

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STAVEBNÍ
ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY
FACULTY OF CIVIL ENGINEERING
INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

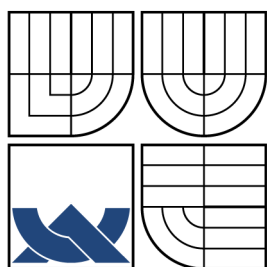
ANALÝZA ŠÍŘENÍ TRHLINY POMOCÍ J-INTEGRÁLU

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

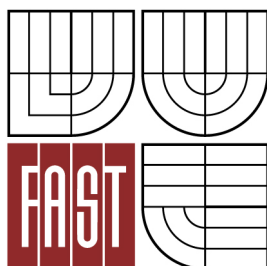
AUTOR PRÁCE
AUTHOR

KATEŘINA BÓNOVÁ

BRNO 2016



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STAVEBNÍ
ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY



FACULTY OF CIVIL ENGINEERING
INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

ANALÝZA ŠÍŘENÍ TRHLINY POMOCÍ J-INTEGRÁLU

ANALYSIS OF CRACK PROPAGATION USING J-INTEGRAL

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

KATEŘINA BÓNOVÁ

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Ing. JAN ELIÁŠ, Ph.D.

BRNO 2016



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STAVEBNÍ

Studijní program	B3607 Stavební inženýrství
Typ studijního programu	Bakalářský studijní program s prezenční formou studia
Studijní obor	3647R013 Konstrukce a dopravní stavby
Pracoviště	Ústav stavební mechaniky

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student	Kateřina Bónová
Název	Analýza šíření trhliny pomocí J-integrálu
Vedoucí bakalářské práce	Ing. Jan Eliáš, Ph.D.
Datum zadání bakalářské práce	30. 11. 2015
Datum odevzdání bakalářské práce	27. 5. 2016
V Brně dne 30. 11. 2015	

.....
prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.
Vedoucí ústavu

.....
prof. Ing. Rostislav Drochytka, CSc., MBA
Děkan Fakulty stavební VUT

Podklady a literatura

Jirásek, M. a Zeman. J. Přetváření a porušování materiálů, ČVUT, 2010.

Bažant, Z.P. a Planas, J. Fracture and size effect in concrete and other Quasibrittle materials, CRC press, 1998.

Rice, J. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks, J. Appl. Mech.-T.ASME, 1968.

Zásady pro vypracování

Práce bude zaměřena na význam a použití J-integrálu při šíření trhliny v tělese. Bude obsahovat teoretickou sekci s vysvětlením J-integrálu a základů lineární lomové mechaniky, dále řešené příklady výpočtu J-integrálu analyticky a nakonec jeho vyčíslení použitím MKP programu.

Struktura bakalářské/diplomové práce

VŠKP vypracujte a rozčleňte podle dále uvedené struktury:

1. Textová část VŠKP zpracovaná podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (povinná součást VŠKP).
2. Přílohy textové části VŠKP zpracované podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (nepovinná součást VŠKP v případě, že přílohy nejsou součástí textové části VŠKP, ale textovou část doplňují).

.....

Ing. Jan Eliáš, Ph.D.
Vedoucí bakalářské práce

ABSTRAKT

Bakalářská práce je zaměřena na význam a použití J-integrálu při šíření trhliny v tělese. J-integrál je metoda lomové mechaniky sloužící k určení rychlosti uvolňování energie pružné deformace. Jinými slovy, stanoví hodnotu energie dostupné k šíření trhliny v lineárním elastickém i elasticko-plastickém materiálu. V práci jsou také uvedeny a odvozeny vztahy mezi J-integrálem, hnací silou trhliny a faktorem intenzity napětí. Hlavním přínosem této práce je objasnění celé problematiky a podrobný rozbor J-integrálu na jednoduchých příkladech konstrukcí. Odvozené vztahy jsou v závěru práce porovnány s výpočty na modelech v programu ANSYS.

KLÍČOVÁ SLOVA

lomová mechanika, lomová energie, faktor intenzity napětí, hnací síla trhliny, J-integrál, ANSYS

ABSTRACT

The bachelor thesis is focused on importance and application of J-integral in crack propagation analysis. J-integral is a method of fracture mechanics used to determine the strain energy release rate. In other words it provides the amount of energy available for crack propagation in elastic and elasto-plastic materials. The thesis presents derivations of relations between J-integral, crack driving force and stress intensity factor. The most important contribution of this thesis is detailed analytical calculation of the J-integral on simple structures. The results are verified by numerical models in ANSYS.

KEYWORDS

fracture mechanics, fracture energy, stress intensity factor, crack driving force, J-integral, ANSYS

BÓNOVÁ, Kateřina. *Analýza šíření trhliny pomocí J -integrálu*. Brno, 2016. 49 s. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky. Vedoucí práce Ing. Jan Eliáš, Ph.D.

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně, pod vedením Ing. Jana Eliáše, Ph.D., a že jsem uvedla všechny použité informační zdroje.

V Brně dne

.....

podpis autora
Kateřina Bónová

Poděkování:

Děkuji tímto vedoucímu práce Ing. Janu Eliášovi, Ph.D., především za jeho čas, odborné rady, trpělivost a ochotu, ale také za individuální přístup při konzultacích mé bakalářské práce a motivaci dotáhnout věci do konce. Dále mé poděkování patří i dalším vyučujícím, kteří přispěli k mým vědomostem a byli ochotni věnovat svůj čas ke konzultacím. Ráda bych také poděkovala svým blízkým, kteří pro mě měli pochopení ve dny, týdny a měsíce, které jsem strávila u pracovního stolu a počítače nejen nad touto bakalářskou prací.

OBSAH

1 Úvod	1
Úvod	1
2 Cíle práce	2
3 Lomová mechanika	3
3.1 Napětí u kořene trhliny	3
3.2 Irwinovo lokální kritérium	5
3.3 Griffithovo globální kritérium	6
3.4 Porovnání lokální a globální metody	7
4 J-integrál	10
4.1 Definice	10
4.2 Nulová hodnota integrálu po uzavřené cestě	10
4.3 Nezávislost na integrační cestě	11
5 Výpočty J-integrálu na jednoduchých konstrukcích	13
5.1 Příklad 1	15
5.1.1 J-integrál	15
5.1.2 Hnací síla trhliny	16
5.1.3 Faktor intenzity napětí	16
5.2 Příklad 2	17
5.2.1 J-integrál	17
5.2.2 Hnací síla trhliny	18
5.2.3 Faktor intenzity napětí	19
5.3 Příklad 3	19
5.3.1 J-integrál	19
5.3.2 Hnací síla trhliny	20
5.3.3 Faktor intenzity napětí	21
5.4 Příklad 4	21
5.4.1 J-integrál	21
5.4.2 Hnací síla trhliny	24
5.4.3 Faktor intenzity napětí	26
6 Ověření výsledků v programu ANSYS	27
6.1 Příklad 1	27
6.2 Příklad 2	28

6.3	Příklad 3	29
6.4	Příklad 4	30
7	Závěr	32
	Literatura	33
	Seznam symbolů, veličin a zkratk	34
	Seznam příloh	36
A	Příklad 1 v programu ANSYS	37
B	Příklad 2 v programu ANSYS	40
C	Příklad 3 v programu ANSYS	43
D	Příklad 4 v programu ANSYS	46

SEZNAM OBRÁZKŮ

3.1	Panel porušený eliptickým otvorem a namáhaný vzdáleným napětím .	3
3.2	Průběh napětí na rozdílně namáhaných panelech	5
3.3	Konzola namáhaná dvěma silami	6
3.4	Působení virtuálního zatížení a následný virtuální posun	7
4.1	Nulová hodnota J-integrálu na uzavřené cestě	10
4.2	Nezávislost J-integrálu na integrační cestě	11
5.1	Dvojitá konzola namáhaná ohybovým momentem	15
5.2	Konstrukce namáhaná symetricky dvojicí sil	17
5.3	Konstrukce namáhaná konstantním posunem	19
5.4	Konstrukce namáhaná silou	21
5.5	Průhyb konstrukce	24
5.6	Dílčí průhyby na konstrukci	25
6.1	Model horní poloviny konstrukce zatížené koncovým momentem . . .	27
6.2	Detail zhuštění sítě u kořene trhliny	28
6.3	Model horní poloviny konstrukce namáhané osamělým břemenem . .	29
6.4	Detail zhuštění sítě u kořene trhliny	29
6.5	Model horní poloviny konstrukce namáhané posunem	30
6.6	Detail zhuštění sítě u kořene trhliny	30
6.7	Model pravé poloviny konstrukce namáhané silou na volném konci . .	31
6.8	Detail zhuštění sítě u kořene trhliny	31

SEZNAM TABULEK

6.1	Porovnání výsledků pro první příklad	28
6.2	Porovnání výsledků pro druhý příklad	29
6.3	Porovnání výsledků pro třetí příklad	30
6.4	Porovnání výsledků pro čtvrtý příklad	31

1 ÚVOD

Trhliny nebo dutiny jsou běžnou součástí většiny materiálů a při řešení konstrukcí je potřeba s nimi počítat, jelikož ovlivňují rozložení napětí v tělese. K určení, zda se trhlina v tělese bude šířit nebo ne, existují dva přístupy.

Prvním je Irwinovo lokální kritérium, pomocí kterého lze popsat napětí u kořene trhliny veličinou nazývanou *faktor intenzity napětí*. Další možností je Griffithovo globální kritérium, které určuje změnu energie pružné deformace na jednotku plochy trhliny, respektive veličinu zvanou *hnací síla trhliny*. Porovnání s příslušnými materiálovými charakteristikami, které vypovídají o odolnosti materiálu proti šíření trhliny, pak rozhoduje o šíření či nešíření trhliny. Současně lze mezi zmiňovanými metodami najít jejich vzájemné vztahy.

Bakalářská práce věnuje pozornost především J-integrálu, což je způsob, jak lze vypočítat hnací sílu trhliny v lineárně elastických, ale také nelineárně elastických či elastoplastických materiálech. Práce se ale omezuje pouze na lineárně elastické materiály. Práce prezentuje kromě základní teorie především výpočet J-integrálu na čtyřech jednoduchých konstrukcích a ověření výsledku pomocí přímého výpočtu hnací síly trhliny.

Analyticky odvozené vztahy jsou v závěru práce ještě ověřeny v programu ANSYS. V něm lze dané konstrukce vymodelovat a J-integrál pomocí tohoto programu spočítat. Výsledky z programu a analytického výpočtu je potom možné porovnat pro různé rozměry jednotlivých konstrukcí.

2 CÍLE PRÁCE

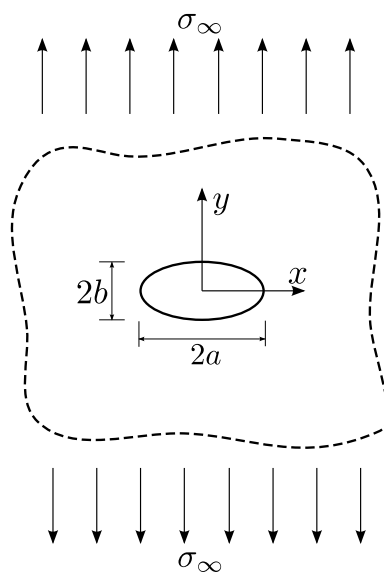
- Prvním cílem práce je uvedení do problematiky lomové mechaniky a objasnění teoretického řešení J-integrálu a alternativních metod, které vedou k analýze šíření trhliny. Součástí toho by měly být také důkazy o nulové hodnotě J-integrálu na uzavřené cestě a o jeho nezávislosti na zvolené cestě.
- Dalším cílem je výpočet J-integrálu na různých typech jednoduchých konstrukcí přímou integrací.
- Posledním cílem je pak ověřit analytické výsledky na modelech konstrukcí v programu ANSYS.

3 LOMOVÁ MECHANIKA

Většina materiálů má v sobě defekty v podobě trhlinek nebo dutinek, které vznikly při výrobě nebo přirozenou cestou. Na takové defekty je potřeba brát zřetel, protože samozřejmě výrazně ovlivňují rozložení napětí v tělese a jeho koncentraci ve vrcholech těchto defektů. Rozhodnutí, zda a za jakých podmínek dojde k porušení, tedy k šíření trhliny, je možné provést pomocí dvou přístupů. Lokálního, který vychází z rozložení napětí u kořene trhliny, nebo globálního, založeného na energetických bilancích v rámci celého tělesa. Tato kapitola vychází z obsahu kapitoly 3 skript Přetváření a porušování materiálu [2, kap. 3].

