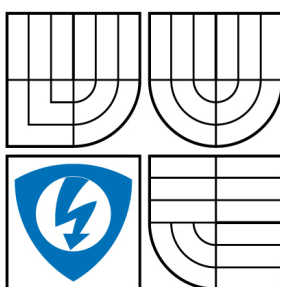


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH
TECHNOLOGIÍ

ÚSTAV BIOMEDICÍNSKÉHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION
DEPARTMENT OF BIOMEDICAL ENGINEERING

NUMERICKÉ METODY VÝPOČTU ELEKTROMAGNETICKÉHO POLE

NUMERICAL METHOD FOR COMPUTING ELECTROMAGNETIC FIELD

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

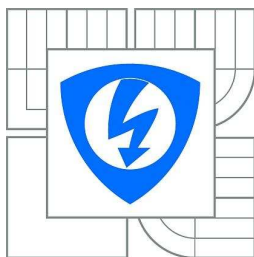
Bc. Pavol Bíreš

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Jiří Rozman, CSc.

BRNO, 2010



**VYSOKÉ UČENÍ
TECHNICKÉ V BRNĚ**

**Fakulta elektrotechniky
a komunikačních technologií**

Ústav biomedicínského inženýrství

Diplomová práce

magisterský navazující studijní obor
Biomedicínské a ekologické inženýrství

Student: Bc. Pavol Bíreš

ID: 74859

Ročník: 2

Akademický rok: 2009/2010

NÁZEV TÉMATU:

Numerické metody výpočtu elektromagnetického pole

POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

Při řešení tohoto projektu se seznámte s metodami pro výpočet šíření elektromagnetického pole v mikrovlnné oblasti. Zaměřte se na metodu konečných prvků a implementujte tuto metodu do programového prostředí MATLAB.

Prostudujte problematiku interakce elektromagnetického pole s lidskou tkání.

Seznamte se s komerčními programy využívajícími metodu konečných prvků. Vytvořte jednoduchý 2D model a teplotní profil šíření elektromagnetického pole v lidské tkáni.

Práce musí obsahovat : teoretickou studii o interakcích elektromagnetického pole s tkáněmi, dokumentaci 2D modelu a teplotního profilu tkáně.

DOPORUČENÁ LITERATURA:

- [1] DAVIDSON, David B. Computational Electromagnetics for RF and Microwave Engineering. Cambridge University Press, 2005. 410 s. ISBN 978-0-521-83859-2.
- [2] JIANMING, Jin. The Finite Element Method in Electromagnetics. 2nd enl. edition. [s.l.] : Wiley-IEEE Press, 2002. 780 s. ISBN 978-0471438182
- [3] MOREGA M, MACHEDON A.: EMF Penetration in Biological Tissue when Exposed in the Near Field of a Mobile Phone Antenna, 4th International Symposium on Advanced Topics in Electrical Engineering, ATEE-2004, Bucharest, Romania, Nov. 2004, Proc. CD-ROM ISBN 973-7728-31-9

Termín zadání: 12.10.2009

Termín odevzdání: 21.5.2010

Vedoucí práce: doc. Ing. Jiří Rozman, CSc.

prof. Ing. Jiří Jan, CSc.
Předseda oborové rady

Abstrakt

Cílem práce je seznámit se s teorií elektromagnetického pole, s metodou konečných prvků a s interakcí elektromagnetického pole s tkáněmi. Získané poznatky se následně využijí na výpočet šíření elektromagnetického pole v mikrovlnné oblasti a na vytvoření teplotního profilu šíření elektromagnetického pole v lidské tkáni.

Metoda konečných prvků byla implementována do programového prostředí Matlab, kde byl vytvořený 1D model v kmitočtové a časové oblasti a jednoduchý 2D model v časové oblasti. Z vytvořených programů byla analyzována šířící se elektromagnetická vlna. Následující část práce byla realizována v programovém prostředí Comsol Multiphysics. V tomhle případě představoval zkoumaný geometrický objekt lidské stehno, které bylo vystavené působení elektromagnetického pole. Z analýzy byly určeny teplotní změny v daných biologických tkáních po dobu šesti minut.

Klíčová slova

Elektromagnetické pole, Maxwellovy rovnice, Metoda konečných prvků, Vlnová rovnice, Matlab, Comsol Multiphysics

Abstract

The aim of the work is to study the electromagnetic field theory, finite element method and the interaction of electromagnetic field with tissues. Gained knowledge is then used to calculate spreading of the electromagnetic field in the microwave field and to create a temperature profile of spreading the electromagnetic fields in human tissue.

The finite element method was implemented in the Matlab programming environment, where the 1D model was created in the frequency and time domain and a simple 2D model created in time domain. The program was developed to analyze spreading electromagnetic wave. Another part of work was done in the programming environment of COMSOL Multiphysics. In this case was the human leg exposed to electromagnetic fields. The analysis determined the changes of temperature in these biological tissues for six minutes.

Keywords

Electromagnetic field, Maxwell's equations, Finite element method, Wave equation, Matlab, Comsol Multiphysics

Bibliografická citace

BÍREŠ, P. *Numerické metody výpočtu elektromagnetického pole*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2010. 54 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Jiří Rozman, CSc.

Prohlášení

„Prohlašuji, že svou diplomovou práci na téma "Numerické metody výpočtu elektromagnetického pole" jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené diplomové práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této diplomové práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.“

V Brně dne 20. května 2010

.....

podpis autora

Poděkování

Děkuji vedoucímu diplomové práce doc. Ing. Jiřímu Rozmanovi, CSc. a Ing. Jiřímu Dlouhému za účinnou metodickou, pedagogickou a odbornou pomoc a další cenné rady při zpracování mé diplomové práce.

V Brně dne 20. mája 2010

.....

podpis autora

Obsah

Zoznam obrázkov.....	8
Zoznam tabuliek.....	9
1. Úvod.....	10
2. Teória elektromagnetického poľa.....	12
2.1 Maxwellove rovnice.....	12
2.2 Podmienky okrajové a počiatočné, materiálové vzťahy	14
2.3 Riešenie Maxwellových rovníc.....	17
3. Metóda konečných prvkov	18
3.1 Typy konečných prvkov	21
3.2 Použitie metódy konečných prvkov.....	22
3.3 Metóda konečných prvkov v Matlabe.....	24
4. Dosiahnuté výsledky v Matlabe	29
4.1 Výsledky 1D Modelu	29
4.2 Riešenie a výsledky 2D Modelu	33
5. Interakcie elektromagnetického poľa v tkanivách	40
6. Modelovanie v programe Comsol Multiphysics	42
6.1 Riešenie teplotného profilu v Comsol Multiphysics.....	42
6.2 Výsledky v Comsol Multiphysics	45
7. Záver	50
Zoznam literatúry.....	52
Zoznam symbolov a skratiek	53
Zoznam príloh	54

Zoznam obrázkov

Obrázok č.1 : Numerické metódy	18
Obrázok č.2 : Trojuholníková sieť konečných prvkov a uzly	20
Obrázok č.3 : Príklady sietí.....	21
Obrázok č.4 : Typy prvkov	22
Obrázok č.5 : Príklad 1D siete, lokálnych a globálnych uzlov	26
Obrázok č.6 : Zobrazenie budiaceho poľa	31
Obrázok č.7 : Výsledné zobrazenie šíriacej sa vlny	31
Obrázok č.8 : Výsledné zobrazenie šíriacej sa vlny	33
Obrázok č.9 : Zobrazenie budiaceho poľa	37
Obrázok č.10 : Výsledné zobrazenie šíriacej sa vlny	38
Obrázok č.11 : Výsledné zobrazenie šíriacej sa vlny z bočného pohľadu.....	39
Obrázok č.12 : Oteplenie tkaniva v závislosti na expozícii	40
Obrázok č.13 : Frekvenčná závislosť absorbovaného výkonu	41
Obrázok č.14 : Model Navigator	43
Obrázok č.15 : Nastavenie veľkosti geometrického modelu	44
Obrázok č.16 : Vytvorený blok s modelom a anténou.....	44
Obrázok č.17 : Rozloženie elektrického pola pre pokožku	46
Obrázok č.18 : Hodnota SAR pre pokožku	47
Obrázok č.19 : Hodnota SAR pre tuk	47
Obrázok č.20 : Hodnota SAR pre sval.....	48
Obrázok č.21 : Hodnota SAR pre kosť	48
Obrázok č.22 : Teplotný profil analyzovaného objektu.....	49

Zoznam tabuliek

Tabuľka č.1 : Parametre tkanív	15
Tabuľka č.2 : Rozdelenie numerických metód	19
Tabuľka č.3 : Maximálne hodnoty SAR v sústreďenom bode	46

1. Úvod

S rozvojom výpočtovej techniky za posledné roky značne vzrástol aj význam numerických metód. Hoci množstvo výpočtových postupov, ktoré sa radia medzi numerické metódy vzniklo už predtým, s rozmachom výpočtovej techniky bolo potrebné zdokonaľovanie a vývoj nových metód, ktoré sú schopné spracovať veľký objem výpočtov. Existuje mnoho algoritmov, ktoré je možné využiť na numerické riešenie rôznych problémov. Numerické metódy sa dajú využiť vo viacerých odboroch, napríklad pri simuláciách bezpečnosti konštrukcií mostov, ktoré sa modelujú pomocou diferenciálnych rovníc. Ďalším využitím môže byť stavba stožiarov v strojníctve, alebo riešenie elektromagnetického poľa v elektrotechnike. Tieto úlohy nie je možné riešiť priamo. Preto je potrebné rozvíjať numerické metódy. Cieľom numerických metód je vytvoriť efektívne algoritmy pre riešenie rôznych matematických úloh.

Na začiatku diplomovej práce bude potrebné zoznámiť sa so zásadnými poznatkami o teórii elektromagnetického poľa, ktoré pomôžu k lepšiemu pochopeniu problematiky. Maxwellove rovnice v diferenciálnom tvare budú doplnené o materiálové vzťahy a okrajové podmienky a pomocou aritmetických úprav dokážeme z nich vyjadriť vlnovú rovnicu.

Metóda konečných prvkov patrí k najpoužívanejším numerickým metódam. Pomocou metódy konečných prvkov môžeme získať aproximačné riešenie rovníc, ktoré popisujú správanie skúmaného systému. Postup riešenia je založený na úplnej eliminácii diferenciálnej rovnice alebo na prevedení parciálnej diferenciálnej rovnice na ekvivalentnú obyčajnú diferenciálnu rovnicu, z nej je následne riešená štandardnými postupmi [7]. Metóda konečných prvkov sa od ostatných numerických metód odlišuje hlavne v tom, že náhradná funkcia sa volí nie pre celú oblasť, ale pre podoblasti konečných rozmerov. Metóda konečných prvkov je rozumnou voľbou pre riešenie parciálnych diferenciálnych rovníc na zložitých oblastiach alebo v prípade keď požadovaná presnosť sa mení po celej oblasti riešenia [7].

Metóda konečných prvkov sa použije v programovom prostredí Matlab pre riešenie elektromagnetického poľa 1D a 2D modelu, kde bude demonštrovaná ich

funkčnosť. V programe Comsol Multiphysics sa vytvorí teplotný profil šírenia elektromagnetického poľa v jednotlivých tkanivách a teoreticky sa popíše o interakciách elektromagnetického poľa s ľudskými tkanivami.

2. Teória elektromagnetického poľa

Elektromagnetické pole je fyzikálne pole, v ktorom pôsobia elektrické a magnetické sily v priestore. Zložené je z dvoch navzájom prepojených polí. Vektory elektrického a magnetického poľa sú na seba kolmé. K popisu vlastností v priestore a čase využívame skalárne a vektorové funkcie. Elektromagnetické polia sú buď stacionárne – časovo nepremenné, alebo nestacionárne – časovo premenné. V nestacionárnom poli musia obidve polia existovať zároveň a platí, že indukované elektrické resp. magnetické pole je vždy kolmé k magnetickému resp. elektrickému poľu, pričom jeho časová zmena toto pole indukciou vyvolala. Rovnice popisujúce elektromagnetické pole sú založené na platnosti základných zákonov a sú spísané do štyroch vzájomne súvisiacich sústav rovníc.

2.1 Maxwellove rovnice

Odvodenie zo základných zákonov zavŕšil Maxwell, keď zovšeobecnil empirické poznatky o elektrických a magnetických javoch v jednotnej teórii elektromagnetického poľa [1]. Maxwellove rovnice vyjadrujú Coulombov zákon, Ampérov zákon, Faradayov zákon a zákon elektromagnetickej indukcie [6]. Tvar zápisu, ktorými sú popísané elektromagnetické javy môže byť v integrálnom alebo diferenciálnom tvare. Diferenciálny tvar rovníc popisuje vlastnosti elektromagnetického poľa v konkrétnom bode, ale integrálne vyjadrenie rovníc už popisuje v danej oblasti priestoru vlastnosti elektromagnetického poľa.

Diferenciálny tvar pre stacionárne pole:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{ind} + \vec{J}_{en} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4)$$

Kde: E intenzita elektrického poľa [V/m]

B magnetická indukcia [T]

D elektrická indukcia [C/m²]

H intenzita magnetického poľa [A/m]

∇ diferenciálny operátor „nabla“

J_{ind} plošná hustota indukovaného elektrického prúdu [A/m²]

J_{en} plošná hustota vnúteného elektrického prúdu [A/m²]

ρ hustota elektrického náboje [C/m³]

Diferenciálny tvar pre nestacionárne pole:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}_{\text{ind}} + \vec{J}_{\text{en}} \quad (5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (8)$$

V diferenciálnom tvare (1) je vyjadrená rovnica Ampérov zákon celkového prúdu resp. zákon magnetoelektrickej indukcie:

Cirkulácia vektoru H po orientovanej krivke l je rovná celkovému vodivému prúdu I a posuvnému prúdu $d\psi/dt$, ktorý prechádza v kladnom smere plochy S , ohraničenou krivkou l . Vzájomná orientácia krivky a plochy sa určí pomocou pravidla pravej ruky. Ak je palec v smere kladnej normály plochy S (ukazuje smer čítací šípky magnetického poľa), ukazujú prsty smer orientácie krivky l [3].

V diferenciálnom tvare (2) je vyjadrená rovnica Faradayov indukčný zákon resp. zákon elektromagnetickej indukcie:

Cirkulácia vektora E po orientovanej krivke l je rovná záporne vzatej časovej zmene magnetického toku, ktorý prechádza plochou S , ohraničenou krivkou l . Vzájomná orientácia krivky a plochy je určená pomocou pravidla pravej ruky. Na pravých stranách najprv vypočítame magnetický tok v smere kladnej normály, ktorý je funkciou času $\Phi(t)$, ktorú derivujeme podľa času a zmeníme znamienko derivácie [3].

V diferenciálnom tvare (3) je vyjadrená rovnica Gaussova veta elektrostatiky: Výtok vektoru indukcie D je rovný celkovému náboju Q v objeme V , ktorý je uzavretý plochou S [3].

V diferenciálnom tvare (4) je vyjadrená rovnica zákon kontinuity magnetickej indukcie: Výtok vektoru magnetickej indukcie z uzavretej plochy je vždy nulový [3].

2.2 Podmienky okrajové a počiatočné, materiálové vzťahy

Jednoznačnosť riešenia Maxwellových rovníc v diferenciálnom tvare sa musí doplniť o materiálové vzťahy, okrajové a počiatočné podmienky.

Materiálové vzťahy sú potrebné pre definovanie elektromagnetických javov v látkovom prostredí. Vzťahy pre vákuum sú jednoduchšie oproti vzťahom pre určité dielektrikum, pretože relatívna permitivita a permeabilita sú rovné jednej.

