



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**REKONSTRUKCE SNÍMKŮ Z MAGNETICKÉ REZONANCE
POMOCÍ OPTIMALIZAČNÍCH METOD**

MAGNETIC RESONANCE IMAGING VIA OPTIMIZATION METHODS

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Tomáš Onderlička

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Mgr. Pavel Rajmic, Ph.D.

BRNO 2018

Zadání diplomové práce

Ústav: Ústav matematiky
Student: **Bc. Tomáš Onderlička**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **doc. Mgr. Pavel Rajmic, Ph.D.**
Akademický rok: 2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Rekonstrukce snímků z magnetické rezonance pomocí optimalizačních metod

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Aktuálním trendem v magnetické rezonanci je zrychlování akvizice dat. To je dosaženo s využitím tzv. komprimovaného snímání, které zároveň nabízí způsob, jak nasnímaná data rekonstruovat tak, aby nedošlo ke ztrátě kvality obrazu. K významné ztrátě kvality totiž dochází, pokud se na zrychleně nasnímaná data nasadí běžně používané rekonstrukční metody.

Dnešním trendem ve výpočetním zobrazování je sestavení optimalizační úlohy, která zahrnuje model, naměřená data a nějaký matematicky formulovaný předpoklad, např. řídkost rekonstrukce v nějaké vhodné transformační doméně. Existuje řada takovýchto modelů a příslušných optimalizačních algoritmů, které typicky vykazují rozdílné výsledky.

Cíle diplomové práce:

Student nastuduje teorii komprimovaného snímání (obecně a v magnetické rezonanci), a dále optimalizační modely magnetické rezonance a algoritmy. Cílem je vybrané modely a příslušné algoritmy implementovat v Matlabu a porovnat na simulovaných a zejména reálných datech. Student bude zkoumat, jaký vliv na kvalitu rekonstrukce má počet měřených bodů v tzv. k–prostoru.

Seznam doporučené literatury:

ELAD, M. Sparse and Redundant Representations: From Theory to Applications in Signal and Image Processing. New York: Springer, 2010. ISBN 978-1-4419-7011-4.

HRBÁČEK, R., RAJMIC, P., VESELÝ, V. a ŠPIŘÍK, J. Řídké reprezentace signálů: Úvod do problematiky. Elektrevue - Internetový časopis, 2011. roč. 2011. č. 50. ISSN: 1213 - 1539.

SELESNICK, I. Sparse Regularization via Convex Analysis. Signal Processing, IEEE Transactions on [online]. USA: IEEE, 2017.

SELESNICKJ, I. et al. Convex 1-D total variation denoising with non-convex regularization, IEEE Signal Process. Lett., vol. 22, no. 2, Feb. 2015.

SOUBIES, E. et al. A continuous exact L0 penalty (CEL0) for least squares regularized problem,” SIAM J. Imag. Sci., vol. 8, no. 3, 2015.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Magnetická rezonance je diagnostická metoda používaná pro zobrazení vnitřních orgánů těla. Její hlavní nevýhodou je dlouhá doba snímání, která jde ovšem zrychlit metodou komprimovaného snímání. Ta spočívá v naměření jen malé části dat a sestavení optimalizační úlohy, pomocí které je provedena rekonstrukce. Cílem této práce je popsat a naprogramovat základní optimalizační metody, dále je porovnat a ověřit na reálných datech, do jaké míry je možné snímání urychlit, aniž by došlo ke ztrátě kvality obrazu. V experimentu nejlépe dopadla metoda regularizace zobecněnou totální variační (TGV) normou, pomocí níž byla provedena kvalitní rekonstrukce při zachování pouze čtvrtiny měření.

KLÍČOVÁ SLOVA

magnetická rezonance, komprimované snímání, podvzorkování, totální variace, zobecněná totální variace, matematická optimalizace

ABSTRACT

Magnetic resonance imaging is a diagnostic method to form images of the organs in the body. Long acquisition times are the main disadvantage, however it is possible to accelerate the data acquisition with the method of compressed sensing by sensing fewer samples and formulating an optimization method for image reconstruction. The aim of this thesis is to describe and compare the common optimization methods and to create a software capable of solving them. Another objective is to observe how much the data acquisition can be accelerated without the loss of image quality when dealing with real data. The most promising method in the experiment was total generalized variation (TGV) regularization which was able to reconstruct an image with a proper quality using only a quarter of the data.

KEYWORDS

magnetic resonance, compressed sensing, undersampling, total variation, total generalized variation, mathematical optimization

ONDERLIČKA, Tomáš. *Rekonstrukce snímků z magnetické rezonance pomocí optimalizačních metod*. Brno, 2018, 59 s. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. Vedoucí práce: doc. Mgr. Pavel Rajmic, PhD.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou diplomovou práci na téma „Rekonstrukce snímků z magnetické rezonance pomocí optimalizačních metod“ jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené diplomové práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této diplomové práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a/nebo majetkových a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

Brno

.....
podpis autora

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych poděkoval vedoucímu diplomové práce panu doc. Mgr. Pavlu Rajmicovi, Ph.D. za odborné vedení práce, věnovaný čas a cenné rady.

Brno

.....
podpis autora

Obsah

Úvod	1
1 Základy matematického zpracování signálu	3
1.1 Fourierova transformace	3
1.1.1 Neperiodický spojitý 2D signál	3
1.1.2 Periodický diskrétní 2D signál	4
1.1.3 Neuniformní transformace	5
1.2 Normy	6
1.2.1 Vektorové normy	6
1.2.2 Operátorové normy	8
1.3 Vlastnosti operátorů	8
1.4 Konvoluce	9
1.5 Vzorkování signálu	9
1.5.1 Diracův jednotkový impuls	10
1.5.2 Vzorkování ve frekvenční oblasti	11
1.6 Filtrování ve frekvenční oblasti	12
1.6.1 Ideální filtr	12
1.6.2 Butterworthův filtr	14
2 Zobrazování pomocí magnetické rezonance	17
2.1 Základy magnetické rezonance	17
2.1.1 Homogenní pole B_0	17
2.1.2 Radiofrekvenční pole B_1 (RF puls)	17
2.1.3 Gradientní pole B_G	18
2.1.4 Relaxace	18
2.1.5 Free induction decay	19
2.1.6 Pulsní sekvence	19
2.2 Rovnice MRI	21
2.3 Podvzorkování	23
2.4 Paralelní snímání	23
2.4.1 Rekonstrukce obrazu z více cívek	24
3 Matematická optimalizace	25
3.1 Konvexní optimalizace	25
3.2 Nekonvexní optimalizace	25
3.3 Poznámka k optimalizaci reálných funkcí komplexní proměnné	26
3.4 Proximální operátor	26
3.4.1 Významné případy	27
3.5 Forward-backward splitting	28
4 Poznámky ke komprimovanému snímání	31
4.1 Řídká řešení systémů lineárních rovnic	31
4.2 Komprimované snímání	31

5	Formulace optimalizačních metod	33
5.1	Regularizace TV normou	33
5.1.1	Rekonstrukce pro jednu cívku	33
5.1.2	Rekonstrukce pro více cívek	34
5.2	Regularizace TGV normou	35
5.2.1	Zavedení TGV	35
5.2.2	Chování TGV jako regularizéru	35
5.2.3	Diskretizace TGV normy	36
5.2.4	Rekonstrukce pro jednu cívku	37
5.2.5	Rekonstrukce pro více cívek	37
5.2.6	Algoritmus TGV	37
5.3	Sparsity-assisted signal smoothing	38
5.3.1	Rekonstrukce pro jednu cívku	38
5.3.2	Rekonstrukce pro více cívek	40
5.3.3	Výhody a nevýhody SASS	41
6	Výsledky experimentu	43
6.1	Popis fantomu	43
6.2	Podvzorkování	44
6.3	Vyhodnocení	45
7	Závěr	49
	Literatura	51
	Seznam příloh	55
A	Odvození rovnice MRI	57
B	Obsah CD	59

Úvod

Magnetická rezonance je diagnostická metoda, pomocí níž je možné zobrazit vnitřní orgány těla. Na rozdíl od například počítačové tomografie, kde je využíváno rentgenových paprsků, je magnetická rezonance založena na interakci jader vodíku s vnějším magnetickým polem. Vyšetření tak probíhá bez škodlivého ionizujícího záření.

Nevýhodou je dlouhá doba snímání, kterou lze ovšem podstatně zkrátit s využitím metody tzv. komprimovaného snímání, jejíž princip spočívá v naměření menší části dat a následném sestavení optimalizační úlohy zohledňující naměřená data a řídkost reprezentace obrazu po vhodně zvolené transformaci. V literatuře lze najít řadu různých přístupů a metod, jak úlohu sestavit. Hlavním cílem práce je některé tyto metody naprogramovat v prostředí MATLAB a porovnat na reálných datech.

Na úvod práce (kapitola 1) je uveden přehled matematických pojmů, které se dále v práci vyskytují. Především jde o Fourierovu transformaci, konvoluci a základní vlastnosti operátorů. Součástí kapitoly je i popis vzorkování a filtrování signálu. Následuje kapitola 2, kde jsou vysvětleny základní principy zobrazování pomocí magnetické rezonance. Obsahem je popis magnetických polí, které se při snímání používají, a zmíněny jsou i základní metody snímání. Navíc je odvozena rovnice snímaného signálu pomocí tzv. Blochovy rovnice.

V kapitole 3 je obecně zavedena problematika matematické optimalizace. Kromě základních pojmů je zde představen proximální operátor, který se běžně používá v optimalizačních úlohách týkajících se zpracování signálu. Kapitola 4 obsahuje stručný přehled pojmů z teorie komprimovaného snímání a konkrétní optimalizační metody jsou představeny v následující kapitole 5. Jedná se o regularizace totální variační (TV) normou, zobecněnou totální variační (TGV) normou a dále metodu Sparsity-assisted signal smoothing (SASS).

Následuje rozbor experimentu, ve kterém je zkoumán vliv podvzorkování reálných dat na výslednou kvalitu obrazů rekonstruovaných pomocí zmíněných algoritmů naprogramovaných v MATLABu.

1 Základy matematického zpracování signálu

1.1 Fourierova transformace

Reálnou funkci $f(t)$ periodickou na intervalu $\langle 0, T \rangle$, kde má konečnou variaci, lze rozložit na cosinusové (případně sinusové) vlny, které jsou charakterizovány svou amplitudou A_n , frekvencí n/T a fázovým posunem ϕ_n :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n t / T - \phi_n), \quad (1.1)$$

přičemž rovnost platí ve všech bodech s výjimkou bodů nespojitosti. Tomuto rozkladu se říká Fourierova řada. Frekvence jednotlivých vln jsou diskrétní, hovoří se tedy o diskrétním frekvenčním spektru. Běžně se lze setkat s ekvivalentními tvary

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n t / T) + b_n \sin(2\pi n t / T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2\pi n t / T}. \quad (1.2)$$

Konstanty c_n ve druhém tvaru je možno spočítat vzorcem

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i2\pi n t / T} dt. \quad (1.3)$$

U neperiodického signálu si lze představit, že se perioda T „natahuje“ do nekonečna, neboli $T \rightarrow \infty$. Frekvenční spektrum je poté kontinuální. V předchozím případě byl každému celému číslu n přiřazen koeficient c_n , nyní bude přiřazen všem reálným číslům γ . Také se místo sumy ve vztahu (1.2) objeví integrál. Tyto myšlenky vedou k pojmu Fourierova transformace, která má tvar:

$$\hat{f}(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i2\pi t \gamma} dt. \quad (1.4)$$

Původní funkci $f(t)$ pak lze vyjádřit vztahem

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\gamma) e^{i2\pi t \gamma} d\gamma, \quad (1.5)$$

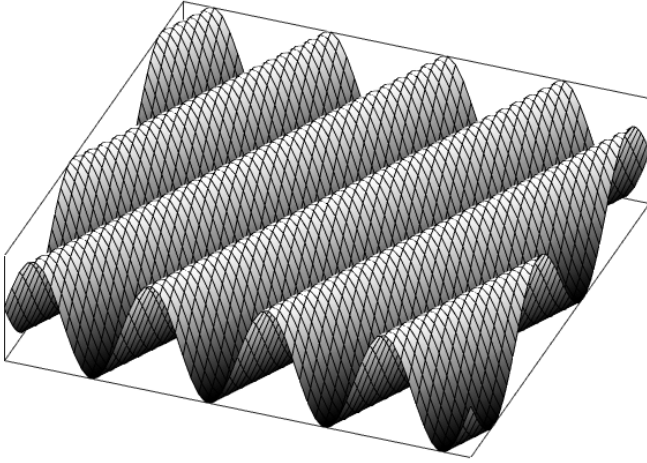
který se nazývá zpětná Fourierova transformace. Aby uvedené integrály nabývaly konečné hodnoty, musí funkce $f(t)$ pro $t \rightarrow \pm\infty$ „dostatečně“ rychle klesat.

Obdobně lze periodickou dvoudimenzionální funkci rozložit do prostorových sinusových vln, které se kromě amplitudy, frekvence a fázového posunu liší i prostorovým natočením v rovině. Pokud tato funkce reprezentuje černobílý obraz, lze ho rozložit na jednoduché obrazy dané vlnami, což je ilustrováno na obr. 1.1.

1.1.1 Neperiodický spojitý 2D signál

Pro neperiodický 2D signál lze opět zavést jeho Fourierovu transformaci:

$$\mathcal{F}\{f\} = F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (1.6)$$



(a) Funkce $f(x, y) = \sin(2\pi(x + 2y))$.



(b) Obraz tvořený vlnou z (a).

Obr. 1.1: Jedna z vln, které tvoří celkový obraz.

Tato transformace má velký význam pro měření v magnetické rezonanci, protože jak se ukáže později, je snímána právě Fourierova transformace požadovaného obrazu. Komponenty prostorových frekvencí mají podobu různě natočených a posunutých sinusových vln s parametry

frekvence: $\sqrt{k_x^2 + k_y^2}$,

směr: $\arctan\left(\frac{k_x}{k_y}\right)$,

amplituda: $|F(k_x, k_y)|$,

fáze: $\arctan\left(\frac{\Im(F(k_x, k_y))}{\Re(F(k_x, k_y))}\right)$.

Inverzní transformaci lze spočítat pomocí

$$\mathcal{F}^{-1}\{F\} = f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k_x, k_y) e^{i2\pi(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y. \quad (1.7)$$

1.1.2 Periodický diskretní 2D signál

V případě, že je obraz uvažován diskretní, je reprezentován maticí hodnot $X_{m,n}$, kde $1 \leq m \leq M$ a $1 \leq n \leq N$. Pro tento případ existuje diskretní Fourierova transformace

$$\mathcal{F}_{\mathcal{D}}\{X\} = \hat{X}_{k,l} = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} X_{m,n} e^{-i2\pi\left(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N}\right)}. \quad (1.8)$$

Inverzní transformace má tvar

$$\mathcal{F}_{\mathcal{D}}^{-1}\{\hat{X}\} = X_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{M-1} \hat{X}_{k,l} e^{i2\pi\left(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N}\right)}. \quad (1.9)$$

Tato forma transformace nahlíží na obraz X jako by byl periodický s periodami M a N . Frekvenční spektrum je diskretní a periodické se stejnou periodou jako původní obraz.

Výpočet diskretní Fourierovy transformace a její inverze lze realizovat algoritmem rychlé Fourierovy transformace (FFT), což výrazně zkrátí dobu výpočtu oproti přímé implementaci vzorců (1.8), (1.9).

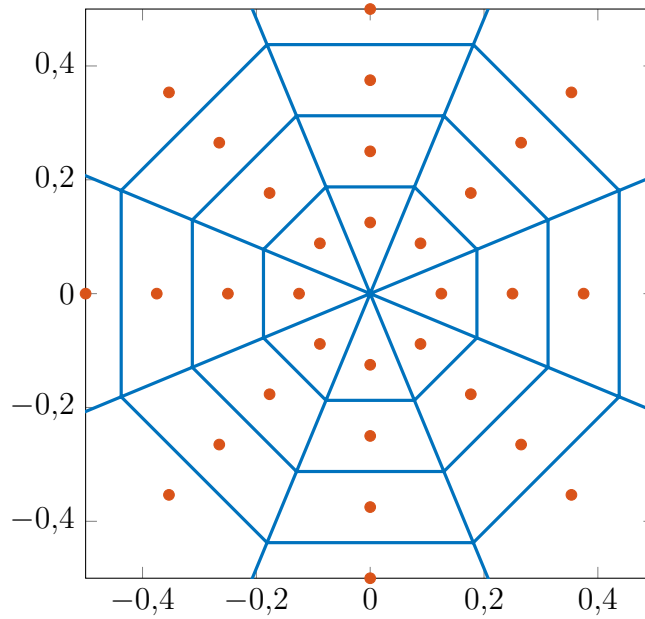
1.1.3 Neuniformní transformace

Nechť $F(k_x^j, k_y^j) = F_j$ jsou vzorky spojitě Fourierovy transformace funkce $f(x, y)$ pro danou množinu frekvencí $(k_x^j, k_y^j), j = 1, \dots, n$. Funkci f lze odhadnout [9] jako

$$\hat{f}(x, y) = \sum_{j=1}^n w_j F_j e^{i2\pi(k_x^j x + k_y^j y)}, \quad (1.10)$$

kde w_i jsou váhy realizující tzv. kompenzaci hustoty. Jejich výskyt lze odůvodnit tím, že nerovnoměrně nasnímané vzorky „zastupují“ různé velké oblasti frekvenčního spektra. Tyto váhy se nejčastěji určují pomocí tzv. Voroného diagramu (obr. 1.2), který každému bodu $k_j = (k_x^j, k_y^j)$ přiřadí oblast V_j takovou, že body v ní jsou nejbližší právě k bodu k_j . Hodnota w_j potom odpovídá obsahu oblasti V_j . Výjimkou jsou „krajní“ body, které by podle této definice měly nekonečný obsah, proto se v praxi oblast, ze které se vybírají body tvořící oblasti V_j , musí vhodně omezit.