3.1 Napětí u kořene trhliny

Napětí, vznikající v krajních bodech trhliny vlivem zatížení, závisí především na tvaru defektu. Obecně ale platí, že napětí je při okraji trhliny vyšší. Je tím kompenzováno napětí, které by v materiálu vznikalo, kdyby nebyl poškozen trhlinou. S rostoucí vzdáleností od místa defektu je pole napětí trhlinou ovlivňováno méně. Je tedy třeba analyzovat rozložení napětí v okolí různě tvarovaných trhlín.



Obr. 3.1: Panel porušený eliptickým otvorem a namáhaný vzdáleným napětím

Například na eliptické dutině se napětí odvozuje z rovinné úlohy, kdy je plochý panel namáhan vnějším napětím σ_∞ ve směru y , a přitom je narušen dutinkou ve tvaru elipsy o rozměrech hlavních poloos a a b (Obr. 3.1). Tyto rozměry elipsy jsou mnohem menší než rozměry celého tělesa. Kdyby těleso nebylo narušeno tímto malým defektem, vznikalo by v neoslabeném tělese jen napětí σ_∞ , přičemž ostatní

složky napětí v dalších směrech by byly nulové. Pro oslabený průřez je řešení napětí složitější. V roce 1913 však bylo tečné napětí ke kraji eliptické dutiny odvozeno britským stavebním inženýrem Charlesem Inglisem jako

$$\sigma_t(x) = \frac{x^2(a+b)^2 - a^4}{a^4 - x^2(a^2 - b^2)} \sigma_\infty \quad (3.1)$$

Rozložení napětí tak závisí na konkrétním poměru os elipsy $b : a$. Ve všech případech, nehledě na rozměr, je nejvyššího napětí σ_t i σ_y dosaženo, když $x = \pm a$, tedy na vrcholu elipsy, respektive v okraji trhliny. Největší napětí je popsáno funkcí

$$\max[\sigma_y(x, y)] = \sigma_y(\pm a, 0) = \sigma_t(\pm a) = \left(1 + \frac{2a}{b}\right) \sigma_\infty \quad (3.2)$$

Z rovnice vychází koeficient zvýšení napětí $1 + 2a/b$, který vyjadřuje, že hodnota napětí nezávisí na velikosti defektu v materiálu, ale na tvaru defektu. Proto například porušení kruhového tvaru má třikrát větší hodnotu maximálního napětí než σ_∞ . Tento koeficient je nazýván *faktor koncentrace napětí*. U eliptických otvorů tedy závisí jen na poměru rozměrů $b : a$. Čím bude poměr menší, koncentrace napětí poroste. Teoreticky u trhliny, jejíž rozměr b se limitně blíží nule, čímž prakticky tvoří úsečku, je v krajních bodech, tzv. *kořenech trhliny*, toto napětí nekonečně vysoké. Ve skutečnosti samozřejmě nemůže takto vysoké napětí vznikat, protože žádný materiál v takových podmínkách nedokáže být lineárně pružný. Nicméně i tak je možné tuto informaci použít k popisu šíření trhliny.

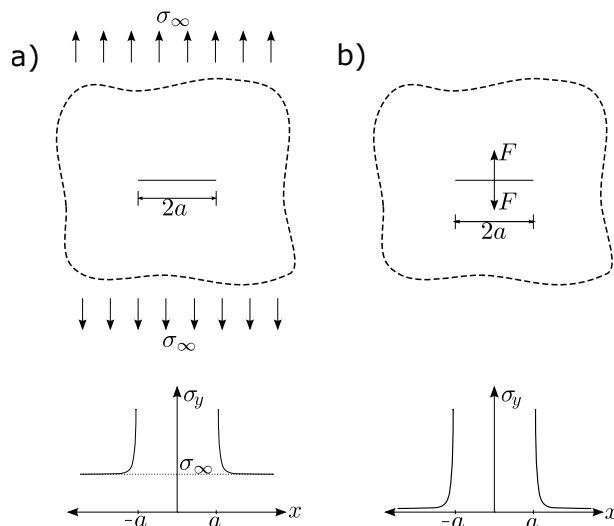
Napětí pro velký panel namáhaný vzdáleným jednoosým napětím σ_y (Obr. 3.2a) lze vyjádřit vztahem

$$\sigma_y(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } |x| < a \\ \frac{\sigma_\infty |x|}{\sqrt{x^2 - a^2}} & \text{pro } |x| > a \end{cases} \quad (3.3)$$

Pro panel namáhaný rozevírajícími silami rovněž ve směru kolmém na trhlínu s působíštěm ve středu trhliny (Obr. 3.2b) je napětí popsáno funkcí

$$\sigma_y(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } |x| < a \\ \frac{Fa}{\pi t |x| \sqrt{x^2 - a^2}} & \text{pro } |x| > a \end{cases} \quad (3.4)$$

Po vynesení funkcí do grafu lze vyčíst, že daleko od trhliny namáhané dvojicí sil se napětí blíží nule a pro případ působení vzdáleného napětí σ_∞ se normálové napětí ustálí právě na hodnotě tohoto napětí. Oproti tomu v oblasti kořene trhliny napětí do nekonečna roste v obou případech stejně.



Obr. 3.2: Průběh napětí na rozdílně namáhaných panelech

3.2 Irwinovo lokální kritérium

Pro popis napětí u kořene trhliny slouží veličina zvaná *faktor intenzity napětí* značící se K_I . Římská číslice označuje, v jakém módu je těleso namáháno. Pro tento případ se jedná jen o normálový *mód I*, v němž je těleso namáháno v rovině kolmo na trhlínu a zatížení se ji snaží otevřít. Napětí v okolí kořene trhliny je jednoznačně určeno faktorem intenzity napětí

$$\sigma_y(r) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (3.5)$$

Proměnná r představuje vzdálenost od kořene, ve které se počítá napětí. Faktor intenzity napětí se udává v jednotkách $\text{Nm}^{-3/2}$.

Je tedy zřejmé, že faktor intenzity napětí je závislý jak na působícím zatížení, tak i na velikosti trhliny. Pro velký počet příkladů jsou odvozeny přímo vzorce na výpočet K_I . Pro první zde analyzovaný případ, tedy pro těleso namáhané napětím σ_∞ s trhlínou o velikosti $2a$, se faktor intenzity napětí vypočte jako

$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \quad (3.6)$$

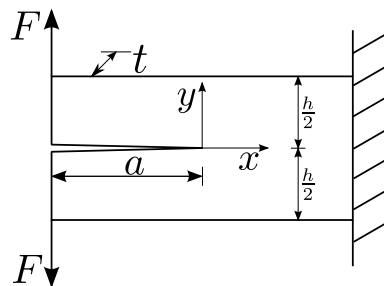
Pro druhý případ, kdy je trhlina namáhána dvěma vzdálenými silami, se faktor intenzity napětí spočítá podle vztahu

$$K_I = \frac{F}{t\sqrt{\pi a}} \quad (3.7)$$

Proměnná t vyjadřuje tloušťku tělesa ve směru osy z .

V této práci bude řešen například případ dvojité konzoly rozevírané dvěma silami (Obr. 3.3), pro který je faktor intenzity napětí roven

$$K_I = \frac{4\sqrt{6}Fa}{th^{3/2}} \quad (3.8)$$



Obr. 3.3: Konzola namáhaná dvěma silami

Tento faktor, vyjadřující úroveň namáhání, je následně potřeba porovnat s odolností samotného materiálu určenou tzv. *kritickou hodnotou faktoru intenzity napětí* K_{Ic} . Je to charakteristická vlastnost materiálu nazývaná také *lomová houževnatost*. V případě, že je faktor intenzity napětí menší než jeho kritická hodnota pro daný materiál, trhlina se šířit nebude. Když si budou obě veličiny rovný, trhlina se šířit může, ale také nemusí. Poslední možnost nelze uvažovat, protože by faktor intenzity napětí přesáhl kritickou hodnotu.

$$K_I < K_c \implies \Delta a = 0 \quad (3.9)$$

$$K_I = K_c \implies \Delta a \geq 0 \quad (3.10)$$

$$K_I > K_c \implies \text{nepřípustné} \quad (3.11)$$

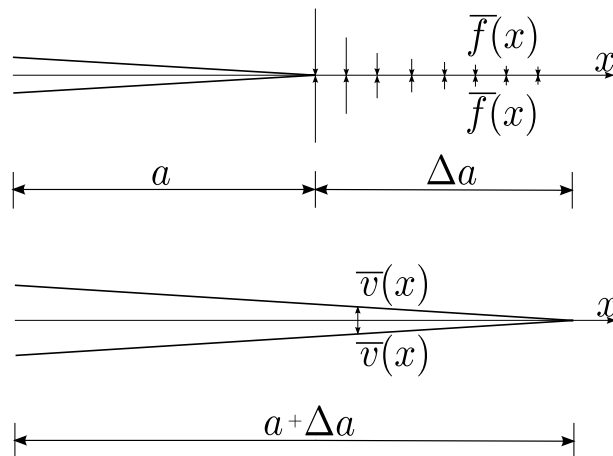
3.3 Griffithovo globální kritérium

Globální energetický přístup uvažuje přeměny energií v rámci tělesa v průběhu zatěžování. Pokud se trhlina nešíří, energie dodaná zatěžováním se přemění na potenciální energii pružné deformace $U(F, a)$, která je funkcí zatížení F a délky trhliny a . Druhou možností je, že část energie bude použita k šíření trhliny, tedy k narušení soudržnosti materiálu. Energie nutná k vytvoření nového jednotkového povrchu trhliny je definována materiálovou konstantou zvanou *lomová energie*, která se značí jako G_F . Jednotkou je J/m^2 . Tato materiálová konstanta, vyjadřující v podstatě odpor materiálu proti šíření trhliny, se porovnává se změnou *energie pružné deformace* na jednotku plochy trhliny. Tuto změnu energie vyjadřuje veličina nazývaná *hnací síla trhliny*, která se značí jako $\mathcal{G}$ a je definována jako

$$\mathcal{G}(F, a) = \frac{1}{t} \frac{\partial U(F, a)}{\partial a} \quad (3.12)$$

V případě zatěžování konstantním posunem je to potom

$$\mathcal{G}(u, a) = -\frac{1}{t} \frac{\partial U(u, a)}{\partial a} \quad (3.13)$$



Obr. 3.4: Působení virtuálního zatížení a následný virtuální posun

O šíření trhliny tedy rozhodne úvaha nad velikostmi těchto veličin. Pokud je hnací síla trhliny $\mathcal{G}$ menší než lomová energie G_f , trhlina se šířit nebude a energie vytvořená zatížením se pouze transformuje na energii pružné deformace. Pokud budou obě veličiny sobě rovné, soudržnost materiálu je překonána a tělesem se bude šířit trhlina. V případě, kdy uvolňovaná hnací síla trhliny bude větší než lomová energie materiálu, přebývající energie by se projevila kineticky a jednalo by se o dynamickou úlohu. Ve statické úloze takovou možnost neuvažujeme.

$$\mathcal{G} < G_F \implies \Delta a = 0 \quad (3.14)$$

$$\mathcal{G} = G_F \implies \Delta a \geq 0 \quad (3.15)$$

$$\mathcal{G} > G_F \implies \text{nepřípustné} \quad (3.16)$$

3.4 Porovnání lokální a globální metody

Přestože obě metody jsou založeny na jiných principech, lze dokázat, že dochází ke stejným výsledkům, a jsou si tedy rovnocenné. Nabízí se tedy najít vztah mezi faktorem intenzity napětí K_I a uvolňovanou energií pružné deformace $\mathcal{G}$.

To je možné pomocí porovnání počátečního stavu trhliny značeného A, kdy má trhlina délku a a konečného stavu B, kdy se prodlouží o Δa , tudíž bude mít velikost $a + \Delta a$. Rozdíl mezi energiemi pružné deformace počátečního a konečného stavu lze zapsat následující způsobem

$$\Delta U = U^B - U^A = U(u, a + \Delta a) - U(u, a) \quad (3.17)$$

Samotné šíření trhliny se pro výpočet rozdělí na dvě části. V prvním kroku se trhlina prodlouží na požadovanou délku $a + \Delta a$, ale bude na ni působit virtuální zatížení $\bar{f}(x)$ zabraňující jejímu rozevření v části Δa . V druhém kroku tyto fiktivní pomocné síly

postupně mizí, přičemž konají zápornou práci, a trhlina se rozevívá s přemístěním $\bar{v}(x)$ (Obr. 3.4).