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \quad (9)$$

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (10)$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (11)$$

Kde: ε permitivita [F/m]

μ permeabilita [H/m]

σ elektrickú vodivosť [S/m]

Permitivita popisuje vlastnosti dielektrika, ktorá je definovaná $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$, kde $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} F \cdot m^{-1}$ je permitivita vákua a ε_r je relatívna permitivita, čiže látková konštanta a pre každé prostredie je iná. Permeabilita udáva mieru magnetizácie prostredia

vplyvom pôsobenia magnetického poľa. Permeabilitu dostaneme zo vzťahu $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$, kde permeabilita vákua $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ a μ_r je relatívna permeabilita udáva o koľko krát je permeabilita prostredia väčšia ako permeabilita vákua.

Dôležité parametre ľudských tkanív z hľadiska modelovaní vplyvu elektromagnetického poľa sú relatívna permitivita ϵ_r [-], hustota $\rho [\text{kg/m}^3]$, elektrická vodivosť $\sigma [\text{S/m}]$ a tepelná vodivosť $k [\text{W/m.K}]$, ktoré sme zobrazili v Tab. č.1 [2].

Tabuľka č.1 : Parametre tkanív

Typ tkaniva	Relatívna permitivita	Hustota	Vodivosť	Tepelná vodivosť
	ϵ_r [-]	$\rho [\text{kg/m}^3]$	$\sigma [\text{S/m}]$	$k [\text{W/m.K}]$
Kosť	19.905	1850	0.46928	0.528
Tuk	5.52	920	0.064838	0.195
Koža	39.661	1100	1.1416	0.528
Sval	54.112	1040	0.9438	0.528
Krv	60.128	1000	1.09	0.528

Prostredia elektromagnetických polí sa líšia svojimi vlastnosťami. Prostredia sa delia na homogénne a nehomogénne, izotropné a anizotropné, disperzné a indisperzné. Homogénne prostredie je také, v ktorom parametre ako ϵ , μ , σ (permitivita, permeabilita, elektrická vodivosť) sú rovnaké vo všetkých miestach prostredia, nezávisia na polohe. V nehomogénnom prostredí sa vlastnosti parametrov chovajú opačne. V izotropnom prostredí sú parametre nezávislé na smere poľa, v anizotropných prostrediach je zrejma závislosť parametrov na smere poľa. V disperznom prostredí sú parametre závislé na kmitočte veličín poľa, v indisperznom prostredí neexistuje závislosť na veľkosti kmitočtu veličín poľa [6].

Ďalším podstatným doplnením Maxwellových rovníc je doplnenie o okrajové podmienky. Okrajové podmienky sú definované v elektricky a magneticky vodivých stenách pri ktorých dotyčnica zložky elektrickej a magnetickej intenzity je nulová. Okrajové podmienky sú zadefinované na hraniciach oblastí a musia byť vhodne zvolené, aby správne popísali daný problém. Okrajových podmienok je viac typov:

Dirichletovy okrajové podmienky tzv. podmienky prvého druhu, kde sú dané hodnoty potenciálu pozdĺž hranice oblasti.

Neumannovy okrajové podmienky tzv. podmienky druhého druhu, kde sú dané hodnoty derivácie v smere normály na hranici oblasti.

Zmiešané okrajové podmienky spĺňajú Dirichletovy a Neumannovy okrajové podmienky.

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0. \quad (12)$$

Dotyčnica zložky intenzity elektrického poľa k dokonalému elektrickému vodiču musí byť na tomto vodiči nulová.

$$\vec{n} \times (\nabla \times \vec{E}) = 0. \quad (13)$$

Obdobná podmienka platí aj pre dotyčnicu zložky intenzity magnetického poľa k dokonalému magnetickému vodiču. V oboch rovniciach je n jednotkový vektor, ktorý je kolmý k povrchu dokonalého vodiča [4].

Počiatočné podmienky definujú v analyzovanej štruktúre rozloženie elektromagnetického poľa na počiatku časovej odozvy na budiaci impulz elektromagnetického poľa. Väčšinou sa definuje nulová hodnota pre zložky veličín E a H .

Pri analýze uzavretých štruktúr musíme použiť diferenciálny tvar Maxwellových rovníc. Pod uzavretou štruktúrou chápeme objekt, ktorý uzatvoríme do spojitaj plochy, kde sú zadefinované okrajové podmienky. Ale niekedy sa môže stať, že je potreba použiť diferenciálne metódy pre analýzu otvorených štruktúr. Pokiaľ štruktúra nie je vodivo uzavretá, treba zaistiť na hranici oblasti bezodrazové zakončenie použitím absorpčnej podmienky (ABC – Absorbing Boundary Condition). Ďalší spôsob beodrazového zakončenia je využitie dokonalej prispôsobenej vrstvy (PML – Perfectly Matched Layer). PML tvorí oblasť s absorpčným materiálom a jeho straty sú spôsobené dielektrickým a magnetickým ohrevom [3]. Ak správne navrhujeme PML, dôjde ku vzniku veľkých strát vo vrstve a tým sa dá zaistiť požadovaný útlm signálu.

2.3 Riešenie Maxwellových rovníc

Vychádzame z Maxwellových rovníc (5 až 8), z materiálových rovníc (9 až 11) a z okrajových rovníc (12 a 13). Na začiatku výpočtu analýzy štruktúry musíme poznať rozloženie poľa v čase $t = 0$. Materiálové vzťahy sa dosadia do prvých dvoch Maxwellových rovníc (5 a 6).

$$\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{H} + \vec{J} = 0, \quad (14)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0. \quad (15)$$

V vzťahoch $\vec{J}$ je vektor prúdovej hustoty, predstavuje súčet vektora indukovaného prúdu $\vec{J}_{ind}$ a vnúteného prúdu zdroja $\vec{J}_{en}$, ktoré vystupovali v rovnici (1). Keď na rovnicu (15) aplikujeme zľava rotáciu, po dosadení rotácie intenzity magnetického poľa z rovnice (14) a po určitých úpravách dospejeme k vlnovej rovnici pre intenzitu elektrického poľa [4]

$$\vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\mu_r} \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) \right] + \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}. \quad (16)$$

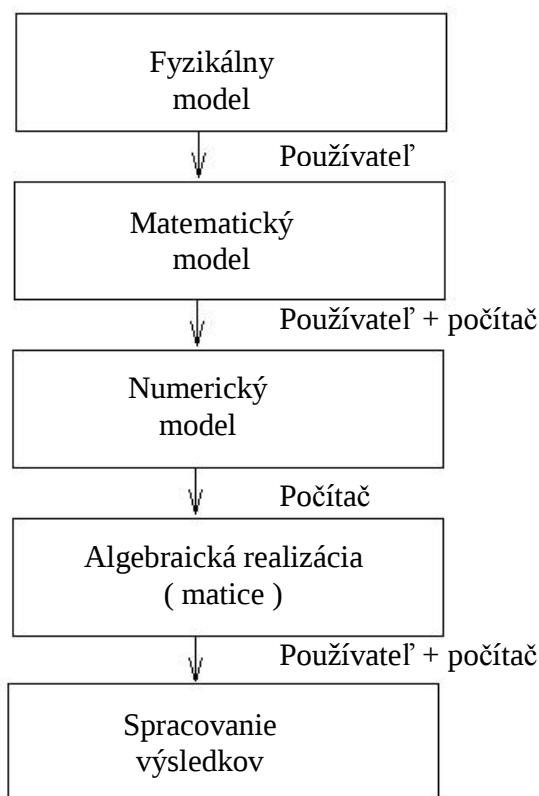
Ďalej sa rovnica musí doplniť okrajovými podmienkami z rovníc (12 až 13) a namiesto presného rozloženia intenzity elektrického poľa $\vec{E}(x, y, t)$ sa dosadí rozloženie približné $\vec{e}(x, y, t)$. Metódou vážených reziduí sa minimalizuje zbytková chyba R , ktorá bola spôsobená náhradou presného riešenia aproximáciou a získa sa vzťah [4]

$$\int_{\Omega} \vec{v} \left\{ \vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\mu_r} \left(\vec{\nabla} \times \vec{e} \right) \right] + \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \right\} d\Omega = 0. \quad (17)$$

Pri vhodne zvolenej váhovej funkcii $\vec{v}(x, y)$ sa hľadá približné rozloženie poľa $\vec{e}(x, y, t)$ tak, aby rovnica (17) bola splnená. Pričom rovnica (17) predstavuje sústavu troch skalárnych rovníc pre tri neznáme zložky intenzity elektrického poľa [4].

3. Metóda konečných prvkov

Pri matematickom modelovaní úloh metódou konečných prvkov (MKP) vznikli komplikované a neriešiteľné systémy obyčajných aj parciálnych diferenciálnych rovníc. Matematici a inžinieri začali vyvíjať numerické počítačovo orientované metódy (bez počítačov by táto metóda nemala význam, pretože sa počítajú systémy obsahujúce väčší počet rovníc), ktoré by zložité výpočty zvládli. V krátkej dobe sa MKP začala využívať v rôznych oblastiach ako v stavebníctve, elektrotechnike a strojníctve.



Obrázok č.1 : Numerické metódy

Numerické metódy transformujú systém diferenciálnych rovníc, ktoré popisujú správanie sa skúmaného systému na algebraický systém rovníc. Diferenciálne rovnice sú zostavené pre neznámu funkciu poľa (čo môže byť teplota, elektrický potenciál, elektromagnetické pole) na konečnej ohraničenej alebo viacnásobnej súvislej oblasti.

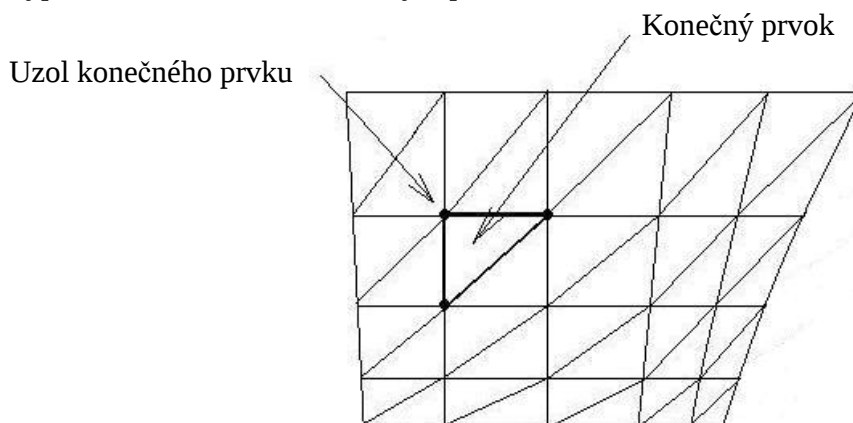
Riešením algebraického systému rovníc je, že určíme parametre náhradnej funkcie a vďaka tomu jej celkový tvar. Numerické metódy sa od seba líšia voľbou náhradnej funkcie, fyzikálnym významom voľných koeficientov a spôsobom ich určenia. Odlišnosť medzi numerickými metódami je v ich komplikovanom matematickom zápise a tiež programovej implementácii. Preto je potrebné vedieť vlastnosti metódy a čo všetko požadujeme pre vyriešenie danej úlohy.

Tabuľka č.2 : Rozdelenie numerických metód

Typ numerickej metódy	Riešenie poľa	Výhody a nevýhody
Metóda konečných objemov	Diferenciálnu rovnicu	
Metóda hraničných prvkov	Priestorové riešenie neobmedzenej oblasti popísané integrálnou rovnicou	Výhodou je, že oblasť nemusí byť uzavretá hranicou a použitie konštantnej aproximačnej funkcie - funkcie integrujú. Nevýhodou je, že matica sústavy je hustá a zle podmienená, ale dimenzia úlohy sa zníži a pre rovnakú presnosť úlohy stačí menší počet rovníc..
Metóda indukovaných nábojov	Integrálnu rovnicu	
Metóda konečných diferencií	Časovo-priestorové rozloženie poľa v uzavretej oblasti popísané diferenciálnou rovnicou	Riešenie problémov, kde oblasť a okrajové podmienky sú jednoduché, nevýhodou je aproximačné riešenie iba v bodoch siete a nepravidelný tvar spôsobuje numerické komplikácie.
Metóda konečných prvkov	Diferenciálnu rovnicu	Najrozšírenejšia metóda, presnosť závisí na hustote a tvare prvkov siete a voľbe aproximačnej funkcie. Nevýhodou je väčšia komplikovanosť matematického zápisu a zložitejšia softvérová implementovanie.
Momentová metóda	Diferenciálnu, Integrálnu a Integro-diferenciálnu rovnicu aj v otvorených štruktúrach	Aproximácii hľadáme funkcie pomocou známych báзовých funkcií a neznámych aproximačných koeficientov, metóda odhadu parametra je jednoduchá, ale aj nepresná.

Hlavným rozdielom MKP a iných numerických metód je náhradná funkcia, ktorú volíme nie pre celú oblasť, ale podoblasti konečných rozmerov. Skúmaná oblasť je rozdelená na menšie časti podoblasti, ktoré nazývame elementy alebo prvky – skúmaná oblasť je tým diskretizovaná. Susedné elementy sa vzájomne dotýkajú, ale neprekrývajú ani medzi nimi nevzniká žiadna medzera. Elementy sú pospájané navzájom pomocou uzlových bodov a vzniknutý obrazec nazývame sieť (mesh). Tvar elementov je zvolený aby bol čo najjednoduchší (trojuholníky, štvoruholníky a podobne). Rozdelenie numerických metód je zobrazené v Tab.č.2.

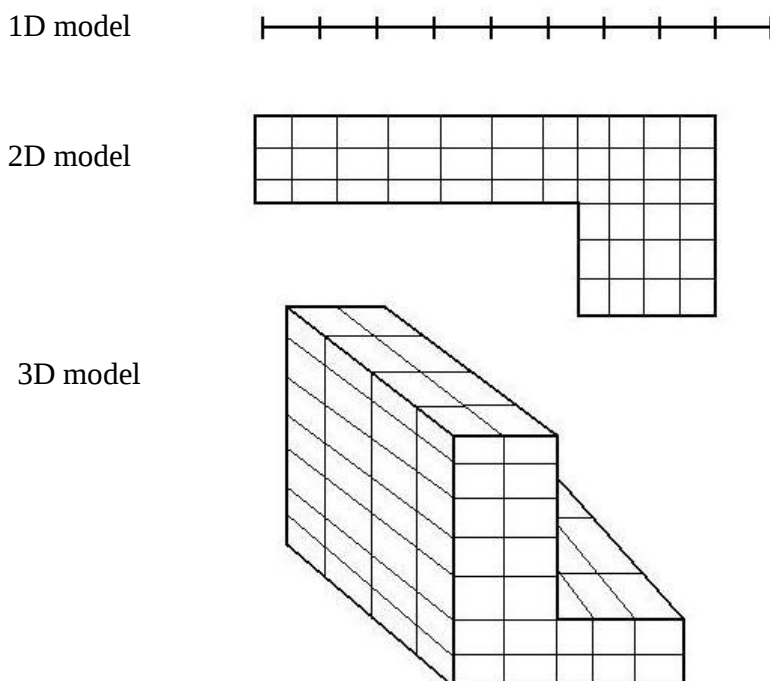
Tým, že voľba náhradných funkcií v metóde konečných prvkov je približná, presnosť metódy je ovplyvniteľná vhodne zvolenou diskretizáciou riešenej oblasti na konečné prvky a uzlové body. Konečné prvky môžu mať tvar čiar, plôch alebo objem konečných rozmerov. Čím zvolíme jemnejšiu sieť konečných prvkov, tým získame väčšiu presnosť riešenia daného problému. V zakrivených oblastiach využívame konečné prvky so zakriveným tvarom. Veľmi hrubou sieťou získame uspokojivé a použiteľné výsledky. Hoci je tento výpočet komplikovanejší a algebraický systém rovníc je rozsiahlejší, v súčasnej dobe nie je problém využiť výpočtovo kvalitnejšie PC, ktoré dokážu spracovanie dát zvládnuť. Pri vzniku MKP bola však nedostatočná rýchlosť PC a výpočtová náročnosť úloh veľkým problémom.



