod pojmem stabilita řešení chápeme schopnost zachování daného stavu. Existuje mnoho definic stability. Pro praxi má největší význam *stabilita Ljapunovská* a *stabilita asymptotická*. Přesná definice **Ljapunovské stability** nebude předmětem našeho zkoumání, ale pro názornost jsou uvedeny příklady stabilního i nestabilního řešení ve smyslu Ljapunova.

Pokud bude počáteční stav x_0 zvolen v δ -okolí počátku a řešení $x(t)$ nepřesáhne zvolené ε -okolí počátku, lze řešení považovat za Ljapunovsky stabilní, viz obr. 14. [6]



Obr. 14: Stabilita dle Ljapunova

Připomeňme, že při této definici nepožadujeme, aby řešení konvergovalo do nuly.

Řešení homogenní diferenciální rovnice s konstantními koeficienty lze považovat za **asymptoticky stabilní**, jestliže se s rostoucím časem blíží k nule [7]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_h(t) = 0. \quad (3.10)$$

Vzhledem ke tvaru řešení (3.8) nám stačí ukázat, že pro kořeny se zápornou reálnou částí bude řešení homogenní diferenciální rovnice (3.2) konvergovat s rostoucím časem k nule. Uvažujme $s \in \mathbb{R}, s > 0$. Pro partikulární řešení odpovídající tomuto kořenu bude platit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{st}} = \left| \frac{1}{\infty} \right| = 0. \quad (3.11)$$

Pro $s \in \mathbb{C}$ se zápornou reálnou částí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(-a+ib)t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{at}} \cdot \underbrace{(\cos bt + i \cdot \sin bt)}_{\text{omezená funkce}} = 0. \quad (3.12)$$

Toto plyne z věty o limitě součinu dvou funkcí, z nichž jedna funkce konverguje k nule a druhá funkce je omezená. Vzhledem ke tvaru řešení (3.8) a známé větě o limitě součtu, jsme právě ukázali, proč budeme v následující kapitole požadovat po všech kořenech charakteristické rovnice zápornou reálnou část. Teorii konstrukce řešení a jeho chování v nekonečnu nám demonstruje následující příklad.

3.3 Příklad

Zjistěte, zda řešení dané diferenciální rovnice konverguje k nule $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$, diverguje $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$ nebo osciluje (limita neexistuje).

a) $y''' + 9y'' + 26y' + 24y = 0$

$$\lambda^3 + 9\lambda^2 + 26\lambda + 24 = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda + 3)(\lambda + 4) = 0$$

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-3t} + C_3 e^{-4t}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(C_1 \frac{1}{e^{2t}} + C_2 \frac{1}{e^{3t}} + C_3 \frac{1}{e^{4t}} \right) = \underline{\underline{0}}$$

$$\lambda_1 = -2$$

$$\lambda_2 = -3$$

$$\lambda_3 = -4$$

b) $y''' + y'' + y' + y = 0$

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 \cos t + C_3 \sin t$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_{2,3} = \pm i$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(C_1 \frac{1}{e^t} + C_2 \cos t + C_3 \sin t \right) \rightarrow \text{limita neexistuje}$$

c) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^t$$

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 2 \end{array}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(C_1 \frac{1}{e^t} + C_2 e^{2t} + C_3 e^t \right) = \underline{\underline{\infty}}$$

4 KRITÉRIA STABILITY

V této kapitole budou rozebrána jednotlivá kritéria určování stability regulačních obvodů se zaměřením na kritéria algebraická. Stabilita řešení diferenciálních rovnic byla z matematického hlediska uvedena již v předchozí kapitole. Nyní se zaměříme na popis stability a její důležitost z hlediska teorie regulace, abychom mohli následně navázat na popis jednotlivých kritérií.

4.1 Stabilita regulačního obvodu

Obecně můžeme říct, že lineární regulační obvod je *stabilní*, pokud je schopen se po vychýlení ze svého rovnovážného stavu vrátit zpět do rovnovážné polohy – původní nebo nové. To je stav, kdy se regulovaná veličina s časem nemění. Vychýlení z tohoto stavu bývá způsobeno určitým vzruchem, přičemž stabilitu posuzujeme až po jeho odeznění. [1, 2]

Stabilita je tedy schopnost soustavy udržet si tento rovnovážný stav. Představuje jednu z nejvýznamnějších vlastností regulačních obvodů a je nutnou základní podmínkou jejich správné funkce. Můžeme ji tedy definovat jako schopnost regulačního systému ustálit regulovanou veličinu $y(t)$, buď na původní hodnotě, kterou měla před vychýlením (v případě působení poruchových veličin), nebo na hodnotě nové (v případě vychýlení žádanou hodnotou). [1, 2]

Stabilita lineárních dynamických systému nezávisí na vstupních hodnotách, důležité jsou pouze vlastnosti systému. Z tohoto důvodu je pro určení stability regulačního obvodu důležitá pouze složka **homogenní**, kterou jsme se proto zabývali v předchozí kapitole. Ta popisuje výstupní chování daného systému po jeho vyvedení z rovnováhy, následného ustálení a ponechání bez dalšího vstupního působení. Nehomogenní složka nemá na stabilitu vliv, neboť závisí čistě na průběhu vstupní veličiny (řídící nebo poruchové), která vyvedla daný systém z rovnovážného stavu. A jelikož stabilitu regulačního obvodu posuzujeme až po skončení působení tohoto vstupního signálu, nehomogenní složka nás v tomto případě nezajímá. [1, 2]

U lineárních systémů mluvíme o tzv. **globální stabilitě**. To znamená, že pokud je systém stabilní, platí tato stabilita pro všechny jeho počáteční podmínky. Je tedy jednou z vlastností lineárních systémů a není závislá na jejich okamžitém stavu, vstupních parametrech nebo počátečních podmínkách. Opačně je tomu u systémů nelineárních, kdy se stabilita posuzuje pouze **lokálně** – pro libovolně malou oblast počátečních podmínek v okolí rovnovážného stavu. [1]

Z předchozího textu vyplývá, že regulační obvod musí být tedy vždy a za každou cenu stabilní. Parametry regulované soustavy jsou však dané konstrukcí, nelze je měnit. Stabilitu obvodu proto zajišťujeme vhodnou volbou parametrů regulátoru.

Pokud se regulační obvod po svém vychýlení neustálí ve stavu rovnováhy, pak je obvod označován jako *nestabilní*. [1, 2]

4.1.1 Podmínky stability

Při určování základních podmínek stability lineárních systémů vyjdeme z přenosu řízení

$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{b_0 + b_1 \cdot s + \dots + b_m \cdot s^m}{a_0 + a_1 \cdot s + \dots + a_n \cdot s^n} \quad (4.1)$$

a přenosu poruchy

$$G_v(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G_s(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{c_0 + c_1 \cdot s + \dots + c_m \cdot s^m}{a_0 + a_1 \cdot s + \dots + a_n \cdot s^n}, \quad (4.2)$$

o kterých jsme se zmínili v kapitole 2.4. Rovnici (4.1), resp. (4.2) můžeme převést na diferenciální rovnici řízení, resp. poruchy

$$a_n \cdot y^{(n)}(t) + \dots + a_1 \cdot y'(t) + a_0 \cdot y(t) = \begin{cases} b_m \cdot w^{(m)}(t) + \dots + b_1 \cdot w'(t) + b_0 \cdot w(t) \\ c_m \cdot v^{(m)}(t) + \dots + c_1 \cdot v'(t) + c_0 \cdot v(t) \end{cases} \quad (4.3)$$

Pravou stranu (4.3) položíme rovnu nule a z této homogenní rovnice získáme charakteristickou rovnici

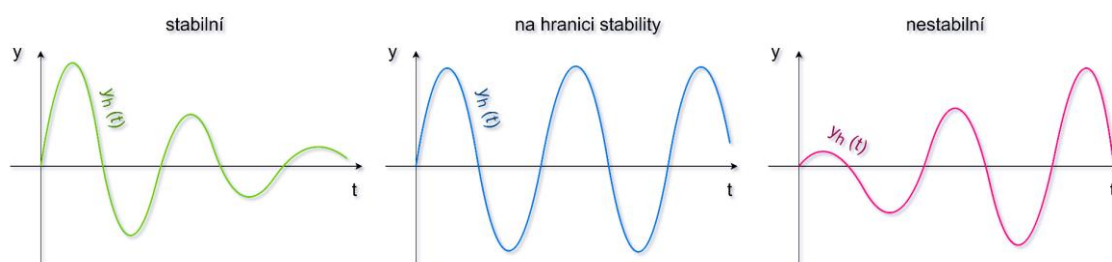
$$a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0 = 0. \quad (4.4)$$

V předchozí kapitole jsme si ukázali, že řešení homogenní diferenciální rovnice můžeme psát ve tvaru

$$y(t) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot e^{s_i t}, \quad (4.5)$$