Fiktivní zatížení, které drží rozevívající se trhlinu stále zavřenou, lze odvodit z rovnice (3.5). Rameno r bude v tomto případě vzdálenost $x - a$.

$$\bar{f}(x) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(x-a)}} \quad (3.18)$$

Zápis vztahu pro finální otevření trhliny délky $a + \Delta a$ je následující

$$\bar{v}(x) = \frac{4K_I}{E} \sqrt{\frac{a + \Delta a - x}{2\pi}} \quad (3.19)$$

Vykonaná práce v jednom bodě je integrálem síly podle posunu. Jedná se o lineární závislost, integrál lze tedy spočítat jako polovinu součinu virtuálního zatížení $\bar{f}(x)$ a virtuálního přemístění $\bar{v}(x)$. Díky symetrii podle trhliny je také celý integrál násoben dvěma.

$$\Delta U = -2 \frac{1}{2} t \int_a^{a+\Delta a} \bar{f}(x) \bar{v}(x) dx \quad (3.20)$$

$$= -t \int_a^{a+\Delta a} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(x-a)}} \frac{4K_I}{E} \sqrt{\frac{a + \Delta a - x}{2\pi}} dx \quad (3.21)$$

$$= -\frac{2tK_I^2}{\pi E} \underbrace{\int_a^{a+\Delta a} \sqrt{\frac{a + \Delta a - x}{x - a}} dx}_{I_S} \quad (3.22)$$

Následně je potřeba zavést substituci $x = a + \Delta a \sin^2 \alpha$

$$I_S = \int_a^{a+\Delta a} \sqrt{\frac{a + \Delta a - x}{x - a}} dx \quad (3.23)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{a + \Delta a - a - \Delta a \sin^2 \alpha}{a + \Delta a \sin^2 \alpha - a}} \Delta a 2 \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \quad (3.24)$$

$$= 2\Delta a \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \quad (3.25)$$

$$= 2\Delta a \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \quad (3.26)$$

$$= 2\Delta a \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha d\alpha = 2\Delta a \frac{\pi}{4} = \frac{\pi \Delta a}{2} \quad (3.27)$$

Upravený integrál I_S se dosadí zpět a vyjde

$$\Delta U = -\frac{2tK_I^2}{\pi E} \frac{\pi \Delta a}{2} = -\frac{tK_I^2 \Delta a}{E} \quad (3.28)$$

Tento výraz se dále použije ve vzorci pro hnací sílu trhliny $\mathcal{G}$ (3.13)

$$\mathcal{G} = -\frac{1}{t} \frac{\partial U(u, a)}{\partial a} = -\frac{1}{t} \frac{\Delta U}{\Delta a} = \frac{K_I^2}{E} \quad (3.29)$$

Pokud jsou kritéria pro šíření trhliny ekvivalentní, vztah mezi lomovou houževnatostí K_{IC} a lomovou energií materiálu G_F nabývá tvaru

$$K_c = \sqrt{EG_F} \quad (3.30)$$

4 J-INTEGRÁL

4.1 Definice

J-integrál v lineární lomové mechanice je metoda určení hnací síly trhliny, která je použitelná i pro nelineární materiál. Hodnota J-integrálu je přímo ekvivalentní s derivací energie pružné deformace podle délky trhliny, tedy s veličinou $\mathcal{G}$.

Základním předpokladem pro použití J-integrálu je homogenní materiál z lineárního nebo nelineárního pružného materiálu bez působení objemových sil. Uvažujeme dvourozměrné těleso a rovinnou deformaci.

J-integrál byl odvozen v roce 1968 Jamesem Ricem [3] a má tvar

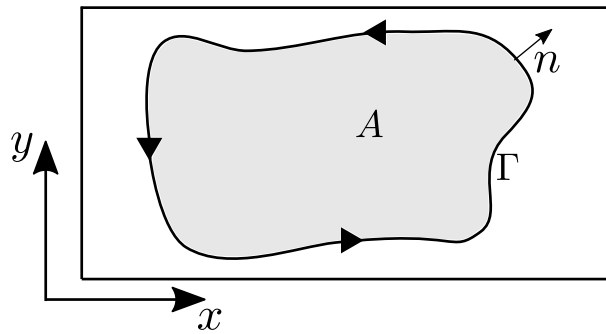
$$J = \int_{\Gamma} \left(W dy - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right) \quad (4.1)$$

kde Γ značí integrační cestu kolem hrotu vrubu, t_i je vektor povrchových sil. Veličina u představuje vektor posunutí a integruje se směrem po křivce podle s . W je potom hustota deformační energie, jejíž vzorec je

$$W = \int_0^{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (4.2)$$

4.2 Nulová hodnota integrálu po uzavřené cestě

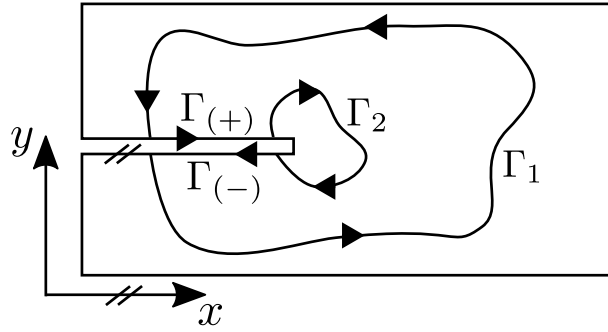
Pro důkaz, že hodnota J-integrálu po uzavřené cestě je rovna nule, se volí příklad cesty Γ , která směřuje proti směru hodinových ručiček uzavírá plochu A (Obr. 4.1).



Obr. 4.1: Nulová hodnota J-integrálu na uzavřené cestě

Použitím Greenovy věty lze křivkový integrál z rovnice (4.1) přepsat na dvojný po ploše ohraničené cestou Γ

$$J = \int_A \left(\frac{\partial W}{\partial x} - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) dx dy \quad (4.3)$$



Obr. 4.2: Nezávislost J-integrálu na integrační cestě

Dále je možné integrál rozepsat dosazením následujících úprav

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (4.4)$$

$$n_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x} \quad (4.6)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (4.7)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (4.8)$$

Ve výsledném tvaru integrálu se dosazené vztahy odečtou a J-integrál bude mít nulovou hodnotu

$$J = \int_A \left(\sigma_{ij} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) dx dy = 0 \quad (4.9)$$

4.3 Nezávislost na integrační cestě

Důkaz, že integrál je nezávislý na zvolené cestě, uvažuje dvě protisměrné cesty Γ_1 a Γ_2 . První cesta Γ_1 začíná na spodní hraně trhliny a po směru hodinových ručiček směřuje k horní hraně vrubu. Naopak Γ_2 směřuje od horní části praskliny proti směru hodinových ručiček ke spodní hraně trhliny. Obě cesty jsou ještě spojeny po hraně trhliny cestami $\Gamma_{(-)}$ na spodní a $\Gamma_{(+)}$ na horní hraně trhliny (Obr. 4.2).

Díky tomu, že nulová hodnota integrálu po uzavřené cestě byla dokázána v předchozí kapitole, J-integrál pro uzavřenou cestu na obrázku lze zapsat jako

$$J = J_1 + J_{(+)} - J_2 - J_{(-)} = 0 \quad (4.10)$$

s ohledem na to, že proti směru hodinových ručiček je uvažovaná kladná hodnota a v opačném směru hodnota záporná.

J-integrál pro křivky $\Gamma_{(-)}$ a $\Gamma_{(+)}$ na trhlíně bude nabývat tvaru

$$J_{(+)} = J_{(-)} = \int_{\Gamma} \left(W dy - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \right) = 0 \quad (4.11)$$

kde $dy = 0$, protože trhlina je rovnoběžná s osou x , a také $t_i = 0$, protože na kraji tělesa žádné povrchové síly nevznikají. J-integrály $J_{(+)}$ a $J_{(-)}$ se tedy rovnají 0 a J_1 a J_2 samy sobě, takže ve výsledku nezáleží na tom, jakou cestu zvolíme.

$$J = J_1 + (-J_2) = 0 \quad (4.12)$$

$$J_1 = J_2 \quad (4.13)$$

5 VÝPOČTY J-INTEGRÁLU NA JEDNODUCHÝCH KONSTRUKCÍCH

V následující kapitole bude odvozen J-integrál pro několik jednoduchých příkladů konstrukcí. Některé příklady jsou převzaty z knihy profesora Bažanta [1].

Pro rovinnou úlohu bude vždy uvažován základní tvar J-integrálu

$$J = \int_{\Gamma} W dy - \int_{\Gamma} t_i u_{i,x} ds \quad (5.1)$$

Vzhledem k tomu, že konstrukce jsou většinou uvažovány jako prutové a při výpočtu deformační energie bude zanedbán smyk, přetvoření $\varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}$ jsou nulová. Jediné nenulové přetvoření je ε_x . Rovnici pro hustotu deformační energie (4.2) pak lze upravit do tvaru

$$W = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x(k) dk \quad (5.2)$$

Dalším zjednodušením je, že materiál bude uvažovaný jen lineárně pružný a bude tedy platit Hookův zákon. Pro napětí ve směru x se zákon zapíše jako

$$\sigma_x = \varepsilon_x E \quad (5.3)$$

Se zavedením parametru k Hookův zákon nabývá tvaru $\sigma_x(k) = Ek$. Po dosazení rovnice do rovnice pro hustotu deformační energie (5.2) a následné integraci vznikne vztah

$$W = \int_0^{\varepsilon_x} Ek dk = \left[\frac{Ek^2}{2} \right]_0^{\varepsilon_x} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_x^2}{E} \quad (5.4)$$

Normálové napětí ve všech řešených příkladech vzniká pouze od momentu, normálové síly se v konstrukcích nevyskytují. Proto lze napětí rozepsat jako

$$\sigma_x = \frac{M_y \Delta y}{I} + \frac{N}{A} = \frac{M_y \Delta y}{\frac{1}{12} t D^3} \quad (5.5)$$

kde Δy představuje vzdálenost od neutrálné osy. Veličina D znázorňuje výšku uvažovaných průřezů, v příkladech většinou $D = h/2$. V těchto případech lze výsledný moment setrvačnosti zjednodušit do následujícího tvaru

$$I = \frac{1}{12} t \left(\frac{h}{2} \right)^3 = \frac{h^3 t}{96} \quad (5.6)$$

Pro zjednodušení lze pro rovinnou úlohu uvažovat tloušťku těles jako 1, což bude uvažováno i ve všech dalších výpočtech a odvozeních.

Ve druhé části základního tvaru J-integrálu (5.1) vystupuje vektor povrchového napětí t_i , který lze vyjádřit pomocí normály n_j směřující vně oblasti uzavřené křivkou J-integrálu.

$$t_i = \sigma_{ij}n_j \quad (5.7)$$

Za uvažování nulových napětí σ_y , σ_z , σ_{xz} , σ_{yz} je rozepsání vektoru povrchového napětí do směrů x a y následující

$$t_x = \sigma_x n_x + \sigma_{xy} n_y \quad (5.8)$$

$$t_y = \sigma_{xy} n_x + \sigma_y n_y \quad (5.9)$$

Například pro vektor normály $n = (-1, 0)$ bude povrchové napětí $t = (-\sigma_x, -\sigma_{xy})$, pro $n = (0, 1)$ potom $t = (\sigma_{xy}, \sigma_y)$.

Smykové napětí σ_{xy} představuje odpor průřezu proti působící posouvající síle. V příkladech bude zatížením, které způsobuje smyk v průřezu prutu, vždy síla F . Lze tedy zapsat vztah

$$\int_0^D \sigma_{xy} dy = F \quad (5.10)$$

Pomocí vektoru normály lze nalézt vztahy mezi diferenciálními délkami dx , dy a ds .

$$ds n_x = dy \quad (5.11)$$

$$ds n_y = dx \quad (5.12)$$

Veličina $u_{x,x}$ představuje deformaci u_x derivovanou podle x , což je poměrné přetvoření ve směru x .

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_x \quad (5.13)$$

Ve směru y veličina $u_{y,x}$ vyjadřuje deformaci u_y derivovanou podle x , tedy pootočení střednice prutu kolem osy z .