Obrázok č.2 : Trojuholníková sieť konečných prvkov a uzly

V MKP rozlišujeme rôzne samostatné skupiny úloh. Môžeme mať prípady, keď pole závisí na jednej priestorovej súradnici a nie je závislé od času. Vtedy sa nám úloha

zjednoduší na sústavu obyčajných diferenciálnych rovníc, ktoré sme schopný integrovať. Podľa počtu premenných rozlišujeme úlohy na 1D, 2D, 3D (D – Dimenzia) [3].



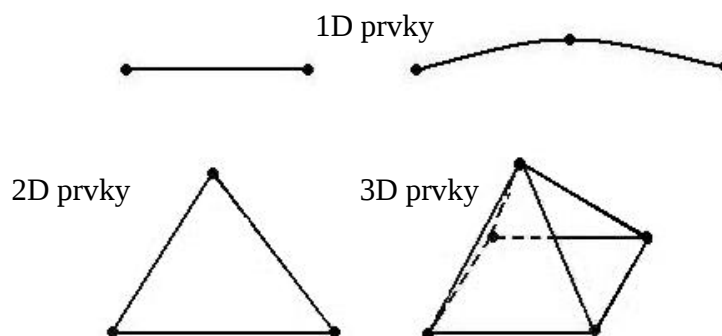
Obrázok č.3 : Príklady sietí

V jednorozmerných úlohách (1D) je maximálna idealizácia skutočného trojrozmerného problému prevedená na jednorozmerný, výsledkom je obyčajná diferenciálna rovnica. Dvojrôzmerne úlohy (2D) sú komplexnejšie oproti 1D úlohám a trojrozmerné úlohy (3D) sú najkomplikovanejšie, výsledkom obidvoch úloh je parciálna diferenciálna rovnica. Ďalším prípadom, ktorým sa môže zjednodušiť výpočet je časová závislosť, kde obecný nestacionárny problém podľa zjednodušíme na statický, stacionárny, kvázistatický a kvázistacionárny problém [3].

3.1 Typy konečných prvkov

Diskretizácia predstavuje rozdelenie riešenej oblasti na konečné prvky. Konečné prvky môžu mať tvar čiary, plochy a objemu konečných rozmerov. Každá takáto skupina môže obsahovať niekoľko desiatok rôznych typov prvkov, ktoré sa líšia počtom uzlových

bodov a počtom primárnych neznámych v uzlových bodoch daného elementu. Prvky sú vybrané podľa typu úlohy, geometrie a na Obr č.4 sú zobrazené typy prvkov.



Obrázok č.4 : Typy prvkov

Pri riešení úloh v jednorozmerných dimenziách používame konečný čiarový prvok (1D prvok). V tomto prípade sa nám mení neznáma primárna veličina len v jednom smere. Geometrický tvar diskretizovaného telesa je charakterizovaný svojim dĺžkovým rozmerom, pričom veľkosť prierezovej plochy je malá. Prvky môžu byť priame a zakrivené. Pri dvojrozmerných úlohách sa používajú konečné plošné prvky (2D prvky), ktoré sa využívajú pri diskretizácii s dvojrozmernou zmenou primárnej neznámej. Prvky sa delia podľa rovinnosti a tvaru prvkov. 3D prvky sa používajú na modelovanie systémov, kde nedochádza k redukcii rozmerov. 3D prvky nazývame objemové a môžu mať tvar štvorstenu alebo pyramídy [13].

3.2 Použitie metódy konečných prvkov

Metóda konečných prvkov vychádza z Maxwellových rovníc, ktoré sú zapísané v diferenciálnom tvare. Rovnice sú popísané v druhej kapitole. Predpokladá sa, že budiace prúdy budú nulové (kvôli zjednodušeniu výpočtu) a amplitúda sa mení v smeroch x , y a mení sa fáza šíriacej vlny

$$E_z(x, y, z) = E(x, y, z) \exp[-j\beta z], \quad (18)$$

β je fázová konštanta resp. konštanta šírenia vlny a udáva o koľko radiánov sa zmení fáza vlny na jednom metre [5]. Po dosadení do vlnovej rovnici (16) a po úpravách sa získa rovnica [5]

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + (k_0^2 - \beta^2)E = 0 . \quad (19)$$

Rovnica (19) predstavuje vlnovú rovnicu, ktorá obsahuje vlnové číslo vo voľnom priestore. Vlnové číslo sa vypočíta $k_0^2 = \omega^2 \cdot \mu_0 \cdot \varepsilon_0$. Kritické číslo definuje kmitočet od ktorého sa vlna začína šíriť. Vlnová rovnica popisuje matematicky šírenie elektromagnetickej vlny v pozdĺžnom smere osi z.

Vlnová rovnica sa dá riešiť dvoma spôsobmi. Prvý spôsob riešenia vlnovej rovnice je analýza pri danom kmitočte ω , kde sa získa vlnové číslo k_0 . V rovnici (19) zostane neznáma konštanta šírenia β a rozloženie pola E . Druhý spôsob riešenia vlnovej rovnice je analýza so zadanou konštantou šírenia β . Vznikne stav pri ktorom sa vlna nešíri $\beta = 0$ a dospeje sa ku kritickým vlnovým číslam. Tento spôsob riešenia je zobrazený vo vzťahu (20), ktorým sa získa parciálna diferenciálna rovnica

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + k_0^2 E = 0 . \quad (20)$$

Postup metódy konečných prvkov sa dá zhrnúť v bodoch:

1. Diskretizujeme skúmanú oblasť čiže rozdelíme konečné prvky na malé trojuholníky. Každý trojuholník predstavuje konečný prvok, ktorý obsahuje uzly lokálne a globálne.
2. Rozloženie pozdĺžnej zložky intenzity elektrického pola sa aproximuje nad každým konečným prvkom lineárnou funkciou. Rozloženie na celej oblasti sa získa súčtom aproximácií nad všetkými konečnými prvkami. Funkcia je vyjadrená pomocou neznámych hodnôt intenzity v uzloch a známymi bázovými funkciami. Aproximácia je formálne jedna rovnica pre m neznámych uzlových hodnôt e_m [5]

$$e(x, y) = \sum_{m=1}^M e_m N_m(x, y) . \quad (21)$$

V rovnici e_m predstavuje hodnotu testovacieho pola vo vrchoch trojuholníkových prvkov a N_m je známa bázová funkcia. Pri lineárnej aproximácii dosahujú každá bázová

funkcia jednotkové hodnoty v jednom uzle a hodnoty nulové vo všetkých ostatných uzloch v ihlane.

3. Formálna aproximácia je dosadená do vzťahu (20), ale aproximácia kvôli približnosti nesplňuje riešenú rovnicu presne, preto sa do rovnice pripočíta chyba tzv. reziduum. Reziduum sa minimalizuje metódou vážených reziduí. Čím menšie reziduum, tým je presnejšia aproximácia [5]

$$\frac{\partial^2 e(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e(x, y)}{\partial y^2} + (k_0^2 - \beta^2) e(x, y) = R(x, y) . \quad (22)$$

Potom, ako sa zaviedla diskretizácia a minimalizácia rezidua, sa parciálna diferenciálna rovnica (22) pre spojité testovacia pole $e(x, y)$ previedla na algebraickú rovnicu. V tejto rovnici sú uzlové hodnoty testovacieho poľa ako neznáme skalárne koeficienty. A po váhovaní s váhovacími funkciami v neznámych uzlových hodnotách testovacieho poľa, sa získa maticová rovnica (23), ktorej výsledkom je vektor vlastných čísel a matice vlastných vektorov

$$Se + (k_0^2 - \beta^2) Te = 0 , \quad (23)$$

kde e je stĺpcový vektor neznámych uzlových hodnôt testovacieho poľa.

4. Po dosadení uzlových hodnôt do aproximácie, sa získa aproximačná funkcia hľadanej pozdĺžnej zložky intenzity v každom bode analyzovanej oblasti. Z tejto zložky sa dajú vypočítať ostatné neznáme zložky vektorov [5].

3.3 Metóda konečných prvkov v Matlabe

V literatúre [5] sú k dispozícii matice pre výpočet koeficientov konečných prvkov. Pri riešení danej úlohy stačí len upraviť matice koeficientov pre konkrétne prvky a danú úlohu. Celá procedúra sa dá popísať v niekoľkých bodoch pre 1D model.

1. Skúmanú oblasť rozdelíme na konečné prvky. Skúmaná oblasť je jednorozmerná a využijeme čiarové konečné prvky.

$$Ae = d/N;$$

Kde Ae predstavuje dĺžku e-teho konečného prvku, sieť je rovnomerná, d je dĺžka skúmanej oblasti a N počet konečných prvkov.

2. Zostavia sa matice koeficientov $\mathbf{T}$ a $\mathbf{S}$ pre izolované konečné prvky. Vzťahy pre výpočet koeficientov jednotlivých konečných prvkov sú k dispozícii v literatúre [5]. Dosadí sa plocha e-teho konečného prvku, uhol u n-tého vrcholu e-teho trojuholníkového prvku a koeficienty pre dané prvky [5]. Získané vzťahy pre matice koeficientov lineárnej aproximácie

$$Te = \frac{Ae}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

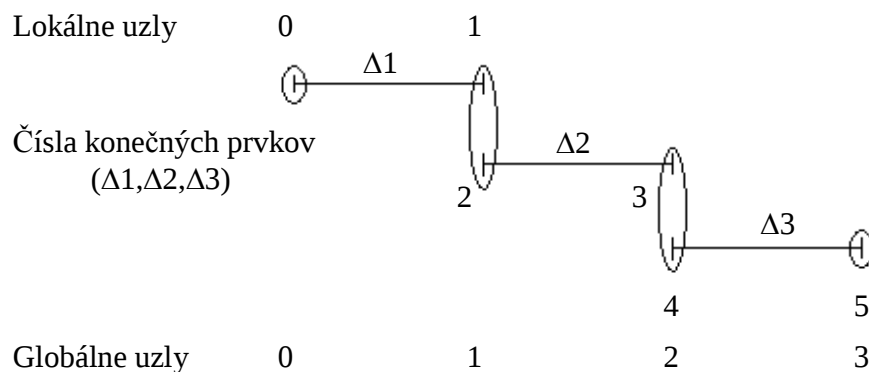
$$Se = \sum_{m=1}^3 Q_n \cot g \vartheta_n, \quad (25)$$

kde matica $Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$ (26)

Matice Se a Te majú rozmer 2×2 pretože konečným prvkom je úsečka s dvoma uzlami, ktoré sa v Matlabe zapíšu takto.

```
Q = [1 -1; -1 1];
Se = (1/Ae)*Q;
Te = (Ae/6)*[2 1; 1 2];
```

3. V ďalšom bode sa popíšu matice koeficientov izolovaných konečných prvkov. V diskretizačnej sieti jednotlivé diskretizačné prvky od seba sa oddelia, vzniknú izolované konečné prvky. V každom takomto konečnom prvku separátne sa očísľujú uzly konečného prvku, čiže to budú lokálne uzly. Globálne matice koeficientov izolovaných konečných prvkov $\mathbf{Sg}$ a $\mathbf{Tg}$ sa zostavia tak, že sa postupne do prázdnych matíc vkladajú $\mathbf{Se}$ a $\mathbf{Te}$ do diagonály matice v poradí označených konečných prvkov. V analýze sa zvolí také číslovanie konečných prvkov, ktoré sa už v priebehu riešenia nemení Obr. č.5.



Obrázok č.5 : Príklad 1D siete, lokálnych a globálnych uzlov

Globálne matice koeficientov izolovaných konečných prvkov budú mať tvar

$$Sg = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$Tg = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}, \quad (28)$$

kde jednotlivé submatice **Se** a **Te** sú vypočítané zo vzťahov (24 a 25) a symboly 0 predstavujú nulové matice o rozmeroch 2x2.

Vytvorenie globálnych matíc pre izolované prvky v Matlabe je nasledovné:

```
% matice pre izolované konečné prvky
Sg = zeros(2*N, 2*N);
Tg = zeros(2*N, 2*N);
% vypočítanie vzťahov
i = 0;
for l = 1:N
    Sg(l+i:l+i+1, l+i:l+i+1) = Se;
```

```

    Tg(l+i:l+i+1, l+i:l+i+1) = Te;
    i = i+1;
end

```

4. V tomto bode sa musia izolované konečné prvky združiť do diskretizačnej siete. Zostaví sa združená matica **C**, ktorá určí vzťah medzi lokálnymi a globálnymi uzlami. Matica **C** má toľko riadkov, koľko je v diskretizačnej sieti lokálnych uzlov a stĺpcov, koľko je globálnych uzlov. Matica **C** obsahuje len jednotky a nuly. Keď lokálny uzol je priradený k príslušnému globálnemu uzlu, zapíše sa jednotka. Jednotka sa zapíše na ind-tom riadku a m-tom stĺpci. V opačnom prípade sa zapíše nula, lokálny uzol nie je priradený globálnemu uzlu. Naznačenie tvorby združenej matice

$$C = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} . \quad (29)$$

Združená matica sa dá skontrolovať. Na každom riadku matice **C** sa musí vyskytovať jedna jednotka, pretože lokálny uzol je združený s jedným globálnym uzlom. A v stĺpcoch matice **C** obsahuje taký počet jednotiek, koľko lokálnych uzlov je združených do globálneho uzla. Vytvorenie združenej v matici **C** v programovom prostredí Matlab.

```

C = zeros(2*N,N+1);
C(1,1) = 1;           % prvý stĺpec

ind = 2;
for m = 2:N           % druhý až predposledný stĺpec
    for n = 1:2
        C(ind,m) = 1;
        ind = ind + 1;
    end
end
end

```

$C(2*N, N+1) = 1;$ % posledný stípec

5. Združená matica bola vytvorená v predchádzajúcom bode a teraz združenie prevedieme násobením matíc

$$S = C' \cdot Sg \cdot C , \quad (30)$$

$$T = C' \cdot Tg \cdot C . \quad (31)$$

Matice S a T sú zviazané týmto krokom s diskretizačnou sieťou.

6. Aproximácia testovacieho poľa $\mathbf{e}(\mathbf{x})$, ktorá vyjadruje priestorové rozloženie pozdĺžnej zložky vektora elektrickej intenzity v analýze. Zložka musí byť nulová na všetkých dokonale elektrických vodivých plochách, čo vyjadruje Dirichletovy okrajové podmienky (12). Preto sa musia vynechať všetky riadky a stĺpce, ktoré odpovedajú globálnym uzlom nachádzajúcich sa na elektricky vodivých stenách. A pokiaľ sa v štruktúre nachádzajú dokonalo magnetické vodivé steny, tie musia splňovať Neumannovy okrajové podmienky(13) [4].

7. Po vykonaní všetkých krokov získame matice koeficientov **S** a **T**, ktoré sa nachádzajú v rovnici (23).

4. Dosiahnuté výsledky v Matlabe

Metóda konečných prvkov je numerická metóda pre analýzu štruktúr. Je ňou umožnené riešiť problémy, ktoré by sa nedali vyriešiť klasickými postupmi. Postup a princíp riešenia metódy konečných prvkov je vysvetlená predchádzajúcich kapitolách. V Matlabe je tento postup riešenia naprogramovaný pre 1D model v kmitočtovej a časovej oblasti. Ďalej sa overí postup z 1D modelu pri programovaní 2D modelu v časovej oblasti.