V případě, že se vzorky nachází na radiálách a jsou rovnoměrně rozmístěny¹, je také možné za poslední vzorek na každé radiále doplnit „umělý“ bod na místo, kde by se nacházel další vzorek, kdyby měření po radiále pokračovalo. Díky tomu budou mít i krajní buňky původních vzorků konečný obsah, který navíc bude konzistentnější vzhledem k obsahům vnitřních buněk.



Obr. 1.2: Ukázka Voroného diagramu. Oranžově jsou znázorněny body k_j , modře hranice oblastí V_j .

V praxi samozřejmě stačí hodnoty $f(x, y)$ znát v konečně mnoha bodech na mřížce $\{(x, y) : x \in M, y \in N\}$, které pak tvoří obraz. Obecně neuniformní Fourierova transformace spočívá ve výpočtu

$$\mathcal{R}(f) = F(k_x^j, k_y^j) = \sum_{x \in M} \sum_{y \in N} f(x, y) e^{-i2\pi(k_x^j x + k_y^j y)} \quad (\text{typ 2}), \quad (1.11)$$

$$\mathcal{R}^*(\bar{F}) = f(x, y) = \sum_{j=1}^M \bar{F}_j e^{i2\pi(k_x^j x + k_y^j y)} \quad (\text{typ 1}), \quad (1.12)$$

¹Přesně tak tomu bude v datech, která se budou v rámci práce zpracovávat.

kde lze dosadit $\bar{F}_j = w_j F_j$ pro obdržení rovnice (1.10).

Existuje obdoba FFT pro neuniformní transformaci nazývaná NUFFT, pomocí které lze vyhodnotit (1.11) a (1.12) se zadanou libovolnou přesností. [15]

1.2 Normy

1.2.1 Vektorové normy

Definice 1.1 *Nechť V je lineární (vektorový) prostor nad \mathbb{C} . Normou nazveme zobrazení $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, které pro $\forall c \in \mathbb{C}, \forall x, y \in V$ splňuje: [17]*

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
2. $\|cx\| = |c|\|x\|$,
3. $\|x\| \geq 0$,
4. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Pokud je vypuštěn požadavek 4, hovoří se o tzv. seminormě. První podmínka se v textech často nazývá trojúhelníková nerovnost.

Definice 1.2 *Lineární prostor opatřený normou nazýváme normovaný lineární prostor (NL-prostor).*

Definice 1.3 *Pro $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in V = \mathbb{C}^n$ definujeme ℓ_p -normu jako*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pro } 1 \leq p < \infty, \quad (1.13)$$

$$\|x\|_p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p \quad \text{pro } 0 < p < 1, \quad (1.14)$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|, \quad (1.15)$$

$$\|x\|_0 = \#\{i \mid x_i \neq 0\}, \quad (1.16)$$

kde $\#$ značí počet prvků (kardinalitu) množiny.

Pro $0 \leq p < 1$ je porušena podmínka 2, nejedná se tedy o normu ani seminormu. Běžně se však hovoří o normě a bude tomu tak i v tomto textu. Na obr. 1.3 jsou zobrazeny hranice jednotkových koulí v různých normách, které ilustrují jejich chování.

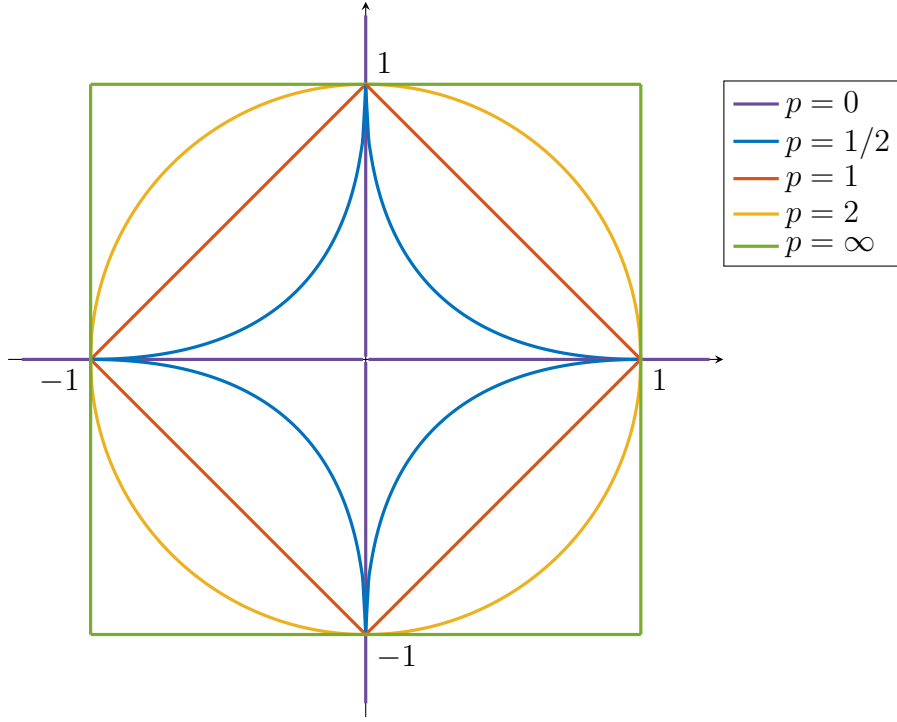
Definice 1.4 *Pro matici $X \in \mathbb{C}^{m \times n}$ definujeme ℓ_p -normu podle*

$$\|X\|_p = \|\text{vec}(X)\|_p, \quad (1.17)$$

kde $\text{vec}(X)$ značí přeuspořádání matice X do sloupcového vektoru, tedy

$$\text{vec}(X) = (x_{11}, x_{21}, \dots, x_{m1}, x_{12}, x_{22}, \dots, x_{m2}, \dots, x_{1n}, \dots, x_{mn})^T \in \mathbb{C}^{mn}.$$

V případě $p = 2$ se často používá název Frobeniova norma a značení $\|\cdot\|_F$, v textu ovšem používáno nebude.



Obr. 1.3: Hranice jednotkových koulí (množina všech bodů s normou menší než 1) v \mathbb{R}^2 v závislosti na parametru p . Pro $p = 0$ splývá hranice s osami (až na počátek, jehož norma je rovna 0).

Definice 1.5 *Nechť $u \in \mathbb{C}^{m \times n}$. TV seminorma (izotropní²) má předpis [1]*

$$\text{TV}(u) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sqrt{|u_{i+1,j} - u_{i,j}|^2 + |u_{i,j+1} - u_{i,j}|^2}, \quad (1.18)$$

přičemž je dodefinováno

$$\begin{aligned} u_{i,n+1} - u_{i,n} &= 0 \quad \text{pro } 1 \leq i \leq m, \\ u_{m+1,j} - u_{m,j} &= 0 \quad \text{pro } 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Ačkoliv se jedná o seminormu³, opět se běžně hovoří o TV normě. Je možné ji zavést i pomocí operátorů \mathcal{D}_x a \mathcal{D}_y definovaných dopřednými diferencemi takto

$$(\mathcal{D}_x u)_{i,j} = \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j} & \text{pro } 1 \leq i < M, \\ 0 & \text{pro } i = M, \end{cases} \quad (1.19)$$

$$(\mathcal{D}_y u)_{i,j} = \begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j} & \text{pro } 1 \leq j < N, \\ 0 & \text{pro } j = N. \end{cases} \quad (1.20)$$

Pak izotropní diferenční operátor lze definovat jako

$$(\mathcal{D}u)_{i,j} = \sqrt{|(\mathcal{D}_x u)_{i,j}|^2 + |(\mathcal{D}_y u)_{i,j}|^2} \quad (1.21)$$

a platí $\text{TV}(u) = \|\mathcal{D}u\|_1$.

² Existuje i anizotropní verze, jejíž definici lze najít v [1]. V této práci však bude používána pouze izotropní forma.

³ Například pro matici $X_{(c)}$, která má všechny prvky rovny stejnému číslu $c \in \mathbb{C}$, platí $\text{TV}(X_{(c)}) = 0$ a zároveň neplatí $X_{(c)} = 0_{m \times n}$, což je v rozporu se 4. požadavkem na normu v definici 1.1.

1.2.2 Operátorové normy

Definice 1.6 Necht U, V jsou NL -prostory a $T : U \rightarrow V$ je spojitý (ohraničený) lineární operátor. Pak normu operátoru T definujeme jako

$$\|T\| = \sup_{\substack{\|x\|=1, \\ x \in U}} \|Tx\| = \sup_{0 \neq x \in U} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \quad (1.22)$$

Na prostoru spojitých lineárních operátorů mezi prostory U, V se opravdu jedná o normu ve smyslu definice 1.1 a kromě uvedených axiomů navíc zřejmě platí

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\| \quad \text{pro } \forall x \in U. \quad (1.23)$$

Věta 1.7 Pro spojitě lineární operátory $T_1 : U \rightarrow V$, $T_2 : V \rightarrow W$ je $T_2 T_1 : U \rightarrow W$ také spojitý lineární operátor a platí $\|T_2 T_1\| \leq \|T_2\| \|T_1\|$.

Věta 1.8 Necht $D : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ je diagonální operátor, tzn. operátor, který realizuje násobení vektoru po složkách: $[D(x)]_i = d_i x_i$, přičemž $1 \leq i \leq n$, $d_i \in \mathbb{C}$. Pak $\|D\| = \max_{1 \leq i \leq n} |d_i|$.

Věta 1.9 Pro operátor Fourierovy transformace z definice 1.6 platí $\|\mathcal{F}\| = 1$, $\|\mathcal{F}^{-1}\| = 1$, obdobně pro diskretní případ z definice 1.8 $\|\mathcal{F}_D\| = 1$, $\|\mathcal{F}_D^{-1}\| = 1$.

Poznámka 1.10 Pro operátor neuniformní Fourierovy transformace (1.11) je velmi obtížné normu určit, experimentálně však bylo zjištěno, že při dostatečně řídkém vzorkování (což odpovídá podvzorkování, které se bude v rámci práce zkoumat) lze použít odhad $\|\mathcal{R}\| \leq 1$.

1.3 Vlastnosti operátorů

Definice 1.11 Skalární součin na lineárním prostoru V nad \mathbb{C} je zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ splňující

1. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
2. $\langle cx, y \rangle = c \langle x, y \rangle$,
3. $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$,
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$ a $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

pro $\forall c \in \mathbb{C}$, $\forall x, y, z \in V$.

Definice 1.12 Lineární prostor se skalárním součinem se nazývá prostor se skalárním součinem (VS-prostor).

Definice 1.13 Úplný⁴ VS-prostor se nazývá Hilbertův prostor.

Příklad 1.14 \mathbb{C}^n je Hilbertův prostor se skalárním součinem $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$.

Definice 1.15 Necht H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T : H_1 \rightarrow H_2$ je spojitý lineární operátor. Operátor $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ se nazývá sdružený (adjungovaný) k T , jestliže platí

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad \text{pro } \forall x \in H_1, \forall y \in H_2. \quad (1.24)$$

⁴Prostor se nazývá úplný, jestliže každá jeho cauchyovská posloupnost je konvergentní.

Věta 1.16 T^* je spojitý lineární operátor a má následující vlastnosti:

1. $T^{**} = T$,
2. $\|T^*\| = \|T\|$,
3. $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$.

Věta 1.17 Pro operátory Fourierovy transformace platí $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$ a $\mathcal{F}_D^* = \mathcal{F}_D^{-1}$. Také operátory neuniformní Fourierovy transformace typu 1 a 2 jsou navzájem adjungované, jak již bylo naznačeno zvoleným značením.

1.4 Konvoluce

Spojitou konvoluci dvou jednorozměrných funkcí $f(t)$, $g(t)$ značíme $(f * g)(t)$ a definujeme ji jako

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau. \quad (1.25)$$

Pro dvoudimenzionální funkce $f(x, y)$, $g(x, y)$ má konvoluce tvar

$$(f * g)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau_x, \tau_y)g(x - \tau_x, y - \tau_y)d\tau_x d\tau_y. \quad (1.26)$$

Jestliže je funkce g integrovatelná, pak definované integrály budou konečné, pokud funkce f je omezená. Důležitou vlastností spojující Fourierovu transformaci a konvoluci je konvoluční teorém, který říká

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\}\mathcal{F}\{g\}, \quad (1.27)$$

$$\mathcal{F}\{fg\} = \mathcal{F}\{f\} * \mathcal{F}\{g\}, \quad (1.28)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{f * g\} = \mathcal{F}^{-1}\{f\}\mathcal{F}^{-1}\{g\}, \quad (1.29)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{fg\} = \mathcal{F}^{-1}\{f\} * \mathcal{F}^{-1}\{g\}. \quad (1.30)$$

Tyto vztahy umožňují počítat konvoluci dvou funkcí tak, že se nejprve spočítají jejich Fourierovy transformace, ty se ve frekvenční doméně vynásobí a následně se na tento součin použije zpětná Fourierova transformace. Uvedné vztahy lze použít pro funkce f, g , které jsou integrovatelné a rovnosti platí skoro všude. [30]

Nechť $a, h \in \mathbb{C}^N$. Cyklická konvoluce těchto dvou vektorů se definuje vztahem

$$[a \circledast h]_n = \sum_{m=0}^{N-1} a_m h_{(n-m) \bmod N} \quad \text{pro } 0 \leq n \leq N-1. \quad (1.31)$$

Pak konvoluční teorém platí také v případě, že spojitou konvoluci $*$ nahradíme cyklickou \circledast a Fourierovu transformaci \mathcal{F} nahradíme diskrétní Fourierovou transformací \mathcal{F}_D . Podobně lze nadefinovat cyklickou konvoluci pro dvě matice.

Díky existenci rychlé Fourierovy transformace (FFT) je možné tento způsob konvoluce efektivně počítat právě díky konvolučnímu teorému.

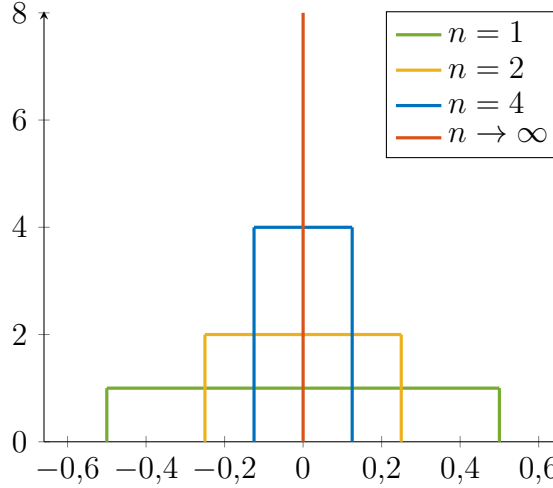
1.5 Vzorkování signálu

Tato kapitola se zabývá vzorkováním signálu, které je součástí každého měření v magnetické rezonanci. Pro jednoduchost je uvažován 1D signál, odvozené výsledky se však dají zobecnit do vyšších dimenzí.

1.5.1 Diracův jednotkový impuls

Nechť $\{f_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost funkcí (viz obr. 1.4) definovaných vztahem

$$f_n(t) = \begin{cases} n & \text{pro } -\frac{1}{2n} \leq t \leq \frac{1}{2n}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (1.32)$$



Obr. 1.4: Posloupnost funkcí, pomocí kterých je definován Diracův impuls.

Potom Diracův impuls lze definovat⁵ jako limitu této posloupnosti:

$$\delta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t). \quad (1.33)$$

Mezi důležité vlastnosti, které budou dále využity, patří

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t) dt = 1 \quad \text{pro } -\infty \leq t_1 < 0 < t_2 \leq \infty, \quad (1.34)$$

$$\delta(t) = 0 \quad \text{pro } t \neq 0, \quad (1.35)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-a) dt = f(a) \quad \text{pro } \forall f \text{ spojité v } t=a, \quad (1.36)$$

$$f(t) * \delta(t-a) = f(t-a) \quad \text{pro } \forall f \text{ spojité.} \quad (1.37)$$

Dalším důležitým pojmem je Diracův sled (Dirac impulse train) III_T . Jedná se o posloupnost Diracových impulsů opakujících se s periodou T , což lze zapsat jako

$$\text{III}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT). \quad (1.38)$$

Násobením signálu $f(t)$ Diracovým sledem $\text{III}_T(t)$ lze reprezentovat vzorkování tohoto signálu s periodou vzorkování T , což bude dále použito pro odvození některých jevů spojených se vzorkováním.