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \varphi \quad (5.14)$$

Po dosazení všech odvozených rovnic je možné základní rovnici J-integrálu (5.1) pro pruty rozepsat jako

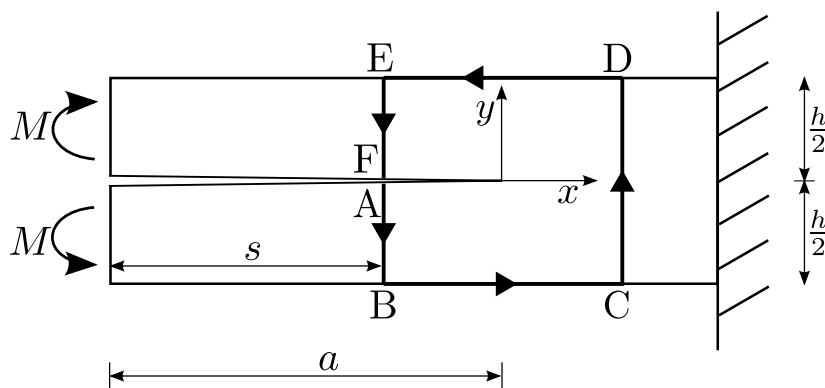
$$J = \int_{\Gamma} \frac{\sigma_x^2}{2E} dy - \int_{\Gamma} t_x \varepsilon_x ds - \int_{\Gamma} t_y \varphi ds \quad (5.15)$$

Výsledek J-integrálu lze ověřit výpočtem hnací síly trhliny $\mathcal{G}$ (3.12), (3.13). Tato veličina je ekvivalentní s výsledkem J-integrálu pro lineárně elastický materiál.

$$\mathcal{G} = J \quad (5.16)$$

Za předpokladu lineárně pružného materiálu se deformační energie U vypočte ze vzorce

$$U = \frac{1}{2}Fu + \frac{1}{2}M\varphi \quad (5.17)$$



Obr. 5.1: Dvojitá konzola namáhaná ohybovým momentem

Díky tomu, že jsou příklady v módu I, je možné provést také výpočet faktoru intenzity napětí podle rovnice (3.30).

5.1 Příklad 1

5.1.1 J-integrál

Na prvním příkladu dvojitě konzoly namáhané koncovým momentem budou rozebrány jednotlivé části rovnice (5.15) na všech částech cesty A-F (Obr. 5.1).

Na cestě BC není potřeba J-integrál počítat. První člen rovnice (5.15) je nulový díky $dy = 0$. Normála má hodnotu $n = (0, -1)$ a složky vektoru povrchového napětí lze tedy zapsat jako $t_x = 0 \sigma_x + (-1) \sigma_{xy}$ a $t_y = 0 \sigma_{xy} + (-1) \sigma_y$. Na této cestě vedoucí po kraji tělesa ale nevznikají žádná napětí ve směru y ani smyková napětí, takže díky $\sigma_y = 0$ a $\sigma_{xy} = 0$ je $t_x = 0$ i $t_y = 0$. Celková hodnota J-integrálu na cestě BC je tím pádem nulová.

Obdobně lze vyřešit také cestu DE, která je s cestou BC symetrická podle osy x . Jediným rozdílem je, že normála má tvar $n = (0, 1)$, což ale na výsledné nulové hodnotě J-integrálu nic nemění.

Na cestě CD nevznikají žádná napětí, proto je nulové také povrchové napětí t_x a t_y , a tedy i celková hodnota J-integrálu na této cestě.

Na cestě AB a EF má normála hodnotu $n = (-1, 0)$, z čehož lze odvodit složky vektoru povrchového napětí $t_x = (-1) \sigma_x + 0 \sigma_{xy}$ a $t_y = (-1) \sigma_{xy} + 0 \sigma_y$. Díky $\sigma_{xy} = 0$, respektive $t_y = 0$, vypadne z rovnice (5.15) poslední člen. Zbývající část rovnice je ale nutné vyřešit. Napětí σ_x na cestách AB a EF má stejnou hodnotu s opačným znaménkem. V prvním členu rovnice je napětí umocněno na druhou a ve druhém členu je napětí v součinu s přetvořením ε_x , které má také opačné znaménko. Tím význam opačného znaménka pro napětí mizí a nezáleží na tom, která z cest se

pro výpočet zvolí. Kvůli tomu, a také díky symetrii cesty AB nebo EF podle střednice každé z konzol, lze integrovat jen na čtvrtině výšky konstrukce a celou hodnotu J-integrálu vynásobit čtyřmi. Integrace podle ds se nahradí $-dy$ (5.11).

Z podrobněji rozepsané rovnice J-integrálu (5.15) lze tedy, po dosazení výše odvozených vztahů pro t_x a ds , zapsat konkrétní rovnici pouze pro úsek AB v mezích od 0 do $-h/4$ podle směru cesty J-integrálu.

$$J = 4 \int_0^{-h/4} \frac{\sigma_x^2}{2E} dy - 4 \int_0^{-h/4} (-\sigma_x) \varepsilon_x (-dy) \quad (5.18)$$

První dva členy integrované podle dy se spojí do jednoho integrálu a dosadí se podle rovnic (5.3) a (5.5)

$$J = 4 \int_0^{-h/4} \left(\frac{\sigma_x^2}{2E} - \sigma_x \frac{\sigma_x}{E} \right) dy = -4 \int_0^{-h/4} \frac{\sigma_x^2}{2E} dy = -4 \int_0^{-h/4} \frac{1}{2E} \left(\frac{M_y \Delta y}{I} \right)^2 dy \quad (5.19)$$

Neutrálná osa je v tomto případě na pozici $-h/4$, tedy $\Delta y = y + h/4$. Po následné integraci, dosazení rovnice (5.6) a matematických úpravách je možné stanovit výslednou hodnotu J-integrálu.

$$J = -2 \frac{M^2}{EI^2} \left[\frac{y^3}{3} + \frac{y^2 h}{4} + \frac{y h^2}{16} \right]_0^{-h/4} = -2 \frac{M^2}{EI^2} \left(-\frac{h^3}{4^3 3} \right) = \frac{1}{96} \frac{M^2 h^3}{EI^2} = \frac{M^2}{EI} \quad (5.20)$$

5.1.2 Hnací síla trhliny

Hodnotu J-integrálu je možné ověřit s ekvivalentním výpočtem hnací síly trhliny $\mathcal{G}$ (3.12), (5.16). Hodnotu deformační energie lze vypočítat z rovnice (5.17). Hodnota pootočení φ vychází z metody jednotkových sil. Kvůli symetrii je nutné výraz vynásobit dvěma.

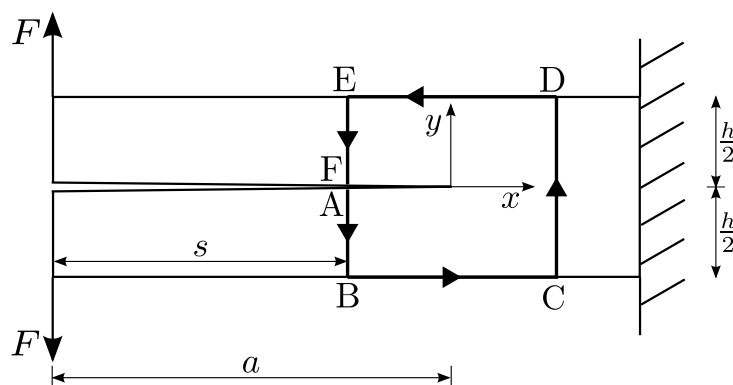
$$\varphi = \frac{Ma}{EI} \quad (5.21)$$

$$\mathcal{G} = \frac{dU}{da} = \frac{d \frac{1}{2} M \varphi}{da} = \frac{d \left(\frac{1}{2} M \frac{Ma}{EI} \right) 2}{da} = \frac{M^2}{EI} \quad (5.22)$$

5.1.3 Faktor intenzity napětí

Další kontrolou může být porovnání výsledku faktoru intenzity napětí (3.30) s tabulkovou hodnotou [2, kap. 3].

$$K_I = \sqrt{\mathcal{G} E} = \sqrt{\frac{M^2}{EI}} E = \frac{M}{\sqrt{I}} = \frac{M}{\sqrt{\frac{h^3}{96}}} = \frac{4\sqrt{6}M}{h^{3/2}} \quad (5.23)$$



Obr. 5.2: Konstrukce namáhaná symetricky dvojicí sil

5.2 Příklad 2

5.2.1 J-integrál

Ve druhém příkladu dvojité konzoly namáhané koncovými silami je potřeba opět rozebrat jednotlivé veličiny z rovnice (5.15) na všech částech cesty A-F (Obr. 5.2).

Na cestě BC je J-integrál nulový, protože $dy = 0$ a normála má hodnotu $n = (0, -1)$. Vektor povrchového napětí má složky $t_x = 0$, $\sigma_x + (-1)\sigma_{xy}$ a $t_y = 0$, $\sigma_{xy} + (-1)\sigma_y$. Na této cestě na kraji tělesa ale nevznikají žádná napětí ve směru y ani smyková napětí. Díky $\sigma_y = 0$ a $\sigma_{xy} = 0$ je i $t_x = 0$ a $t_y = 0$.

Velmi podobné řešení připadá také cestě DE, která je s cestou BC symetrická podle osy x . U cesty DE je odlišná pouze normála ve tvaru $n = (0, 1)$, což ale na výsledné nulové hodnotě J-integrálu nic nemění.

Na cestě CD nevznikají žádná napětí, proto jsou nulové také složky vektoru povrchového napětí t_x a t_y , a tím pádem i výsledná hodnota J-integrálu v této části cesty má hodnotu nula.

Na cestě AB a EF nabývá normála hodnoty $n = (-1, 0)$. Z toho je možné odvodit složky vektoru povrchového napětí $t_x = (-1)\sigma_x + 0\sigma_{xy}$ a $t_y = (-1)\sigma_{xy} + 0\sigma_y$. Protože je konstrukce velmi podobná prvnímu příkladu, i tady lze pro výpočet zvolit pouze čtvrtinu výšky konstrukce. Tedy polovinu cesty AB nebo EF a výpočet J-integrálu vynásobit čtyřmi. Integrace podle ds se nahradí $-dy$ (5.11).

Z rovnice (5.15) lze tedy, po dosazení výše odvozených vztahů pro t_x , t_y a ds , zapsat konkrétní rovnici J-integrálu pouze pro úsek EF v mezích od $h/4$ do 0 podle směru cesty J-integrálu. Poslední integrace má meze od $h/2$ do 0, protože smyk je

řešen po celé výšce uvažovaného prutu. Integrál se tedy započítá jen dvakrát.

$$J = \underbrace{4 \int_{h/4}^0 \frac{\sigma_x^2}{2E} dy - 4 \int_{h/4}^0 (-\sigma_x) \varepsilon_x(-dy)}_{J_1} - \underbrace{2 \int_{h/2}^0 (-\sigma_{xy}) \varphi(-dy)}_{J_2} \quad (5.24)$$

První dva členy integrované v mezích od $h/4$ do 0 podle dy se sloučí do jednoho integrálu J_1 a provede se dosazení z rovnic (5.3) a (5.5)

$$J_1 = 4 \int_{h/4}^0 \left(\frac{\sigma_x^2}{2E} - \sigma_x \frac{\sigma_x}{E} \right) dy = -4 \int_{h/4}^0 \frac{\sigma_x^2}{2E} dy = -\frac{2}{E} \int_{h/4}^0 \left(\frac{M_y \Delta y}{I} \right)^2 dy \quad (5.25)$$

Moment na cestě EF se vyjádří jako působící síla F na rameni s a vzdálenost od neutrální osy jako $\Delta y = y + h/4$. Poté se provede integrace a dosazení z rovnice (5.6).

$$M = Fs \quad (5.26)$$

$$J_1 = -\frac{2F^2 s^2}{EI^2} \left[\frac{y^3}{3} + \frac{y^2 h}{4} + \frac{y h^2}{16} \right]_{h/4}^0 = -\frac{2F^2 s^2}{EI^2} \left(-\frac{h^3}{4^3 3} \right) = \frac{F^2 s^2}{EI} \quad (5.27)$$

Ve druhém integrálu je rozepsáno pootočení φ v závislosti na vzdálenosti s odvozené ze silové metody. Pro dosazení za integrál ze smykového napětí σ_{xy} je použita rovnice (5.10). Zatížení tvoří síla F v záporném směru.