4.1 Výsledky 1D Modelu

Testovacie pole $\mathbf{e}(x)$ sa formálne aproximovalo po častiach lineárnymi funkciami nad uzlovými konečnými prvkami [4]. Možnosť riešenia 1D modelu je v kmitočtovej a časovej oblasti. Pri riešení v kmitočtovej oblasti sa vychádza z rovnice (23), v ktorej už sú známe matice koeficientov $\mathbf{S}$ a $\mathbf{T}$, ďalej sa dá analyzovať buď pri danej frekvencii f alebo sa zadá konštanta šírenia β . Analýza sa prevedie prvým spôsobom, zadáním frekvencie.

$$Se + k_0^2 Te = 0 . \quad (32)$$

Kritické vlnové číslo určuje frekvencie od ktorých sa vlna začne šíriť, ktoré sa vypočítajú

$$k_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{c} , \quad (33)$$

kde c je rýchlosť svetla vo voľnom priestore (vákuu), jej hodnota je $c = 300 \cdot 10^6 \text{ m/s}$, frekvencia pri ktorej analýza prebieha je $f = 900 \text{ MHz}$, pri výpočte sa však počítalo s rezervou. V programe riešime rovnicu (32) a vypočítame rozloženie amplitúd intenzity. Zápis v Matlabe je nasledovný :

```
% vlnové číslo  
k0 = 2*pi*f/3e+8;  
% kritické vlnové číslo, f<900 MHz  
gam = 16.7;
```

```
% konštanta šírenia
```

```
bt = sqrt(k0^2-gam^2);
```

Matica ľavých strán **L** sa vypočíta z matíc **Se**, **Te** a známych konštánt. Vektor pravých strán **P** je nulový vektor na začiatku, ale hneď v ďalšom riadku sa do vektora **P** vkladá prvý stĺpec matice ľavých strán. Intenzita poľa sa počíta ako podiel matice **L** a vektoru **P**, ktoré majú rovnaký počet riadkov.

```
% matica ľavých strán
```

```
L = S_TE+T_TE*gam^2;
```

```
% matica pravých strán
```

```
P = zeros(size(L,1),1);
```

```
P = P-L(:,1);
```

```
% rozloženie amplitúd intenzity
```

```
E = L\P;
```

Vektor **E** vyjadruje hodnotu intenzity elektrického poľa. Na stenách je intenzita elektrického poľa nulová a teraz sa musí definovať budiace pole.

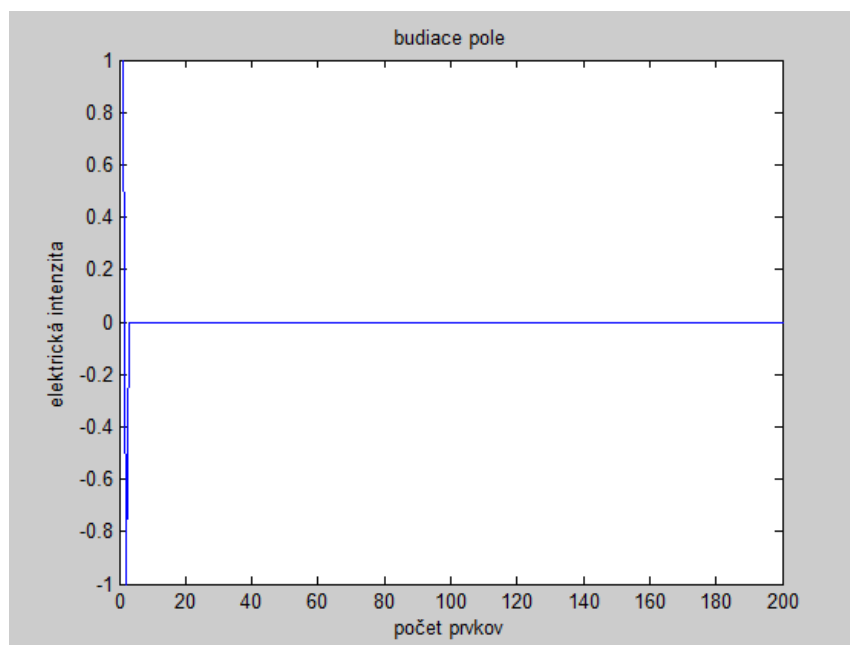
```
Em(1,1)=1;
```

Nakoniec dôjde k výpočtu budiaceho poľa, ktorý je zobrazený na Obr. č.6 a výslednej vlny, ktorá sa šíri prostredím a je zobrazená na Obr. č.7. Vlna sa šíri v priestore a nedochádza k jej odrazu, výpočet je bez spätnej vlny. Presnosť výsledku závisí od počtu konečných prvkov, čím viac ich je, tým je výpočet presnejší, zvyšovaním počtu prvkov však rastú nároky na výpočet.

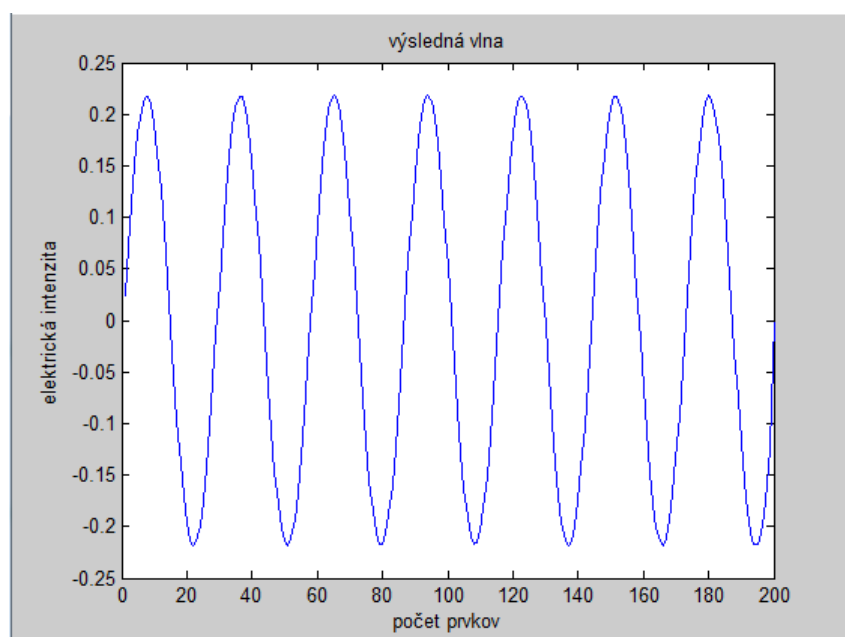
```
Eout(1:N-1,1) = Eout(1:N-1,1)+real(Esh2(2:N,1));
```

Kde Esh2 predstavuje doprednú vlnu.

```
sh2 = exp(-j*bt*(0:N-1)*Ae);
```



Obrázok č.6 : Zobrazenie budiaceho poľa



Obrázok č.7 : Výsledné zobrazenie šíriacej sa vlny

Táto časť sa venuje analýze v časovej oblasti. Jediný rozdiel bude spočívať v uvážení poľa obecného časového priebehu namiesto polí harmonických [4]. Vychádza sa

z rovnice (17). Rovnako i v časovej oblasti vychádzame z maticových koeficientov **S** a **T** ako v kmitočtovej oblasti.

Najprv sa definuje časový krok, časová diskretizácia a budenie. Časový krok by nemal byť príliš dlhý, lebo potom rastie disperzná chyba. Vzrast disperznej chyby sa prejaví posunmi na frekvenčnej osi [4]. Pri časovej diskretizácii, delíme časovú os na rovnako dlhé vzájomne nadväzujúce subintervaly. V budení definujeme počet krokov, vygenerujeme riadkový vektor a nastavíme budenie dopredu určeného miesta.

```
dt = cdt/c; % časový krok
steps = 1000; % počet časových krokov
imst = steps; % jednotkový impulz
t = linspace( dt, dt*imst, imst); % vygeneruje riadkový vektor
g(1) = 3*h(k); % nastavenie budenia dopredu určeného miesta
```

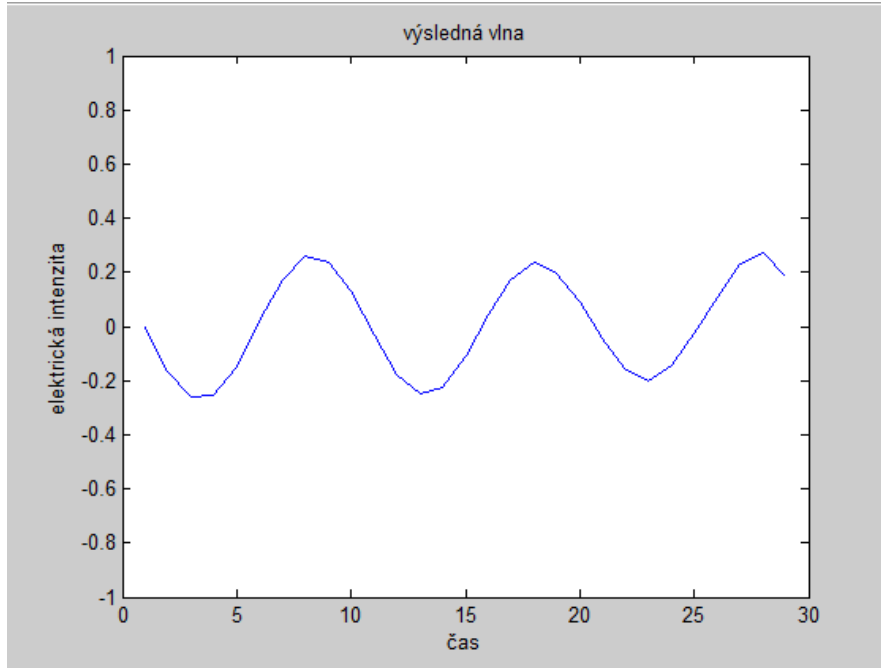
Ďalej bude výpočet smerovať k implicitnému výpočtu, pod implicitnými riešeniami sa rozumejú algoritmy, u ktorých nie je budúci časový vzor testovacieho poľa vyjadrený priamo. K jeho získaniu sa musí riešiť v každom iteračnom kroku maticová rovnica [4]

$$\left[\frac{1}{(cdt)^2} Tt + \frac{1}{4} St \right] H^{n+1} = \left[\frac{2}{(cdt)^2} Tt - \frac{1}{2} St \right] H^n - \left[\frac{1}{(cdt)^2} Tt + \frac{1}{4} St \right] H^{n-1} - g, \quad (34)$$

kde $\mathbf{H}^n$ a $\mathbf{H}^{n-1}$ sú stĺpcové vektory a obsahujú uzlové hodnoty testovacieho poľa v súčasnom a predchádzajúcom kroku, $\mathbf{g}$ je vplyv budenia. V Matlabe tieto kroky sú :

```
Y = ((1/(cdt^2))*Tr+(1/4)*Sr); % výpočet matice Y
Z = ((2/(cdt^2))*Tr-(1/2)*Sr); % výpočet matice Z
H = zeros(length(Y),3);
g = zeros(length(Y),1);
H(:,3) = Y\((Z*H(:,2))-Y*H(:,1)- g);
```

Výsledná vlna v časovej oblasti je zobrazená na Obr. č.8. Presnosť výsledku závisí podobne ako v kmitočtovej oblasti od počtu konečných prvkov.



Obrázok č.8 : Výsledné zobrazenie šíriacej sa vlny

4.2 Riešenie a výsledky 2D Modelu

Numerické riešenie šírenia elektromagnetických vln pre časový priebeh signálu je daný rovnicou (17)

$$\int_{\Omega} \vec{v} \left\{ \vec{\nabla} \times \left[\frac{1}{\mu_r} \left(\vec{\nabla} \times \vec{e} \right) \right] + \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{e}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \right\} d\Omega = 0 . \quad (17)$$

Keď sa vykonajú rovnaké kroky ako v časovej oblasti pre 1D model, tak sa získa maticová rovnica

$$\mu_0 \cdot \epsilon_0 \cdot T \frac{d^2 \mathbf{e}(t)}{dt^2} + S \mathbf{e}(t) = -\mathbf{f}(t) , \quad (35)$$

kde S a T sú matice koeficientov, ktoré budú ešte definované, $\mathbf{f}$ predstavuje stĺpcový vektor pravých strán a $\mathbf{e}(t)$ stĺpcový vektor neznámych uzlových hodnôt testovacieho poľa závislých na čase.

V tomto riešení sa využije časť programu z predchádzajúcej časti, ktorá sa doplní o ďalšiu dimenziu a potrebné časti. Program je navrhnutý v časovej oblasti, kde je najpodstatnejšie vytvorenie časovej slučky.

Na začiatku sa zdefinuje nami daný počet prvkov na ose x a y, rozmer skúmaného objektu a konštanty. Frekvencia pri ktorej prebehne analýza je 900 MHz.

```
Nx = 50; % počet prvkov vo vodorovnom smere
Ny = 50; % počet prvkov v zvislom smere
% šírka
a = 8e-1;
% dĺžka
b = 8e-1;
% konštanty
ep0 = 8.854e-12;
mi0 = pi*4e-7;
c = 3e+8; % rýchlosť svetla
f = 900e6; % kmitočet na ktorom sa analyzuje
```

Zostavia sa matice koeficientov **S** a **T** pre izolované konečné prvky obdobne ako v kapitole 3.3, kde je popísané zostavenie pre 1D model s rozmerom 2x2, ale pre 2D model s rozmerom 3x3 pretože skúmaný objekt je obdĺžnik. Vzťahy pre výpočet sú dostupné v literatúre [5]

$$Te = \frac{Ae}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (36)$$

$$Se = \sum_{m=1}^3 Q_n \cot g \vartheta_n, \quad (37)$$

kde matice Q_n

$$Q_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 \\ 0 & -1 & +1 \end{bmatrix}, \quad Q_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 \\ -1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Vektory **dx** sú uložené vo vodorovných rozmeroch dvojprvkov a/N_x a vektory **dy** sú zvislé rozmery dvojprvkov b/N_y .

```
dx = ones(1,Nx)*(a/Nx);
dy = ones(1,Ny)*(b/Ny);

Q1 = [ 0 0 0; 0 1 -1; 0 -1 1]/2;
Q3 = [ 1 -1 0; -1 1 0; 0 0 0]/2;
Te = [ 2 1 1; 1 2 1; 1 1 2]/12;
% celkový počet konečných prvkov
N = 2*Nx*Ny;
```

Ďalším krokom je vytvorenie globálnych matíc pre izolované konečné prvky, ktoré je o niečo zložitejšie ako pre 1D model.

```
n = 0;
for ny = 1:Ny
    for nx = 1:Nx
        n = n+1;
        lw = 3*n-2;
        hg = 3*n;
        Sg(lw:hg, lw:hg) = Q1*dx(nx)/dy(ny)+Q3*dy(ny)/dx(nx);
        Tg(lw:hg, lw:hg) = Te*dx(nx)*dy(ny)/2;
        Sg(lw+3*Nx:hg+3*Nx, lw+3*Nx:hg+3*Nx) = Sg(lw:hg, lw:hg);
        Tg(lw+3*Nx:hg+3*Nx, lw+3*Nx:hg+3*Nx) = Tg(lw:hg, lw:hg);
    end
    n = n+Nx;
end
```

Zostavenie združenej matice v 2D modeli plní m-súbor `get_c1` [10]. V ďalšom kroku sa vykoná združenie vynásobením matíc podľa vzťahov (30) a (31), izolované lokálne prvky sa zlúčia do celistvej diskretizačnej siete.

```
C = get_c1(Nx,Ny,N);
S = C'*Sg*C;
T = C'*Tg*C;
```