⁵Matematicky korektnější definici poskytuje teorie zobecněných funkcí (distribucí) [19], pro pochopení této kapitoly však stačí poskytnutá „intuitivní“ definice.

Lze ukázat, že Fourierovou transformací Diracova sledu je opět Diracův sled s periodou, která je rovna převrácené hodnotě původní periody, a touto převrácenou hodnotou je vynásobena:

$$\mathcal{F}\{\text{III}_T(t)\} = \frac{1}{T} \text{III}_{\frac{1}{T}}(k). \quad (1.39)$$

Pro inverzní Fourierovu transformaci pak platí

$$\mathcal{F}^{-1}\{\text{III}_{T'}(k)\} = \frac{1}{T'} \text{III}_{\frac{1}{T'}}(t). \quad (1.40)$$

1.5.2 Vzorkování ve frekvenční oblasti

Ideální vzorkování

Nechť $\tilde{x}(k)$ je pozorovaná Fourierova transformace signálu $x(t)$. Ideální vzorkování znamená, že získáváme vzorky $\tilde{x}(k)$ v bodech $k = n\kappa$ pro $n \in \mathbb{N}$, kde κ představuje vzdálenost mezi jednotlivými vzorky. Pro navzorkované hodnoty \tilde{x}_{vz} si lze představit vztah

$$\tilde{x}_{\text{vz}}(k) = \tilde{x}(k) \text{III}_{\kappa}(k). \quad (1.41)$$

Pokud je na získané hodnoty \tilde{x}_{vz} použita zpětná Fourierova transformace, s využitím (1.30) a (1.40) lze získat

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{x}(k) \text{III}_{\kappa}(k)\} &= \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{x}(k)\} * \mathcal{F}^{-1}\{\text{III}_{\kappa}(k)\} = \\ &= x(t) * \frac{1}{\kappa} \text{III}_{\frac{1}{\kappa}}(t) = \frac{1}{\kappa} x(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - \frac{n}{\kappa}\right) = \\ &= \frac{1}{\kappa} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) * \delta\left(t - \frac{n}{\kappa}\right) = \frac{1}{\kappa} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(t - \frac{n}{\kappa}\right). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Obdržená funkce je zřejmě periodická s periodou κ^{-1} . Aplikací inverzní Fourierovy transformace je tedy obdržen původní signál $x(t)$ (vynásobený hodnotou κ^{-1}), který je však nakopírován po celé časové ose s rozestupy κ^{-1} a tyto kopie jsou sečteny.

V případě, že signál $x(t)$ je nenulový pouze na intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí $b - a > \kappa^{-1}$, se kopie získané rekonstrukcí nijak nepřekrývají. Toto kritérium se nazývá Nyquistův-Shannonův teorém. V opačném případě (tzv. podvzorkování) se vzniklé kopie překrývají, což je jev, který se běžně nazývá aliasing. [5]

Vzorkování na ohraničeném intervalu

V případě ideálního vzorkování je předpokládáno, že je k dispozici nekonečně mnoho vzorků. To v praxi samozřejmě není možné naměřit, proto je v následujících odstavcích naznačen vliv vzorkování na ohraničeném intervalu. To je modelováno funkcí

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } |t| < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} & \text{pro } |t| = \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{pro } |t| > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (1.43)$$

respektive funkcí $\text{rect}(\frac{t}{W})$, kde W značí šířku symetrického intervalu, na kterém je měřeno. Fourierovu transformaci funkce $\text{rect}(t)$ lze spočítat takto:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\text{rect}(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}(t) e^{-i2\pi x t} dt = \int_{-0,5}^{0,5} e^{-i2\pi x t} dt = \left[\frac{e^{-i2\pi x t}}{-i2\pi x} \right]_{-0,5}^{0,5} = \\ &= \frac{e^{-i\pi x} - e^{i\pi x}}{-i2\pi x} = \frac{-i2 \sin \pi x}{-i2\pi x} = \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \text{sinc } x.\end{aligned}\quad (1.44)$$

Substitucí $\tau = t/W$ v (1.44) lze snadno odvodit

$$\mathcal{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{t}{W}\right)\right\} = W \text{sinc } Wt. \quad (1.45)$$

Hodnotu $\tilde{x}(k)$ na intervalu $\langle -\frac{W}{2}, \frac{W}{2} \rangle$ je možné zapsat jako

$$\tilde{x}_{vz}(k) = \tilde{x}(k) \text{rect}\left(\frac{k}{W}\right) \quad (1.46)$$

a zpětnou Fourierovou transformací poté vyjde

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\tilde{x}(k) \text{rect}\left(\frac{k}{W}\right)\right\} = x(t) * W \text{sinc } Wt. \quad (1.47)$$

Původní signál $x(t)$ je tedy porušen konvolucí s funkcí $W \text{sinc } Wt$. Dojde tím k rozostření hran a k zakmitání signálu kolem nich. Toto zakmitání, které je ilustrováno na obr. 1.5c, se nazývá Gibbsův jev. [5]

Vzorkování na konečném intervalu lze zapsat zkombinováním dvou výše uvedených principů

$$\tilde{x}_{vz}(k) = \tilde{x}(k) \text{III}_{\kappa}(k) \text{rect}\left(\frac{k}{W}\right), \quad (1.48)$$

proto se ve výsledku projeví jak periodicitu daná vztahem (1.42), tak Gibbsův jev z rovnice (1.47).

1.6 Filtrování ve frekvenční oblasti

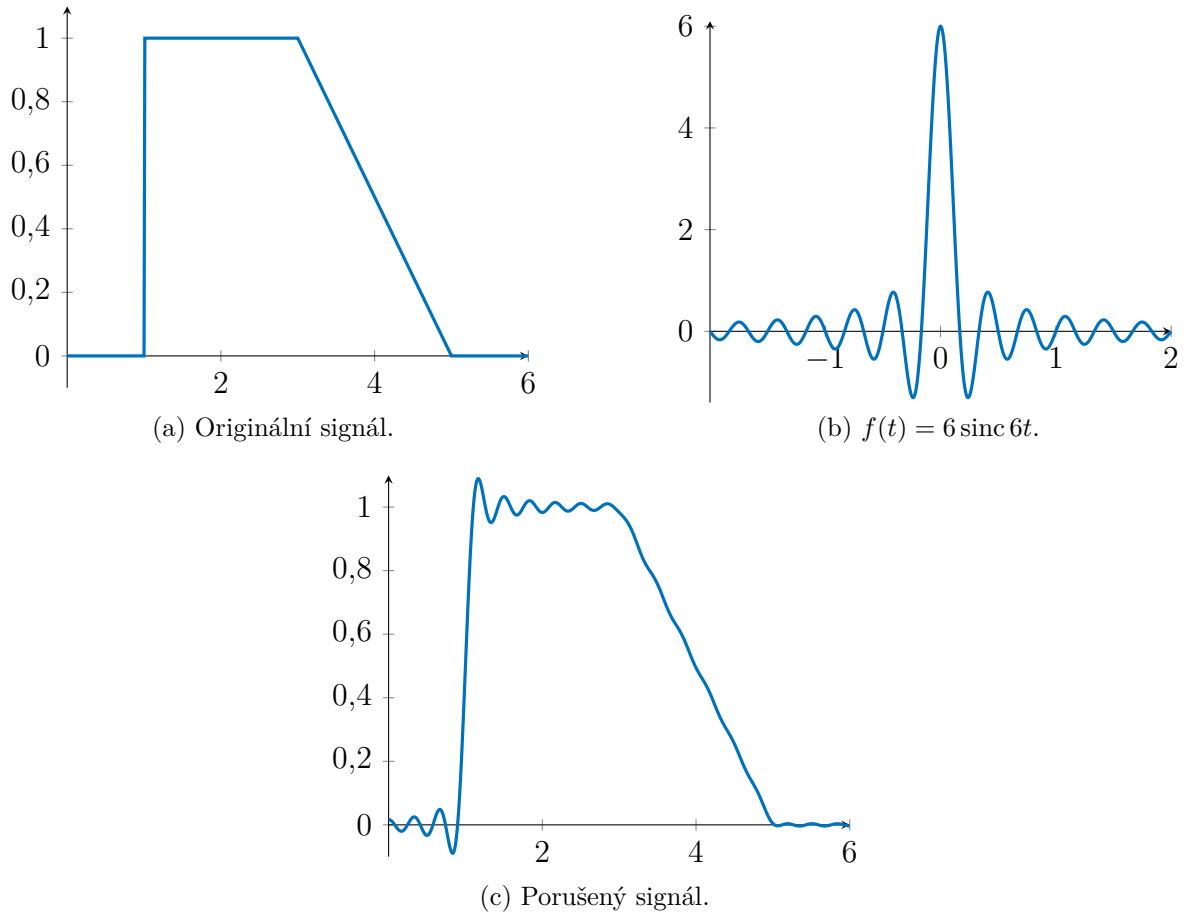
Filtrování spočívá v potlačení (případně zesílení) některých frekvencí obrazu. Pokud potlačujeme vysoké frekvence, mluvíme o filtru typu dolní propust (low-pass filter – LPF). Aplikací tohoto filtru dojde k potlačení šumu, který se projevuje především na vysokých frekvencích, ale zároveň jsou „rozmazány“ hrany a detaily obrazu.

V případě potlačení nízkých frekvencí dostáváme filtr typu horní propust (high-pass filter – HPF). Tento filtr se dá využít pro zvýraznění a detekci hran, jeho nevýhodou však je, že zvýrazňuje šum. Jestliže nadefinujeme funkci $I(k_x, k_y) = 1$, pak lze HPF získat z LPF pomocí vztahu $\text{HPF} = I - \text{LPF}$.

1.6.1 Ideální filtr

Ideální filtr typu dolní propust (ILPF) potlačuje všechny frekvence větší než zvolená frekvence f_0 . To odpovídá vynásobení frekvenčního spektra funkcí

$$H_{\text{ILPF}}(k_x, k_y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \leq f_0 \\ 0 & \text{pro } \sqrt{k_x^2 + k_y^2} > f_0. \end{cases} \quad (1.49)$$

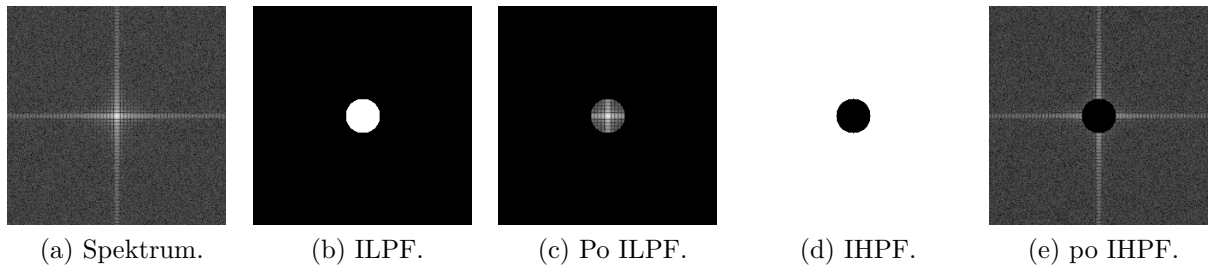


Obr. 1.5: Ilustrace porušení signálu (a) vlivem konvoluce s (b).

Pro ideální filtr typu horní propust naopak platí

$$H_{\text{IHPF}}(k_x, k_y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \geq f_0 \\ 0 & \text{pro } \sqrt{k_x^2 + k_y^2} < f_0. \end{cases} \quad (1.50)$$

Ilustraci ideálních filtrů a jejich aplikaci na frekvenční spektrum ukazuje obr. 1.6.



Obr. 1.6: Aplikace ideálních filtrů na frekvenční spektrum.

Nevýhodou je, že aplikací tohoto filtru nastane Gibbsův jev, což se projeví „zakmitáním“ obrazu kolem ostrých hran, podobně jako v (1.47). Tento efekt je spolu s vyhlazením šumu ilustrován na obr. 1.8a–d.

1.6.2 Butterworthův filtr

Možností, jak částečně potlačit Gibbsův jev, je vytvoření plynulého přechodu mezi ponechanými a neponechanými frekvencemi. Na tomto principu funguje Butterworthův filtr, který má pro dolní propust předpis

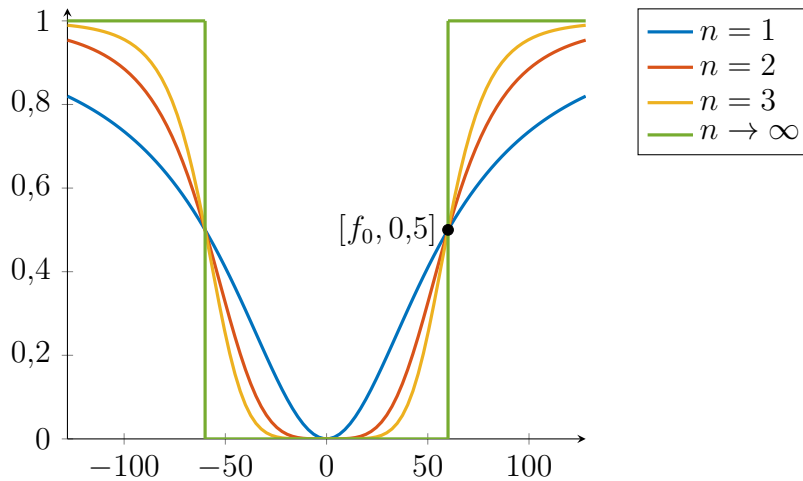
$$H_{\text{BLPF}}(k_x, k_y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{f_0^2} \right)^n}. \quad (1.51)$$

Pro horní propust lze snadno odvodit

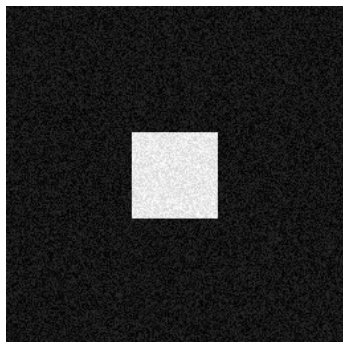
$$H_{\text{BHPF}}(k_x, k_y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{f_0^2}{k_x^2 + k_y^2} \right)^n}. \quad (1.52)$$

Hodnota f_0 má stejný význam jako v případě ideálního filtru a při dosazení frekvence $\sqrt{k_x^2 + k_y^2} = f_0$ nabývají oba filtry hodnoty 0,5. Parametr n pak určuje strmost přechodu mezi hranicemi (viz obr. 1.7). Pro $n \rightarrow \infty$ dostáváme ideální filtr.

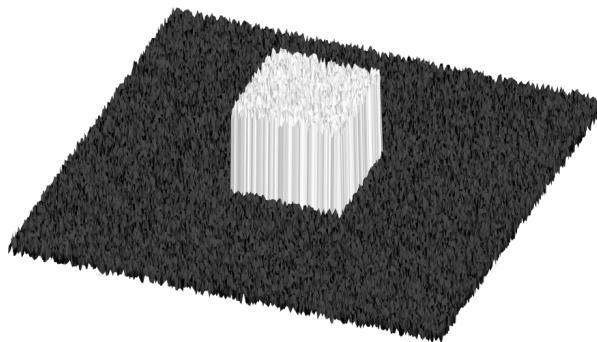
Na obr. 1.8e,f byl použit BLPF s $n = 2$ na zašuměný čtverec. Došlo k potlačení šumu a Gibbsův jev se projevil méně. Obr. 1.8g,h ilustruje použití BHPF, při kterém dojde k vytvoření hrany čtverce a zvýraznění šumu.



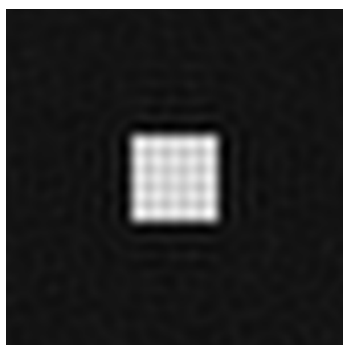
Obr. 1.7: Jednorozměrný řez frekvenční charakteristikou BHP filtrů s parametry $f_0 = 60$ a $n = 1, 2, 3$ a ∞ .



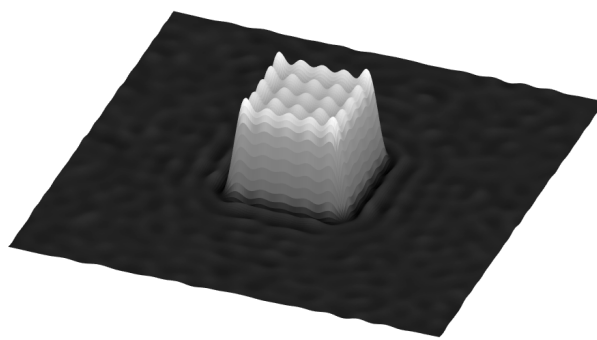
(a) Zašuměný čtverec.