$$\varphi(s) = \frac{F(a^2 - s^2)}{2EI} \quad (5.28)$$

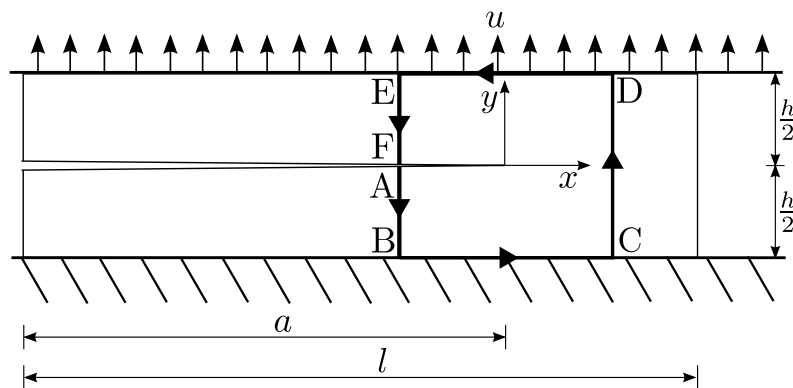
$$J_2 = 2\varphi \int_{h/2}^0 \sigma_{xy} dy = 2 \frac{F(a^2 - s^2)}{2EI} (-F) = \frac{F^2(s^2 - a^2)}{EI} = \frac{F^2 s^2}{EI} - \frac{F^2 a^2}{EI} \quad (5.29)$$

Po sečtení integrálů J_1 a J_2 je výsledkem výpočtu celková hodnota J-integrálu na dané konstrukci.

$$J = J_1 - J_2 = \frac{F^2 s^2}{EI} - \frac{F^2 s^2}{EI} + \frac{F^2 a^2}{EI} = \frac{F^2 a^2}{EI} \quad (5.30)$$

5.2.2 Hnací síla trhlíny

Hodnotu J-integrálu je možné ověřit s ekvivalentním výpočtem hnací síly trhlíny $\mathcal{G}$ (3.12), (5.16). Deformační energii lze spočítat z rovnice (5.17). Hodnota posunutí



Obr. 5.3: Konstrukce namáhaná konstantním posunem

u_y vychází ze silové metody. Symetrie konstrukce se zajistí vynásobením výpočtu dvěma.

$$u_y = \frac{F a^3}{3EI} \quad (5.31)$$

$$\mathcal{G} = \frac{dU}{da} = \frac{d\left(\frac{1}{2} F u_y\right)}{da} = \frac{d\left(\frac{1}{2} F \frac{F a^3}{3EI}\right)}{da} = \frac{F^2 a^2}{EI} \quad (5.32)$$

5.2.3 Faktor intenzity napětí

Dále je možné provést kontrolní výpočet faktoru intenzity napětí (3.30) a jeho porovnání s tabulkovou hodnotou [2, kap. 3].

$$K_I = \sqrt{\mathcal{G}E} = \sqrt{\frac{F^2 a^2}{EI} E} = \frac{F a}{\sqrt{I}} = \frac{F a}{\sqrt{1/12(h/2)^3}} = \frac{4\sqrt{6} F a}{h^{3/2}} \quad (5.33)$$

5.3 Příklad 3

5.3.1 J-integrál

Třetí příklad se zabývá výpočtem J-integrálu pro nekonečně dlouhou konstrukci s trhlinou namáhanou posunem (Obr. 5.3). V tomto případě ovšem není konstrukce uvažovaná jako prut, takže je nutné znovu vycházet z rovnice (5.1). Je ale možné využít modifikaci dříve odvozené rovnice pro prutovou konstrukci (5.4). Rozdíl teď bude v uvažování nenulového přetvoření ε_y a hustota deformační energie bude mít tvar

$$W = \int_0^{\varepsilon_y} E k dk = \left[\frac{E k^2}{2} \right]_0^{\varepsilon_y} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_y^2}{E} \quad (5.34)$$

Opět je potřeba veličiny z rovnice (5.1) rozebrat pro všechny díly cesty A-F.

Na cestě BC je J-integrál nulový. Nulovou složkou je $y = 0$ i $t_x = 0$. Jedinou nenulovou složkou vektoru povrchového napětí je t_y . Ta je ovšem v součinu s derivací deformace $u_{y,x}$, respektive $\frac{\partial u_y}{\partial x}$, která má na této části cesty hodnotu 0.

Velmi podobné řešení připadá také cestě DE, která je s cestou BC symetrická podle osy x . U cesty DE je odlišná jen hodnota normály, což ale na hodnotě J-integrálu nic nemění.

Na cestách AB a EF nevznikají vůbec žádná napětí, a proto je hodnota J-integrálu na obou cestách nulová.

Při výpočtu J-integrálu pro cestu CD se rozepíše složky vektoru povrchového napětí v závislosti na normále, která má na této cestě hodnotu $n = (1, 0)$, jako $t_x = 1 \sigma_x + 0 \sigma_{xy}$ a $t_y = 1 \sigma_{xy} + 0 \sigma_y$. Žádná smyková napětí ani napětí ve směru x v této části konstrukce ale nevznikají. Kvůli $\sigma_{xy} = 0$ a $\sigma_x = 0$ tedy platí, že $t_x = 0$ a $t_y = 0$.

Po dosazení všech odvozených vztahů do rovnice (5.1) lze zapsat konkrétní rovnici pro úsek CD v mezích od 0 do h podle směru cesty J-integrálu.

$$J = \int_0^h \frac{\sigma_y^2}{2E} dy \quad (5.35)$$

Napětí σ_y se rozepíše podle Hookova zákona (5.3), kde je přetvoření závislé na posunu u_y po výšce h

$$\varepsilon = \frac{u_y}{h} \quad (5.36)$$

Po dosazení a integraci vyjde výsledný J-integrál pro tento příklad.

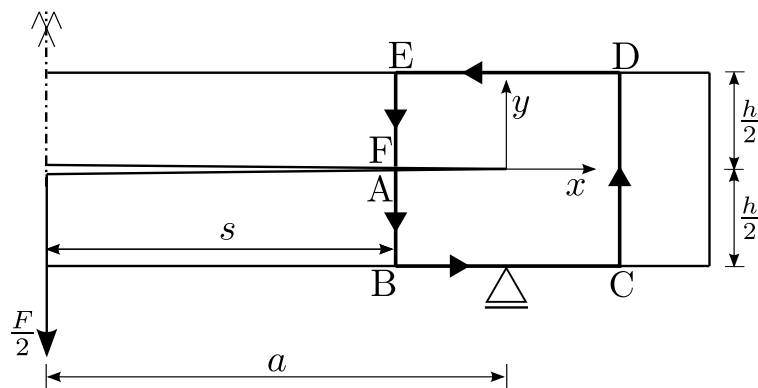
$$J = \int_0^h \frac{1}{2E} \left(\frac{Eu_y}{h} \right)^2 dy = \frac{Eu_y^2}{2h^2} \int_0^h dy = \frac{Eu_y^2}{2h^2} [y]_0^h = \frac{Eu_y^2}{2h} \quad (5.37)$$

5.3.2 Hnací síla trhliny

Ověření správnosti J-integrálu lze i zde provést srovnáním jeho hodnoty s výpočtem hnací síly trhliny $\mathcal{G}$ (5.16). V tomto případě ovšem nelze deformační energii U spočítat jako v předchozích příkladech a je potřeba ji vyřešit jako integrál hustoty deformační energie W přes objem tělesa V .

$$U = \int_V W dV \quad (5.38)$$

Hustota deformační energie byla pro tento příklad stanovena už v rovnici (5.34). Díky tloušťce konstrukce $t = 1$ lze integrál přes objem rozepsat jako dvojný integrál. Zprvė po délce od a do l , kde l je celá délka konstrukce. Zadruhé po výšce od 0



Obr. 5.4: Konstrukce namáhaná silou

do h . Výpočet napětí vychází opět z Hookova zákona (5.3) a rovnice (5.36).

$$U = \int_a^l \int_0^h \frac{1}{2} \frac{\sigma_y^2}{E} dx dy = \frac{1}{2} \frac{\sigma_y^2}{E} h(l-a) = \frac{1}{2} \frac{u_y^2 E^2}{h^2 E} h(l-a) = \frac{u_y^2 E(l-a)}{2h} \quad (5.39)$$

Jelikož je konstrukce zatěžovaná konstantním posunem, je pro výpočet hnací síly trhliny potřeba vycházet z rovnice (3.13)

$$\mathcal{G} = -\frac{dU}{da} = -\frac{d \frac{u_y^2 E(l-a)}{2h}}{da} = -\frac{u_y^2 E(-1)}{2h} = \frac{u_y^2 E}{2h} \quad (5.40)$$

5.3.3 Faktor intenzity napětí

Výpočet faktoru intenzity napětí se provede podle rovnice (3.30)

$$K_I = \sqrt{\mathcal{G}E} = \sqrt{\frac{Eu_y^2}{2h}E} = \frac{u_y}{\sqrt{2h}} = \frac{u_y \sqrt{2h}}{2h} \quad (5.41)$$

5.4 Příklad 4

5.4.1 J-integrál

Poslední příklad se zabývá konstrukcí symetrickou podle osy y , která je namáhaná osamělou silou $F/2$ (Obr. 5.4). Jednotlivé veličiny odvozované pro cestu A-F pochází z rovnice (5.15).

Na cestě BC má J-integrál nulovou hodnotu. Jednak díky $dy = 0$, a také protože normála má hodnotu $n = (0, -1)$, tudíž vektor povrchového napětí má složky $t_x = 0 \sigma_x + (-1) \sigma_{xy}$ a $t_y = 0 \sigma_{xy} + (-1) \sigma_y$. Po kraji tělesa ovšem žádná napětí ve směru y ani smyková napětí nevznikají. Díky $\sigma_y = 0$ a $\sigma_{xy} = 0$ je tedy i $t_x = 0$ a $t_y = 0$.

Velmi podobně je řešena i cesta DE, protože je s cestou BC symetrická podle osy x . Cesta DE se liší jen v hodnotě normály $n = (0, 1)$, ale to na výsledku nic nemění a J-integrál zde bude mít také hodnotu nula.

Na cestě CD žádná napětí nevznikají, takže jsou nulové i složky vektoru povrchového napětí t_x a t_y . To znamená nulovou hodnotu i celého J-integrálu na této cestě.

Na cestě AB a EF má normála hodnoty $n = (-1, 0)$, a tedy složky vektoru povrchového napětí ve tvaru $t_x = (-1) \sigma_x + 0 \sigma_{xy}$ a $t_y = (-1) \sigma_{xy} + 0 \sigma_y$. Na rozdíl od cesty AB na cestě EF nevzniká smykové napětí σ_{xy} , což znamená, že vektor povrchového napětí $t_y = 0$, a pro cestu EF není potřeba poslední člen J-integrálu z rovnice (5.15) počítat.