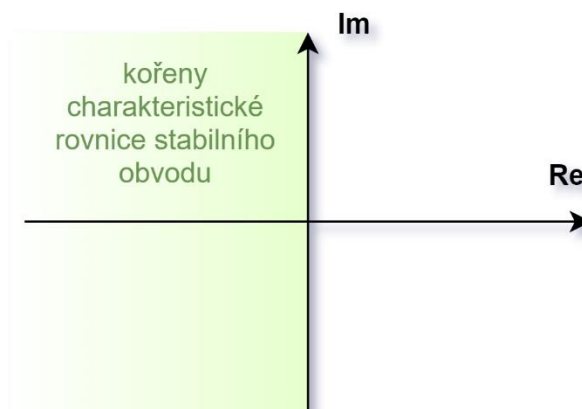
který je ekvivalentní vztahu (3.8), přičemž místo symbolu λ nyní používáme písmeno s . [1]

Stabilitu řešení jednotlivých diferenciálních rovnic tedy budeme posuzovat podle toho, zda dané řešení konverguje k určité konkrétní hodnotě, osciluje nebo diverguje. Konvergující řešení se ustálí na určité konkrétní hodnotě a toto řešení označujeme jako řešení **stabilní**. Pokud řešení osciluje, znamená to, že jeho hodnota kmitá kolem určité střední hodnoty. Amplituda kmitu se ani nezmenšuje, ani neroste. O tomto řešení říkáme, že je **na hranici stability**. Poslední možností je, že dané řešení bude divergovat. To znamená, že s rostoucí limitní hodnotou, která jde do nekonečna, roste i amplituda kmitů a řešení je tak **nestabilní**. Ukázku jednotlivých případů můžeme vidět na *obr. 15*. [1]



Obr. 15: Stabilita

Jak už bylo naznačeno, tak při rozhodování o stabilitě daného řešení je potřeba určit limitní hodnotu řešení dané diferenciální rovnice. Stabilní řešení musí být konvergentní. Nutná podmínka konvergence říká, že pokud funkční řada, v našem případě je jí homogenní část diferenciální rovnice, konverguje, potom limita posloupností členů řady je nulová, tj. platí vztah (3.10). Ze stejného vztahu vyplývá **obecná podmínka stability**, která říká, že daný regulační obvod je stabilní, pokud mají všechny kořeny charakteristické rovnice **zápornou reálnou část** (leží v levé komplexní polorovině) viz *obr.16*. Pokud jsou navíc všechny kořeny charakteristické rovnice ležící v levé komplexní polorovině reálné, má obecné homogenní řešení y_h nekmitavý průběh. Pokud je některý z kořenů číslo komplexní, pak spolu s jeho komplexně sdruženým kořenem tvoří tzv. kmitavou část řešení. [1, 2]



Obr. 16: Kořeny charakteristické rovnice v komplexní rovině

Ze vztahů (4.1) a (4.2) vidíme, že charakteristická rovnice může být napsána také ve tvaru

$$1 + G_0(s) = 0. \quad (4.6)$$

Jelikož rozpojený obvod G_0 lze vyjádřit jako podíl polynomů, tak jednoduchou úpravou dostáváme

$$1 + G_0(s) = 1 + \frac{M_0(s)}{N_0(s)} = \frac{N_0(s) + M_0(s)}{N_0(s)} = 0. \quad (4.7)$$

Tato rovnost bude platit pouze tehdy, když součet čitatele a jmenovatele rozpojeného obvodu bude roven nule

$$M_0(s) + N_0(s) = 0. \quad (4.8)$$

Rozložíme-li charakteristickou rovnici na součin kořenových činitelů

$$a_n \cdot (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) = 0 \quad (4.9)$$

a dosadíme-li do ní záporné kořeny, pak po opětovném roznásobení vidíme, že všechny koeficienty původní charakteristické rovnice jsou kladná čísla. Z toho plyne **nutná** (Stodolova) **podmínka stability**, která říká, že aby byl daný regulační obvod stabilní, je nutné, aby všechny koeficienty charakteristické rovnice byly kladné. Současně platí, že

pokud máme charakteristickou rovnici druhého stupně (kvadratickou), pak je tato podmínka nutná a zároveň postačující. [1]

V některých případech můžeme naopak o stabilitě systému rozhodnout přímo, podíváme-li se na jeho charakteristickou rovnici. Zjistíme-li, že daný systém nesplňuje podmínky stability viditelné přímo z charakteristické rovnice, pak není potřeba se jeho stabilitou dále zabývat, vyčíslovat kořeny charakteristické rovnice, ale můžeme o něm rovnou říct, že je to systém nestabilní. Následující příklad demonstruje některé takové případy.

Příklad: Rozhodněte o stabilitě regulačního obvodu z charakteristické rovnice.

a) $s^4 + 9s^3 + 5s^2 - 4s + 1 = 0$

Daný regulační obvod je nestabilní. Není splněna kladnost všech koeficientů (nutná podmínka stability).

b) $s^5 + 8s^3 + 2s^2 + 6s + 3 = 0$

Regulační obvod je nestabilní, není dodržena posloupnost členů charakteristické rovnice (chybí člen s^4).

c) $s^2 + 7s + 12 = 0$

Regulační obvod je stabilní, uvedená rovnice je charakteristická rovnice 2.řádu s kladnými koeficienty.

d) $(s + 2)(s + 4)(s + 6) = 0$

Regulační obvod je stabilní, všechny kořeny charakteristické rovnice jsou záporné.

e) $s(s + 3)(s + 5) = 0$

Regulační obvod je na hranici stability, jeden z kořenů charakteristické rovnice je nulový, ostatní mají zápornou reálnou část.

f) $s^4 + 6s^3 + 8s^2 + 3s + 4 = 0$

Regulační obvod splňuje nutnou podmínku stability, kterou je kladnost všech koeficientů. Stabilitu obvodu je však nutné dále ověřit. Jednou z možností by bylo napočítat kořeny charakteristické rovnice, to je však často velmi náročné. K určení stability se proto využívá algebraických nebo frekvenčních kritérií, které umožňují určit stabilitu systému bez nutnosti výpočtu kořenů charakteristické rovnice.

4.2 Algebraická kritéria

Jak jsme se již zmínili, důležitou podmínkou, která nám pomůže rozhodnout o stabilitě systému, je určení zápornosti kořenů jeho charakteristické rovnice. Pro charakteristické rovnice nanejvýš čtvrtého stupně existují analytické způsoby pro určení

kořenů. U vyšších stupňů je výpočet kořenů rovnice často obtížný. Pokud se omezíme pouze na zjišťování, zda jsou, či nejsou všechny reálné části kořenů záporné, pak nám při posouzení stability lineárního dynamického systému pomohou výše zmíněná kritéria stability, která dokážou posoudit stabilitu systému bez přímého hledání kořenů charakteristické rovnice. [1, 2]

Mluvíme tedy o matematických kritériích, která dokážou přímo z charakteristické rovnice určit, zda mají její kořeny zápornou reálnou část. Umožňují tak posoudit stabilitu lineárního dynamického systému bez nutnosti danou rovnici řešit. Rozlišujeme dva základní druhy těchto kritérií. Prvními z nich jsou **kritéria algebraická**, pomocí kterých rozhodujeme o stabilitě regulačních obvodů z koeficientů charakteristické rovnice. Dalším typem jsou **frekvenční kritéria** v literatuře označována jako geometrická, která k posouzení stability systému používají frekvenční charakteristiku. [1, 2]

4.2.1 Hurwitzovo kritérium stability

Hurwitzovo kritérium je kritérium algebraické a vychází z charakteristické rovnice (4.4), u níž je splněna nutná podmínka stability (kladnost a existence všech koeficientů). Z koeficientů charakteristické rovnice sestavíme tzv. **Hurwitzův determinant** o n řádcích a n sloupcích

$$H_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix}. \quad (4.14)$$

a z něj příslušné subdeterminanty H_i

$$H_1 = a_{n-1}$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

...

$$H_{n-1} = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \times \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \times \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \times \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \times & \times & \times & \cdots & a_0 \end{vmatrix}.$$

Hurwitzovo kritérium stability: Pokud je determinant H_n i se všemi jeho subdeterminanty $H_{n-1}, \dots, H_2$ kladný, pak je daný obvod stabilní. Je-li některý z determinantů záporný, daný obvod je nestabilní. Pokud je některý determinant roven nule (a ostatní kladné), pak je obvod na hranici stability. [1, 2, 8]

Při řešení stability konkrétních příkladů využíváme zjednodušení tohoto kritéria. Řídíme se zde několika pravidly [1, 9].

- U obvodu s charakteristickou rovnicí **2. stupně** $as^2 + bs + c = 0$ nám postačí podmínka kladnosti jejích koeficientů. Tím je zajištěna zápornost obou kořenů $s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
- U charakteristické rovnice **3. stupně** je nutné opět ověřit kladnost koeficientů a kladnost determinantu druhého stupně H_2 . Kladnost subdeterminantu H_3 je potom automaticky splněna, neboť $H_3 = a_0 \cdot H_2$.
- Pro charakteristickou rovnici **4. stupně** postupujeme obdobně s tím, že kladnost determinantu H_3 je postačující podmínkou pro stabilitu daného obvodu (kladnost subdeterminantu H_2 je tím automaticky splněna).
- Analogicky bychom ukázali, že pro charakteristickou rovnici **5. stupně** se opět můžeme omezit pouze na určení některých subdeterminantů. V tomto případě postačí kladnost subdeterminantů H_4 a H_2 (kladnost subdeterminantu H_3 je automaticky splněna).
- Pro vyšší stupně charakteristických rovnic je použití Hurwitzova kritéria značně pracné z důvodu pracného vyčíslování determinantů.