(b) 3D reprezentace (a).



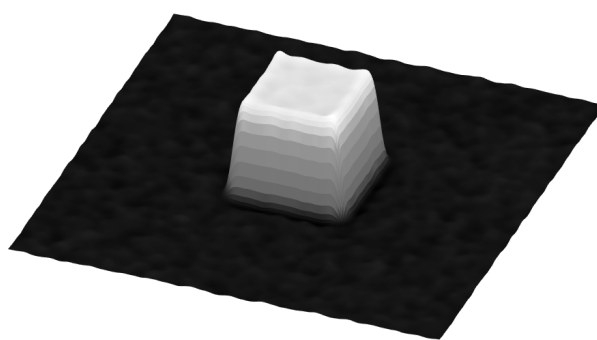
(c) Po aplikaci ILPF.



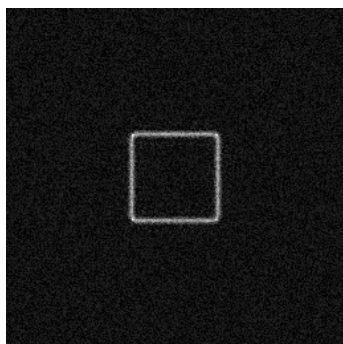
(d) 3D reprezentace (c).



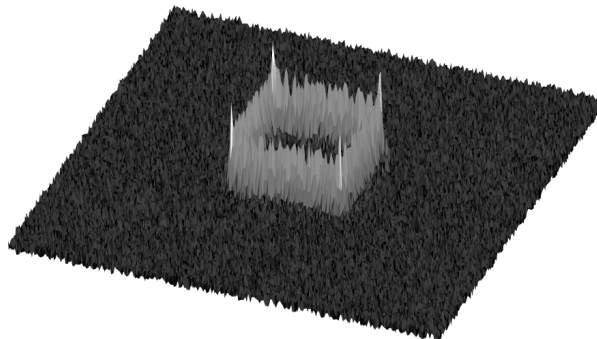
(e) Po aplikaci BLPF.



(f) 3D reprezentace (e).



(g) Po aplikaci BHPF.



(h) 3D reprezentace (g).

Obr. 1.8: Aplikace ILPF, BLPF a BHPF na obraz zašuměného čtverce. Fourierovou transformací se do obrazu dostanou komplexní čísla, kterých se lze zbavit absolutní hodnotou.

2 Zobrazování pomocí magnetické rezonance

Zobrazování pomocí magnetické rezonance (MRI) je technika používaná k zobrazení vnitřních orgánů, která využívá interakce atomových jader s magnetickým polem. Pro lékařské zobrazování je nejvýznamnější vodík ^1H , který tvoří přibližně dvě třetiny atomů lidského těla (především díky jeho výskytu v molekule vody). Rozdílné typy tkání obsahují různý počet atomů vodíku, díky čemuž ve výsledném obrazu vzniká kontrast.

Předností MRI oproti ostatním zobrazovacím metodám je, že není použito ionizující záření. Nevýhodou je poměrně dlouhá doba snímání.

Teorie v této kapitole je čerpána z [4, 5, 24, 31].

2.1 Základy magnetické rezonance

Dle kvantové mechaniky mají jádra atomů s lichým počtem protonů nebo neutronů vlastnost nazývanou spin (\mathbf{S}), což je typ momentu hybnosti. Díky této vlastnosti mají jádra magnetický moment ($\boldsymbol{\mu}$) rovnoběžný s vektorem spinu a lze si je představit jako malý magnetický dipól.

V případě absence vnějšího magnetického pole jsou magnetické momenty orientovány náhodně a proto celková magnetizace libovolné části tkáně $\mathbf{M} = \sum_V \boldsymbol{\mu} = 0$. Pokud však aplikujeme magnetické pole \mathbf{B}_0 , spiny se orientují rovnoběžně s tímto polem, některé v jeho směru, některé proti. Stav ve směru je méně energeticky náročný, proto bude takto orientováno větší množství spinů. Tato polarizace má za následek vznik celkové magnetizace $\mathbf{M} = \mathbf{M}_0$, která má stejný směr jako \mathbf{B}_0 . Dále spiny začnou vykonávat precesní pohyb kolem \mathbf{B}_0 , jehož úhlová frekvence (nazývaná Larmorova frekvence) je daná vztahem

$$\omega = \gamma B, \quad (2.1)$$

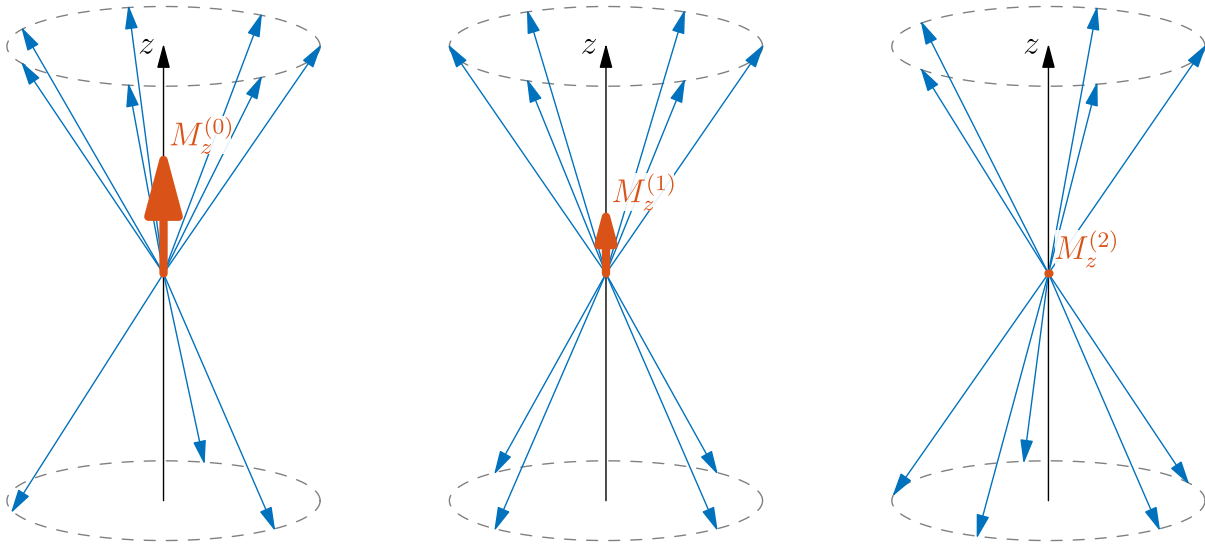
kde γ je tzv. *gyromagnetický poměr* a B je velikost magnetického pole. Pro nejčastěji zobrazovaný izotop ^1H platí $\gamma = 42,58 \text{ MHz T}^{-1}$.

2.1.1 Homogenní pole \mathbf{B}_0

Pro zjednodušení předpokládejme, že magnetické pole \mathbf{B}_0 je homogenní a ve směru osy z . Dále označme jednotkové vektory ve směrech x, y, z jako $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ a $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, tedy $\mathbf{B}_0 = (0, 0, b_0) = b_0 \mathbf{k}$. Aplikací tohoto pole po určitém čase nastane rovnovážný stav a platí $M_z = M_0$ a $M_{xy} = \|\mathbf{M}_{xy}\| = \|M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j}\| = 0$. Celkovou magnetizaci indukovanou tímto polem nelze změřit, jelikož je ve směru \mathbf{B}_0 , oproti kterému je velikostně zanedbatelná. Je tedy třeba vektor magnetizace převrátit do roviny xy .

2.1.2 Radiofrekvenční pole \mathbf{B}_1 (RF puls)

Toho lze dosáhnout aplikací radiofrekvenčního pole \mathbf{B}_1 v rovině xy „naladěného“ na Larmorovu frekvenci $\omega_0 = \gamma b_0$. Pole \mathbf{B}_1 se aktivuje pouze na malý okamžik (proto se někdy hovoří o RF pulsech) a je schopno sklopit vektor magnetizace \mathbf{M} o libovolný úhel α . Vlivem RF totiž dojde k rezonanci jednotlivých spinů, jejichž fáze se sjednotí, a také se některé spiny dostanou do stavu vyšší energie. Tomuto jevu říkáme excitace. Při sklopení o $\alpha = 90^\circ$ platí $M_z = 0$ a $M_{xy} = M_0$. Mechanismus, kterým dojde ke sklopení, je ilustrován na obr. 2.1 a 2.2. Oba tyto děje probíhají současně.



Obr. 2.1: Některé spiny se kvůli RF pulsu orientují anti-paralelně.

2.1.3 Gradientní pole \mathbf{B}_G

Další magnetické pole, které se při snímání používá, je gradientní pole $\mathbf{B}_G = (0, 0, G_x x + G_y y + G_z z) = \langle \mathbf{G}, \mathbf{r} \rangle \mathbf{k}$. Toto pole zjednodušeně řečeno kóduje prostorovou informaci tím, že mění Larmorovu frekvenci v závislosti na prostorové souřadnici. Pomocí tohoto pole je také možné provést tzv. selektivní excitaci, kdy proběhne excitace protonů pouze v tenkém řezu tkáně tak, že aplikujeme RF puls s úzkým rozsahem frekvencí. Tímto způsobem lze získat 2D obraz libovolného řezu.

2.1.4 Relaxace

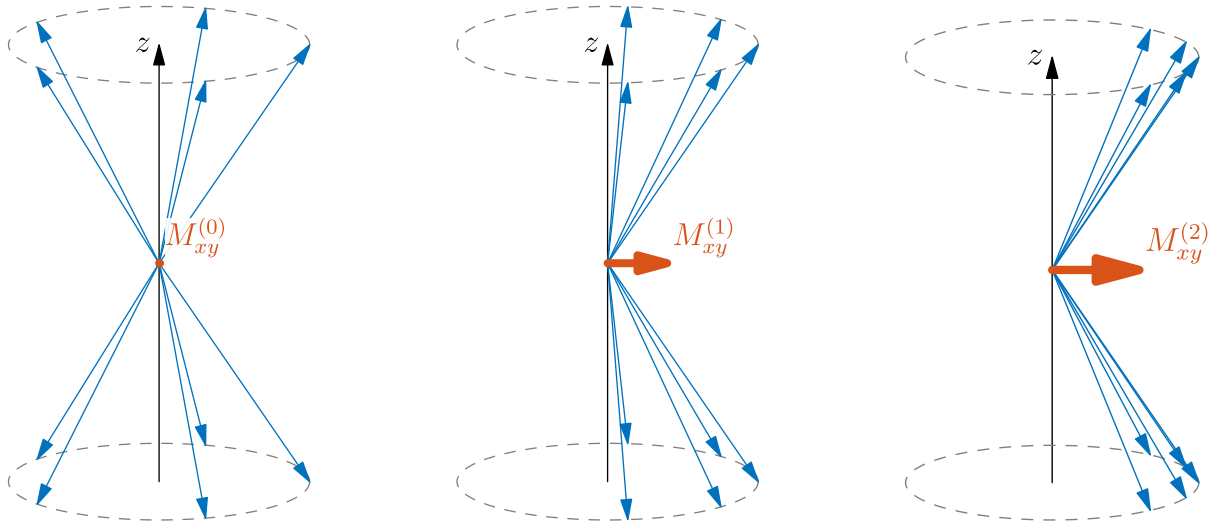
Po skončení RF pulsu pokračuje precese v rovině xy , ale postupně dochází k návratu systému do rovnovážného stavu. Magnetická pole jednotlivých částic způsobují nehomogenitu magnetického pole v jejich okolí, což zapříčiní změnu Larmorovy frekvence a tedy i rychlost precese jednotlivých spinů. Důsledkem pak je, že se fáze spinů začne čím dál více odlišovat a velikost magnetizace \mathbf{M}_{xy} se ztrácí. Tomuto jevu se říká T_2 relaxace, nebo také spin-spinová relaxace. Je charakterizován konstantou T_2 , která je závislá na typu tkáně, a lze jej popsat rovnicí

$$M_{xy}(t) = M_{xy}(0)e^{-t/T_2}, \quad (2.2)$$

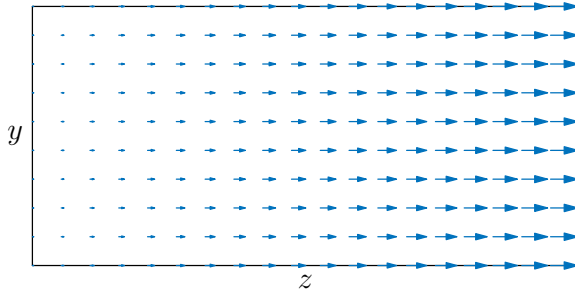
kde $M_{xy}(t) = \|\mathbf{M}_{xy}(t)\|$ a $t = 0$ odpovídá času těsně po excitaci.

Dále dochází k T_1 relaxaci (také spin-mřížková relaxace). Kvůli tepelnému pohybu spinů dochází k jejich srážkám s okolím a přichází tak o energii získanou RF pulsem, což zapříčiní jejich navrácení do původní orientace ve směru osy z . Důsledkem pak je nárůst složky M_z , který je charakterizován konstantou T_1 . Popisuje ho rovnice

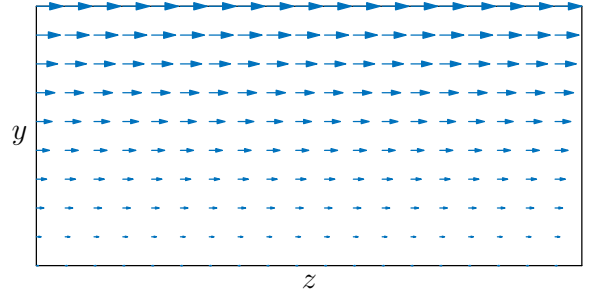
$$M_z(t) = M_0 + (M_z(0) - M_0)e^{-t/T_1}. \quad (2.3)$$



Obr. 2.2: Fáze některých spinů se začnou sjednocovat.



Obr. 2.3: Gradientní pole ve směru z .



Obr. 2.4: Gradientní pole ve směru y .

2.1.5 Free induction decay

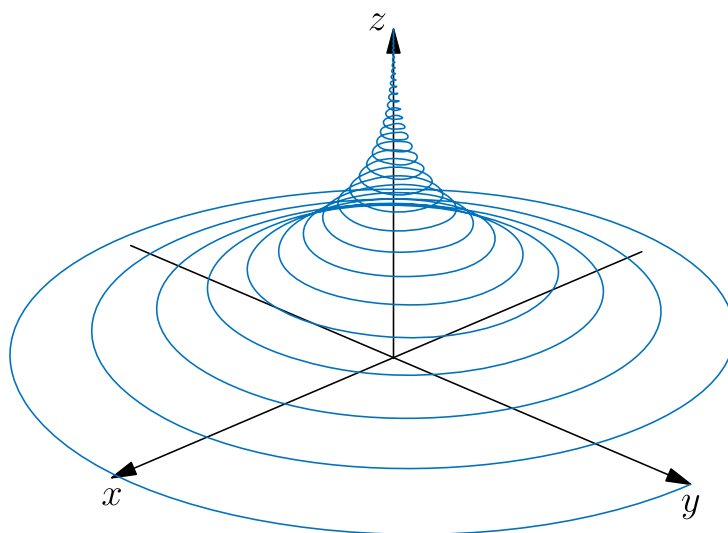
Po aplikaci RF pulsu rotuje magnetizace v rovině xy o Larmorově frekvenci ω a indukuje tím napětí (se stejnou frekvencí) na vhodně orientované snímací cívce. Tomuto signálu říkáme FID (free induction decay). Jeho amplituda by měla klesat exponenciálně podle konstanty T_2 , ve skutečnosti však klesá mnohem rychleji (obr. 2.6), což je zapříčiněno nehomogenitou hlavního magnetického pole \mathbf{B}_0 , díky které dojde k rozfázování spinů. Odpovídající relaxační konstanta má označení T_2^* .