Předpoklad pro výpočet cesty EF je takový, že horní polovina konstrukce působí jako konzola, která je ukotvená v místě osy symetrie konstrukce. Konzola je namáhána koncovým momentem, který je způsoben pootočením spodní části konstrukce díky síle $F/2$. Integrace cesty EF se počítá v mezích od $h/2$ do 0 podle ds , což se nahradí jako $-dy$ (5.11). Odvozené vztahy pro t_x a ds lze zapsat do rovnice (5.15).

$$J_{EF} = \int_{h/2}^0 \frac{\sigma_x^2}{2E} dy - \int_{h/2}^0 (-\sigma_x) \varepsilon_x (-dy) \quad (5.42)$$

Do integrálu se dosadí vztah pro přetvoření ε_x z rovnice (5.3) a pro napětí σ_x z rovnice (5.5).

$$J_{EF} = \int_{h/2}^0 \left(\frac{\sigma_x^2}{2E} - \sigma_x \frac{\sigma_x}{E} \right) dy = - \int_{h/2}^0 \frac{\sigma_x^2}{2E} dy = \frac{-1}{2E} \int_{h/2}^0 \left(\frac{M \Delta y}{I_y} \right)^2 dy \quad (5.43)$$

Moment na konci uvažované konzoly je způsoben spodní konstrukcí, kde působí zatížení silou $F/2$ na rameni a .

$$M = \frac{F}{2} a \quad (5.44)$$

Vzdálenost od neutrálné osy je $\Delta y = y - h/4$. Po integraci se provede dosazení z rovnice (5.6) a úprava celého výrazu následovně

$$J_{EF} = \frac{-1}{2E} \int_{h/2}^0 \left(\frac{\frac{F}{2} a (y - \frac{h}{4})}{I} \right)^2 dy \quad (5.45)$$

$$= - \frac{F^2 a^2}{8EI^2} \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^2 h}{4} + \frac{y h^2}{16} \right]_{h/2}^0 \quad (5.46)$$

$$= - \frac{F^2 a^2}{8EI^2} \left(- \frac{h^3}{4^3 3} \right) \quad (5.47)$$

$$= \frac{F^2 a^2}{8EI} \quad (5.48)$$

Pro výpočet cesty AB se předpokládá, že spodní část konstrukce je uložena jako konzola s vetknutím nad podporou. Konzola je namáhána kromě síly $F/2$ také pootočením φ_2 ve vetknutí. J-integrál na cestě AB se počítá v mezích od 0 do $-h/2$ podle ds , což lze nahradit jako $-dy$ (5.11). Odvozené vztahy pro t_x , t_y a ds se dosadí do rovnice (5.15).

$$J_{AB} = \underbrace{\int_0^{-h/2} \frac{\sigma_x^2}{2E} dy - \int_0^{-h/2} (-\sigma_x) \varepsilon_x (-dy)}_{J_1} - \underbrace{\int_0^{-h/2} (-\sigma_{xy}) \varphi (-dy)}_{J_2} \quad (5.49)$$

Integrály pod označením J_1 se sloučí do jednoho po dosazení vztahu pro přetvoření ε_x (5.3). Napětí σ_x se vypočítá z rovnice (5.5).

$$J_1 = \int_0^{-h/2} \left(\frac{\sigma_x^2}{2E} - \sigma_x \frac{\sigma_x}{E} \right) dy = - \int_0^{-h/2} \frac{\sigma_x^2}{2E} dy = \frac{-1}{2E} \int_0^{-h/2} \left(\frac{M \Delta y}{I_y} \right)^2 dy \quad (5.50)$$

Moment na cestě AB je způsoben silou $F/2$ na rameni s .

$$M = \frac{F}{2} s \quad (5.51)$$

Vzdálenost od neutrálné osy je $\Delta y = y + h/4$. Výraz se integruje a provede se matematická úprava a dosazení z rovnice (5.6).

$$J_1 = \frac{-1}{2E} \int_0^{-h/2} \left(\frac{F}{2} s \left(y + \frac{h}{4} \right) \right)^2 dy \quad (5.52)$$

$$= - \frac{F^2 s^2}{8EI^2} \left[\frac{y^3}{3} + \frac{y^2 h}{4} + \frac{y h^2}{16} \right]_0^{-h/2} \quad (5.53)$$

$$= - \frac{F^2 s^2}{8EI^2} \left(- \frac{h^3}{4^3 3} \right) \quad (5.54)$$

$$= \frac{F^2 s^2}{8EI} \quad (5.55)$$

Ve druhém integrálu J_2 je potřeba znát pootočení φ . To se skládá ze dvou částí. První pootočení φ_1 způsobuje přímo síla $F/2$ a jeho vztah je odvozen pomocí metody jednotkových sil.

$$\varphi_1(s) = \frac{F(a^2 - s^2)}{4EI} \quad (5.56)$$

Druhé pootočení φ_2 vzniká natočením celé spodní konstrukce v podpoře a je stejné jako natočení horní konzoly zatížené momentem M , který způsobuje síla $F/2$ na rameni a . Pomocí tabulek stavební mechaniky se získá vztah

$$\varphi_2 = \frac{Ma}{EI} = \frac{Fa^2}{2EI} \quad (5.57)$$

Celkové pootočení φ je součtem dílčích pootočení φ_1 a φ_2 .

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{F(a^2 - s^2)}{4EI} + \frac{Fa^2}{2EI} = \frac{F(3a^2 - s^2)}{4EI} \quad (5.58)$$

Integrál z napětí σ_{xy} vychází z rovnice (5.10). Zatížení je tvořeno silou $F/2$ v záporném směru.

$$J_2 = \varphi \int_0^{-h/2} \sigma_{xy} dy = \frac{F(3a^2 - s^2)}{4EI} \left(-\frac{F}{2} \right) = \frac{F^2 s^2}{8EI} - \frac{3F^2 a^2}{8EI} \quad (5.59)$$

Po odečtení integrálů J_1 a J_2 se získá výsledná hodnota J-integrálu na cestě AB.

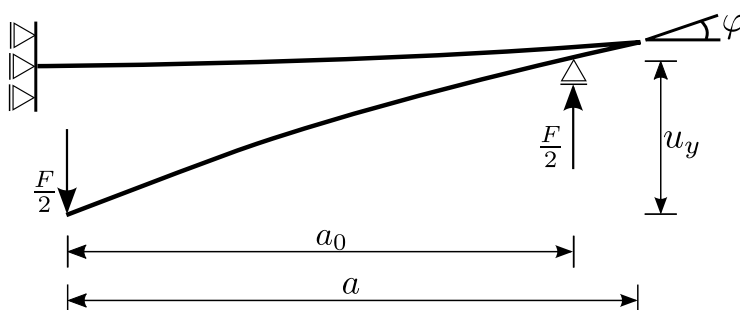
$$J_{AB} = J_1 - J_2 = \frac{F^2 s^2}{8EI} - \frac{F^2 s^2}{8EI} + \frac{3F^2 a^2}{8EI} = \frac{3F^2 a^2}{8EI} \quad (5.60)$$

Pro stanovení výsledné hodnoty J-integrálu na celé konstrukci stačí sečíst spočtené integrály J_{EF} a J_{AB} .

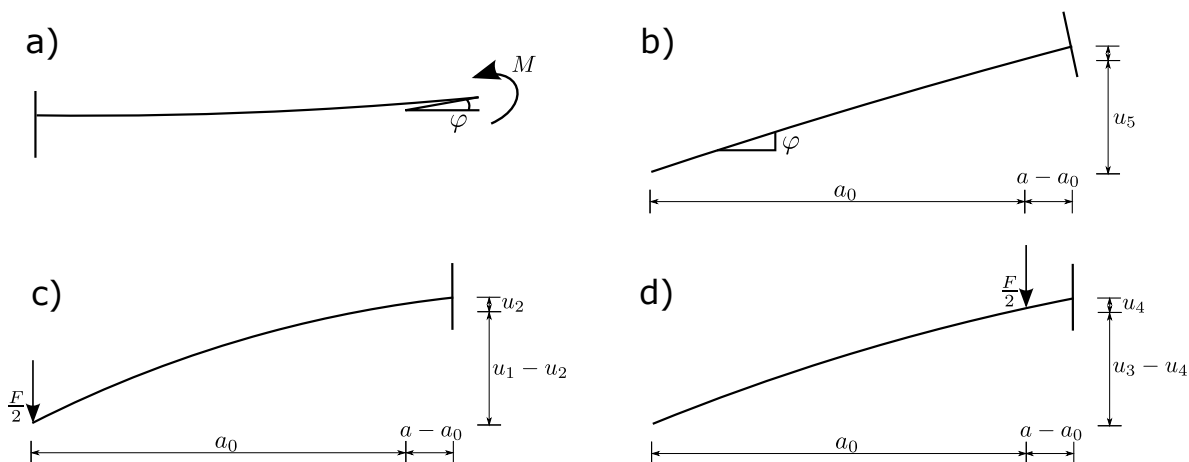
$$J = J_{EF} + J_{AB} = \frac{F^2 a^2}{8EI} + \frac{3F^2 a^2}{8EI} = \frac{F^2 a^2}{4EI} \quad (5.61)$$

5.4.2 Hnací síla trhliny

Výsledná hodnota J-integrálu se ověří ekvivalentním výpočtem hnací síly trhliny $\mathcal{G}$ (5.16). K výpočtu je nutné znát průhyb konstrukce u_y (Obr. 5.5) v závislosti na délce trhliny a v bodě $a = a_0$. Ten se však v tomto příkladu skládá z několika složek. Spodní část konstrukce je prohýbaná působením síly $F/2$ na volném konci konzoly. V místě působení síly vzniká průhyb u_1 a v místě podpory u_2 (Obr. 5.6c). Průhyb u_1 lze vyčíst z tabulek a průhyb u_2 byl odvozen metodou jednotkových sil. Dalším zatížením, které na spodní konstrukci působí, je posouvající síla v místě podpory, která je rovna podporové reakci s hodnotou $F/2$. Od této síly vzniká průhyb na volném konci konzoly u_3 a v místě podpory u_4 (Obr. 5.6d). Oba průhyby



Obr. 5.5: Průhyb konstrukce



Obr. 5.6: Dílčí průhyby na konstrukci

vychází z tabulek ze vztahu pro průhyb konzoly namáhané koncovou silou.

$$u_1 = \frac{Fa^3}{6EI} \quad (5.62)$$

$$u_2 = \frac{F}{12EI}(2a^3 - 3a^2a_0 + a_0^3) \quad (5.63)$$

$$u_3 = \frac{F(a - a_0)^3}{6EI} \quad (5.64)$$

$$u_4 = \frac{F(a - a_0)^2}{12EI}(3a - (a - a_0)) \quad (5.65)$$

Průhyb u_y se je ještě potřeba doplnit o průhyb z pootočení na konci horní části konstrukce u_5 (Obr. 5.6a). Pootočení φ tam způsobuje moment M , který vzniká od síly $F/2$ působící na rameni a_0 . Vzorec pro pootočení od momentu na konci konzoly je možné najít v tabulkách stavební mechaniky.

$$\varphi = \frac{Ma}{EI} = \frac{Fa_0a}{2EI} \quad (5.66)$$

Průhyb u_5 se spočítá jako pootočení φ na délce a_0 (Obr. 5.6b).

$$u_5 = \varphi a_0 = \frac{Fa a_0^2}{2EI} \quad (5.67)$$

Celkový průhyb u_y se spočítá z dílčích průhybů jako

$$u_y = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 \quad (5.68)$$

Po dosazení všech pěti dílčích průhybů a provedení matematických úprav celého výrazu vyjde výsledný průhyb na konstrukci

$$u_y = \frac{F(3aa_0^2 - a_0^3)}{3EI} \quad (5.69)$$

Nyní už lze použít výpočet hnací síly trhliny podle rovnice (3.12). Hodnotu deformační energie lze vypočítat z rovnice (5.17), kde se jako zatížení dosadí působící síla $F/2$.

$$\mathcal{G} = \frac{dU}{da} = \frac{d\left(\frac{1}{2}Fu_y\right)}{da} = \frac{d\left(\frac{1}{2}\frac{F}{2}\frac{F(3aa_0^2-a_0^3)}{3EI}\right)}{da} = \frac{F^2a_0^2}{4EI} \quad (5.70)$$

Ve výsledku sice figuruje délka trhliny a_0 , ale jelikož ve výpočtu J-integrálu byla původní délka trhliny značena a , je výsledek shodný.

5.4.3 Faktor intenzity napětí

Faktor intenzity napětí lze vypočíst podle rovnice (3.30)

$$K_I = \sqrt{\mathcal{G}E} = \sqrt{\frac{F^2a^2}{4EI}E} = \frac{Fa}{2\sqrt{I}} = \frac{Fa}{2\sqrt{1/12(h/2)^3}} = \frac{2\sqrt{6}Fa}{h^{3/2}} \quad (5.71)$$

6 OVĚŘENÍ VÝSLEDKŮ V PROGRAMU ANSYS

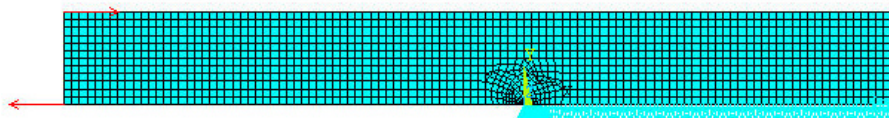
Následující kapitola se zabývá porovnáním analytických výpočtů z předchozí kapitoly s výsledky z modelů vytvořených v programu ANSYS, což je program pro analýzu konstrukcí, který využívá metodu konečných prvků.