Pro názornost jsou níže uvedeny dva příklady, které popisují případ stabilního a nestabilního obvodu popsaného charakteristickou rovnicí 4. řádu.

Příklad 1: Hurwitzovým kritériem určete stabilitu regulačního obvodu.

$$a) \quad s^4 + 2s^3 + 15s^2 + 3s + 0,5 = 0$$

Nejprve ověříme nutnou podmínku stability, kterou je kladnost všech koeficientů charakteristické rovnice. Ta je v tomto případě splněna. Jak bylo výše zmíněno, pro určení stability regulačního obvodu daného charakteristickou rovnicí 4. stupně, postačí sestavit subdeterminant 3. stupně a ověřit jeho kladnost.

$$\begin{aligned} H_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 15 & 0,5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot 15 \cdot 3 + 3 \cdot 0,5 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 2 - 0 \cdot 15 \cdot 0 - 0,5 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 1 = \\ &= 90 + 0 + 0 - 0 - 2 - 9 = \underline{\underline{79}} \end{aligned}$$

Determinant $H_3 > 0$ a regulační obvod je tedy stabilní.

$$b) \quad 2s^4 + 8s^3 + 0,5s^2 + s + 1 = 0$$

Kladnost všech koeficientů je opět splněna, můžeme tedy přejít na výpočet determinantu H_3 , jehož kladnost je pro určení stability dostačující.

$$\begin{aligned} H_3 &= \begin{vmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 2 & 0,5 & 1 \\ 0 & 8 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 8 \cdot 0,5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot 8 - 0 \cdot 0,5 \cdot 0 - 1 \cdot 8 \cdot 8 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = \\ &= 4 + 0 + 0 - 0 - 64 - 2 = \underline{\underline{-62}} \end{aligned}$$

Determinant $H_3 < 0$, regulační obvod je nestabilní.

4.2.2 Routhovo kritérium stability

Dalším algebraickým kritériem je **Routhovo kritérium** vycházející rovněž z charakteristické rovnice (4.4). Pomocí něj dokážeme rozhodnout o charakteru kořenů (4.4), tj. kolik z nich má kladnou, zápornou či nulovou reálnou část. Na základě toho určíme stabilitu systému. Pokud má charakteristická rovnice všechny koeficienty kladné, srovnáme je do řad v následujícím tvaru

$$\begin{array}{c|ccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\ s^{n-2} & b_{n-2} & b_{n-4} & b_{n-6} & \cdots \\ s^{n-3} & c_{n-3} & c_{n-5} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ s^3 & d_3 & d_1 & & \\ s^2 & e_2 & e_0 & & \\ s^1 & f_1 & & & \\ s^0 & g_0 & & & \end{array}$$

Z daného schématu vidíme, že první dva řádky jsou složeny z koeficientů charakteristické rovnice, ostatní koeficienty pak dopočítáme z následujících vztahů

$$\begin{aligned} b_{n-2} &= a_{n-2} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \right) a_{n-3} \\ b_{n-4} &= a_{n-4} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \right) a_{n-5} \\ &\vdots \\ b_{n-2k} &= a_{n-2k} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \right) a_{n-2k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{n-3} &= a_{n-3} - \left(\frac{a_{n-1}}{b_{n-2}}\right) b_{n-4} \\
&\vdots \\
c_{n-2k+1} &= a_{n-2k+1} - \left(\frac{a_{n-1}}{b_{n-2}}\right) b_{n-2k} \\
&\vdots \\
f_1 &= d_1 - \left(\frac{d_3}{e_2}\right) e_0 \\
g_0 &= e_0.
\end{aligned}$$

Platí, že koeficienty následujícího řádku vždy dopočítáme z koeficientů dvou předchozích řádků. Výpočet koeficientů provádíme postupně zleva doprava do té doby, než jsou všechny další koeficienty nulové. Pro usnadnění výpočtu je možné jednotlivé řádky násobit nebo dělit libovolným kladným číslem. Výsledné pole Routhových koeficientů je trojúhelníkového tvaru. Podle Routhova kritéria platí, že charakteristická rovnice má všechny kořeny se zápornou reálnou částí, pokud jsou všechny Routhovy koeficienty kladné. Počet kořenů s kladnou reálnou částí je roven počtu změn znaménka koeficientů v prvním sloupci Routhova pole koeficientů. [10, 11]

Existuje několik zvláštních případů při řešení koeficientů Routhova pole. Pokud je např. jeden z koeficientů v prvním sloupci roven nule a všechny ostatní koeficienty daného řádku jsou nenulové, pak tento nulový člen nahradíme velmi malým kladným číslem a zbytek pole už dopočítáme podle Routhova kritéria. Zároveň jsou-li znaménka pod a nad nulovým koeficientem stejná, pak má charakteristická rovnice dvojici imaginárních kořenů bez reálné části, pokud jsou pak znaménka nad i pod nulovým koeficientem opačná, znamená to pouze jednu změnu znaménka v Routhově poli. Druhým zvláštním případem je případ celého nulového řádku koeficientů. Charakteristická rovnice tak obsahuje pár reálných kořenů o stejné velikosti s opačným znaménkem nebo imaginární komplexně sdružený pár kořenů. V tomto případě nahradíme daný nulový řádek koeficienty vzniklé derivací pomocné rovnice vytvořené z řádku nacházejícího se nad tímto nulovým řádkem. Pak lze již Routhovo kritérium zdárně použít. [10, 11]

Znovu uvedeme dva konkrétní výpočty, tentokrát podle Routhova kritéria pro charakteristickou rovnici 5. řádu.

Příklad: Routhovým kritériem určete stabilitu regulačního obvodu.

$$a) \quad s^5 + 8s^4 + 7s^3 + 24s^2 + 5s + 8 = 0$$

Sestavíme si pole Routhových koeficientů, kde první dva řádky vyplníme koeficienty charakteristické rovnice a zbylé dopočítáme.

s^5	+ 1 7 5	$b_3 = 7 - \left(\frac{1}{8}\right) \cdot 24 = 4$
s^4	+ 8 24 8	
s^3	+ 4 4	$b_1 = 5 - \left(\frac{1}{8}\right) \cdot 8 = 4$
s^2	+ 16 8	$c_2 = 24 - \left(\frac{8}{4}\right) \cdot 4 = 16$
s^1	+ 2	$c_0 = 8 - \left(\frac{8}{4}\right) \cdot 0 = 8$
s^0	+ 8	$f_1 = 4 - \left(\frac{4}{16}\right) \cdot 8 = 2$
		$g_0 = e_0 = 8$

Jelikož nedošlo ke změně znaménka Routhových koeficientů v prvním sloupci Routhova pole, všechny reálné části kořenů charakteristické rovnice jsou záporné a daný regulační obvod je tedy stabilní.

$$\text{b) } s^6 + 8s^5 + 5s^4 + 24s^3 + 6,5s^2 + 12s + 1 = 0$$

Opět sestavíme pole Routhových koeficientů.

s^5	+ 2 3 8	$b_3 = 3 - \left(\frac{2}{8}\right) \cdot 4 = 2$
s^4	+ 8 4 24	
s^3	+ 2 2	$b_1 = 8 - \left(\frac{2}{8}\right) \cdot 24 = 2$
s^2	- 4 24 ← první změna znaménka	$c_2 = 4 - \left(\frac{8}{2}\right) \cdot 2 = -4$
s^1	+ 14 ← druhá změna znaménka	$c_0 = 24 - \left(\frac{8}{2}\right) \cdot 0 = 24$
s^0	+ 24	$f_1 = 2 + \left(\frac{2}{4}\right) \cdot 24 = 14$
		$g_0 = e_0 = 24$

Zaznamenali jsme dvakrát změnu znaménka Routhových koeficientů v prvním sloupci Routhova pole. Charakteristická rovnice má tedy dva kořeny s kladnou reálnou částí a daný obvod je nestabilní.