2.1.6 Pulsní sekvence

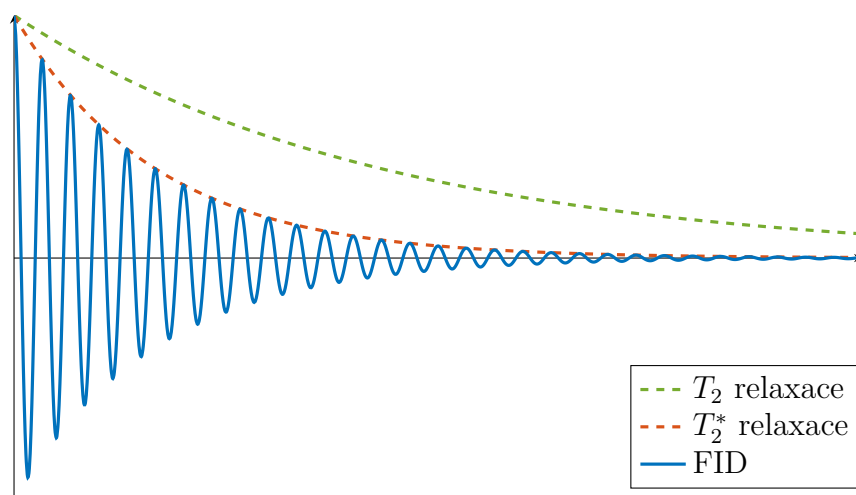
Při použití 90° RF pulsu je naměřený signál závislý na protonové hustotě tkáně. Po aplikaci jednoho pulsu lze naměřit jen část požadovaných dat, proto je puls několikrát opakován s časovými rozestupy TR (repetition time). Navržením vhodné pulsni sekvence je možné zohlednit i relaxační časy T_1 , T_2 a T_2^* , které mohou v některých aplikacích poskytnout lepší kontrast mezi různými druhy tkání.

Jedno-pulsní sekvence s menším úhlem

Nevýhodou 90° RF pulsu je, že po jeho aplikaci je složka $M_z = 0$ a dlouho trvá, než dojde k jejímu obnovení, což se projeví na velkém čase TR a tedy dlouhé době snímání. Je tedy



Obr. 2.5: Návrat do rovnovážného stavu po aplikaci RF pulsu s úhlem $\alpha = 90^\circ$.

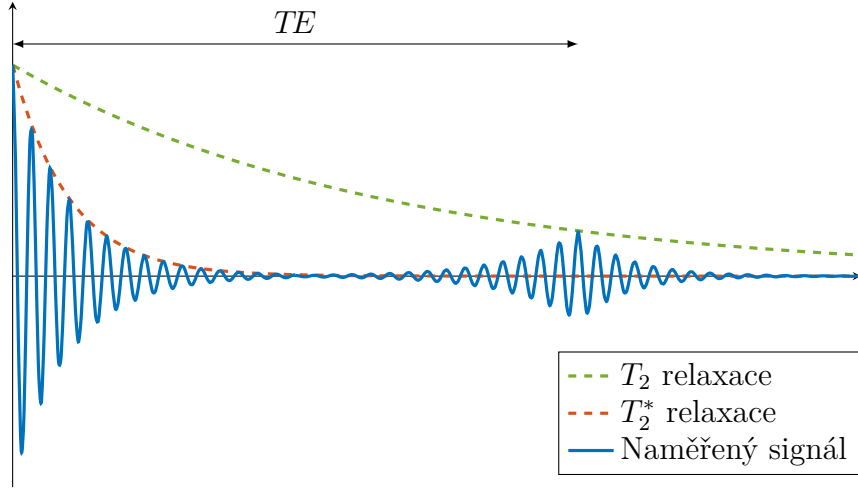


Obr. 2.6: Ilustrace free induction decay signálu.

možné použít úhel $\alpha < 90^\circ$. M_z se sníží mnohem méně a rychleji tak dojde k navrácení do původního stavu, proto lze použít nižší hodnotu TR a snížit tak celkovou dobu snímání. Nevýhodou je nižší intenzita signálu.

Spin Echo

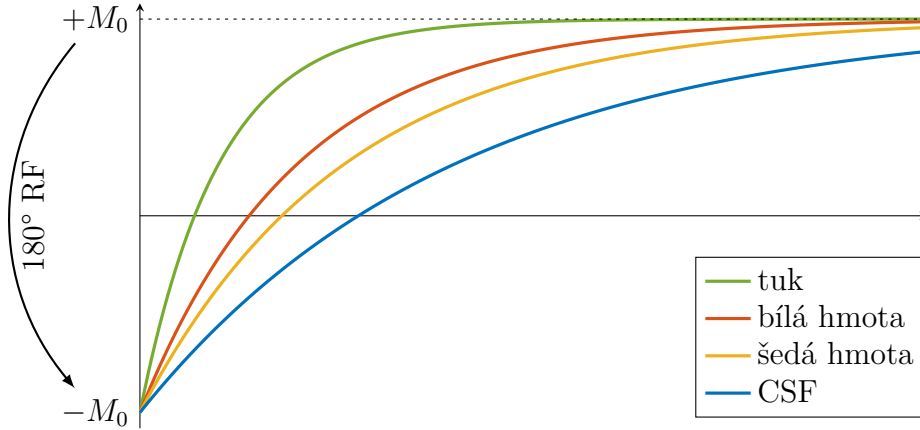
Pokud za 90° pulsem následuje 180° puls, po určité době lze naměřit tzv. ozvěnu (echo) FID signálu. Nehomogenita vnějšího magnetického pole, díky které dochází k T_2^* relaxaci, je v čase konstantní. Vlivem různé rychlosti precese dochází k rozchodu fází, pokud však aplikujeme 180° puls, změní se směr precese, přičemž její frekvence zůstane stejná. Díky tomu za stejný čas, který uplynul mezi 90° a 180° pulsem, dojde ke sjednocení fází, čímž se vyruší efekt T_2^* relaxace (T_2 relaxace se stále uplatňuje). Čas, ve kterém dojde k ozvěně, je značen TE (echo time), k aplikaci 180° pulsu dochází v čase $TE/2$. Čím delší čas TE , tím více bude obraz T_2 vážený. Signál naměřený technikou spin echo znázorňuje obr. 2.7.



Obr. 2.7: Ilustrace spin echo signálu.

Inversion recovery

Sekvence inversion recovery se skládá ze 180° pulsu následovaného sekvencí spin echo po čase TI (inversion time). Vlivem prvního pulsu dochází k převrácení vektoru magnetizace do záporného směru osy z a do času TI dochází k T_1 relaxaci. V začátku spin echo sekvence (90° puls) je tedy magnetizace různých tkání ovlivněna jejich T_1 konstantami (obr. 2.8).



Obr. 2.8: Návrat do rovnovážného stavu pomocí T_1 relaxace v závislosti na typu tkáně.

2.2 Rovnice MRI

Chování celkového magnetického vektoru $\mathbf{M}(t)$ v přítomnosti magnetického pole $\mathbf{B}(t)$ popisuje tzv. Blochova rovnice, která má tvar

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{M} \times \gamma \mathbf{B} - \frac{M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j}}{T_2} - \frac{(M_z - M_0) \mathbf{k}}{T_1}. \quad (2.4)$$

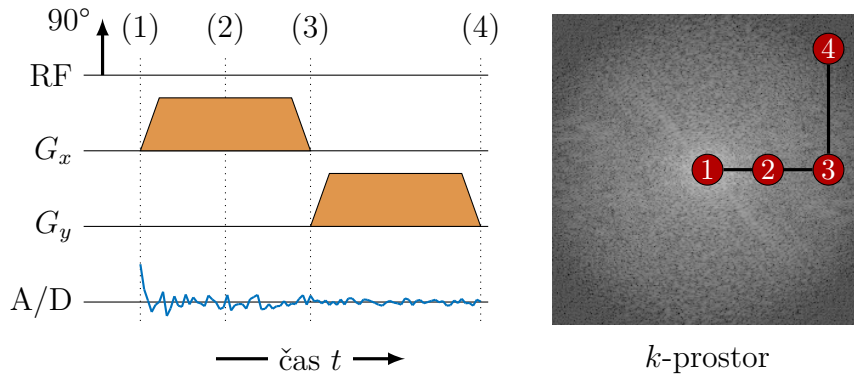
Pomocí této rovnice a Faradayova zákona elektromagnetické indukce lze odvodit (viz příloha A), že signál naměřený přijímací cívkou po aplikaci RF pulsu bude ve tvaru

$$s(t) = \int_{\Omega} m(x, y) e^{-i2\pi(k_x(t)x + k_y(t)y)} dx dy, \quad (2.5)$$

kde Ω je snímaná oblast, $m(x, y)$ je funkce závisající na protonové hustotě ρ a relaxačních konstantách T_1 , T_2 , resp. T_2^* a

$$k_x(t) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_0^t G_x(\tau) d\tau \quad k_y(t) = \frac{\gamma}{2\pi} \int_0^t G_y(\tau) d\tau. \quad (2.6)$$

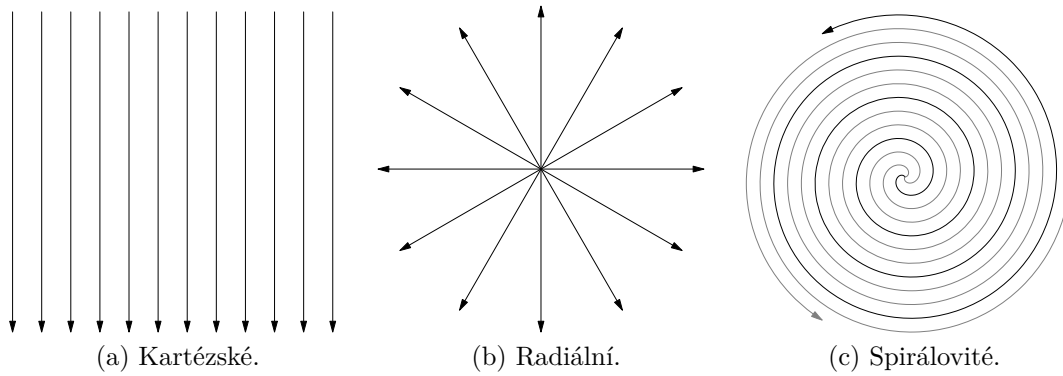
Rovnice (2.5) odpovídá spojitě 2D Fourierově transformaci funkce $m(x, y)$, která představuje požadovaný obraz, jenž chceme získat. Obecně může být obraz komplexní, pro většinu aplikací je podstatná absolutní hodnota $|m(x, y)|$. K získání obrazu potřebujeme vhodně naměřená data v k -prostoru, ve kterém se pohybujeme pomocí manipulace s gradientním polem B_G , jak popisuje rovnice (2.6) a ilustruje obr. 2.9.



Obr. 2.9: Ilustrace získání požadované trajektorie pomocí gradientního pole. [23]

V k -prostoru se můžeme pohybovat po různých typech trajektorií, které pak určují způsob rekonstrukce. Pokud jsou použity kartézské trajektorie (obr. 2.10a) a je vzorkováno dostatečně hustě (je splněn Nyquistův-Shannonův teorém), pak stačí na naměřené hodnoty použít inverzní diskrétní 2D Fourierovu transformaci.

V případě trajektorií radiálních (obr. 2.10b) či spirálovitých (obr. 2.10c) je třeba využít neuniformní Fourierovu transformaci (NUFFT). Při rekonstrukci pomocí NUFFT však často vznikají různé artefakty, proto se formulují optimalizační úlohy, které zohledňují apriorní informace o obrazu, jako například řidkost jeho diferencí.



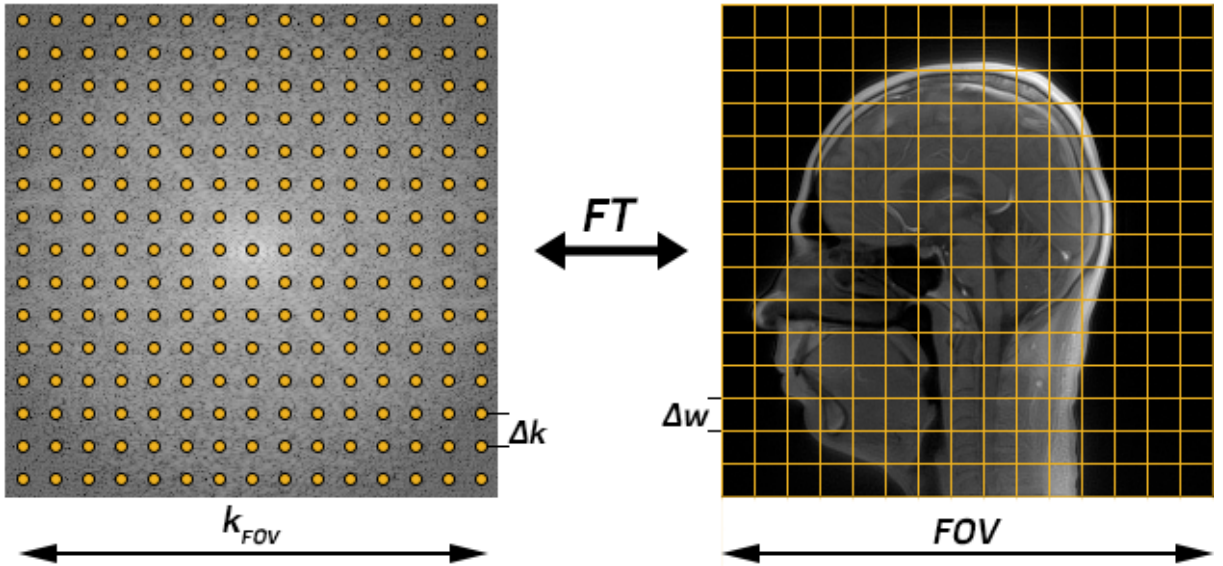
Obr. 2.10: Běžné používané trajektorie v k -prostoru.

2.3 Podvzorkování

Při předpokladu čtvercového obrazu jeho podobu určují dva důležité parametry: šířka snímané oblasti FOV a šířka obrazového bodu Δw , viz 2.11. Pro počet pixelů v obou směrech poté zřejmě platí $N = \frac{FOV}{\Delta w}$. Aby nedošlo k aliasingu (jak bylo vysvětleno v sekci 1.5.2), musí podle Nyquistova-Shannonova teorému ve frekvenční oblasti platit $\Delta k = \frac{1}{k_{FOV}}$. Pro zachování požadované šířky obrazových bodů symetricky platí $\Delta w = \frac{1}{k_{FOV}}$. Z těchto vztahů plyne, že počet vzorků v k -prostoru musí odpovídat požadovanému rozlišení obrazu. Při kartézském měření každá trajektorie projde jeden sloupec (nebo řádek), je tedy třeba měřit podél N trajektorií. Celkový počet trajektorií je důležitý z hlediska časové délky měření, platí mezi nimi lineární vztah. Při měření na méně než N trajektoriích se hovoří o podvzorkování.

Pro radiální snímání lze odvodit, že nutný počet trajektorií pro splnění Nyquistova-Shannonova kritéria je alespoň $\frac{\pi}{2}N$, což odpovídá nadvzorkování oproti kartézským trajektoriím.[4] Pro běžné rozlišení obrazů 256×256 je třeba více než 402 trajektorií.

V této práci se bude pracovat s radiálními trajektoriemi a podvzorkování bude myšleno vůči kartézskému měření.



Obr. 2.11: Parametry v obrazovém prostoru a k -prostoru důležité při snímání.

2.4 Paralelní snímání

Dosud se v tomto textu předpokládalo, že jsou data snímána pomocí jedné cívky, která má konstantní senzitivitu, tedy že intenzita přijímaného signálu nezávisí na tom, ze které části snímaného objektu pochází. Běžně se však používá větší množství přijímacích cívek, které signál snímají současně. Čím blíže ke zdroji signálu cívka je, tím silnější signál detekuje. To je modelováno takzvaným citlivostním profilem cívky S_k , kde k značí index cívky, $k = 1, 2, \dots, n_c$. Pokud je tedy obraz u_k z dat k -té cívky rekonstruován, vypadá, jako by byl po složkách vynásobený citlivostmi S_k . Operátor provádějící toto násobení bude značen \mathcal{S}_k , pokud ho budeme považovat za matici hodnot, bude značena S_k . Platí tedy $u_k = \mathcal{S}_k u$.

Hodnoty matice S_k obecně nabývají komplexních hodnot. Kromě intenzity signálu tak kompenzují i fázové posuny dané rozdílnou orientací cívek. Vliv nerovnoměrné citlivosti cívek je ilustrován na obr. 2.12.

2.4.1 Rekonstrukce obrazu z více cívek

V případě, že jsou citlivosti S_k známy, lze obrazy u_k složit v celkový obraz u pomocí [6]

$$u = \frac{1}{\sum_i |S_i|^2} \sum_j \mathcal{S}_j^* u_j, \quad (2.7)$$

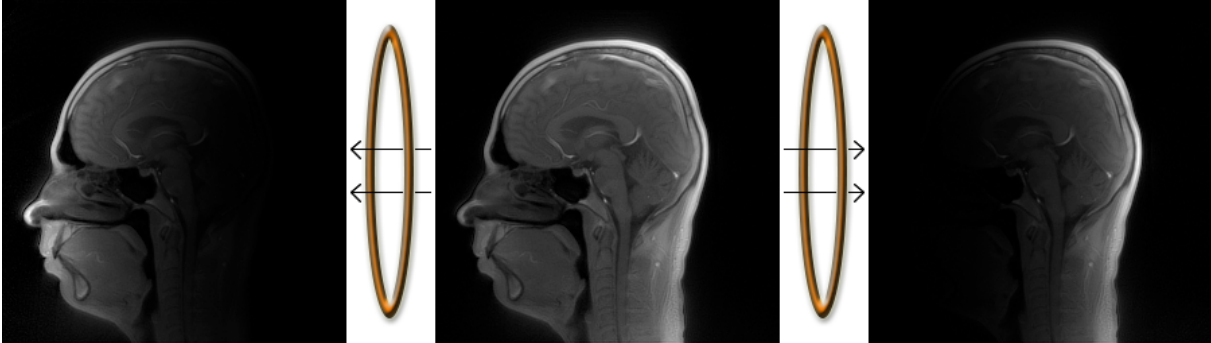
kde dělení je prováděno opět po složkách a \mathcal{S}^* značí sdružený operátor k \mathcal{S} , jehož složky jsou komplexně sdružené vzhledem k původním hodnotám.