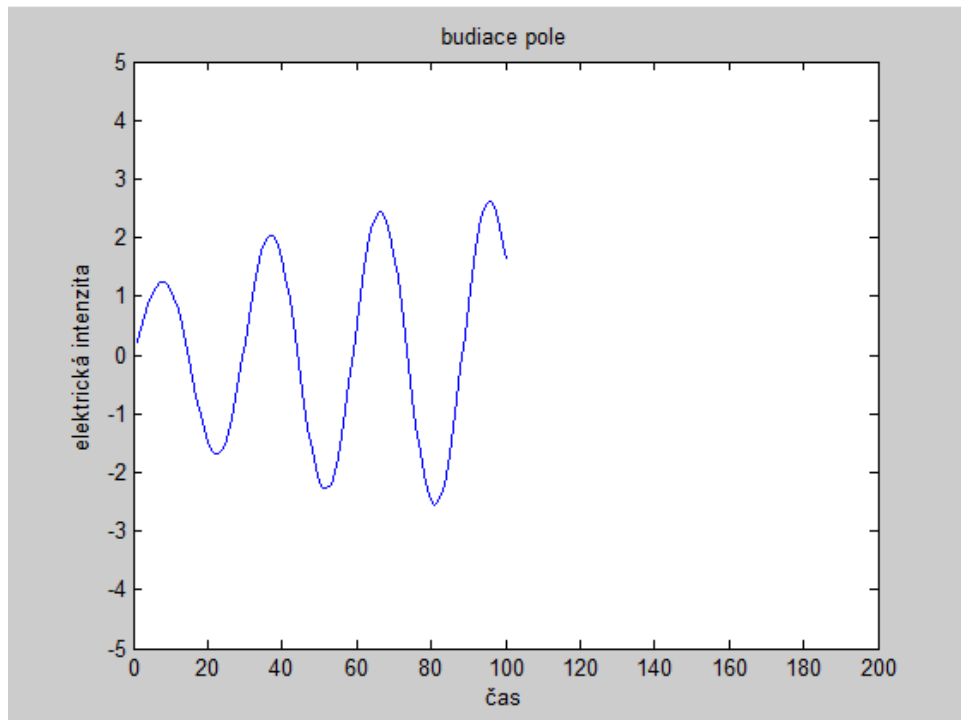
Hodnota elektrickej intenzity na bočných stenách je nulová a preto sa vynechajú bočné steny z matíc **Sq** a **Tq**, vynulujú sa riadky a stĺpce.

```
% vynechanie dolnej a hornej steny
Sq = S(Nx+2:iNx*Ny,Nx+2:iNx*Ny);
Tq = T(Nx+2:iNx*Ny,Nx+2:iNx*Ny);
ind = 2;
for n = 2:Ny                                % vynechanie riadkov
    lw = (n-2)*(Nx-1);
    hg = (n-1)*(Nx-1);
    Sp(lw+1:hg,1:(Ny-1)*iNx) = Sq(lw+ind:hg+ind-1,:);
    Tp(lw+1:hg,1:(Ny-1)*iNx) = Tq(lw+ind:hg+ind-1,:);
    ind = ind + 2;
end
ind = 2;
for n = 2:Ny                                % vynechanie stĺpcov
    lw = (n-2)*(Nx-1);
    hg = (n-1)*(Nx-1);
    Sg(1:(Nx-1)*(Ny-1),lw+1:hg) = Sp(:,lw+ind:hg+ind-1);
    Tg(1:(Nx-1)*(Ny-1),lw+1:hg) = Tp(:,lw+ind:hg+ind-1);
    ind = ind + 2;
end
```

V nasledujúcich krokoch definujeme časový krok, časovú diskretizáciu, budenie. Časová os sa rozdelí na rovnako dlhé časti, nadviazané na seba s dĺžkou dt . Ďalej sa nastaví budenie a počet časových krokov, vygeneruje sa riadkový vektor **t**, ktorý sa rozloží lineárne v sto bodoch. Vo vektore **h** dochádza namodulovaniu na nosnú sínusovku, ktorej veľkosť kmitočtu je rovná veľkosti kmitočtu analýzy a následne je zobrazené vykreslenie budiaceho poľana Obr. č.9.

```
% časový krok
dt = cdt/c;
%% budenie, počet časových krokov
steps = 100;
% jednotkový impulz
imst = steps;
t = linspace(dt,dt*imst,imst);
```

```
tau = 1/f;
h = exp(1-exp(-t/tau)).*sin(2*pi*f*t);
```



Obrázok č.9 : Zobrazenie budiaceho poľa

Nasleduje výpočet rovnice (34), ktorý je zapísaný v Matlabe podobne ako pre 1D model. Pomocou vektoru g sa nastaví budiaci impulz do presne určeného miesta a zvýši sa hodnota amplitúdy impulzu 5-krát. Po výpočte sa ešte vytvorí výstupná matica, ktorá sa zobrazí na Obr. č.10.

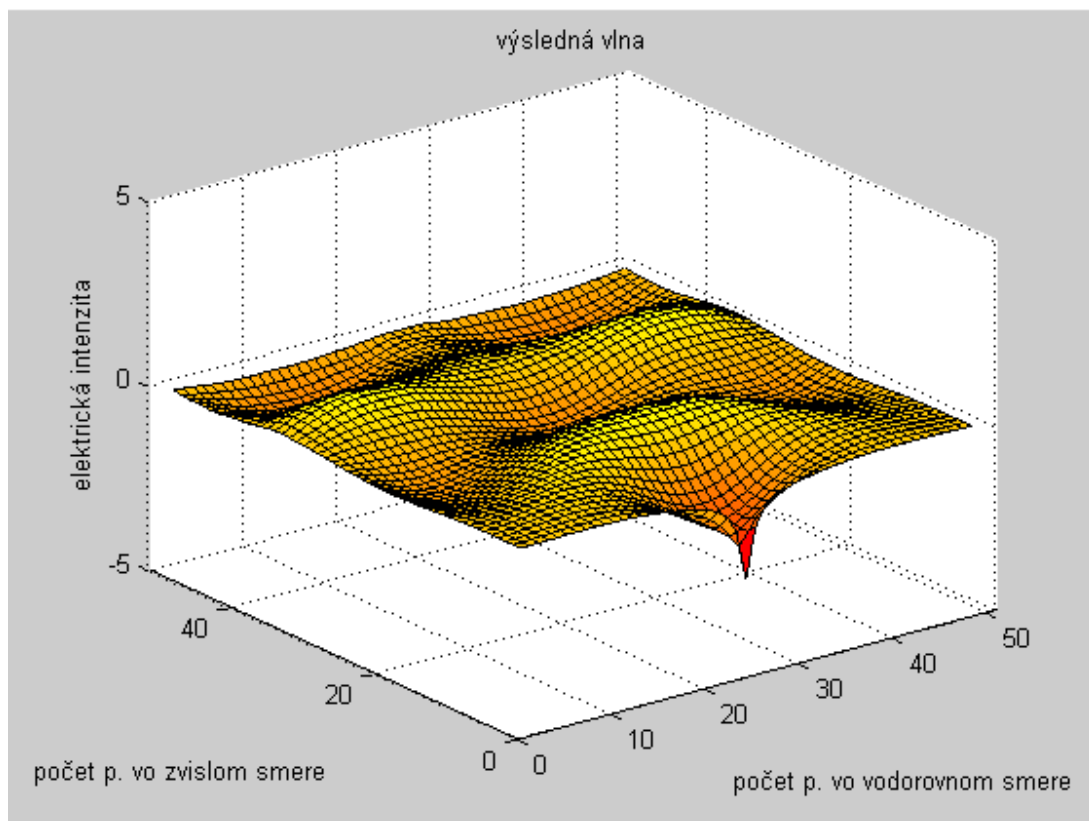
```
% výpočet matice Y a Z
Y = ((1/(cdt^2))*Tg+(1/4)*Sg);
Z = ((2/(cdt^2))*Tg-(1/2)*Sg);
H = zeros(length(Y),3);
g = zeros(length(Y),1);

for l = 1:100
    % budiaci impulz do určeného miesta
    g(Nx/2) = 5*h(1);
```

```

% výpočet rovnice (4.1.3)
H(:,3) = Y\((Z*H(:,2)-Y*H(:,1))-g);
H(:,1) = H(:,2);
H(:,2) = H(:,3);
% prerovnanie do matice
K = H(:,3);
% tvorba výstupnej matice
for i = 0:Ny-2
    L(i+1,:) = K(((Nx-1)*i)+1:((Nx-1)*(i+1)));
end
end

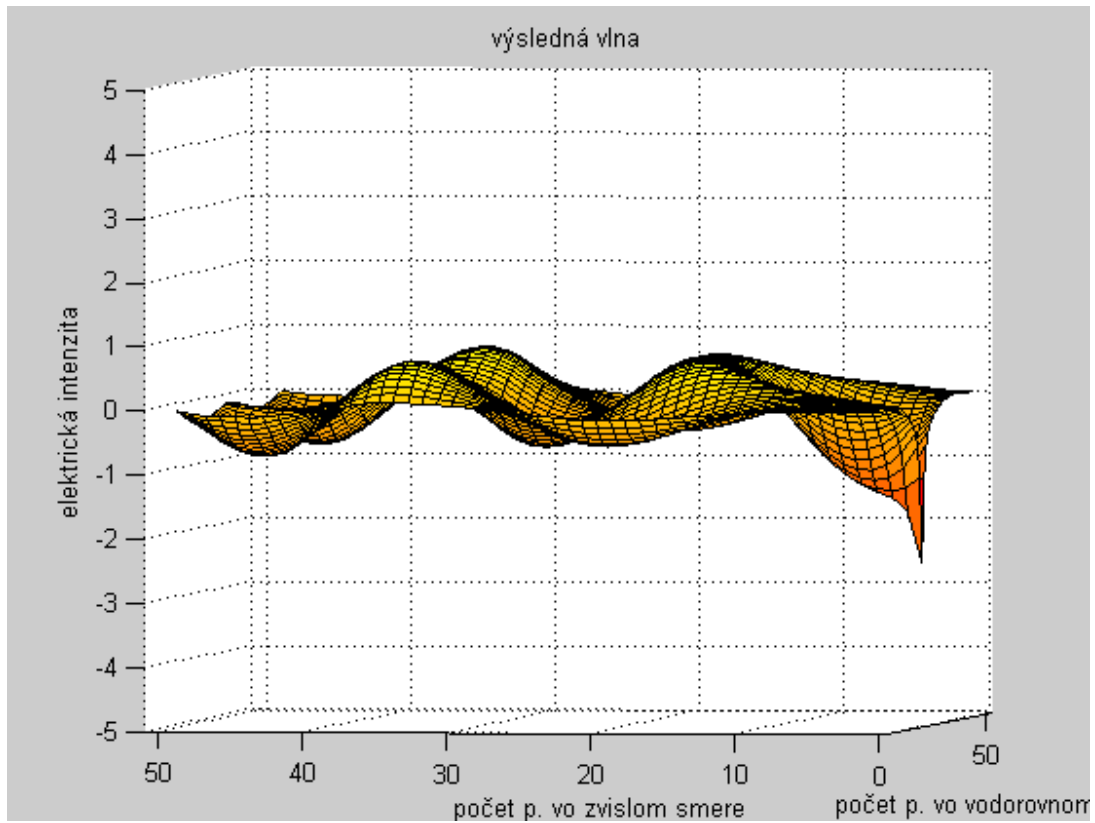
```



Obrázok č.10 : Výsledné zobrazenie šíriacej sa vlny

Presnosť výslednej vlny závisí od počtu konečných prvkov na osiach x a y , od presnosti závisí aj dĺžka a náročnosť výpočtu. Výsledná vlna sa šíri postupnou vlnou do konca vodivého priestoru a ďalej výpočet neprebíha, pretože dochádza k odrazu vlny a tým sa priama postupujúca vlna skladá s odrazenou vlnou, až by vzniklo stojaté vlnenie.

Cieľom bolo získať postupujúcu vlnu šíriacu sa vodivým prostredím, ktorá je zobrazená na Obr. č.10 a č.11.

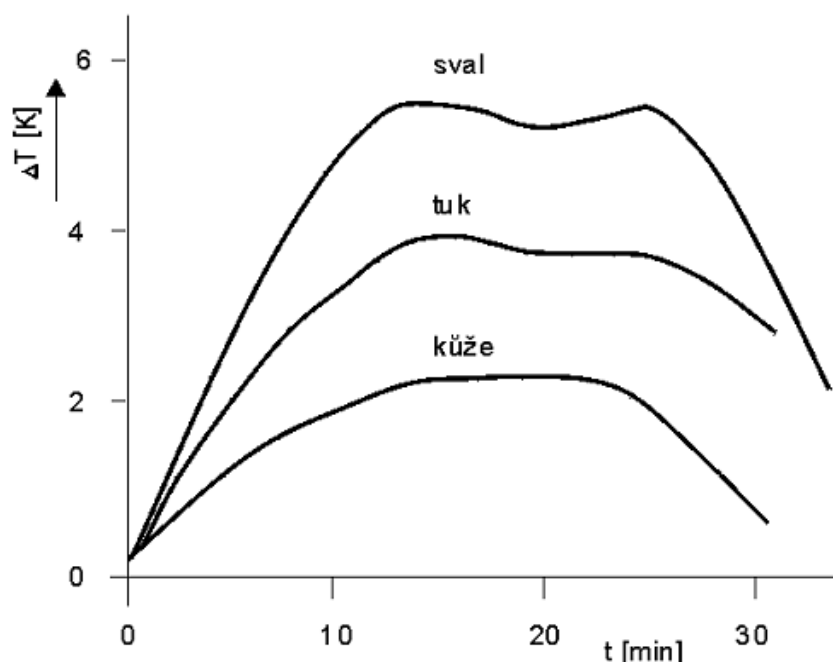


Obrázok č.11 : Výsledné zobrazenie šíriacej sa vlny z bočného pohľadu

5. Interakcie elektromagnetického poľa v tkanivách

Dráždivosť tkaniva organizmu pri aplikácií elektromagnetických polí budených harmonickými signálmi je obmedzená frekvenciou 100 kHz. Pri vyšších frekvenciách už žiadne tkanivo na podráždenie elektromagnetickým polom nereaguje [11]. Elektromagnetické pole nie je vnímané žiadnym receptorom v ľudskom organizme, ale spojené alebo aj impulzové pole do hustoty 10 W/m² nie je škodlivé pre organizmus.

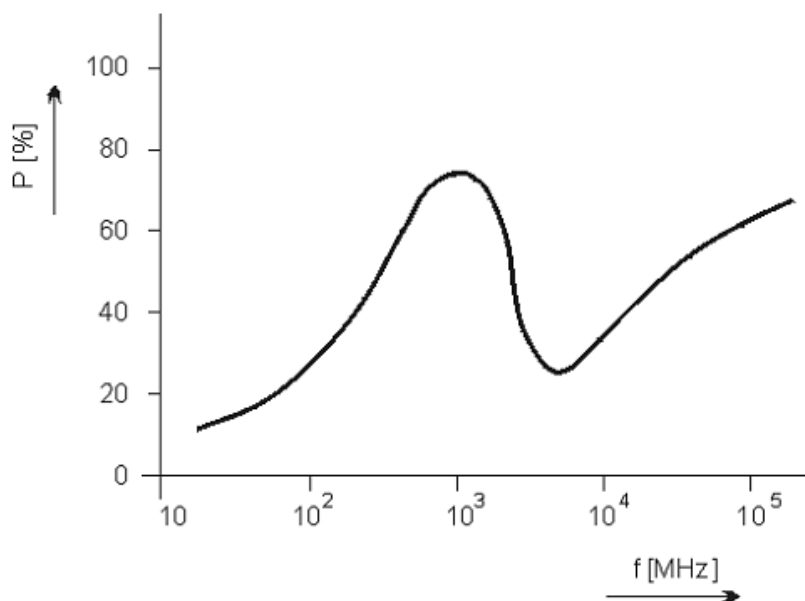
Prejavom elektromagnetického poľa na tkanivá organizmu sú tepelné a netepelné účinky. Tepelné účinky elektromagnetického poľa sa prejavujú zvýšením teploty v mieste ožarovaneho tkaniva, ktoré je závislé na veľkosti pohltenej energie a hĺbke absorpcie. Platí, že čím nižšia je pracovná frekvencia, tým vlnenie prenikne viac do hĺbky organizmu. Celkový tepelný prejav však závisí na tvare a type biologických tkanív a možnosti ochladenia tkanív organizmu z povrchu tela alebo pretekajúcou krvou.