4.2.3 Routh-Schurovo kritérium stability

Odlišným způsobem lze vypočítat Routhovy koeficienty pomocí **Routh-Schurova kritéria** stability. Toto kritérium vzniklo malou úpravou Routhova kritéria. Jeho výhodou je nejen možnost rozhodnout o stabilitě daného regulačního systému, ale dokážeme určit

i jeho kvadratickou plochu. Dalším kladem tohoto kritéria je, že pracnost výpočtu neroste se zvyšujícím se řádem systému zdaleka tak rychle jako například u Hurwitzova kritéria. [1, 9, 11]

Při jeho použití postupujeme následovně:

1. koeficienty charakteristické rovnice napíšeme do řádku vedle sebe, od nejvyšší mocniny po nejnižší
2. rozdělíme na sudé a liché koeficienty, každý sudý podtrhneme
3. každý podtržený koeficient vynásobíme podílem dvou nejvyšších koeficientů a_n/a_{n-1} a výsledek napíšeme do dalšího řádku posunutý o jedno místo vlevo
4. novou řadu koeficientů odečteme od předcházející, dostaneme třetí řádek koeficientů
5. na místě největšího koeficientu dostaneme nulu, zbylé koeficienty tvoří o jeden stupeň nižší rovnici, než byla rovnice původní
6. jsou-li všechny nově vzniklé koeficienty kladné, postup opakuje až do doby, než dostaneme tři kladné koeficienty (rovnice 2.stupně) - potom má charakteristická rovnice všechny kořeny ve stabilní oblasti
7. objeví-li se během redukce některý koeficient záporný, má charakteristická rovnice kladný kořen a výpočet ukončíme

Schéma redukce:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & a_n & & & a_{n-2} & & & a_{n-4} & \\
 & \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot a_{n-1} & \swarrow & & \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot a_{n-3} & \swarrow & & \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot a_{n-5} & \\
 \hline
 & 0 & & a_{n-1} & & a_{n-2} - \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot a_{n-3} & & a_{n-3} & & a_{n-4} - \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot a_{n-5}
 \end{array}$$

Routh-Schurovo kritérium tedy definuje stabilní regulační obvod na základě toho, zdali jsou všechny koeficienty charakteristické rovnice i všech nově vzniklých rovnic při postupné redukci kladné. Pokud ano, pak je daný regulační obvod stabilní. Objeví-li se při redukci nějaký koeficient záporný, výpočet končí – obvod je nestabilní. [1, 11]

Pro názornost opět uvedeme dva konkrétní výpočty stability podle daného kritéria.

Příklad 3: Routh-Schurovým kritériem určete stabilitu regulačního obvodu.

a) $s^6 + 8s^5 + 5s^4 + 24s^3 + 6,5s^2 + 12s + 1 = 0$

Začneme tím, že si jednotlivé koeficienty charakteristické rovnice napíšeme na jeden řádek vedle sebe. Koeficienty jsou napsány v sestupném pořadí zleva doprava.

1	<u>8</u>	5	<u>24</u>	6,5	<u>12</u>	1	$\cdot 1/8$
1	✓	3	✓	1,5	✓		
0	8	<u>2</u>	24	<u>5</u>	12	<u>1</u>	$\cdot 8/2$
	8	✓	20	✓	4	✓	
	0	2	<u>4</u>	5	<u>8</u>	1	$\cdot 2/4$
		2	✓	4	✓		
		0	4	<u>1</u>	8	<u>1</u>	$\cdot 4/1$
			4	✓	4	✓	
			0	<u>1</u>	4	<u>1</u>	

Po postupné redukci dostáváme tři kladné koeficienty v řadě. Ty představují rovnici 2. stupně s kladnými koeficienty, která má všechny kořeny ve stabilní oblasti. Tento regulační obvod je tedy stabilní.

b) $s^6 + 2s^5 + 4s^4 + 6s^3 + 8s^2 + 3s + 1 = 0$

Opět sepíšeme koeficienty charakteristické rovnice do jednoho řádku a začneme provádět redukci.

1	<u>2</u>	4	<u>6</u>	8	<u>3</u>	1	$\cdot 1/2$
1	✓	3	✓	1,5	✓		
0	2	<u>1</u>	6	<u>6,5</u>	3	<u>1</u>	$\cdot 2/1$
	2	✓	13	✓	2	✓	
	0	1	<u>-7</u>	6,5	1	1	

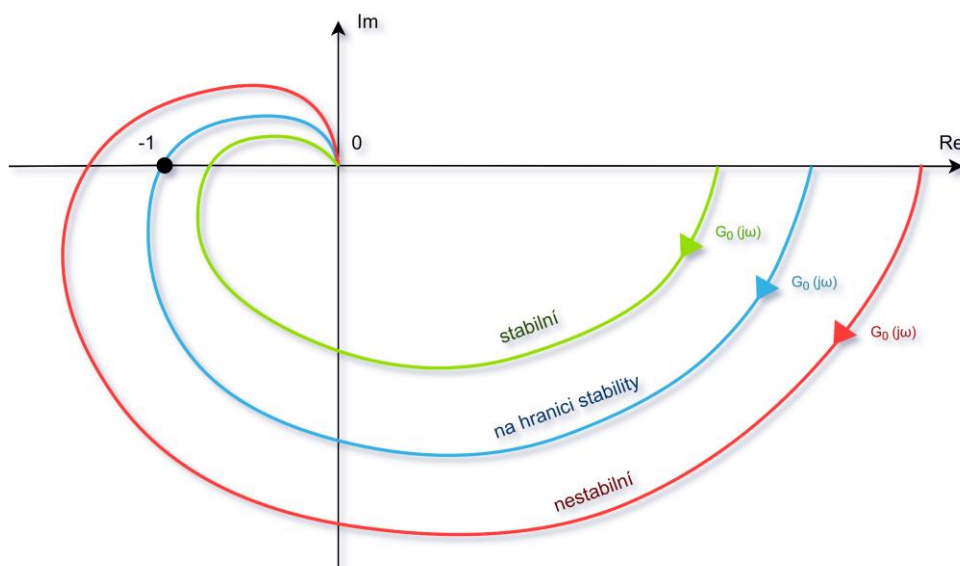
Objevil se záporný koeficient, regulační obvod je nestabilní.

4.3 Frekvenční kritéria

V dalším textu jsou popsána jednotlivá frekvenční kritéria stability. Jejich výhodou oproti algebraickým kritériím je například to, že nemusíme znát analytický popis přenosu a stabilitu lze určit ze známé frekvenční charakteristiky, kterou lze určit experimentálně. V tomto případě zjistíme nejen, zda je regulační obvod stabilní či nestabilní, ale také v jaké míře (Nyquist). [1, 2]

4.3.1 Nyquistovo kritérium

Nyquistovo kritérium určování stability regulačního obvodu vychází z přenosu rozpojeného obvodu. Je-li na vstupu daného systému sinusový signál, pak je na výstupu fázově posunutý sinusový signál se stejnou frekvencí a odlišnou amplitudou. Tyto kmity přetrvávají v systému po uzavření daného obvodu i bez dalšího vnějšího sinusového buzení. Pokud se kmity s rostoucím časem utlumí, pak je daný obvod stabilní. V opačném případě, tedy pokud kmitání neustává, ale naopak jednotlivé kmity s rostoucím časem stále zvyšují svoji amplitudu, pak mluvíme o nestabilním obvodu. Rozhodující je stav, kdy je obvod na hranici stability. V tomto momentě se vstupní signál rovná výstupnímu. To platí, pokud frekvenční charakteristika přenosu $G_0(s)$ prochází tzv. **kritickým bodem** $[-1,0]$. Dle Nyquistova kritéria je regulační obvod stabilní, leží-li kritický bod nalevo od frekvenční charakteristiky stabilního rozpojeného obvodu. V opačném případě se jedná o obvod nestabilní. Prochází-li frekvenční charakteristika přímo bodem $[-1,0]$, pak je obvod na hranici stability, viz obr. 17. [1, 2]



Obr. 17: Stabilita dle Nyquistova kritéria

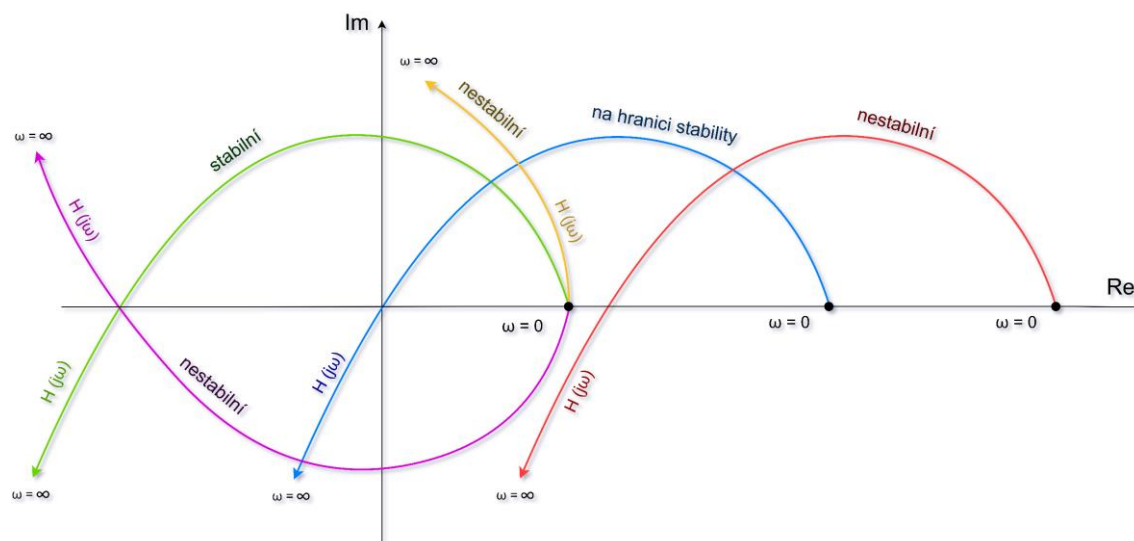
4.3.2 Michajlov-Leonhardovo kritérium

Toto kritérium využívá k určení stability obvodu jeho charakteristickou rovnici (4.4). Z levé strany této rovnice za pomoci substituce $s = j\omega$ vytvoříme charakteristický polynom

$$H(j\omega) = a_n \cdot (j\omega)^n + a_{n-1} \cdot (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 \cdot (j\omega) + a_0. \quad (4.19)$$