V praxi je velmi obtížné citlivosti S_k určit. Pro tento případ je možné obraz rekonstruovat pomocí Sum of Squares (SoS) metody [22]

$$u_{\text{SoS}} = \sqrt{\sum_i |u_i|^2}. \quad (2.8)$$

Tato metoda je vhodná v případě, že jsou cívky rovnoměrně rozmístěny. V opačném případě může intenzita obrazu kolísat v závislosti na pokrytí daného místa cívkami.

Existují i metody, pomocí kterých lze citlivosti odhadnout přímo z naměřených dat. Příkladem je metoda ESPIRiT, která je používána i v této práci. Její popis přesahuje rámec tohoto textu, detaily lze najít v [29]. Citlivosti získané metodou ESPIRiT budou využity v optimalizačních algoritmech pro rekonstrukci obrazu v následujících kapitolách.



Obr. 2.12: Skutečný obraz je uprostřed, vlevo je obraz, který nasnímá cívka u obličeje, vpravo obraz z cívky u týlu.

3 Matematická optimalizace

Optimalizační úloha obecně spočívá v nalezení prvku $x^* \in A$, který minimalizuje (případně maximalizuje) danou funkci $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, tedy platí $f(x^*) \leq f(x) \forall x \in A$. Úloha se standardně zapisuje jako

$$\min_x f(x) \quad \text{vzhledem k } x \in A, \quad (3.1)$$

případně lze psát

$$x^* = \arg \min_x f(x) \quad \text{vzhledem k } x \in A. \quad (3.2)$$

Následující odstavce se zabývají reálnou optimalizací, kde $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

3.1 Konvexní optimalizace

Definice 3.1 Množina $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá konvexní, jestliže s každými dvěma body x_1, x_2 ležícími v množině A v ní leží i úsečka spojující tyto body, neboli platí

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in A \quad \text{pro } \forall x_1, x_2 \in A, 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (3.3)$$

Definice 3.2 Funkce $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá konvexní, jestliže A je konvexní a libovolná sečna (úsečka spojující body $(x_1, f(x_1))$ a $(x_2, f(x_2))$) leží nad nebo na grafu f . V matematickém zápisu musí platit

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad \text{pro } \forall x_1, x_2 \in A, 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (3.4)$$

Definice 3.3 Funkce $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá striktně konvexní, jestliže A je konvexní a za podmínky $x_1 \neq x_2$ platí

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad \text{pro } \forall x_1, x_2 \in A, 0 < \lambda < 1. \quad (3.5)$$

Věta 3.4 Normy i seminormy jsou konvexní funkce, protože s využitím axiomů 1 a 2 z definice normy (1.1) lze dokázat

$$\|\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2\| \leq \|\lambda x_1\| + \|(1 - \lambda)x_2\| \leq \lambda\|x_1\| + (1 - \lambda)\|x_2\|.$$

Věta 3.5 Součet dvou konvexních funkcí je opět konvexní funkce.

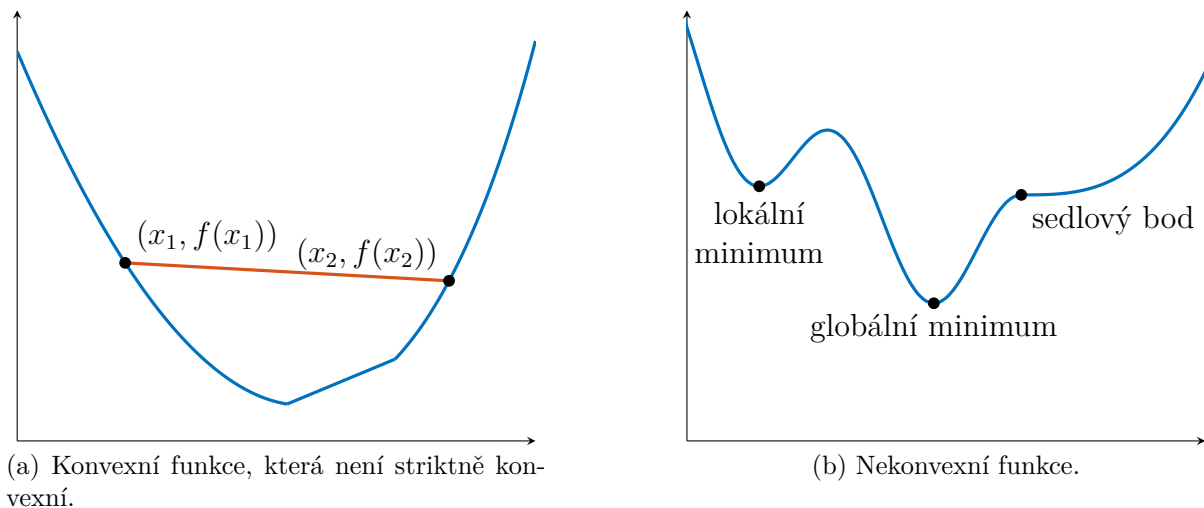
Věta 3.6 Součet striktně konvexní funkce s funkcí konvexní je striktně konvexní funkce.

Každá striktně konvexní funkce je zřejmě konvexní. Příklad konvexní funkce, která ovšem není striktně konvexní, lze vidět na obr. 3.1a.

Pokud jsou množina A a funkce f konvexní, hovoří se o konvexní optimalizaci. Výhodou konvexní optimalizace je, že pokud je nalezeno lokální minimum, pak se zároveň jedná o minimum globální. Pro striktně konvexní funkce navíc platí, že je nalezené minimum zároveň unikátní. [2]

3.2 Nekonvexní optimalizace

Úloha, která porušuje alespoň jednu z podmínek konvexity f a A , se nazývá nekonvexní. Takovéto úlohy mohou mít obecně více lokálních minim, navíc mohou obsahovat tzv. sedlové body (stacionární body, které nejsou extrémy). Často se jedná o úlohy třídy NP (nelze je řešit s polynomiální časovou složitostí).



Obr. 3.1: Ilustrující příklady k uvedeným definicím.

3.3 Poznámka k optimalizaci reálných funkcí komplexní proměnné

Reálnou funkci komplexní proměnné $f(z) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ lze zapsat ve tvaru $f(z) = u(x, y)$, kde $z = x + iy$ a $u(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je reálná funkce dvou reálných proměnných. Obdobně lze funkci z \mathbb{C}^n převést na funkci z \mathbb{R}^{2n} . To naznačuje, že je možné se zabývat pouze reálnou optimalizací.

Další zjednodušení poskytují tzv. Wirtingerovy derivace (operátory). Pomocí nich je možné vyjádřit gradient funkce s reálnými proměnnými (odpovídající funkci s komplexními proměnnými) v komplexním tvaru. Není tedy třeba reformulovat úlohu do reálného případu. Zavedení Wirtingerových derivací je nad rámec tohoto textu, podrobnostmi se zabývá [21]. Příklad práce s takto zavedenými gradienty lze nalézt v [11], odkud jsou také převzaty gradienty funkcí, se kterými se v práci dále pracuje.

3.4 Proximální operátor

Definice 3.7 *Nechť $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní funkce. Proximální operátor $\text{prox}_f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funkce f definujeme jako [25]*

$$\text{prox}_f(v) = \arg \min_x \left(f(x) + \frac{1}{2} \|x - v\|_2^2 \right). \quad (3.6)$$

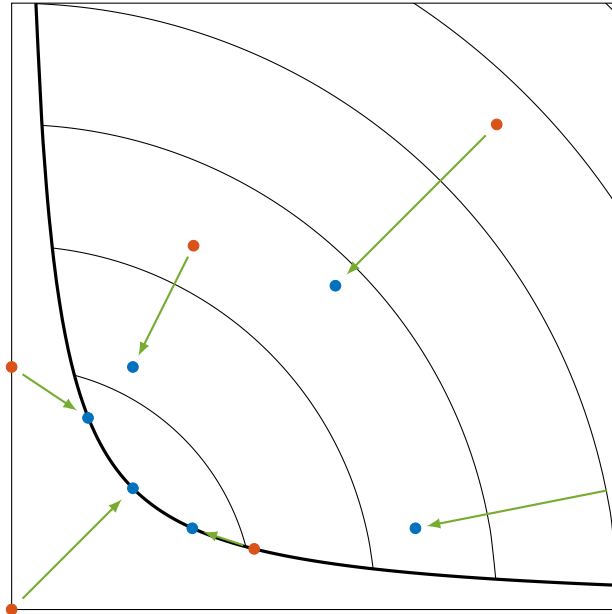
Minimalizovaná funkce je striktně konvexní, proto má jednoznačně určené minimum, což zaručuje korektnost takto definovaného operátoru.

Poznámka 3.8 *Operátor je definován i pro body, které nejsou prvky definičního oboru funkce f .*

Často se používá proximální operátor funkce λf ve tvaru

$$\text{prox}_{\lambda f}(v) = \arg \min_x \left(f(x) + \frac{1}{2\lambda} \|x - v\|_2^2 \right). \quad (3.7)$$

Na příkladu (obr. 3.2) můžeme vidět, jak se proximální operátor chová. Tenké křivky znázorňují vrstevnice dvojrozměrné funkce f (jejich hodnota roste ve směru osy prvního kvadrantu), tlustá čára značí hranici definičního oboru funkce. Oranžové body operátor zobrazuje na modré body. Body, které byly v definičním oboru, se posunuly blíže k minimu f . V opačném případě se dostaly na hranici omezení a také se přiblížily minimu.



Obr. 3.2: Ilustrace chování proximálního operátoru.

Proximální operátor se tedy snaží minimalizovat funkci f a zároveň být blízko původnímu bodu. Čím větší hodnota λ , tím větší prioritu má minimalizace funkce.

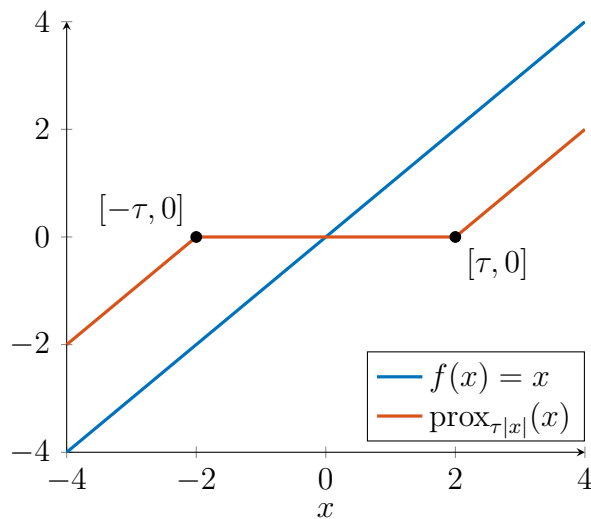
3.4.1 Významné případy

V některých případech lze proximální operátor vyjádřit analyticky, čímž se vyhneme řešení optimalizační úlohy (3.6). Jedním z nich je l_1 norma $f(x) = \tau \|x\|_1$. Proximální operátor této funkce lze vyjádřit jako [25]

$$[\text{prox}_f(v)]_i = \begin{cases} v_i - \tau & v_i \geq \tau, \\ 0 & -\tau \leq v_i \leq \tau, \\ v_i + \tau & v_i \leq -\tau. \end{cases} \quad (3.8)$$

Operátor $\text{prox}_{\tau\|x\|_1}$ se obvykle nazývá soft thresholding, nebo také měkké prahování. Jeho vlastnost je ilustrována na obr. 3.3.

Dalším důležitým případem je TV norma (konkrétně její 2D formulace z definice 1.18). Její proximální operátor bohužel analytické vyjádření nemá a musíme se tak spokojit s iteračním algoritmem, který ho aproximuje. V práci bude tento iterační algoritmus využíván, jeho implementace byla převzata z toolboxu UNLocBox. [26]



Obr. 3.3: Měkké prahování v jedné proměnné s $\tau = 2$.

3.5 Forward-backward splitting

Uvažujme úlohu

$$\min_x f_1(x) + f_2(x), \quad (3.9)$$

kde $f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní funkce a $f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je konvexní, diferencovatelná a má lipschitzovsky spojitý gradient ∇f_1 s konstantou β , tedy platí

$$\|\nabla f_1(x) - \nabla f_1(y)\| \leq \beta \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (3.10)$$

Potom každá posloupnost generovaná algoritmem 3.1 konverguje k řešení problému (3.9). [7]

Algoritmus 3.1 Forward-backward splitting (FBS)

- 1: $\varepsilon \in (0, \min\{1, 1/\beta\})$
 - 2: Počáteční hodnota $x_0 \in \mathbb{R}^n$
 - 3: $n = 0$
 - 4: **repeat**
 - 5: $\gamma_n \in \langle \varepsilon, 2/\beta - \varepsilon \rangle$
 - 6: $y_n = x_n - \gamma_n \nabla f_1(x_n)$
 - 7: $\lambda_n \in \langle \varepsilon, 1 \rangle$
 - 8: $x_{n+1} = x_n + \lambda_n (\text{prox}_{\gamma_n f_2} y_n - x_n)$
 - 9: $n = n + 1$
 - 10: **until** konvergence
-

Podmínku konvergence algoritmu lze formulovat dvěma způsoby. Buďto pomocí hodnoty účelové funkce $f_n = f_1(x_n) + f_2(x_n)$ jako

$$\frac{|f_n - f_{n-1}|}{f_n} < \varepsilon, \quad (3.11)$$

nebo pomocí hodnot hledané neznámé

$$\frac{\|x_n - x_{n-1}\|_2}{\|x_n\|_2} < \varepsilon, \quad (3.12)$$

kde $\varepsilon > 0$ značí tzv. toleranci. V prvním případě je tedy algoritmus ukončen v momentě, kdy se hodnoty účelové funkce začnou relativně měnit „příliš málo“. Druhá podmínka tímto způsobem zkoumá změny v neznámé.

Typickým problémem, který lze tímto algoritmem řešit, je

$$\min_x \underbrace{\frac{1}{2}\|Ax - y\|_2^2}_{f_1(x)} + \underbrace{\psi(x)}_{f_2(x)}. \quad (3.13)$$

Celá řada úloh ve zpracování obrazu nebo signálu má tuto formu, např. odšumování [18], dekonvoluce [13], nebo inpainting [14]. Využívá se také v rekonstrukci obrazu z magnetické rezonance. Gradient funkce f_1 má tvar

$$\nabla f_1(x) = A^*(Ax - y). \quad (3.14)$$

Tento předpis lze použít i v případě, že je uvažováno komplexní x . Konstantu β lze přímo odvodit z definice 3.10 s pomocí rovnice (1.23) a věty 1.16

$$\begin{aligned} \|\nabla f_1(x_1) - \nabla f_1(x_2)\| &= \|A^*(Ax_1 - y) - A^*(Ax_2 - y)\| = \\ &= \|A^*Ax_1 - A^*y - A^*Ax_2 + A^*y\| = \|A^*A(x_1 - x_2)\| \leq \|A\|^2\|x_1 - x_2\|, \end{aligned}$$

tedy platí

$$\beta = \|A\|^2. \quad (3.15)$$

Pokud je k dispozici $\|A\|$ (nebo alespoň její horní odhad) a je znám proximální operátor funkce f_2 (například v případě TV normy nebo ℓ_1 normy, viz sekce 3.4.1), je možné problém velmi efektivně vyřešit výše uvedeným algoritmem FBS.