Pro správný výpočet J-integrálu je potřeba se při modelování soustředit na několik detailů. Například pro vytvoření sítě je nutné použít prvek PLANE 183, protože z hlediska přesnosti počítá J-integrál nejlépe. Tento prvek existuje ve čtyřúhelníkové a v trojúhelníkové variantě, v závislosti na čemž má osm nebo šest uzlů. Uzly se nachází ve vrcholech úhelníků a také po jednom uzlu v každé straně. Dalším důležitým příkazem je KSCON. Ten označuje specifický bod, kolem kterého se bude kvůli přesnějším výpočtům zhušťovat síť. V okolí tohoto bodu se budou prvky řadit do sítě v soustředných kružnicích. Trojúhelníkové prvky vzniknou přímo u kořene trhliny, tedy u specifického bodu. V parametrech příkazu KSCON lze zvolit kromě čísla specifického bodu také počet dílů, na které má být rozdělen obvodový úhel bodu, dále poloměr první řady prvků a počet soustředných kružnic.

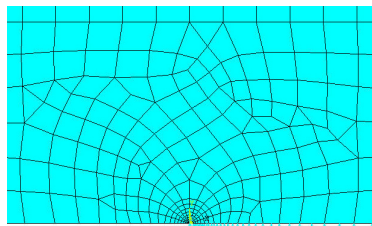
Samotný J-integrál ANSYS spočítá pomocí příkazu CINT. Ten se dělí na několik částí. V kroku NEW se iniciuje nový výpočet s identifikačním číslem, krok TYPE definuje typ výpočtu, pro výpočet J-integrálu se volí JINT. V kroku CTNC se určí kořen trhliny. Dále je možné zapnout symterii výpočtu na půlené konstrukci, k tomu slouží krok SYMM. Počet kontur, na kterých je J-integrál počítán, je definován v kroku NCON a v kroku NORMAL se určí normála k rovině trhliny.

6.1 Příklad 1

První příklad lze díky jeho symetrii podle trhliny vymodelovat v programu ANSYS pouze jako polovinu konstrukce. Pro vznik momentu M na konci konzoly je zvoleno zatížení na volném konci dvěma silami $F = M/(h/2)$. V místě, kde je konstrukce přerušena, je použito podepření ve směru y , které je v krajním bodě doplněno o podporu ve směru x (Obr. 6.1). U kořene trhliny je síť zhuštěna (Obr. 6.2). Vstupní soubor pro výpočet je uveden v příloze (Příloha A).



Obr. 6.1: Model horní poloviny konstrukce zatížené koncovým momentem



Obr. 6.2: Detail zhuštění sítě u kořene trhliny

Ve výpočtech jsou použity konstantní průřezové a materiálové charakteristiky. Modul pružnosti $E = 1$ GPa, Poissonovo číslo $\nu = 0,2$ a výška konstrukce $h = 2$ m. Zatěžovací moment má hodnotu $M = 1$ kNm.

V tabulce (Tab. 6.1) jsou shrnuty analytické i programem spočtené hodnoty pro konstrukce s různými poměry výšky h a délky trhliny a . Výsledky potvrzují to, co je zřejmé z rovnice (5.1). Tedy že výsledná hodnota J-integrálů nezávisí na rozměrech konstrukce. Výsledky byly velmi přesné jak na krátkých konzolách, tak i na prutových konstrukcích.

a/h	J (analyticky)	J (ANSYS)	%
1	0,012	0,012	0,00
25	0,012	0,012	0,00
50	0,012	0,012	0,00
100	0,012	0,012	0,00
150	0,012	0,012	0,00

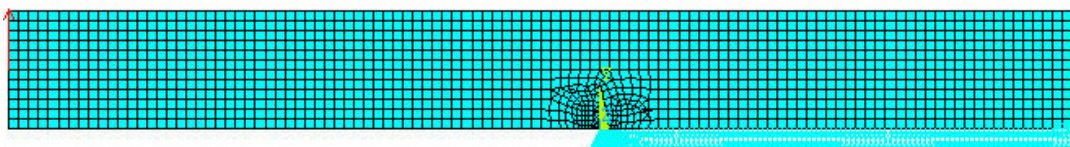
Tab. 6.1: Porovnání výsledků pro první příklad

6.2 Příklad 2

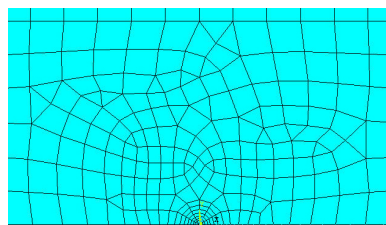
Druhý příklad je v programu ANSYS také namodelován pouze jako jeho horní polovina, což je možné díky symetrii konstrukce podle trhliny. Model je zatížený silou F a v místě rozdělení konstrukce je podepřen ve směru y , v koncovém bodě tohoto podepření na kraji tělesa pak ještě ve směru x (Obr. 6.3). U kořene trhliny je síť zhuštěna (Obr. 6.4). Vstupní soubor k výpočtu příkladu je přiložen na konci práce (Příloha B).

Pro porovnání výsledků se použijí výpočty s konstantními materiálovými a průřezovými charakteristikami. Modul pružnosti $E = 1$ GPa, Poissonovo číslo $\nu = 0,2$ a výška konstrukce $h = 2$ m. Model je zatěžován silou $F = 1$ kN.

V tabulce (Tab. 6.2) jsou shrnuty analytické i programem ANSYS spočtené hodnoty pro konstrukce s různými poměry výšky h a délky trhliny a . Je zřejmé, že čím je



Obr. 6.3: Model horní poloviny konstrukce namáhané osamělým břemenem



Obr. 6.4: Detail zhuštění sítě u kořene trhliny

konstrukce štíhlejší, tím jsou výsledky přesnější, jelikož analytické odvození rovnice (5.30) uvažovalo prutovou konstrukci.

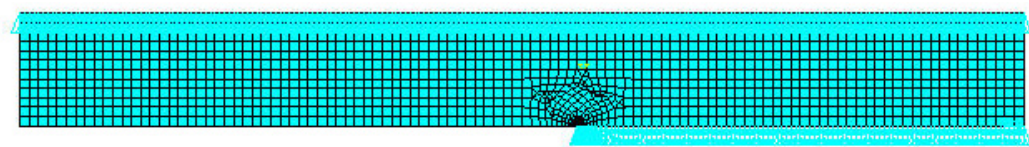
a/h	J (analyticky)	J (ANSYS)	%
1	0,048	0,086	44,19
25	30,00	30,79	2,57
50	120,00	121,60	1,32
100	480,00	482,90	0,60
150	1080,00	1084,30	0,40

Tab. 6.2: Porovnání výsledků pro druhý příklad

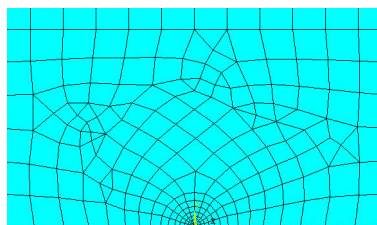
6.3 Příklad 3

Také pro třetí příklad je možné použít v programu ANSYS model pouze horní poloviny konstrukce, protože je symetrická podle trhliny. Model je zatížený posunem u a v místě rozdělení konstrukce je podepřen ve směru y . Omezení posunů konstrukce ve směru x je zajištěno okrajovou podmínkou na kraji tělesa v místě rozdělení konstrukce trhlinou (Obr. 6.5). U kořene trhliny je síť zhuštěna (Obr. 6.6). Vstupní soubor pro výpočet příkladu v programu ANSYS lze nalézt v příloze (Příloha C).

K porovnání výsledků jsou použity výpočty s konstantními materiálovými a průřezovými charakteristikami. Modul pružnosti $E = 1$ GPa, Poissonovo číslo $\nu = 0,2$ a délka trhliny $a = 100$ m. Model se zatěžuje konstantním posunem $u = 0,001$ m.



Obr. 6.5: Model horní poloviny konstrukce namáhané posunem



Obr. 6.6: Detail zhuštění sítě u kořene trhliny

V tabulce (Tab. 6.3) jsou porovnány analytické výpočty podle rovnice (5.37) s programem spočtenými hodnotami pro konstrukce s různými poměry výšky h a délky trhliny a . Nejpřesnější jsou výsledky na delší konstrukci, jak předpokládalo zadání příkladu.

6.4 Příklad 4

Čtvrtý příklad je v programu ANSYS vymodelován podle schématu zadání (Obr. 5.4), tedy jen jako polovina konstrukce, která je symetrická podle osy y . V místě tohoto rozdělení je model podepřen ve směru x . Další okrajovou podmínku tvoří bodová podpora na dolním povrchu konstrukce v místě pod kořenem trhliny (Obr. 6.7). U kořene trhliny je síť zhuštěna v soustředných kružnicích (Obr. 6.8). Vstupní soubor sloužící k výpočtu tohoto příkladu v programu ANSYS se nachází v příloze (Příloha D).

Ke srovnání výsledků jsou ve výpočtech použity konstantní materiálové a průře-

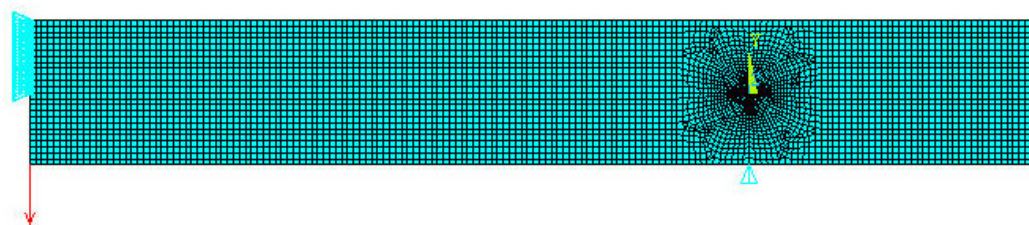
a/h	J (analyticky)	J (ANSYS)	%
1	5,00	5,99	16,53
2	10,00	9,99	0,10
4	20,00	19,99	0,05
10	50,00	49,99	0,02
25	125,00	124,99	0,00

Tab. 6.3: Porovnání výsledků pro třetí příklad

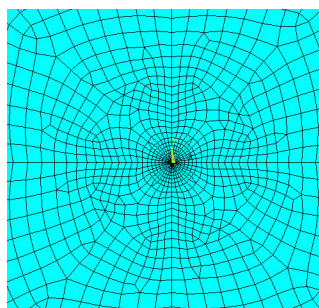
a/h	J (analyticky)	J (ANSYS)	%
1	0,01	0,0125	4,08
25	7,50	7,513	0,17
50	30,00	30,026	0,09
100	120,00	120,07	0,06
150	270,00	270,09	0,03

Tab. 6.4: Porovnání výsledků pro čtvrtý příklad

zové charakteristiky. Modul pružnosti $E = 1$ GPa, Poissonovo číslo $\nu = 0,2$ a délka trhliny $a = 100$ m. Model je zatížen silou $F/2$, přičemž $F = 1$ kN.



Obr. 6.7: Model pravé poloviny konstrukce namáhané silou na volném konci



Obr. 6.8: Detail zhuštění sítě u kořene trhliny

Tabulka (Tab. 6.4) srovnává analytické a programem spočtené hodnoty pro konstrukce s různými poměry výšky h a délky trhliny a . Nejmenší rozdíl ve výpočtech analytických a programových vzniká na delších a tedy štíhlejších konstrukcích, jelikož odvození rovnice J-integrálu (5.61) předpokládalo prutovou konstrukci.

7 ZÁVĚR

Tato bakalářská práce se zabývá významem a použitím J-integrálu při šíření trhliny tělesem.

V teoretické části byly vysvětleny základy lomové mechaniky, především rozložení napětí v tělese s defektem. Součástí práce jsou také definice faktoru intenzity napětí a hnací síly trhliny. Pomocí těchto veličin lze určit, zda se trhlina v tělese bude nebo nebude šířit. V práci je také odvozen důkaz rovnocennosti těchto dvou přístupů a jejich vzájemný vztah.

Teorie J-integrálu byla nejprve vysvětlena z původního vztahu, který definoval James Rice. Poté byly provedeny důkazy o nulové hodnotě J-integrálu po uzavřené cestě a o tom, že J-integrál je nezávislý na zvolené cestě.

Následně byl J-integrál analyticky vypočten na několika konkrétních konstrukcích. Součástí těchto odvození bylo podrobné vysvětlení a rozepsání jednotlivých veličin rovnice J-integrálu a jejich rozbor na zvolené cestě. Výsledné hodnoty J-integrálu byly srovnány s ekvivalentním výpočtem hnací síly trhliny, který vychází z derivace deformační energie konstrukce podle délky trhliny. Dále byl proveden výpočet faktoru intenzity napětí, který bylo možné u některých příkladů porovnat také s tabulkovou hodnotou.