Stabilita se pak posuzuje podle charakteru křivky, kterou opíše koncový bod tohoto charakteristického polynomu. Křivka je vykreslována v komplexní rovině změnou úhlové frekvence signálu v rozmezí 0 až ∞ . Dle Michajlov-Leonhardova kritéria je regulační obvod stabilní, pokud křivka $H(j\omega)$ začíná na kladné reálné poloose a s rostoucí úhlovou rychlostí ω projde postupně tolika kvadranty, kolikátého stupně je

charakteristická rovnice. Směr průchodu křivky jednotlivými kvadranty musí být v kladném směru, což je směr proti chodu hodinových ručiček. Jednotlivé situace, které mohou při vytváření křivky nastat můžeme vidět na obrázku obr. 18. [1, 2]



Obr. 18: Stabilita dle Michajlov-Leonhardova kritéria

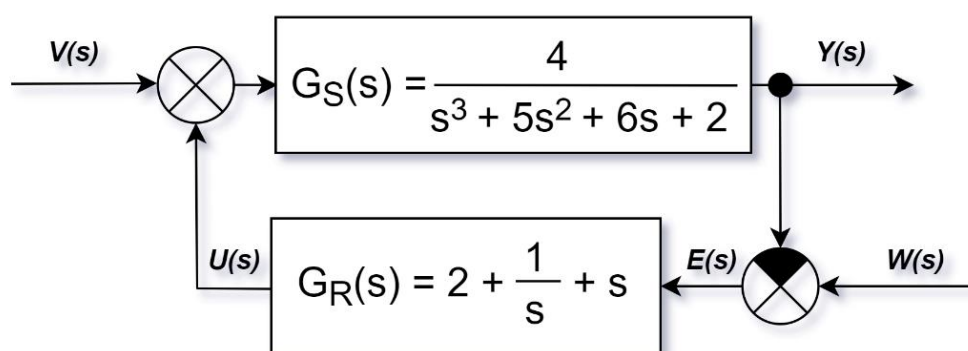
Obrázek popisuje stabilitu systému s charakteristickou rovnicí 3. řádu. Zelená křivka značí stabilní regulační obvod. Křivka jde proti směru hodinových ručiček a prochází postupně příslušnými třemi kvadranty (podle stupně charakteristické rovnice). Modrá křivka představuje regulační obvod na hranici stability, neboť prochází počátkem. Ostatní křivky popisují nestabilní regulační obvody. Fialová křivka sice správně prochází třemi kvadranty, ale její směr je po směru hodinových ručiček. Žlutá křivka neprochází správným počtem kvadrantů, stejně jako křivka červená, která navíc prochází kvadranty ve špatném pořadí.

Závěrem kapitoly stručně připomeňme, že metodě, kdy řešíme stabilitu lineárního systému vyčíslováním kořenů charakteristické rovnice, říkáme Ljapunovova metoda. Při řešení stability tímto způsobem vycházíme z charakteristické rovnice uzavřeného systému popsanou rovnicí (4.4). Rozhodující je tvar jejích kořenů. Jak bylo již zmíněno v definici obecné podmínky stability, mají-li všechny kořeny záporné reálné části, pak je systém stabilní. Obsahuje-li však některý z kořenů kladnou reálnou část, pak mluvíme o systému nestabilním. Má-li některý z kořenů nulovou reálnou část, pak je systém na hranici stability. Tato metoda řeší stabilitu, nejen lineárních, ale také nelineárních systémů. Je-li výchozí systém nelineární, popíšeme ho linearizovanými dynamickými rovnicemi. [12]

5 EFEKTIVITA ALGEBRAICKÝCH KRITÉRIÍ

V této kapitole jsou na konkrétním příkladu demonstrovány jednotlivé metody řešení stability lineárního systému. Jsou zde předvedena jak algebraická a frekvenční kritéria zmíněná v kapitole 4, tak i určení stability řešení podle teorie diferenciálních rovnic popsaných v kapitole 3. Bude srovnána náročnost hledání řešení pomocí algebraických a frekvenčních kritérií. Následně porovnáme použitá kritéria s Matlabem, který je v dnešní době nejrychlejší a nejnázornější metodou pro stanovení stability systémů.

Příklad: Mějme regulační obvod, který je tvořen regulovanou soustavou s přenosem $G_S(s)$ a regulátorem PID s přenosem $G_R(s)$, viz obr.19.



Obr. 19: Schéma příkladu

Z přenosu soustavy a přenosu regulátoru určíme podle vztahu (2.34) přenos rozpojeného obvodu

$$G_0(s) = \frac{4s^2 + 8s + 4}{s^4 + 5s^3 + 6s^2 + 2s}$$

a z něj součtem čitatele a jmenovatele (4.8) vytvoříme charakteristickou rovnici

$$s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 10s + 4 = 0.$$

Vidíme, že je splněna nutná podmínka stability, tedy kladnost všech koeficientů charakteristické rovnice. Regulační obvod tak splňuje základní předpoklad pro určování stability systému.

a) Řešení pomocí diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

Charakteristické rovnici odpovídá diferenciální rovnici tvaru

$$y^{(4)}(t) + 5y'''(t) + 10y''(t) + 10y'(t) + 4y(t) = 0.$$

Charakteristickou rovnici $\lambda^4 + 5\lambda^3 + 10\lambda^2 + 10\lambda + 4 = 0$ lze přepsat na součinnový tvar

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 2).$$

a odtud vidíme příslušné kořeny

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -1 + i, \lambda_4 = -1 - i.$$

Všechny kořeny mají zápornou reálnou část, regulační obvod tak splňuje nutnou podmínku stability. Obecné řešení dané rovnice je tvaru

$$y(t) = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{-2t} + C_3 \cdot e^{-t} \cdot \sin t + C_4 \cdot e^{-t} \cdot \cos t.$$

Z tohoto tvaru řešení a z limitních vztahů (3.11) a (3.12) vidíme, že řešení konverguje k nule, tudíž je asymptoticky stabilní. Kdyby nás zajímalo i jiné řešení, než je řešení odpovídající nulovým počátečním podmínkám, tak je potřeba třikrát derivovat obecné řešení

$$y' = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t} - C_3 e^{-t} \sin t + C_3 e^{-t} \cos t - C_4 e^{-t} \cos t - C_4 e^{-t} \sin t$$

$$y'' = C_1 e^{-t} + 4C_2 e^{-2t} + C_3 e^{-t} \sin t - C_3 e^{-t} \cos t - C_3 e^{-t} \cos t - \\ - C_3 e^{-t} \sin t + C_4 e^{-t} \cos t + C_4 e^{-t} \sin t + C_4 e^{-t} \sin t - C_4 e^{-t} \cos t$$

$$y''' = -C_1 e^{-t} - 8C_2 e^{-2t} - C_3 e^{-t} \sin t + C_3 e^{-t} \cos t + C_3 e^{-t} \cos t + \\ + C_3 e^{-t} \sin t + C_3 e^{-t} \cos t + C_3 e^{-t} \sin t + C_3 e^{-t} \sin t - \\ - C_3 e^{-t} \cos t - C_4 e^{-t} \cos t - C_4 e^{-t} \sin t - C_4 e^{-t} \sin t + \\ + C_4 e^{-t} \cos t - C_4 e^{-t} \sin t + C_4 e^{-t} \cos t + C_4 e^{-t} \cos t + C_4 e^{-t} \sin t.$$