Obrázok č.12 : Oteplenie tkaniva v závislosti na expozícii

Priebeh zmien teploty v jednotlivých tkanivách v organizme pôsobením elektromagnetického poľa je zobrazený na Obr. č.12 [11]. Z obrázku je vidieť schopnosť adaptácie organizmu na pôsobenie elektromagnetického poľa.

Pri celotelových modelových štúdiách, rešpektujúcich konštitučné parametre jedincov bola zistená závislosť absorbovaného výkonu na frekvencii. Táto závislosť je uvedená na Obr. č.13 [11].



Obrázok č.13 : Frekvenčná závislosť absorbovaného výkonu

Veličina, ktorá popisuje merný absorbovaný výkon vo frekvenčnom pásme od 100 kHz do 10 GHz pre 6 minútové intervaly je SAR. Merný absorbovaný výkon SAR sa vypočíta podľa vzťahu [12]

$$SAR = \frac{\sigma \cdot E_i^2}{\rho}, \quad (39)$$

kde predstavuje E_i intenzitu elektrického poľa vo vnútri tkaniva [V/m], ρ hustotu [kg/m^3] a σ [S/m] elektrickú vodivosť. Vzťah je použiteľný len pre vyššie frekvencie ako 10 MHz.

6. Modelovanie v programe Comsol Multiphysics

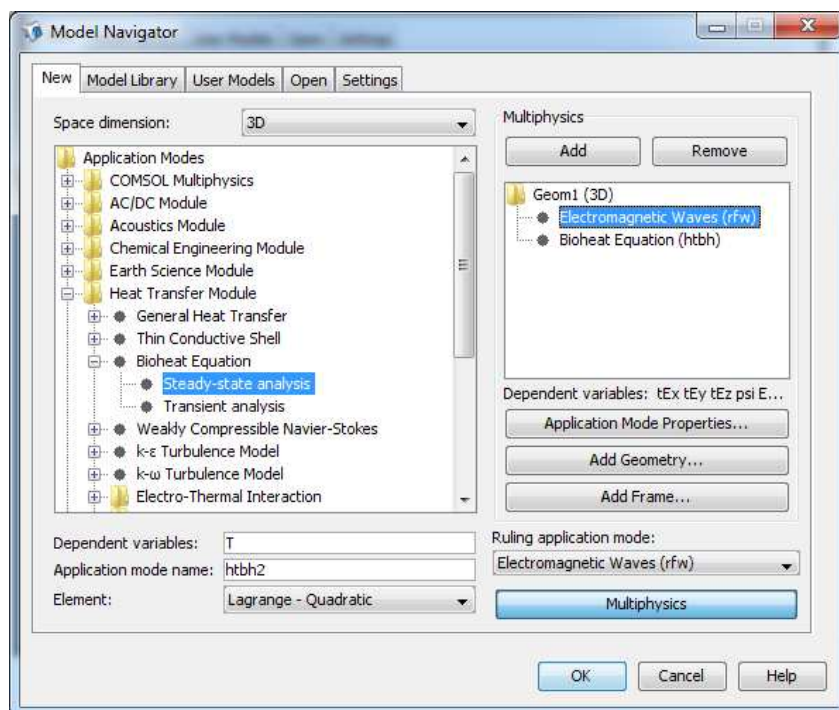
Comsol Multiphysics umožňuje riešiť fyzikálne úlohy popísané parciálnymi diferenciálnymi rovnicami metódou konečných prvkov [8]. Úlohy sú riešené na základe podmienok prostredia ako sú okrajové podmienky v bodoch, hranách a plochách v jednotlivých modeloch. Comsol Multiphysics obsahuje rôzne knižnice a aplikačné režimy pre použitie v daných modeloch. Podľa výberu režimu nasleduje postup riešenia, kde nie je potreba zadávať matematické definície, ale fyzikálne veličiny ako merná hustota prostredia, tepelná vodivosť a podobne. Postup modelovania Comsol Multiphysics je nasledujúci.

1. Vytvorenie analyzovaného geometrického modelu.
2. Zadanie vlastností oblastí a okrajových podmienok v geometrickom modeli, ktorý môže mať viac oblastí, ktoré treba definovať pre vyriešenie problému.
3. Generovanie siete v uzlových bodoch pre výpočet siete. Sieť môže byť vygenerovaná automaticky alebo podľa potrieb dosiahnutia výpočtu.
4. Riešenie problému a konečné spracovanie výsledkov.

Aby bolo umožnené využiť program Comsol Multiphysics v3.5, bolo potrebné kontaktovať emailom firmu COMSOL, Inc pre získania mesačnej skúšobnej verzii. Firmu COMSOL, Inc kontaktoval Martin Bereznanin aj v mojom mene a bolo nám poslané DVD s programom Comsol Multiphysics v3.5 distribučnou firmou pre Českú republiku HUMUSOFT s.r.o.

6.1 Riešenie teplotného profilu v Comsol Multiphysics

V modelovom navigátore, ktorý je zobrazený na Obr. č.14 je potreba nastaviť dimenziu analyzovaného geometrického modelu a výber triedy modelu. Geometrický model sa analyzuje v 3D dimenzii. Trieda modelu sa vyberie RF Module, kde sa zvolí *Electromagnetic Waves > Harmonic propagation* a ešte Heat Transfer Module, kde sa zvolí *Bioheat Equation > Steady-state analysis*.

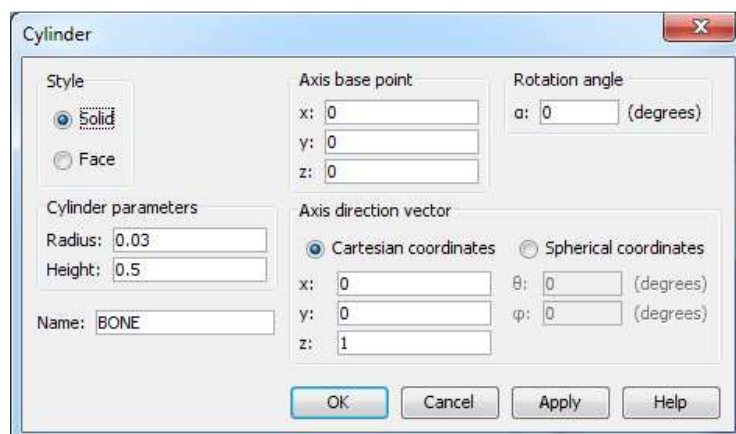


Obrázok č.14 : Model Navigator

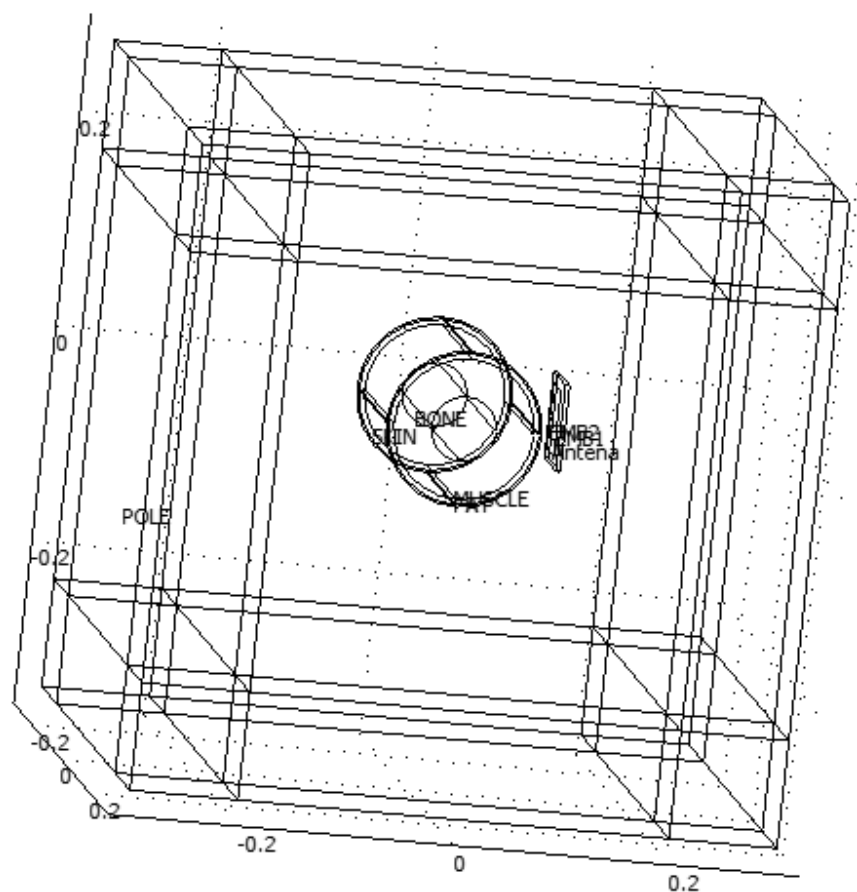
V ďalšom kroku v menu *Options > Constants* sa definujú parametre ako elektrická vodivosť a hustota jednotlivých tkanív a antény. Jednotlivé parametre tkanív sa nastavili podľa Tab. č.1.

Po nastavení parametrov tkanív sa navrhne analyzovaný geometrický model. Pomocou *Draw*, kde sa pre vykreslenie sa využije *Specify Objects > Cylinder* Obr. č.15, kde je navrhnutá vrstva kosti. Podobne sa vykreslili vrstvy svalov, tuku a kože. Veľkosti rozmerov odpovedajú rozmerom ľudského stehna s polomerom 70 mm, ktorý predstavuje analyzovaný geometrický model.

Aby bolo možné šírenie elektromagnetických vĺn, musí sa analyzovaný model nachádzať v prostredí s permitivou vzduchu. Preto je potrebné vytvoriť obklopujúci blok na Obr. č.16, v ktorom bude umožnené šírenie vĺn a vlny sa nebudú môcť šíriť ďalej. Vytvoríme blok so stenami vrstvou PML (Perfectly Matched Layer), ktorá pohltí šíriace sa elektromagnetické vlny a neodrazí ich späť do prostredia. Blok vytvoríme pomocou *Block*. Ešte je nutné navrhnuť anténu, ktorú navrhujeme obdobným spôsobom ako geometrický model. Dĺžka substrátu antény je 46,56 mm a šírka 60,70 mm [9]. Anténa sa umiestni v blízkosti geometrického modelu v bloku.



Obrázok č.15 : Nastavenie veľkosti geometrického modelu



Obrázok č.16 : Vytvorený blok s modelom a anténou

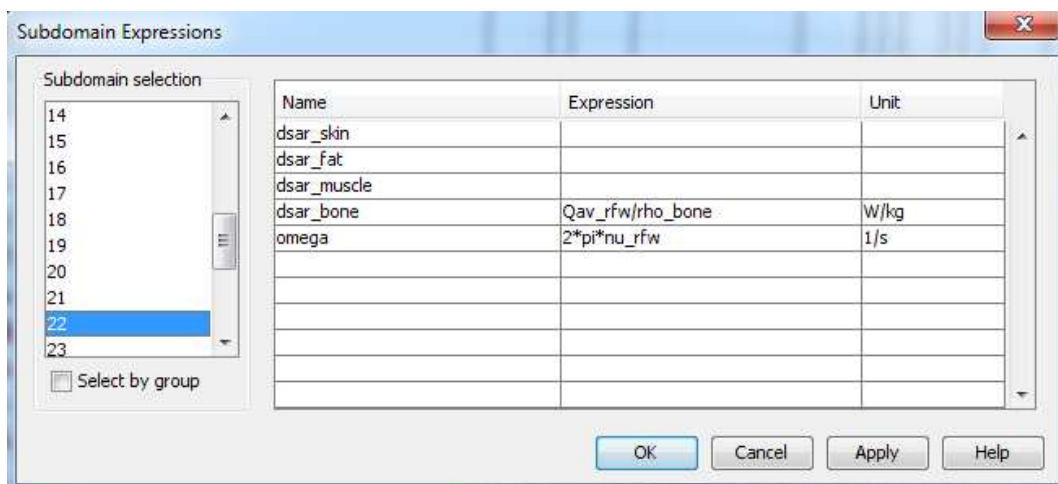
V programe menu Multiphysics sa vyberie možnosť *Electromagnetic Waves*, je nám tým umožnené nastavenie v menu *Physics > Scalar Variables* hodnotu frekvencie. Hodnota frekvencie pre mikrovlnnú diatermiu sa využíva 2,45 GHz pre ohrev vodivých tkanív – svalov [11]. S vyššou pracovnou frekvenciou rastie počet konečných prvkov a tým rastie náročnosť výpočtu. Preto bola zvolená náhradná pracovná frekvencia 1400 MHz. Vzdialenosť antény od geometrického objektu je 122,5 mm. Ďalej sa musia nastaviť okrajové podmienky, ktoré sa nastavujú pre dané steny ako dokonale elektrický vodič v *Physics > Boundary settings*. Pre jednu stenu antény sa musí nastaviť *Lumped port*, čo predstavuje časť, ktorá bude napájaná 45,5 V. V *Physics > Subdomain Settings*, je potrebné nastaviť, aby blok plnil funkciu, ktorá pohltí elektromagnetické vlny.

Pre modelové prostredie *Bioheat Equation* sa musia nastaviť aktívne časti, ktoré môžu šíriť teplo. Aktívne časti sa nastavujú pre celý analyzovaný model.

V poslednom kroku pred riešením problému sa musí nastaviť generovanie siete, ktoré sa nastaví v menu *Mesh*. Po nastavení sa vygeneruje sieť trojuholníkových konečných prvkov. Pokiaľ je požadované presnejšie riešenie problému, môže sa sieť zjemniť a samotná analýza sa spustí položkou menu *Solver Manager*. Najprv sa vyrieši problém z pohľadu šírenia elektromagnetických vln, kde sa zobrazí rozloženie intenzity elektrického poľa a potom sa rieši problém teplotných zmien na analyzovanom geometrickom objekte. Po výpočte je potrebné nastaviť spôsob zobrazenia výsledkov v menu *Postprocessing > Plot Parameters*. Na záložke *Subdomain > Predefined quantities* sa vyberie zobrazovaná veličina. V našom prípade teplota dT .

6.2 Výsledky v Comsol Multiphysics

V Comsol Multiphysics umožňuje definovanie výpočtu hodnoty SAR pre dané tkanivá. Výpočet hodnoty SAR sa nastaví *Options > Subdomain Expressions*, ktoré je zobrazené na Obr. č.17. Hodnota SAR sa vypočíta pomocou rozloženej intenzity elektrického poľa, elektrickej vodivosti a hustoty jednotlivých tkanív. Jednotlivé tkanivá predstavujú pokožku, tuk, sval a kosť pre ktorú sa hodnota SAR počíta pomocou vzťahu (39) z predchádzajúcej kapitoly.