4 Poznámky ke komprimovanému snímání

4.1 Řídká řešení systémů lineárních rovnic

Nechť $y \in \mathbb{C}^m$ představuje měření signálu $x \in \mathbb{C}^N$ jako lineární kombinaci základních „stavebních bloků“ $a_i \in \mathbb{C}^m$, tedy:

$$y = \sum_{i=1}^N x_i a_i. \quad (4.1)$$

V maticovém zápisu lze použít tvar $Ax = y$, přičemž $x \in \mathbb{C}^N$ je hledaný vektor (původní signál) a $A \in \mathbb{C}^{m \times N}$ je plně řádkové hodnoty, přičemž $m < N$. Z lineární algebry je známo, že taková soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení. Mezi nimi má smysl hledat řešení, které je co nejřidší, tedy obsahuje co nejvíce nulových složek. To lze zapsat jako optimalizační úlohu

$$\min_x \|x\|_0 \quad \text{vzhledem k } Ax = y. \quad (4.2)$$

Jedná se o problém třídy NP a pro velká N jej nelze vyřešit v „rozumném“ čase. Nezbyvá tedy než slevit z nároků na přesné řešení a spokojit se s řešením přibližným. Jedním ze způsobů, jak ho získat, je místo ℓ_0 normy využít nejbližší konvexní normu, tedy ℓ_1 . Úloha (4.2) tedy přejde v

$$\min_x \|x\|_1 \quad \text{vzhledem k } Ax = y. \quad (4.3)$$

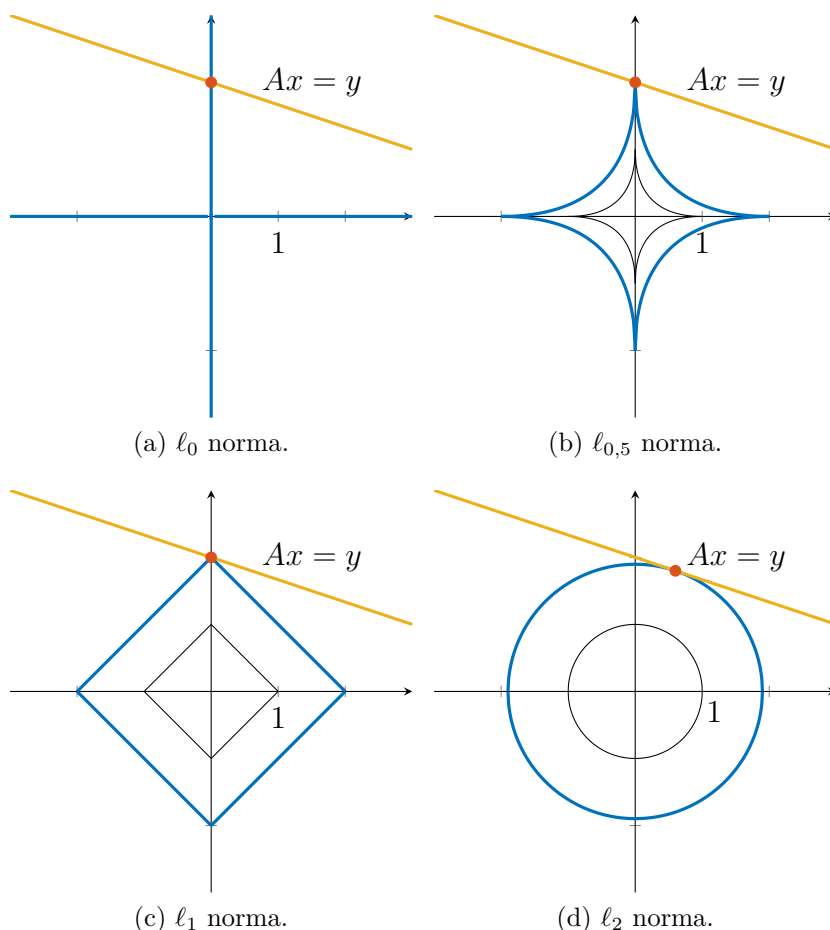
Na tento problém lze použít celou řadu metod konvexní optimalizace a ukazuje se, že nalezené řešení úlohy (4.3) se překvapivě často shoduje s řešením původního problému (4.2). Různé vlastnosti, které musí splňovat matice A , aby uvedené problémy byly ekvivalentní, lze nalézt v [16]. Ilustrace, proč je možné ℓ_0 normu nahradit ℓ_1 normou, je znázorněna na obr. 4.1.

4.2 Komprimované snímání

Obvyklý způsob komprese dat (zmenšení objemu dat) spočívá v nasbírání všech dat, provedení vhodné transformace a ponechání jen několika koeficientů, které nesou největší část informace. Typickým příkladem je kompresní formát JPEG, kde popsanému postupu odpovídá získání hodnot všech pixelů obrazu, provedení diskretní kosinové transformace (DCT) a kvantování vzniklých koeficientů. Ponecháním pouze k koeficientů a zakódováním pouze jejich indexů a velikostí dojde ke kompresi. Tento přístup je vhodný proto, že k určitému typu signálu (zde se jedná o obrazy) je možné nalézt vhodnou transformaci (DCT), po které je signál řídký, případně přibližně řídký. [16]

Přirozeně nastává otázka, zda by za předpokladu přibližné řídkosti ve vhodné reprezentaci signálu nešlo naměřit jen podstatnou část signálu (nebo jeho lineárních kombinací) a vhodnou rekonstrukcí získat signál původní. Ukazuje se, že v některých případech je to možné. Matematická teorie, která se touto problematikou zabývá, se nazývá komprimované snímání. Obecnou teorii lze najít v [8], [12], v práci však nebude přímo aplikována.

Pro aplikaci komprimovaného snímání v MRI je podstatné aby: a) existovala transformace, ve které je signál řídký, b) artefakty způsobené podvzorkováním k -prostoru byly nekoherentní (chovaly se podobně jako šum), c) byla použita nelineární rekonstrukce vynucující řídkost a věrnost k naměřeným datům.



Obr. 4.1: Postupně se zvětšující koule v jednotlivých normách. Řešení je v bodě dotyku koule s množinou bodů danou rovnicí $Ax = y$. Pro $0 < p \leq 1$ se řešení dané ℓ_p normou shodují s řešením v ℓ_0 normě.

Podmínka a) závisí na typu snímaného obrazu. Velká část skutečných obrazů z MRI má přibližně řídké difference, což je dáno tím, že z určitého typu tkáně pochází vždy podobný signál. U angiografie je například obraz sám o sobě řídký. Dále se běžně jako „zřídšující“ transformace používá waveletová transformace.

Požadavek b) nejlépe splňuje naprosto náhodné vzorkování k -prostoru. Toho je z praktického hlediska nemožné dosáhnout vzhledem k hardwarovým omezením gradientních polí. Je tedy třeba navrhnout takové vzorkování, které by se chovalo podobně nekoherentně, což splňuje například radiální (obr. 2.10b) a spirálovité vzorkování (obr. 2.10c).

Nelineární rekonstrukce z podmínky c) budou představeny v následující kapitole.

5 Formulace optimalizačních metod

Nechť \mathcal{R} značí operátor neuniformní Fourierovy transformace, $d \in \mathbb{C}^{n_d}$ jsou naměřená data, u kterých byla kompenzována hustota pomocí Voroného diagramu a $\hat{u} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ je hledaný originální obraz. Pokud by data nebyla zašuměná, muselo by platit¹

$$\mathcal{R}\hat{u} = d. \quad (5.1)$$

V případě podvzorkování se jedná o tzv. nedourčený problém, existuje tedy nekonečně mnoho obrazů u , pro které také platí $\mathcal{R}u = d$. Pro úspěšnou rekonstrukci původního obrazu je tedy třeba přidat dodatečné podmínky.

5.1 Regularizace TV normou

Nejběžnější úlohou pro rekonstrukci obrazu z podvzorkovaných dat je regularizace TV normou. Vychází z předpokladu, že rekonstruovaný obraz má řídké difference, respektive že je po částech konstantní.

5.1.1 Rekonstrukce pro jednu cívku

Díky této vlastnosti je možné získat \hat{u} tak, že se ze všech řešení rovnice (5.1) vybere to, které má nejřidší difference. To lze zapsat jako optimalizační úlohu ve tvaru

$$\hat{u} = \arg \min_u \|\mathcal{D}u\|_0 \quad \text{vzhledem k } \mathcal{R}u = d, \quad (5.2)$$

kde \mathcal{D} značí diferenční operátor². Jak bylo řečeno v kapitole 4.1, je možné nekonvexní normu ℓ_0 nahradit nejbližší konvexní normou ℓ_1 a získat shodné nebo alespoň téměř shodné řešení.

Ve skutečnosti jsou navíc data d zašuměná, proto se povoluje drobná odchylka od přesného řešení. Úloha má tedy tvar

$$\hat{u} = \arg \min_u \|\mathcal{D}u\|_1 \quad \text{vzhledem k } \|\mathcal{R}u - d\|_2^2 \leq \varepsilon, \quad (5.3)$$

častěji se však uvádí v tzv. penalizovaném tvaru

$$\hat{u} = \arg \min_u \|\mathcal{D}u\|_1 + \frac{\tau}{2} \|\mathcal{R}u - d\|_2^2, \quad (5.4)$$

kde parametr τ nastavuje kompromis mezi řídkostí obrazu (regularizační člen) a věrností obrazu k naměřeným datům (věrnostní člen). Parametr τ sice lze určit tak, aby řešení úloh (5.3) a (5.4) bylo stejné, v praxi se však určuje experimentálně. [28]

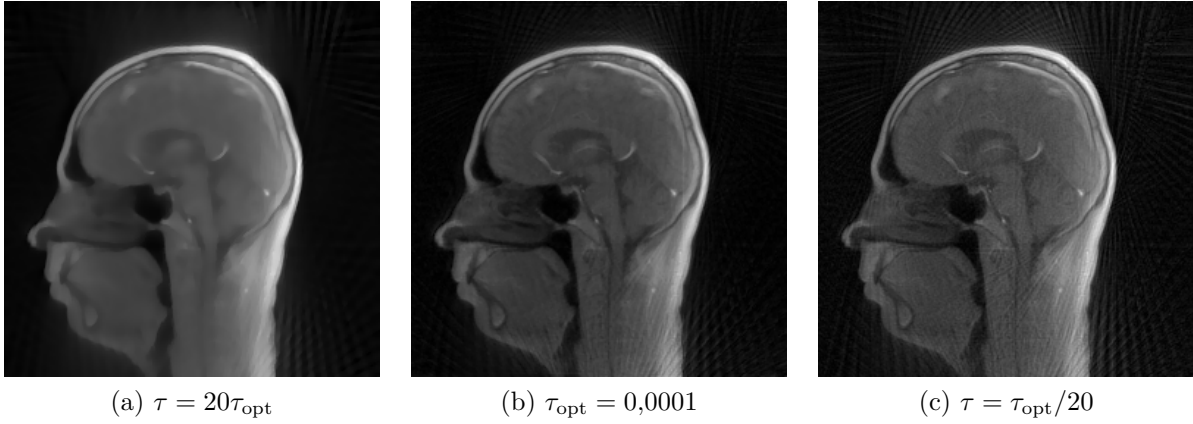
Člen $\|\mathcal{D}u\|_1$ odpovídá TV normě definované v (1.18). Bez újmy na obecnosti lze parametr τ umístit k regularizačnímu členu. Konečný tvar úlohy, který lze běžně najít v literatuře, je

$$\hat{u} = \arg \min_u \frac{1}{2} \|\mathcal{R}u - d\|_2^2 + \tau \text{TV}(u). \quad (5.5)$$

V tomto případě pro příliš nízké hodnoty τ nedojde k potlačení artefaktů, naopak při volbě velkého τ dojde k přílišnému vyhlazení obrazu (obr. 5.1).

¹Vztah (5.1) samozřejmě vzhledem k použití neuniformní Fourierovy transformace a kompenzace hustoty platí pouze přibližně. Výpočtem $\mathcal{R}\hat{u}$ se získá pouze odhad d , podobně jako ve vztahu (1.10).

²Lze uvažovat izotropní i anizotropní verzi. V algoritmech, které v rámci práce vznikly, je implementována izotropní verze.



Obr. 5.1: Vliv regularizačního parametru τ na rekonstrukci hlavy pro 100 radiálních trajektorií.

5.1.2 Rekonstrukce pro více cívek

Pro úlohu s n_c cívkami se senzitivitami \mathcal{S}_k , které naměří data d_k , lze rekonstrukční úlohu snadno zobecnit. Pro nezašuměná data obraz \hat{u} musí splňovat

$$\mathcal{R}\mathcal{S}_k\hat{u} = d_k \quad i = 1, 2, \dots, n_c. \quad (5.6)$$

Podobnými úvahami jako v případě jedné cívky lze dojít k úloze

$$\hat{u} = \arg \min_u \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^{n_c} (\mathcal{R}\mathcal{S}_k u - d_k) \right\|_2^2 + \tau \text{TV}(u). \quad (5.7)$$

Aby bylo možné pro výpočet použít algoritmus FBS, je třeba odvodit gradient věrnostního členu a lipschitzovskou konstantu tohoto gradientu.

Pro věrnostní člen platí

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^{n_c} (\mathcal{R}\mathcal{S}_k u - d_k) \right\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n_c} \frac{1}{2} \|\mathcal{R}\mathcal{S}_k u - d_k\|_2^2, \quad (5.8)$$

odtud snadno s využitím (3.14) plyne

$$\nabla f_1(u) = \sum_{k=1}^{n_c} \mathcal{S}_k^* \mathcal{R}^* (\mathcal{R}\mathcal{S}_k u - d_k). \quad (5.9)$$

Lipschitzovskou konstantu β lze při označení $A_k = \mathcal{R}\mathcal{S}_k$ odvodit snadno dosazením do (3.10):

$$\|\nabla f_1(u_1) - \nabla f_1(u_2)\| = \left\| \sum_{k=1}^{n_c} A_k^* (A_k u_1 - d_k) - \sum_{k=1}^{n_c} A_k^* (A_k u_2 - d_k) \right\| = \quad (5.10)$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n_c} A_k^* A_k (u_1 - u_2) \right\| \leq \sum_{k=1}^{n_c} \|A_k\|^2 \|u_1 - u_2\|. \quad (5.11)$$

S použitím věty 1.7 lze získat

$$\|A_k\| = \|\mathcal{R}\mathcal{S}_k\| \leq \|\mathcal{R}\| \|\mathcal{S}_k\| \quad (5.12)$$

a poté

$$\beta = \sum_{k=1}^{n_c} \|A_k\|^2 \leq \sum_{k=1}^{n_c} \|\mathcal{R}\|^2 \|\mathcal{S}_k\|^2 = \|\mathcal{R}\|^2 \sum_{k=1}^{n_c} \max_{i,j} \|S_k\|_{i,j}^2. \quad (5.13)$$

S takto odvozenými parametry lze nyní pro vyřešení problémů (5.5) a (5.7) použít algoritmus FBS 3.1.

5.2 Regularizace TGV normou

TGV norma³ (total generalized variation) je zobecněním TV normy. Zobecnění spočívá v tom, že se kromě prvních diferencí zohledňují i difference vyšších řádů, nejčastěji druhého. Metoda je vhodná pro obrazy, které jsou po částech lineární. [3], [20]

5.2.1 Zavedení TGV

Pro názornost je vhodné TGV zavést nejprve pro spojitý obraz $u(x_1, x_2)$ na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, který je chápán jako funkce $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Izotropní TV norma by v tomto případě měla tvar

$$\text{TV}(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| \, dx, \quad (5.14)$$

kde ∇u značí gradient funkce u . TGV norma druhého řádu je vyjádřena jako minimalizační problém

$$\text{TGV}_{\alpha}^2(u) = \min_v \alpha_1 \int_{\Omega} |\nabla u - v| \, dx + \alpha_0 \int_{\Omega} |\mathcal{E}(v)| \, dx, \quad (5.15)$$

přičemž minimum je bráno přes všechna komplexní vektorová pole $v : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^2$ a $\mathcal{E}(v) = 1/2(\nabla v + (\nabla v)^T)$ je tzv. symetrizovaný gradient, přičemž gradient vektorového pole v je chápán jako

$$\nabla v = \nabla(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

První člen v (5.15) zohledňuje první derivace podobně jako TV norma, v druhém členu jsou brány v potaz i druhé derivace. Parametr $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$ určuje, který z těchto členů má vyšší váhu. V rámci práce budou použity parametry $\alpha_0 = 2$ a $\alpha_1 = 1$, jak je doporučeno v [20].

5.2.2 Chování TGV jako regularizéru

V této sekci je intuitivně vysvětleno, jaký vliv má TGV norma, pokud je použita jako regularizér v optimalizační úloze.

V části obrazu u , kde se nachází hrana⁴, jsou druhé derivace obrazu podstatně větší, než první. Proto se v TGV normě vyplatí lokálně zvolit $v = (0, 0)$ a penalizován je pouze člen $|\nabla u|$, tak jako u TV normy, což má za následek schopnost zachovávání hran.

³Stejně jako v případě TV (semi)normy se jedná pouze o seminormu, předpona semi- se však běžně vypouští.

⁴Za hranu lze u hladkého obrazu považovat část funkce, kde její hodnota hodně strmě narůstá.

Pokud je naopak obraz lokálně hladký, druhé derivace jsou výrazně menší a vyplatí se zvolit $v = \nabla u$. Důsledkem je, že jsou penalizovány druhé derivace obrazu. Díky tomu v této části bude hladký obraz preferovaný před schodovitým, což je hlavní výhoda oproti TV normě, která schodovitý a hladký obraz nedokáže rozlišit.

U skutečného obrazu samozřejmě nebudou nastávat tyto extrémní případy, ale něco „mezi nimi“.