Pro počáteční podmínky

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$$

dostáváme soustavu čtyř lineárních rovnic o čtyřech neznámých

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2 + 0 + C_4 \\ 1 &= -C_1 - 2C_2 + C_3 - C_4 \\ 0 &= C_1 + 4C_2 - 2C_3 + 0 \\ 0 &= -C_1 - 8C_2 + 2C_3 + 2C_4, \end{aligned}$$

kterou můžeme napsat v maticovém tvaru

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & -8 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Řešením této soustavy jsou konstanty

$$C_1 = 6, \quad C_2 = -2, \quad C_3 = -1, \quad C_4 = -4.$$

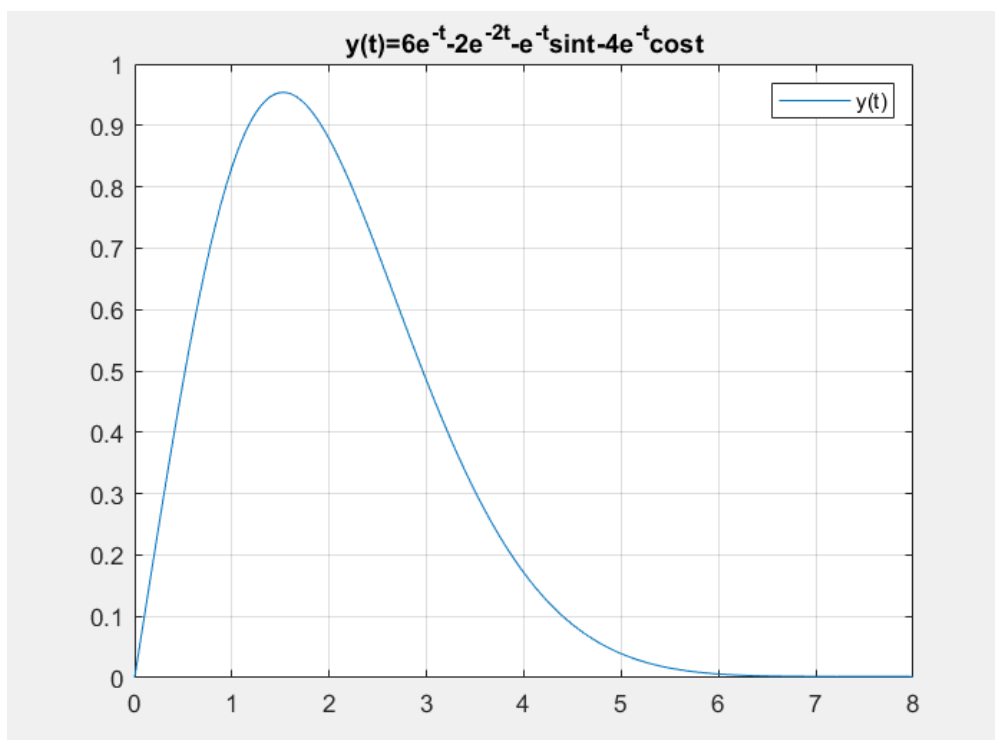
Řešení rovnice pro dané počáteční podmínky je podle (3.8) ve tvaru

$$y(t) = 6e^{-t} - 2e^{-2t} - e^{-t} \sin t - 4e^{-t} \cos t.$$

Jedná se opravdu o stabilní řešení

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{e^t} - \frac{2}{e^{2t}} - \frac{1}{e^t} \sin t - \frac{4}{e^t} \cos t \right) = 0,$$

což je vidět i z *obr. 20*. Tímto jsme ukázali nejen stabilitu řešení odpovídající diferenciální rovnice, ale hlavně stabilitu našeho regulačního obvodu. Ta byla však patrná již z kořenů charakteristické rovnice, a hlavně z tvaru obecného řešení.



Obr. 20: Stabilita řešení homogenní LODRn

b) Řešení pomocí Hurwitzova kritéria

Z charakteristické rovnice $s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 10s + 4 = 0$ sestavíme Hurwitzův determinant třetího stupně, jehož kladnost je postačující podmínkou pro stabilitu daného obvodu.

$$\begin{aligned}
 H_3 &= \begin{vmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 1 & 10 & 4 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = \\
 &= 5 \cdot 10 \cdot 10 + 10 \cdot 4 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 5 - 0 \cdot 10 \cdot 0 - 4 \cdot 5 \cdot 5 - 10 \cdot 10 \cdot 1 = \\
 &= 500 + 0 + 0 - 0 - 100 - 100 = \underline{\underline{300}}
 \end{aligned}$$

Regulační obvod je podle Hurwitzova kritéria stabilní.

c) Řešení pomocí Routhova kritéria

Koeficienty charakteristické rovnice vypíšeme do prvních dvou řádků Routhova pole. Zbylé Routhovy koeficienty dopočítáme dle vztahů uvedených v kap. 4.

s^4	+ 1	10	4	
s^3	+ 5	10		
s^2	+ 8	4		
s^1	+ 7,5			
s^0	+ 4			

$$b_2 = 10 - \left(\frac{1}{5}\right) \cdot 10 = 8$$

$$b_0 = 4 - \left(\frac{1}{5}\right) \cdot 0 = 4$$

$$f_1 = 10 - \left(\frac{5}{8}\right) \cdot 4 = 7,5$$

$$g_0 = e_0 = 4$$

V prvním sloupci Routhova pole nedošlo ke změně znaménka Routhových koeficientů. Kořeny charakteristické rovnice mají tedy záporné reálné části a regulační obvod je podle Routhova kritéria stabilní.

d) Řešení pomocí Routh-Schurova kritéria

Z charakteristické rovnice $s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 10s + 4 = 0$ sestavíme schéma postupné redukce podle Routh-Schurova kritéria

1	<u>5</u>	10	<u>10</u>	4	· 1/5
1	✓	2	✓		
0	5	<u>8</u>	10	<u>4</u>	· 5/8
	5	✓	2,5		
0	<u>8</u>	<u>7,5</u>	<u>4</u>		

Dostali jsme tři kladné koeficienty (charakteristická rovnice druhého stupně s kladnými koeficienty) a můžeme ukončit redukci. Daný regulační obvod je podle Routh-Schurova kritéria stabilní.

e) Řešení pomocí Nyquistova kritéria

Po dosazení $s = j\omega$ do přenosu rozpojeného obvodu dostaneme

$$G_0(j\omega) = \frac{4(j\omega)^2 + 8(j\omega) + 4}{(j\omega)^4 + 5(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 2(j\omega)}$$

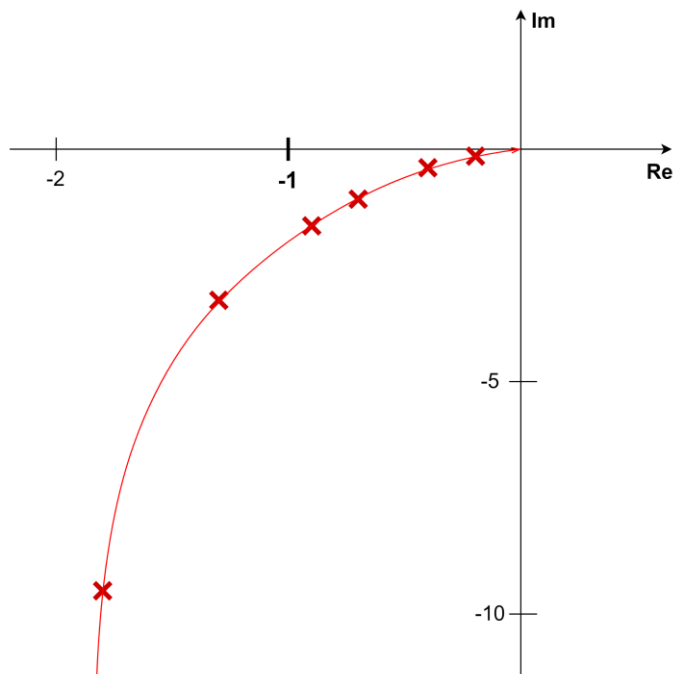
Po jeho úpravě na algebraický tvar komplexního čísla získáme rozpojený obvod ve složkovém tvaru

$$G_0(j\omega) = \frac{-4\omega^4 - 12\omega^2 - 8}{\omega^6 + 13\omega^4 + 16\omega^2 + 4} + j \cdot \frac{-12\omega^4 - 20\omega^2 - 8}{\omega^7 + 13\omega^5 + 16\omega^3 + 4\omega},$$

ze kterého vidíme, že jak reálná, tak imaginární část jsou záporné. Na základě tabulky sestrojené pro zvolené hodnoty ω

ω	0	0,2	0,5	0,8	1	2	3
Re	-2	-1,82	-1,27	-0,87	-0,71	-0,35	-0,23
Im	$-\infty$	-9,46	-3,12	-1,62	-1,17	-0,41	-0,20

sestrojíme frekvenční charakteristiku G_0 viz obr.21.