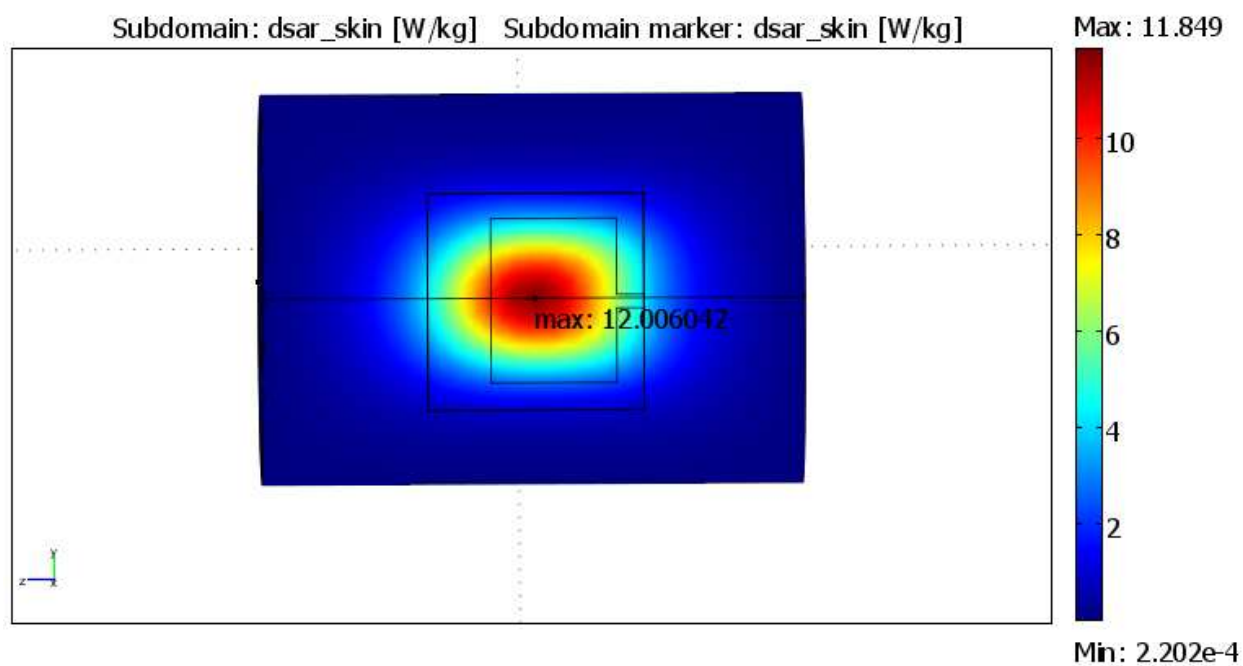


Obrázok č.17 : Rozloženie elektrického pola pre pokožku

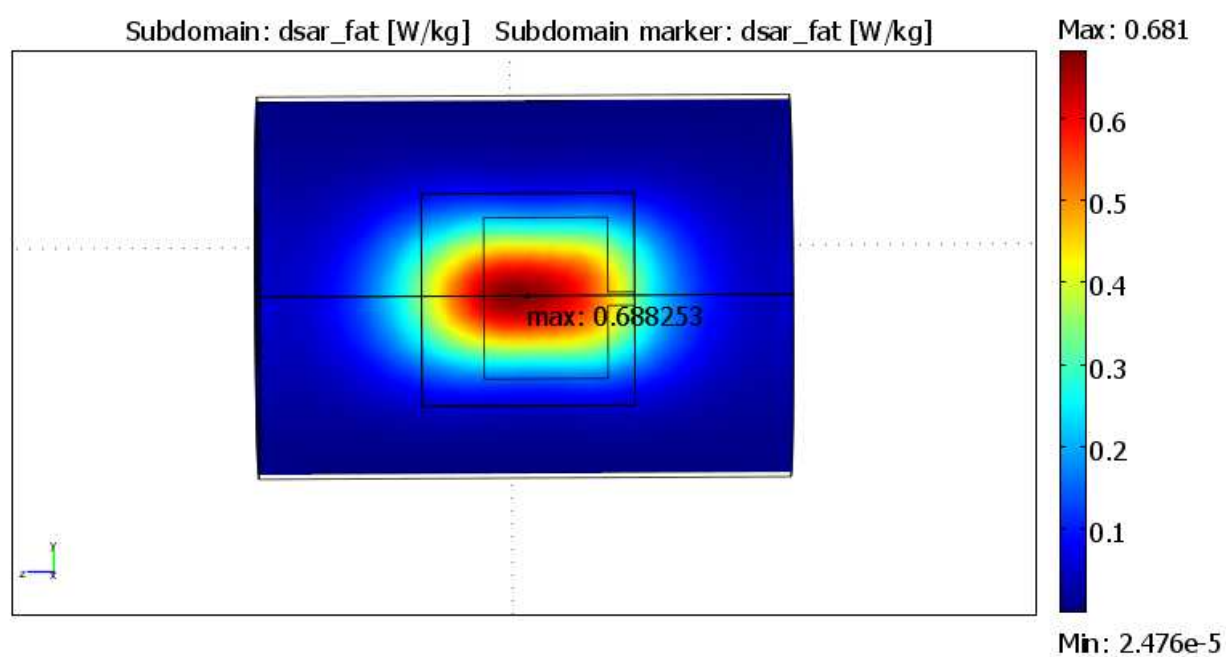
Hodnoty SAR nie sú vypočítané pre 10 g tkaniva, ale predstavujú maximálne hodnoty SAR v jednom sústredenom bode a sú zobrazené v Tab. č.3. Pre ktorýchkoľvek 10 g tkaniva by podľa normy nemali presahovať hodnoty SAR cez 4 W/kg na horných a dolných končatinách v intervale šiestich minút. Výsledné hodnoty SAR pre jednotlivé tkanivá sú zobrazené na Obr. č.18 – 21.

Tabuľka č.3 : Maximálne hodnoty SAR v sústredenom bode

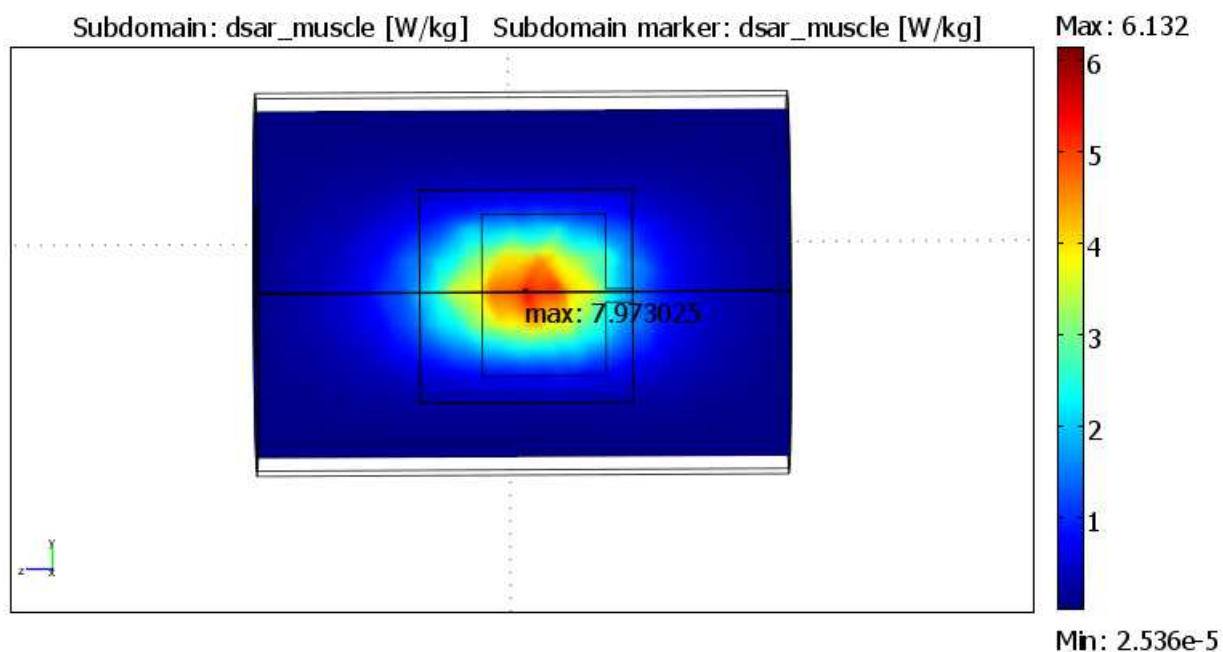
Maximálna hodnota SAR	[W/kg]
Pokožka	12,006
Tuk	0,688
Sval	7,973
Kosť	0,451



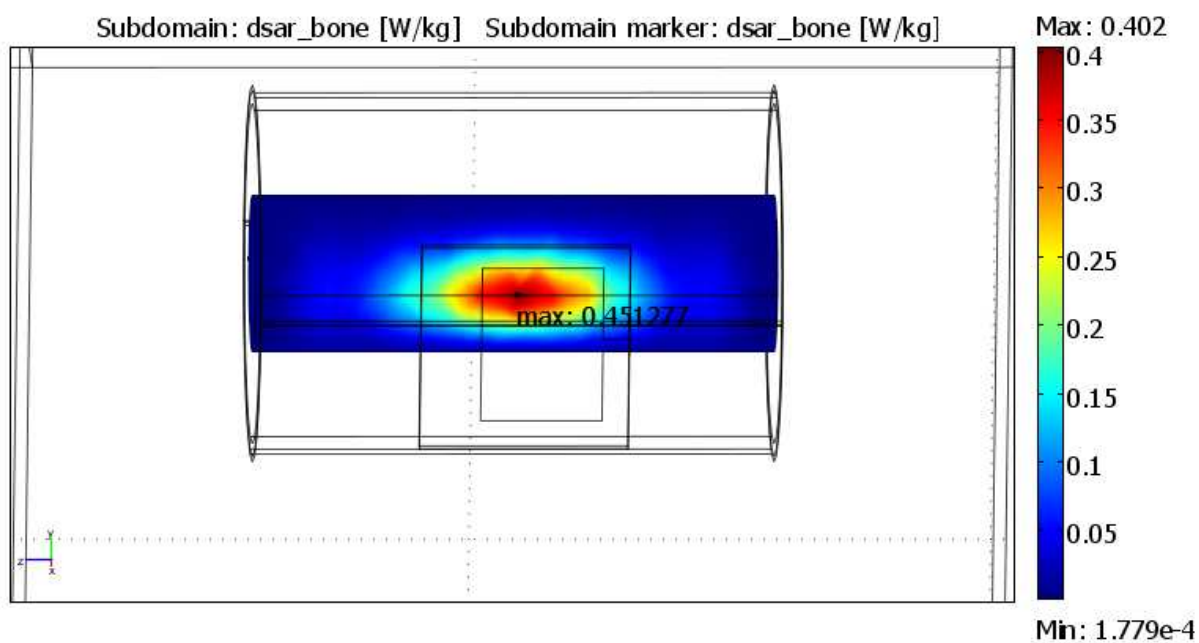
Obrázok č.18 : Hodnota SAR pre pokožku



Obrázok č.19 : Hodnota SAR pre tuk



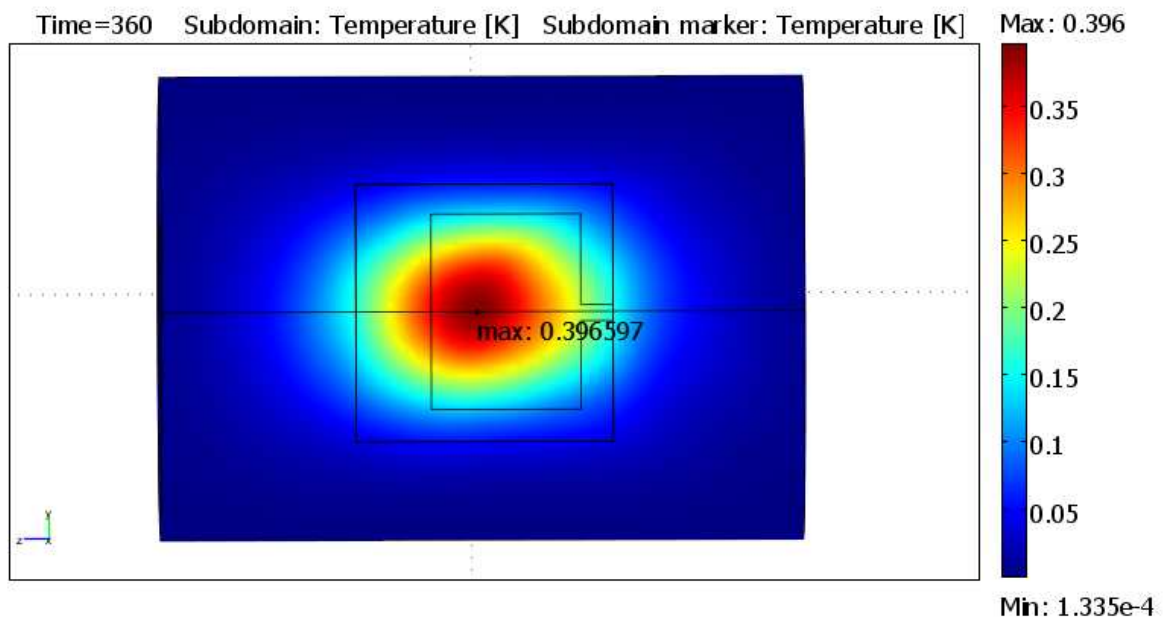
Obrázok č.20 : Hodnota SAR pre sval



Obrázok č.21 : Hodnota SAR pre kosť

Teplotná zmena profilu analyzovaného geometrického objektu na Obr. č. 22 je maximálne o 0.396 K vyššia v časovom intervale šesť minút. Teplotná zmena je malá

pre vzdialenosť 122,5 mm. Keby sa anténa posunula ďalej od analyzovaného objektu, zmena teploty by bola ešte menšia.



Obrázok č.22 : Teplotný profil analyzovaného objektu

7. Záver

V diplomovej práci sú vysvetlené základné poznatky z oblasti teórie elektromagnetického poľa. Elektromagnetické pole je založené na platnosti základných zákonov, ktoré vyjadrujú Maxwellové rovnice. Aby bolo jednoznačné riešenie elektromagnetických polí, je potrebné doplniť Maxwellové rovnice o okrajové podmienky a materiálové vzťahy. Po určitých úpravách sa dá dôjsť k vlnovej rovnici.

V ďalšej časti diplomovej práce je objasnená metóda konečných prvkov z ktorej boli vytvorené programy v Matlabe. V Tab. č.2. sú porovnané jednotlivé metódy, kde sú vypísané ich výhody a nevýhody a pre ktoré spôsoby riešenia sú najvhodnejšie. Metóda konečných prvkov je najrozšírenejšia metóda pre numerické riešenie polí popísaných diferenciálnymi rovnicami. V texte sú v bodoch zhrnuté základné postupy použitia metódy a typy prvkov, ktoré sa využívajú pri riešení daných úloh.

V ďalších častiach diplomovej práce sa nachádza riešenie metódy konečných prvkov v programovom prostredí Matlab pre 1D a 2D model. 1D model je analyzovaný v kmitočtovej a časovej oblasti, dosiahnuté výsledky sú zobrazené graficky na Obr. č.7 a č.8. 2D model je analyzovaný v časovej oblasti a výsledok zobrazený na Obr. č.10 a č.11. Presnosť metódy konečných prvkov závisí na hustote a tvare prvkov siete a voľbe aproximačnej funkcie, čo sa v priebehu riešenia diplomovej práce potvrdilo pre 1D aj 2D model. Keby bol v analýze použitý väčší počet prvkov, presnosť by bola vyššia, ale za cenu zvýšenia výpočtových nárokov pre vykonanie programu.