V závěru práce byly výsledky ověřeny na modelech konstrukcí v programu ANSYS. Každá konstrukce byla v programu vypočítaná několikrát pro různé rozměry. Tyto výsledky z programu se pak porovnály s předchozími analytickými výpočty. Závěrem lze říct, že na štíhlejších konstrukcích vycházely výsledky s minimálními chybami. To proto, že analytická odvození předpokládala většinou prutové konstrukce.

LITERATURA

- [1] BAZANT, Z. – PLANAS, J. *Fracture and Size Effect in Concrete and Other Quasibrittle Materials*. New Directions in Civil Engineering. Taylor & Francis, 1997. ISBN 9780849382840.
- [2] JIRÁSEK, M. – ZEMAN, J. *Přetváření a porušování materiálů: dotvarování, plasticita, lom a poškození*. České vysoké učení technické, 2012. ISBN 9788001050644.
- [3] RICE, J. R. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*. 1968, 35, s. 379 – 386.

SEZNAM SYMBOLŮ, VELIČIN A ZKRATEK

a	délka trhliny
s	vzdálenost volného konce konstrukce a cesty J-integrálu
h	výška konstrukce
t	tloušťka konstrukce
l	délka konstrukce
I	moment setrvačnosti průřezu
Δy	vzdálenost od neutrálné osy
E	Youngův modul pružnosti
ν	Poissonovo číslo
K_I	faktor intenzity napětí
$\mathcal{G}$	hnací síla trhliny
U	deformační energie
W	hustota deformační energie
n	normálový vektor
t_i	vektor povrchového napětí
σ_x	normálové napětí ve směru x
σ_y	normálové napětí ve směru y
σ_{xy}	smykové napětí v rovině xy
σ_∞	zatížení vzdáleným napětím
M	zatěžovací moment
F	zatěžovací síla
u	posunutí
ε_x	přetvoření ve směru x
φ	pootočení

Δx přírůstek veličiny x

r vzdálenost od kořene trhliny

SEZNAM PŘÍLOH

A	Příklad 1 v programu ANSYS	37
B	Příklad 2 v programu ANSYS	40
C	Příklad 3 v programu ANSYS	43
D	Příklad 4 v programu ANSYS	46

A PŘÍKLAD 1 V PROGRAMU ANSYS

```
fini
/clear

!Zadani
h=2 !toto je cela vyska, aplikuje se pouze polovina
b=2*h
a=100
e=1e9
v=0.2
M=1000

!Singularita prvku kolem specifickeho bodu
n=10 !pocet dilu obvodoveho uhlu kolem specifickeho bodu
r=h/200 !polomer první řady prvku

!Geometrie
/PREP7
k,1,-a,0
k,2,-a,h/4
k,3,-a,h/2
k,4,-h/4,0
k,5,-h/4,h/4
k,6,-h/4,h/2
k,7,0,0
k,8,h/4,0
k,9,h/4,h/4
k,10,h/4,h/2
k,11,b,0
k,12,b,h/4
k,13,b,h/2

a,1,4,5,2,1
a,3,2,5,6,3
a,6,5,9,10,6
a,10,9,12,13,10
a,9,8,11,12,9
a,5,4,7,8,9,5
```

```
!Prvky a uloha
ET,1,PLANE183
KEYOPT,1,3,0 !rovinna napjatost
```

```
MP,EX,1,e
MP,PRXY,1,v
```

```
!Specificky bod
KSCON,7,r,1,n,0.75, 7
```

```
!Mesh
ESIZE,h/24,0,
ASEL,S,AREA,,1,5
MSHKEY,1
amesh,all
ASEL,S,AREA,,6
MSHKEY,0
amesh,all
```

```
!Okrajove podminky
nsel,s,loc,y,,0
nsel,r,loc,x,0,b
D,all, ,, , ,UY
kssel,s,,11
nslk
D,all, ,, , ,UX,UY
allsel
```

```
!Zatizeni
kssel,s,,3
nslk
F,all,FX,M/(h/2)
kssel,s,,1
nslk
F,all,FX,-M/(h/2)
allsel
```

```
!Vypocet
```

FINISH

/SOL

!Urceni korene trhliny

NSEL,S,LOC,X,0

NSEL,R,LOC,Y,0

CM,CRACKTIP,NODE

!J-integral

CINT,NEW,1

CINT,TYPE,JINT

CINT,CTNC,CRACKTIP

CINT,SYMM,ON

CINT,NCON,10

CINT,NORMAL,0,2

CINT,LIST

allsel

/OUT,SCRATCH

solve

!Vypis hodnoty

FINI

/POST1

/OUT,

PRCINT,1

*GET,J,CINT,1,,1,,6

PRINT,1,,JINT

FINISH

/POST1

B PŘÍKLAD 2 V PROGRAMU ANSYS

```
fini
/clear

!Zadani
h=2 !toto je cela vyska, aplikuje se pouze polovina
b=2*h
a=100
e=1e9
v=0.2
sil=1000

!Singularita prvku kolem specifickeho bodu
n=10 !pocet dilu obvodoveho uhlu kolem specifickeho bodu
r=h/200 !polomer první řady prvku

!Geometrie
/PREP7
k,1,-a,0
k,2,-a,h/4
k,3,-a,h/2
k,4,-h/4,0
k,5,-h/4,h/4
k,6,-h/4,h/2
k,7,0,0
k,8,h/4,0
k,9,h/4,h/4
k,10,h/4,h/2
k,11,b,0
k,12,b,h/4
k,13,b,h/2

a,1,4,5,2,1
a,3,2,5,6,3
a,6,5,9,10,6
a,10,9,12,13,10
a,9,8,11,12,9
a,5,4,7,8,9,5
```

```
!Prvky a uloha
ET,1,PLANE183
KEYOPT,1,3,0 !rovinna napjatost
```

```
MP,EX,1,e
MP,PRXY,1,v
```

```
!Specificky bod
KSCON,7,r,1,n,0.75,7
```

```
!Mesh
ESIZE,h/24,0,
ASEL,S,AREA,,1,5
MSHKEY,1
amesh,all
ASEL,S,AREA,,6
MSHKEY,0
amesh,all
```

```
!Okrajove podminky
nsel,s,loc,y,,0
nsel,r,loc,x,0,b
D,all, ,, , ,UY
ksel,s,,11
nslk
D,all, ,, , ,UX,UY
allsel
```

```
!Zatizeni
ksel,s,,2
nslk
F,all,FY,sil
allsel
```

```
!Vypocet
FINISH
/SOL
```

!Urceni korene trhliny

NSEL,S,LOC,X,0

NSEL,R,LOC,Y,0

CM,CRACKTIP,NODE

!J-integral

CINT,NEW,1

CINT,TYPE,JINT

CINT,CTNC,CRACKTIP

CINT,SYMM,ON

CINT,NCON,10

CINT,NORMAL,0,2

CINT,LIST

allsel

/OUT,SCRATCH

solve

!Vypis hodnoty

FINI

/POST1

/OUT,

PRCINT,1

*GET,J,CINT,1,,1,,6

PRINT,1,,JINT

FINISH

/POST1

C PŘÍKLAD 3 V PROGRAMU ANSYS

```
fini
/clear

!Zadani
h=2 !toto je cela vyska, aplikuje se pouze polovina
b=2*h
a=100
e=1e9
v=0.2
pos=0.001

!Singularita prvku kolem specifickeho bodu
n=10 !pocet dilu obvodoveho uhlu kolem specifickeho bodu
r=h/200 !polomer první řady prvku

!Geometrie
/PREP7
k,1,-a,0
k,2,-a,h/4
k,3,-a,h/2
k,4,-h/4,0
k,5,-h/4,h/4
k,6,-h/4,h/2
k,7,0,0
k,8,h/4,0
k,9,h/4,h/4
k,10,h/4,h/2
k,11,b,0
k,12,b,h/4
k,13,b,h/2

a,1,4,5,2,1
a,3,2,5,6,3
a,6,5,9,10,6
a,10,9,12,13,10
a,9,8,11,12,9
a,4,5,9,8,7
```

```
!Prvky a uloha
ET,1,PLANE183
KEYOPT,1,3,0 !rovinna napjatost
```

```
MP,EX,1,e
MP,PRXY,1,v
```

```
!Specificky bod
KSCON,7,r,1,n,0.75,7
```

```
!Mesh
ESIZE,h/24,0,
ASEL,S,AREA,,1,5
MSHKEY,1
amesh,all
ASEL,S,AREA,,6
MSHKEY,0
amesh,all
```

```
!Okrajove podminky
nselect,s,loc,y,,0
nselect,r,loc,x,0,b
D,all,, , ,UY
kselect,s,,11
nslk
D,all,, , ,UX,UY
allselect
```

```
!Zatizeni
nselect,s,loc,y,h/2,h/2
nselect,r,loc,x,-a,b
D,all,,pos/2,,UY
allselect
```

```
!Vypocet
FINISH
/SOL
```

!Urceni korene trhliny

NSEL,S,LOC,X,0

NSEL,R,LOC,Y,0

CM,CRACKTIP,NODE

!J-integral

CINT,NEW,1

CINT,TYPE,JINT

CINT,CTNC,CRACKTIP

CINT,SYMM,ON

CINT,NCON,10

CINT,NORMAL,0,2

CINT,LIST

allsel

/OUT,SCRATCH

solve

!Vypis hodnoty

FINI

/POST1

/OUT,

PRCINT,1

*GET,J,CINT,1,,1,,6

PRINT,1,,JINT

FINISH

/POST1

D PŘÍKLAD 4 V PROGRAMU ANSYS

```
fini
/clear

!Zadani
h=2 !toto je cela vyska, aplikuje se pouze polovina
b=2*h
a=100
e=1e9
v=0.2
sil=1000

!Singularni prvku kolem specifickeho bodu
n=10 !pocet dilu obvodoveho uhlu kolem specifickeho bodu
r=h/200 !polomer první řady prvku

!Geometrie
/PREP7
k,1,0,0
k,2,-h/2,-0.0001
k,3,-a,-0.0001
k,4,-a,-h/2
k,5,-h/2,-h/2
k,6,0,-h/2
k,7,h/2,-h/2
k,8,h/2,0
k,9,h/2,h/2
k,10,0,h/2
k,11,-h/2,h/2
k,12,-a,h/2
k,13,-a,0
k,14,-h/2,0
k,15,b,-h/2
k,16,b,0
k,17,b,h/2

a,1,2,5,6,1
a,1,6,7,8,1
```

```
a,1,14,11,10,1
a,1,8,9,10,1
a,14,13,12,11,14
a,2,3,4,5,2
a,7,15,16,8,7
a,8,16,17,9,8
```

```
!Prvky a uloha
ET,1,PLANE183
KEYOPT,1,3,0 !rovinna napjatost
```

```
MP,EX,1,e
MP,PRXY,1,v
```

```
!Specificky bod
KSCON,1,r,1,n,0.75,7
```

```
!Mesh
ESIZE,h/24,0,
ASEL,S,AREA,,1,4
amesh,all
ASEL,S,AREA,,5
MSHKEY,0
amesh,all
ASEL,S,AREA,,6
MSHKEY,0
amesh,all
ASEL,S,AREA,,7
MSHKEY,0
amesh,all
ASEL,S,AREA,,8
MSHKEY,0
amesh,all
```

```
!Okrajove podminky
ksel,s,,6
nslk
D,all,,,,,UY
nsl,s,loc,y,0,h/2
```

```
nselect, r, loc, x, -a, -a
D, all, , , , UX,
allselect
```

```
!Zatizeni
kselect, s, , 4
nslk
F, all, FY, -sil/2
allselect
```

```
!Vypocet
FINISH
/SOL
```

```
!Urceni korene trhliny
CSKP, 11, 0, 1, 8, 10
csys, 0
NSEL, S, LOC, X, 0
NSEL, R, LOC, Y, 0
CM, CRACKTIP, NODE
```

```
!J-integral
CINT, NEW, 1
CINT, TYPE, JINT
CINT, CTNC, CRACKTIP
CINT, SYMM, OFF
CINT, NCON, 10
CINT, NORMAL, 11, 2
CINT, LIST
allselect
/OUT, SCRATCH
solve
```

```
!Vypis hodnoty
FINI
/POST1
/OUT,
PRCINT, 1
PRINT, 1, ALL, JINT
```

FINISH

/POST1