Obr. 21: Frekvenční charakteristika

Vidíme, že kritický bod $[-1,0]$ leží vlevo od frekvenční charakteristiky G_0 , regulační obvod je tedy stabilní.

f) Řešení pomocí Michajlov-Leonhardova kritéria

Do charakteristické rovnice $s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 10s + 4 = 0$ dosadíme $j\omega$ za s . Dostaneme charakteristický polynom $H(j\omega)$ ve tvaru

$$H(j\omega) = (j\omega)^4 + 5(j\omega)^3 + 10(j\omega)^2 + 10(j\omega) + 4 = 0.$$

Ten vyčíslíme a získáme tak polynom obsahující reálnou i imaginární složku. Oddělením reálné a imaginární složky získáme dva polynomy ve tvaru

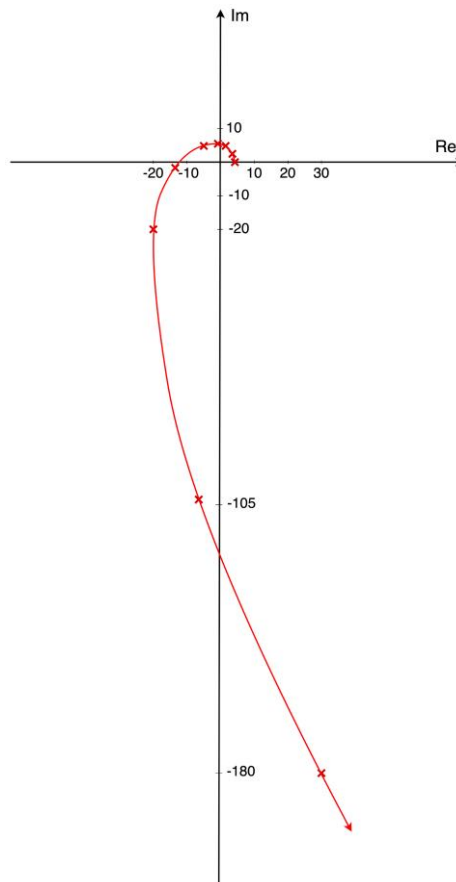
$$\operatorname{Re}[H(j\omega)] = \omega^4 - 10\omega^2 + 4$$

$$\operatorname{Im}[H(j\omega)] = -5\omega^3 + 10\omega.$$

Následně sestavíme tabulku pro zvolené hodnoty ω

ω	0	0,2	0,5	0,7	1	1,5	2	3	3,5
Re	4	3,6	1,6	-0,7	-5	-13,4	-20	-5	31,6
Im	0	2	4,4	5,3	5	-1,9	-20	-105	-180

a podle ní sestojíme Michajlov-Leonhardovu křivku $H(j\omega)$ viz obr. 22.



Obr. 22: Michajlov-Leonhardova křivka

Na obr. 22 vidíme, že Michajlov-Leonhardova křivka $H(j\omega)$ začíná na kladné reálné poloose a proti směru hodinových ručiček prochází postupně všemi čtyřmi kvadranty, které odpovídají řadě charakteristické rovnice. Regulační obvod je podle Michajlov-Leonhardova kritéria stabilní.

g) Matlab

Nejrychlejší a nejpraktičtější cestou, jak zjistit stabilitu regulačního obvodu, je použití softwaru Matlab. Ten obsahuje rozšíření o knihovnu *Control System Toolbox*, která umožňuje napsat specializované funkce pro popis a práci s lineárními spojitými systémy.

K zadání přenosové funkce prostřednictvím Matlabu využíváme funkci *tf* (transfer function).

```
tf(num,den)
```

Argumenty funkce jsou číselník a jmenovatel přenosu, které zadáváme jako vektory koeficientů. Přenosová funkce představuje podíl Laplaceova obrazu veličiny výstupní ku Laplaceově obrazu veličiny vstupní. Laplaceův obraz příslušné veličiny dostaneme z diferenciální rovnice Laplaceovou transformací. V prostředí Matlab můžeme k přímé Laplaceově transformaci použít příkaz *laplace*.

```
laplace(f)
```

Matlab obsahuje pro popis systému také prostředky blokové algebry. Využit lze příkazy pro zapojení sériové *series*, paralelní *parallel* i pro zapojení se zpětnou vazbou *feedback*.

```
series(S1,S2)
parallel(S1,S2)
feedback(S1,S2)
```

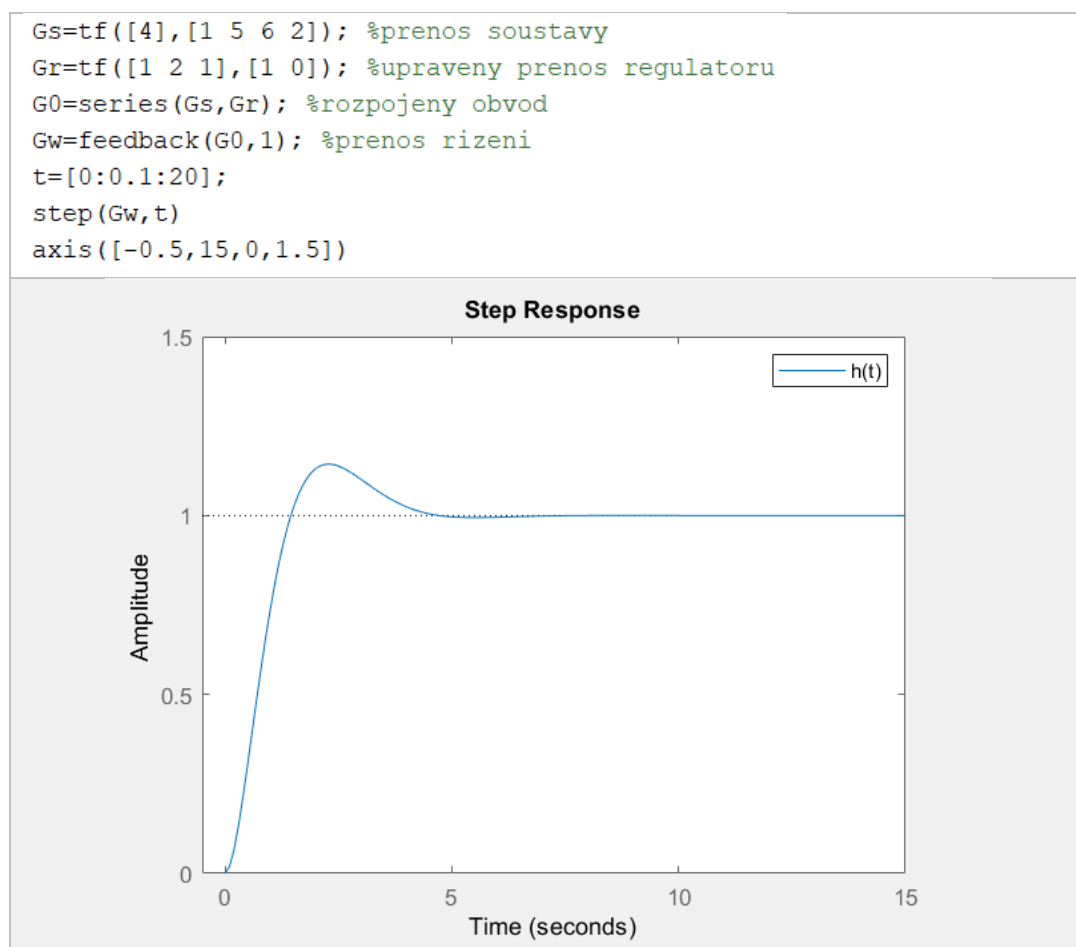
Chceme-li vykreslit přechodovou charakteristiku daného systému, použijeme příkaz *step*.

```
step(sys,t)
```

Pro vykreslení frekvenční charakteristiky můžeme použít příkaz *nyquist*.

```
nyquist(sys,w)
```

Byl uveden pouze velice stručný výčet funkcí, které byly použity k interpretaci stabilního regulačního obvodu. Pro názornou ukázkou je uveden graf přechodové charakteristiky obvodu s regulovanou soustavou a PID regulátorem z výše uvedeného příkladu (obr. 19) a graf Nyquistovy křivky (frekvenční charakteristiky rozpojeného obvodu). Tyto grafy jsou doplněny kódy pro vykreslení těchto charakteristik viz obr. 23 a obr. 24.