Následne bola preštudovaná interakcia elektromagnetického poľa v tkanivách, ktoré boli zapísané do samostatnej časti diplomovej práce. Tu sa zistilo, že tepelné účinky elektromagnetického poľa sa prejavujú zvýšením teploty v mieste ožarovaného tkaniva, ktoré je závislé na veľkosti pohltenej energie a hĺbke absorpcie. Platí, že čím nižšia je pracovná frekvencia, tým viac vlnenie prenikne do hĺbky organizmu.

Posledná časť diplomovej práce obsahuje riešenie teplotného profilu tkaniva. Pre modelové riešenie bol vybraný program Comsol Multiphysics. V ňom bol vytvorený geometrický objekt s rozmermi stehna, ktorý sa analyzoval na pracovnej frekvencii 1400 MHz a anténa bola vzdialená 122,5 mm od geometrického objektu. Pre jednotlivé

tkanivá geometrického objektu bolo vyriešené rozloženie hodnoty SAR na Obr. č.18 – 21, ktoré sa porovnali s najvyššou prípustnou hodnotou SAR podľa nariadenia vlády č. 1/2008 Sb. Následne bol vytvorený teplotný profil tkaniva na Obr. č.22, kde teplotná zmena v analyzovanom objekte je 0.396 K v časovom intervale šesť minút.

Zoznam literatúry

- [1] NOGA, M. *Teória elektromagnetického poľa*, [online]. 2005 , posledná revize 6.5.2009 [cit. 2009-05-05]. Dostupné z WWW: <<http://cyril.fmph.uniba.sk>>
- [2] *Dielectric Properties of Body Tissues*, [online]. 2007, posledná revize 28.3.2010 [cit. 2010-03-28]. Dostupné z WWW: <<http://niremf.ifac.cnr.it/tissprop/htmlclie/htmlclie.htm>>
- [3] DĚDKOVÁ, J., *Modelování elektromagnetických polí*, Skripta VUT, Brno 2006
- [4] RAIDA, Z., *CAD ve vysokofrekvenční a mikrovlnné technice*, Skripta VUT, Brno 2007
- [5] RAIDA, Z., *Počítačové řešení komunikačních systémů*, Skripta VUT , Brno
- [6] HAŇKA, L., *Teorie elektromagnetického pole*, SNTL, Praha 1975
- [7] *Metoda konečných prvků*, [online]. 2007, posledná revize 6.5.2009 [cit. 2009-05-05]. Dostupné z WWW: <<http://wood.mendelu.cz/cz/sections/FEM/?q=node/32>>
- [8] *Comsol Multiphysics*, [online]. 2008, posledná revize 28.3.2010 [cit. 2010-03-28]. Dostupné z WWW: <<http://www.humusoft.cz/produkty/comsol/comsol/>>
- [9] *Microstrip Patch Antenna Calculator*, [online]. 2009, posledná revize 28.3.2010 [cit. 2010-03-28]. Dostupné z WWW: <<http://www.emtalk.com/mpacalc.php>>
- [10] *Výuka Prof. Dr. Ing. Zbyněk Raida*, [online]. 2009, posledná revize 7.4.2010 [cit. 2010-04-07]. Dostupné z WWW: <<http://www.urel.feec.vutbr.cz/~raida/>>
- [11] ROZMAN, J., CHMELÁŘ, M., JEHLIČKA, K., *Terapeutická a protetická technika*, Skripta VUT, Brno 2004
- [12] Nařízení vlády o ochraně zdraví před neionizujícím zářením č. 1/2008 Sb.
- [13] KUTIŠ, V., *Základy modelovania a simulácii*, Skripta FEI STU , Bratislava

Zoznam symbolov a skratiek

E	intenzita elektrického poľa
H	intenzita magnetického poľa
D	elektrická indukcia
B	magnetická indukcia
∇	diferenciálny operátor „nabla“
J_{ind}	plošná hustota indukovaného elektrického prúdu
J_{en}	plošná hustota vnúteného elektrického prúdu
E_i	intenzita elektrického poľa vo vnútri tkaniva
ρ	hustota elektrického náboja
ε	permitivita
μ	permeabilita
σ	elektrická vodivosť
ρ	hustota
k	tepelná vodivosť
t	čas
β	fázová konštanta
ω	uhlový kmitočet
k_0	vlnové číslo
Se	lokálna matica
Te	lokálna matica
C	združená matica

Zoznam príloh

Príloha č.1: 1D v kmitočtovej oblasti	55
Príloha č.2: 1D v časovej oblasti.....	58
Príloha č.3: 2D v časovej oblasti.....	61

Príloha č.1: 1D v kmitočtovej oblasti

```
%%% 1D v kmitočtovej oblasti
clear all;
close all;
clc

% dĺžka
d = 5;
f = 9e8;

% počet konečných prvkov
N = 200;

% vlnové číslo
k0 = 2*pi*f/3e+8;

% kritické vlnové číslo, zvolený pre objekt f<900 MHz
gam = 16.7;

% konštanta šírenia
bt = sqrt(k0^2-gam^2);

% dĺžka e-teho konečného prvku, rovnomerná sieť
Ae = d/N;

% definícia matíc
Q = [1 -1; -1 1];
Se = (1/Ae)*Q;
Te = (Ae/6)*[2 1; 1 2];

% matice pre izolované konečné prvky
Sg = zeros(2*N, 2*N);
```

```

Tg = zeros(2*N, 2*N);

% cez všetky izolované konečné prvky
i = 0;
for l = 1:N
    Sg(l+i:l+i+1, l+i:l+i+1) = Se;      % naplnenie matíc pre izolované
    prvky
    Tg(l+i:l+i+1, l+i:l+i+1) = Te;
    i = i+1;
end

% vytvoríme združenú maticu
C = zeros(2*N,N+1);
C(1,1) = 1;      % prvý stĺpec
ind = 2;
for m = 2:N      % druhý až predposledný stĺpec
    for n = 1:2
        C(ind,m) = 1;
        ind = ind + 1;
    end
end
C(2*N, N+1) = 1;      % posledný stĺpec

% združenie vykonáme vynásobením matíc(lokálne -> globálne)
% zlúči izolované lokálne prvky do celistvej diskretizačnej siete
S = C'*Sg*C;
T = C'*Tg*C;

% vypustíme z matíc Sc a Tc tie riadky a stĺpce, ktoré odpovedajú
% globálnym uzlom ležiacich na dokonale elektricky vodivých stenách
S_TE = S(2:N, 2:N);
T_TE = T(2:N, 2:N);

% matica ľavých strán
L = S_TE+T_TE*gam^2;

% matica pravých strán

```

```

P = zeros(size(L,1),1);
P = P-L(:,1);

% rozloženie amplitúd intenzity
E = L\P;

% nulové okrajové podmienky
Em = zeros(N+1,1);

% budiace pole
Em(1,1) = 1;
Em(2:N,1) = E;
figure(1); plot(Em);
title('budiace pole');xlabel('počet prvkov');ylabel('elektrická
intenzita');

% % spätná vlna
% sh1=exp(+j*bt*(0:N-1)*Ae);
% dopredná vlna
sh2 = exp(-j*bt*(0:N-1)*Ae);
% Esh1=zeros(N,1);
Esh2 = zeros(N,1);
% shh1=sh1';
shh2 = sh2';

% rozloženie okamžitých hodnôt spätnej a doprednej vlny
for n = 1:N
%   Esh1(n:N,1)=Esh1(n:N,1)+Em(n,1)*shh1(1:N+1-n);
    Esh2(n:N,1) = Esh2(n:N,1)-Em(n,1)*shh2(1:N+1-n);
end

Eout = zeros(N,1);
% Eout(1:N-1,1) = Eout(1:N-1,1) + real(Esh2(2:N,1) - Esh1(2:N,1));
%vysledná = dopredná - spätná vlna
Eout(1:N-1,1) = Eout(1:N-1,1) + real(Esh2(2:N,1)); % výpočet
bez spätnej vlny
figure(2); plot(Eout);

```

```
title('výsledná vlna');xlabel('počet prvků');ylabel('elektrická  
intenzita');
```

Príloha č.2: 1D v časovej oblasti

```
%%% 1D v časovej oblasti
close all;
clear all;
clc

% počet konečných prvkov
N = 30;

% dĺžka 1m
d = 1;

% konštanty
ep0 = 8.854e-12;
mi0 = pi*4e-7;
c = 3e+8;

% kmitočet na ktorom sa analyzuje 900MHz
f = 9e8;

% dĺžka e-teho konečného prvku, rovnomerná sieť
Ae = d/N;

% definícia matíc
Se = (1/Ae)*[1 -1; -1 1];
Te = (Ae/6)*[2 1; 1 2];

% matice pre izolované konečné prvky
Sg = zeros(2*N, 2*N);
Tg = zeros(2*N, 2*N);

% cez všetky izolované konečné prvky
i = 0;
for l = 1:N
```

```

        Sg(l+i:l+i+1, l+i:l+i+1) = Se;
        Tg(l+i:l+i+1, l+i:l+i+1) = Te;
        i = i+1;
end

% zostavenie matice C
C = zeros(2*N,N+1);
C(1,1) = 1;           % druhý až predposledný stípec
ind = 2;
for m = 2:N           % druhý až predposledný stípec
    for n = 1:2
        C(ind,m) = 1;
        ind = ind + 1;
    end
end
C(ind,N+1) = 1;       % posledný stípec, to isté ako C(2*N,N+1) = 1;

% združovanie lokálnych uzlov do globálnych uzlov
S = C'*Sg*C;
T = C'*Tg*C;

Sr = S(2:N,2:N);
Tr = T(2:N,2:N);
% časový krok
cdt = Ae;
dt = cdt/c;
% výpočet matíc Y a Z
Y = ((1/(cdt^2))*Tr+(1/4)*Sr);
Z = ((2/(cdt^2))*Tr-(1/2)*Sr);

H = zeros(length(Y),3);
g = zeros(length(Y),1);

% budenie
% počet časových krokov
steps = 1000;
% jednotkový impulz

```

```

imst = steps;
% vygeneruje riadkový vektor
t = linspace(dt,dt*imst, imst);
tau = 1/f;
h = exp(1-exp(-t/tau)).* sin(2*pi*f*t);
figure; plot(h)
axis([0, 200, -5, 5]);

figure;
for k = 1:35
    % nastavenie budenia vpredom určeného miesta
    g(1) = 3*h(k);

    H(:,3) = Y\((Z*H(:,2))-Y*H(:,1)- g);
    H(:,1) = H(:,2);  H(:,2) = H(:,3);

    plot(H(:,3));
    axis([0 N  -1 1]);
    title('výsledná vlna');xlabel('čas');ylabel('elektrická intenzita');
    pause(0.2);
end

```

Príloha č.3: 2D v kmitočtovej oblasti

```
%% 2D v časovej oblasti %%
close all
clear all
clc
%% osa Z smer šírenia vlny
Nx = 50; % počet prvkov vo vodorovnom smere
Ny = 50; % počet prvkov vo zvislom smere
% šírka
a = 8e-1;
% dĺžka
b = 8e-1;
% konštanty
ep0 = 8.854e-12; % permitivita vákua
mi0 = pi*4e-7; % permeabilita vákua
c = 3e+8; % rýchlosť svetla
f = 900e6; % kmitočet na ktorom sa analyzuje
%% vektory rozmerov konečných prvkov
dx = ones(1,Nx)*(a/Nx);
dy = ones(1,Ny)*(b/Ny);

Q1 = [ 0 0 0; 0 1 -1; 0 -1 1]/2;
Q3 = [ 1 -1 0; -1 1 0; 0 0 0]/2;
Te = [ 2 1 1; 1 2 1; 1 1 2]/12;
% celkový počet konečných prvkov
N = 2*Nx*Ny;
% matice pre izolované konečné prvkov
Sg = sparse(3*N,3*N);
Tg = sparse(3*N,3*N);
%% cez všetky izolované konečné prvky
n = 0;
for ny = 1:Ny
    for nx = 1:Nx
        n = n+1;
        lw = 3*n-2;
```

```

    hg = 3*n;
    Sg(lw:hg, lw:hg) = Q1*dx(nx)/dy(ny)+Q3*dy(ny)/dx(nx);    % naplnenie
    matíc pre izolované prvky
    Tg(lw:hg, lw:hg) = Te*dx(nx)*dy(ny)/2;
    Sg(lw+3*Nx:hg+3*Nx, lw+3*Nx:hg+3*Nx) = Sg(lw:hg, lw:hg);
    Tg(lw+3*Nx:hg+3*Nx, lw+3*Nx:hg+3*Nx) = Tg(lw:hg, lw:hg);
end
n = n+Nx;
end
% zostavenie združenej matice C
C = get_c1(Nx, Ny, N);
% združenie vykoná sa vynásobením matíc(lokálne -> globálne), zlúčia sa
izolované lokálne prvky do celistvej diskretizačnej siete
S = C'*Sg*C;
T = C'*Tg*C;
%% nulové hodnoty(ak by sme mali veľké hodnoty, je potrebné)
clear C Sg Tg

iNx = Nx+1; iNy = Ny+1;
% vynechanie dolnej a hornej steny
Sk = S(Nx+2:iNx*Ny, Nx+2:iNx*Ny);
Tk = T(Nx+2:iNx*Ny, Nx+2:iNx*Ny);
ind = 2;
for n = 2:Ny                                % vynechanie riadkov
    lw = (n-2)*(Nx-1);
    hg = (n-1)*(Nx-1);
    Sl(lw+1:hg, 1:(Ny-1)*iNx) = Sk(lw+ind:hg+ind-1, :);
    Tl(lw+1:hg, 1:(Ny-1)*iNx) = Tk(lw+ind:hg+ind-1, :);
    ind = ind + 2;
end
ind = 2;
for n = 2:Ny                                % vynechanie stĺpcov
    lw = (n-2)*(Nx-1);
    hg = (n-1)*(Nx-1);
    Sg(1:(Nx-1)*(Ny-1), lw+1:hg) = Sl(:, lw+ind:hg+ind-1);
    Tg(1:(Nx-1)*(Ny-1), lw+1:hg) = Tl(:, lw+ind:hg+ind-1);
    ind = ind + 2;
end

```

```

%% súčin c*d1
cdt = min([dx dy])/(sqrt(2));
% časový krok
dt = cdt/c;
% výpočet matice Y a Z
Y = ((1/(cdt^2))*Tg+(1/4)*Sg);
Z = ((2/(cdt^2))*Tg-(1/2)*Sg);

H = zeros(length(Y),3);
g = zeros(length(Y),1);
%% budenie, počet časových krokov
steps = 100;
% jednotkový impulz
imst = steps;
% vygeneruje riadkový vektor t,z 1000(imst)bodov lineárne rozložených
medzi a vrátane dt a dt*imst
t = linspace(dt,dt*imst,imst);
tau = 1/f;
% modulovanie na nosnú sin o analyzovanon kmitočte
h = exp(1-exp(-t/tau)).*sin(2*pi*f*t);
figure(1); plot(h);axis([0, 200, -5, 5]);title('budiacie
pole');xlabel('čas');ylabel('elektrická intenzita');
%%
for l = 1:100
    % nastavenie budenia do určeného miesta
    g(Nx/2) = 5*h(l);
    H(:,3) = Y\((Z*H(:,2))-Y*H(:,1))-g);
    H(:,1) = H(:,2);
    H(:,2) = H(:,3);
    % prerovnanie do matice
    K = H(:,3);
    % tvorba výstupnej matice
    for i = 0:Ny-2
        L(i+1,:) = K(((Nx-1)*i)+1:((Nx-1)*(i+1)));
    end
    figure(2);colormap('autumn');surf(L);axis([0 Nx+1 0 Ny+1 -5 5]);

```

```
    title('výsledná vlna');xlabel('počet p. vo vodorovnom  
smere');ylabel('počet p. vo zvislom smere');zlabel('elektrická  
intenzita');  
    pause(0.02);  
end
```