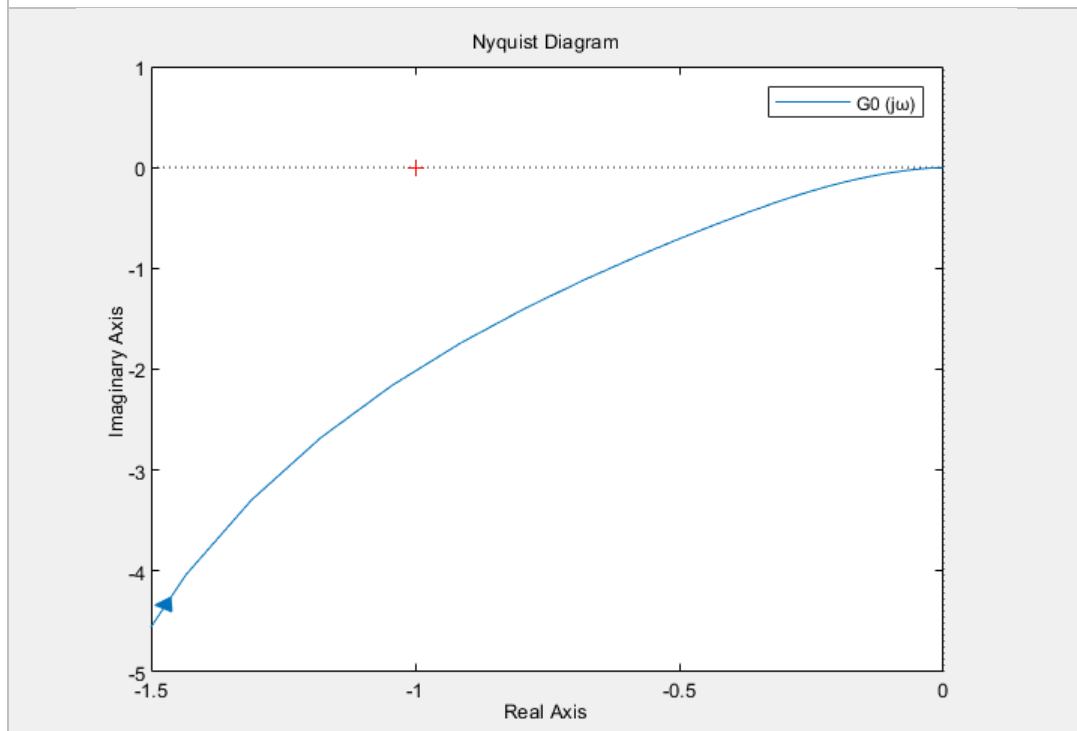


Obr. 23: Přechodová charakteristika

```

Gs=tf([4],[1 5 6 2]); %prenos soustavy
Gr=tf([1 2 1],[1 0]); %upraveny prenos regulatoru
G0=series(Gs,Gr) %rozpojeny obvod
nastaveni=nyquistoptions;
nastaveni.ShowFullContour='off';
nyquist(G0,nastaveni)
axis([-1.5,0,-5,1])

```



Obr. 24: Nyquistovo kritérium

Závěrem je nutno zmínit, že softwarem Matlab lze pomocí funkce *roots* snadno vypočítat kořeny příslušné charakteristické rovnice.

`roots(P)`

Tomu jsme se snažili při určování stability právě pomocí výše uvedených algebraických kritérií vyhnout. Z charakteru kořenů lze pak s využitím Ljapunovovy metody snadno rozhodnout o stabilitě daného systému. To potvrzuje už dříve zmíněnou praktičnost daného softwaru, a především rychlost provedených výpočtů při jeho použití. Pro zjišťování stability regulačního obvodu je Matlab dnes již neodmyslitelným přístupem k této otázce.

6 ZÁVĚR

Stabilita regulačního obvodu je jedním z hlavních požadavků na takový systém. Je nutná pro jeho správnou funkci. V této bakalářské práci byla řešena problematika určování stability regulačního obvodu prostřednictvím algebraických kritérií a jeho srovnání s jinými přístupy.

Abychom mohli posoudit tuto základní vlastnost regulačního obvodu, bylo potřeba seznámit čtenáře se základním principem fungování regulačního obvodu a předvést význam diferenciálních rovnic v teorii přenosu. Po uvedení základních pojmů z těchto oblastí následuje podrobný popis algebraických kritérií a stručnější popis jiných metod.

V úvodní druhé kapitole je představen základní model regulačního obvodu. Jsou popsány jeho členy a jejich dynamické vlastnosti. Dále je zde kvůli zadefinování přenosu vysvětlen princip Laplaceovy transformace. V následující třetí kapitole je uveden způsob určení stability získaného řešení homogenní diferenciální rovnice bez právě zmíněného převodu na přenos. Kapitola je zakončena příkladem, který shrnuje poznatky této kapitoly. Čtvrtá kapitola je věnována kritériím stability. Úvodem je charakterizován význam stability v rámci teorie regulace a princip jejího určení na základě známého přenosu systému. Je ukázáno, že z rovnice přenosu lze snadno získat charakteristickou rovnici a následným vyčíslením jejích kořenů rozhodnout o stabilitě systému. Vyčíslování kořenů však může být, především u rovnic vyšších řádů, značně pracné. Proto byla zavedena algebraická kritéria, která umožňují rozhodnout o stabilitě systémů na základě koeficientů charakteristické rovnice. Závěrem této části je uveden popis jednotlivých algebraických kritérií doplněný o příklady. Na základě uvedených příkladů se jako nejpříjemnější jevílo kritérium Routhovo, neboť určování stability bylo velmi rychlé a postup dosti přehledný. Pro srovnání jsou vedle algebraických kritérií uvedena také kritéria frekvenční. Ta umožňují posoudit stabilitu regulačního obvodu graficky.

V závěrečné páté kapitole byla zkoumána efektivita určování stability v závislosti na zvolené metodě. Byl vybrán konkrétní příklad, na kterém byla demonstrována jednotlivá algebraická kritéria. Stejný příklad byl řešen také pomocí teorie diferenciálních rovnic, frekvenčních kritérií a prostřednictvím Matlabu. Algebraická kritéria posuzování stability značně zjednodušují. Frekvenční kritéria byla oproti algebraickým o něco pracnější. Nutno ale podotknout, že výhodou jejich použití je, že zobrazují i míru stability obvodu v závislosti na tvaru a poloze vykreslené křivky. Závěrem bylo provedeno srovnání daných přístupů se softwarem Matlab. Ten se ukázal jako nejpraktičtější metoda řešení, především pro jeho rychlost a názornost (vykreslení grafu).

7 SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] ŠVARC, Ivan. *Automatické řízení*. Vyd. 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2011. ISBN 978-80-214-4398-3.
- [2] HOFREITER, Milan. *Základy automatického řízení*. V Praze: České vysoké učení technické, 2012. ISBN 978-80-01-05007-1.
- [3] KUBÍK, Stanislav, Zdeněk KOTEK a Miroslav ŠALAMON. *Teorie regulace: vysokoškolská učebnice pro elektrotechnické fakulty vysokých škol technických*. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1974.
- [4] GARZINOVÁ, Romana. *Moderní metody řízení procesů*. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2017. Dostupné z http://katedry.fmmi.vsb.cz/Opory_FMMI/638/638-Moderni_metody_rizeni_procesu.pdf
- [5] ČERMÁK, Jan a Luděk NECHVÁTAL. *Matematika III*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2016. ISBN 978-80-214-5400-2.
- [6] KUBÍK, Stanislav, Zdeněk KOTEK, Vladimír STREJC a Jan ŠTECHA. *Teorie automatického řízení I: Lineární a nelineární systémy*. Praha: SNTL, 1982.
- [7] KALAS, Josef a Miloš RÁB. *Obyčejné diferenciální rovnice*. Brno: Vydavatelství Masarykovy univerzity, 1995. ISBN 80-210-1130-0.
- [8] BALÁTĚ, Jaroslav. *Automatické řízení*. 2., přeprac. vyd. Praha: BEN - technická literatura, 2004. ISBN 80-7300-148-9.
- [9] VORÁČEK, Rudolf. *Automatizace a automatizační technika*. Brno: CP Books, 2005. ISBN 80-251-0796-5.
- [10] NIXON, Floyd E. *Principy soustav automatického řízení*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1965. Automatizace a regulace.
- [11] KUBÍK, Stanislav. *Teorie automatického řízení: vysokoškolská učebnice pro vysoké školy technického směru*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1982. Teoretická knižnice inženýra.
- [12] TOPČEJEV, Jurij Ivanovič a Aleksandr Pavlovič CYPLJAKOV. *Sbírka příkladů z teorie automatického řízení: vysokoškolská příručka pro vysoké školy technického směru*. Přeložil Marie SUKOVÁ, přeložil Petr VYSOKÝ, přeložil Miroslava FENCLOVÁ. Praha: SNTL, 1983.

8 SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1: Ovládání a regulace	17
Obr. 2: Regulační obvod	18
Obr. 3: Regulační obvod plynem vytápěné pece	19
Obr. 4: Laplaceova transformace	21
Obr. 5: Póly a nuly přenosu	24
Obr. 6: Odezva systému na Diracův impuls	25
Obr. 7: Odezva systému na jednotkový skok	26
Obr. 8: Průběh harmonického signálu	27
Obr. 9: Frekvenční charakteristika.....	28
Obr. 10: Regulační členy	29
Obr. 11: Bloková schémata regulačního obvodu.....	31
Obr. 12: Rozpojený regulační obvod	32
Obr. 13: Popis regulátoru.....	33
Obr. 14: Stabilita dle Ljapunova.....	37
Obr. 15: Stabilita.....	42
Obr. 16: Kořeny charakteristické rovnice v komplexní rovině	43
Obr. 17: Stabilita dle Nyquistova kritéria	52
Obr. 18: Stabilita dle Michajlov-Leonhardova kritéria	53
Obr. 19: Schéma příkladu	55
Obr. 20: Stabilita řešení homogenní LODRn	57
Obr. 21: Frekvenční charakteristika.....	59
Obr. 22: Michajlov-Leonhardova křivka	60
Obr. 23: Přechodová charakteristika.....	61
Obr. 24: Nyquistovo kritérium.....	62

9 SEZNAM TABULEK

Tab. 1: Slovník Laplaceovy transformace.....	22
Tab. 2: Charakteristika regulačních členů.....	29
Tab. 3: Zapojení bloků	30
Tab. 4: Přejchodové charakteristiky regulátorů	35