5.2.3 Diskretizace TGV normy

Aby bylo možné problém vyřešit numericky, je třeba zavést diskrétní verze operátorů ∇ a \mathcal{E} , které budou značeny stejně jako jejich spojitě varianty. Necht $u \in \mathbb{C}^{MN}$. Operátor $\nabla : \mathbb{C}^{MN} \rightarrow \mathbb{C}^{2MN}$ je definován pomocí dopředných diferencí, kde první složka odpovídá diferencím ve směru x , druhá pak ve směru y . V následujících zápisech se předpokládá, že pokud je nějaký z indexů uveden, ale není explicitně omezen, nabývá v daném vztahu všech hodnot, přičemž $1 \leq i \leq M$, $1 \leq j \leq N$, $1 \leq k \leq 2$.

$$(\nabla u)_{i,j,1} = \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j} & \text{pro } 1 \leq i < M, \\ 0 & \text{pro } i = M, \end{cases} \quad (5.17)$$

$$(\nabla u)_{i,j,2} = \begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j} & \text{pro } 1 \leq j < N, \\ 0 & \text{pro } j = N. \end{cases} \quad (5.18)$$

Operátor \mathcal{E} definovaný pomocí gradientu vektorového pole z rovnice (5.16) by měl obecně dvěma komplexním číslům přiřadit čtyři komplexní čísla, ovšem vzhledem k symetrii \mathcal{E} stačí ukládat pouze tři, proto $\mathcal{E} : \mathbb{C}^{2MN} \rightarrow \mathbb{C}^{3MN}$. Pro zjednodušení zápisu v definici operátoru \mathcal{E} je vhodné nadefinovat ještě operátory $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y : \mathbb{C}^{2MN} \rightarrow \mathbb{C}^{2MN}$

$$(\mathcal{E}_x v)_{i,j,k} = \begin{cases} v_{i,j,k} & \text{pro } i = 1, \\ v_{i,j,k} - v_{i-1,j,k} & \text{pro } 1 < i < M, \\ -v_{i-1,j,k} & \text{pro } i = M, \end{cases} \quad (5.19)$$

$$(\mathcal{E}_y v)_{i,j,k} = \begin{cases} v_{i,j,k} & \text{pro } j = 1, \\ v_{i,j,k} - v_{i,j-1,k} & \text{pro } 1 < j < N, \\ -v_{i,j-1,k} & \text{pro } j = N. \end{cases} \quad (5.20)$$

Pomocí nich pak lze snadno zavést

$$(\mathcal{E} v)_{i,j,1} = (\mathcal{E}_x v)_{i,j,1}, \quad (5.21)$$

$$(\mathcal{E} v)_{i,j,2} = (\mathcal{E}_y v)_{i,j,2}, \quad (5.22)$$

$$(\mathcal{E} v)_{i,j,3} = \frac{(\mathcal{E}_x v)_{i,j,2} + (\mathcal{E}_y v)_{i,j,1}}{2}. \quad (5.23)$$

Důvod, proč se operátory diskretizují zrovna takto, je ten, že k nim lze snadno sestavit adjungované operátory pouze za pomoci zpětných a dopředných diferencí. Adjungované operátory se později objeví v algoritmu, kterým se řeší úloha regularizovaná TGV normou.

5.2.4 Rekonstrukce pro jednu cívku

Sestavení úlohy probíhá stejně jako v algoritmu s TV normou, s jediným rozdílem, že TV normu nahradíme TGV normou 2. řádu

$$\hat{u} = \arg \min_u \frac{1}{2} \|\mathcal{R}u - d\|_2^2 + \tau \text{TGV}_\alpha^2(u). \quad (5.24)$$

5.2.5 Rekonstrukce pro více cívek

Obdobně sestrojíme úlohu pro více cívek

$$\hat{u} = \arg \min_u \frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^{n_c} (\mathcal{R}\mathcal{S}_k u - d_k) \right\|_2^2 + \tau \text{TGV}_\alpha^2(u). \quad (5.25)$$

Data d_k lze chápat jako sloupcové vektory délky n_d a uspořádat je vedle sebe do matice $d \in \mathbb{C}^{n_c n_d}$. Potom je možné zavést operátor $\mathcal{K} : \mathbb{C}^{MN} \rightarrow \mathbb{C}^{n_c n_d}$, který obraz u zobrazí na matici \bar{d} , jejíž j -tý sloupec $\bar{d}_{:,j}$ je daný vztahem $\mathcal{R}\mathcal{S}_j u$. Adjungovaný operátor pak má tvar

$$\mathcal{K}^* \bar{d} = \sum_j^{n_c} \mathcal{S}_j^* \mathcal{R}^* \bar{d}_{:,j}.$$

Toto značení umožní zapsat úlohu (5.25) v podstatně kompaktnějším tvaru

$$\hat{u} = \arg \min_u \frac{1}{2} \|\mathcal{K}u - d\|_2^2 + \tau \text{TGV}_\alpha^2(u). \quad (5.26)$$

Vzhledem k formě TGV normy a s ohledem na popsanou diskretizaci, se problém řeší jako

$$\min_{u,v} \frac{1}{2\tau} \|\mathcal{K}u - d\|_2^2 + \alpha_1 \|\nabla u - v\|_1 + \alpha_0 \|\mathcal{E}v\|_1. \quad (5.27)$$

Na tento problém nelze použít FBS algoritmus jako v případě TV normy, neboť regularizační člen nelze převést do tvaru, jehož proximální operátor by šel efektivně spočítat. Je třeba využít algoritmus popsany dále.

5.2.6 Algoritmus TGV

V této sekci je uveden algoritmus pro výpočet problému (5.27). Jedná se o tzv. primární-duální algoritmus, jeho odvození pro daný problém lze najít v [20].

Operátory použité v algoritmu jsou definované následovně

$$\text{proj}_P(\tilde{p}) = \frac{\tilde{p}}{\max\left(1, \frac{|\tilde{p}|}{\alpha_1}\right)}, \quad \text{proj}_Q(\tilde{q}) = \frac{\tilde{q}}{\max\left(1, \frac{|\tilde{q}|}{\alpha_0}\right)}, \quad (5.28)$$

přičemž operace jsou uvažovány po složkách. Dále

$$\text{prox}_2^\sigma(\tilde{r}) = \frac{\tilde{r}}{1 + \sigma\tau}. \quad (5.29)$$

Operátory div_1 a div_2 jsou zvoleny tak, aby platilo

$$(\text{div}_2)^* = -\mathcal{E}, \quad (\text{div}_1)^* = -\nabla. \quad (5.30)$$

Vzhledem k tomu, že hodnota účelové funkce je v tomto případě minimalizační problém, je vhodnější konvergenci algoritmu posuzovat podle změn v hodnotách neznámé, viz rovnice (3.12).

Algoritmus 5.2 Primární-duální metoda pro TGV

```
1:  $u, \bar{u} = 0, v, \bar{v}, p = 0, q = 0, r = 0$ 
2:  $\lambda = \sigma = 1/\sqrt{12}$ 
3: repeat
4:    $p = \text{proj}_P(p + \sigma(\nabla \bar{u} - \bar{v}))$ 
5:    $q = \text{proj}_Q(q + \sigma \mathcal{E} \bar{v})$ 
6:    $r = \text{prox}_2^\sigma(r + \sigma(\mathcal{K} \bar{u} - d))$ 
7:    $u_{\text{old}} = u$ 
8:    $u = u + \lambda(\text{div}_1 p - \mathcal{K}^* r)$ 
9:    $\bar{u} = 2u - u_{\text{old}}$ 
10:   $v_{\text{old}} = v$ 
11:   $v = v + \lambda(p + \text{div}_2 q)$ 
12:   $\bar{v} = 2v - v_{\text{old}}$ 
13: until konvergence  $u$ 
```

5.3 Sparsity-assisted signal smoothing

Tato metoda vychází z článku [27], kde byla popsána pro 1D signály. V rámci práce však byla zobecněna do 2D a aplikována na rekonstrukci obrazu z MRI.

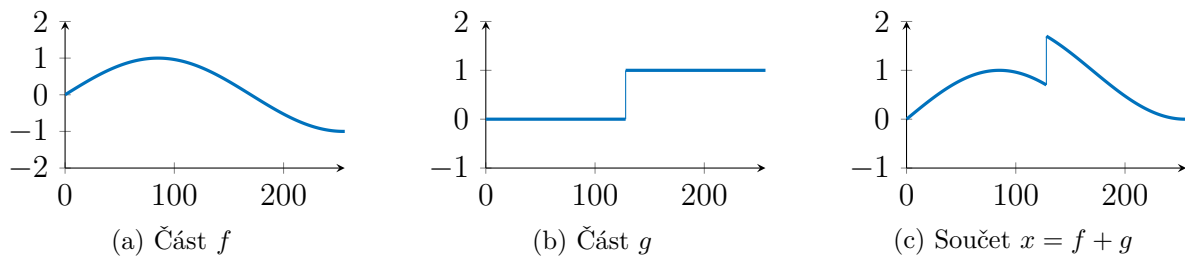
5.3.1 Rekonstrukce pro jednu cívkou

Formulace úlohy

Naměřený obraz v předpokládáme ve tvaru

$$v = f + g + e, \quad (5.31)$$

kde f představuje nízké frekvence obrazu a g po částech konstantní obraz, jak je ilustrováno na obr. 5.2. Člen e představuje šum.



Obr. 5.2: Příklad 1D signálu, pro který je metoda vhodná.

Nechť L značí filtr typu dolní propust. Protože f reprezentuje nízké frekvence obrazu a filtr typu dolní propust má tendenci odstraňovat šum, lze f odhadnout vztahem $\hat{f} = L(f + e)$. V případě, že by byl k dispozici odhad \hat{g} , bylo by možné na základě (5.31) psát $\hat{f} = L(v - \hat{g})$. Snahou modelu je získat $u = f + g$, tedy původní obraz bez šumu. Odhad \hat{u} lze získat jako

$$\hat{u} = \hat{f} + \hat{g} = L(v - \hat{g}) + \hat{g} = L(v) + H(\hat{g}), \quad (5.32)$$

přičemž H je filtr typu horní propust získaný vztahem $H = I - L$, kde I značí „identický“ filtr. Nyní je třeba získat \hat{g} . Aplikací filtru H na rovnici (5.31) se odvodí

$$H(v - g) = e. \quad (5.33)$$

V odvození bylo využito předpokladu, že f představuje nízké frekvence, tedy $H(f) = 0$, a dále faktu, že použitím filtru typu horní propust na šum vznikne opět šum.

Na základě rovnice (5.33) se věrnostní člen modeluje jako $\|H(v - g)\|_2^2$. Protože g má být po částech konstantní obraz, jako regularizační člen je vhodné použít TV normu. Pro získaný obraz v platí $v = \mathcal{R}^*d$, přičemž \mathcal{R}^* je operátor adjungovaný k neuniformní Fourierově transformaci, d značí naměřená data v k -prostoru s kompenzovanou hustotou.

Úloha je tedy formulována ve tvaru

$$\hat{g} = \arg \min_g \frac{1}{2} \|H(\mathcal{R}^*d - g)\|_2^2 + \tau \text{TV}(g), \quad (5.34)$$

kde τ je regularizační parametr.

Převedení do FBS tvaru

Tuto formulaci (5.34) lze převést do tvaru

$$\hat{g} = \arg \min_g \frac{1}{2} \|Ag - w\|_2^2 + \tau \text{TV}(g), \quad (5.35)$$

který umožní úlohu řešit pomocí algoritmu (FBS), neboť platí:

$$\begin{aligned} \|H(\mathcal{R}^*d - g)\|_2^2 &= \|h * (\mathcal{R}^*d - g)\|_2^2 = \|\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}h\mathcal{F}(\mathcal{R}^*d - g))\|_2^2 = \\ &= \|\mathcal{F}h\mathcal{F}(\mathcal{R}^*d - g)\|_2^2 = \|\mathcal{H}(\mathcal{F}g - \mathcal{F}\mathcal{R}^*d)\|_2^2 = \|\mathcal{H}\mathcal{F}g - \mathcal{H}\mathcal{F}\mathcal{R}^*d\|_2^2 = \\ &= \|Ag - w\|_2^2 \end{aligned}$$

při označení $\mathcal{H} = \mathcal{F}h$, $w = \mathcal{H}\mathcal{F}\mathcal{R}^*d$ a $A = \mathcal{H}\mathcal{F}$, kde \mathcal{F} značí diskrétní Fourierovu transformaci.

Mezi druhým a třetím tvarem je využito konvolučního teorému. Rovnost mezi třetím a čtvrtým tvarem platí díky unitárnosti diskrétní Fourierovy transformace, jejímž důsledkem je $\|\mathcal{F}^{-1}x\| = \|x\|$.

Gradient diferencovatelné části funkce $f_1(g) = \frac{1}{2} \|Ag - w\|_2^2$ má tvar

$$\nabla f_1(g) = A^*(Ag - w) \quad (5.36)$$

a pro jeho lipschitzovskou konstantu podle (3.15) platí $\beta = \|A\|^2$. Dále platí

$$\|A\| = \|\mathcal{H}\mathcal{F}\| \leq \|\mathcal{H}\| \|\mathcal{F}\|.$$

\mathcal{F} je unitární, proto $\|\mathcal{F}\| = 1$. Operátor \mathcal{H} realizuje násobení po složkách, je tedy diagonální a platí pro něj $\|\mathcal{H}\| = \max_{i,j} |\mathcal{H}_{ij}|$. Proto dostáváme

$$\beta \leq \left(\max_{i,j} |\mathcal{H}_{ij}| \right)^2.$$

5.3.2 Rekonstrukce pro více cívek

Formulace úlohy

Pro obrazy v_k získané k -tou cívkou s citlivostním profilem \mathcal{S}_k a naměřenými daty d_k , která byla kompenzována hustotou, je opět předpokládán rozklad

$$v_k = f_k + g_k + e_k, \quad (5.37)$$

kde jednotlivé členy mají stejný význam jako v úloze pro jednu cívkou. Obrazy v_k mají tvar $v_k = \mathcal{R}^* d_k$. Jednou z možností, jak úlohu pro více cívek řešit, je přistupovat ke každé cívce zvlášť, tzn. pro každou cívkou řešit úlohu (5.34). Vzhledem k povaze obrazů z jednotlivých cívek by však byl mylný předpoklad, že je g_k po částech konstantní. Proto bude lepší zavést jedno „univerzální“ g a předpokládat $g_k = \mathcal{S}_k g$.

Podobnými úvahami jako v případě jedné cívky lze odvodit

$$H(v_k - g_k) = H(v_k - \mathcal{S}_k g) = e_k \quad (5.38)$$

a zavést věrnostní členy $\|H(v_k - g_k)\|_2^2 = \|H(v_k - \mathcal{S}_k g)\|_2^2$. Pokud jsou e_k vzájemně nezávislé, jejich součet bude opět šum. Jako regularizační člen poslouží opět TV norma.

Úloha má tedy tvar

$$\hat{g} = \arg \min_g \sum_k \frac{1}{2} \|H(\mathcal{R}^* d_k - \mathcal{S}_k g)\|_2^2 + \tau \text{TV}(g). \quad (5.39)$$

Převedení do FBS tvaru

Nejprve použijeme obdobné úpravy jako v případě jedné cívky a dostaneme

$$\sum_k \frac{1}{2} \|H(\mathcal{R}^* d_k - \mathcal{S}_k g)\|_2^2 = \sum_k \frac{1}{2} \|\mathcal{H} \mathcal{F} \mathcal{S}_k g - \mathcal{H} \mathcal{F} \mathcal{R}^* d_k\|_2^2.$$

Označíme $w_k = \mathcal{H} \mathcal{F} \mathcal{R}^* d_k$ a $A_k = \mathcal{H} \mathcal{F} \mathcal{S}_k$ a dostáváme tvar

$$f_1(g) = \sum_k \frac{1}{2} \|A_k g - w_k\|_2^2,$$

který má gradient

$$\nabla f_1(g) = \sum_k A_k^* (A_k g - w_k).$$

Lipschitzovskou konstantu β lze odvodit stejně jako v (5.11), platí

$$\beta = \sum_k \|A_k\|^2.$$

Operátory \mathcal{S}_k a \mathcal{H} jsou diagonální, \mathcal{F} je unitární, a proto lze psát

$$\|A_k\| = \|\mathcal{H} \mathcal{F} \mathcal{S}_k\| \leq \|\mathcal{H}\| \|\mathcal{F}\| \|\mathcal{S}_k\| = \max_{i,j} |[\mathcal{H}]_{ij}| \max_{i,j} |[\mathcal{S}_k]_{i,j}|.$$

Pro konstantu β tedy platí

$$\beta \leq \left(\max_{i,j} |[\mathcal{H}]_{ij}| \sum_k \max_{i,j} |[\mathcal{S}_k]_{i,j}| \right)^2.$$

S odvozenými vztahy je nyní snadné na problém aplikovat algoritmus 3.1.

Získání obrazu

Pro odhady \hat{u}_k jednotlivých obrazů podobně jako v (5.32) platí

$$\hat{u}_k = \hat{f}_k + \hat{g}_k = L(\mathcal{R}^* d_k - \mathcal{S}_k g) + \mathcal{S}_k \hat{g} = L(\mathcal{R}^* d_k) + H(\mathcal{S}_k \hat{g}). \quad (5.40)$$

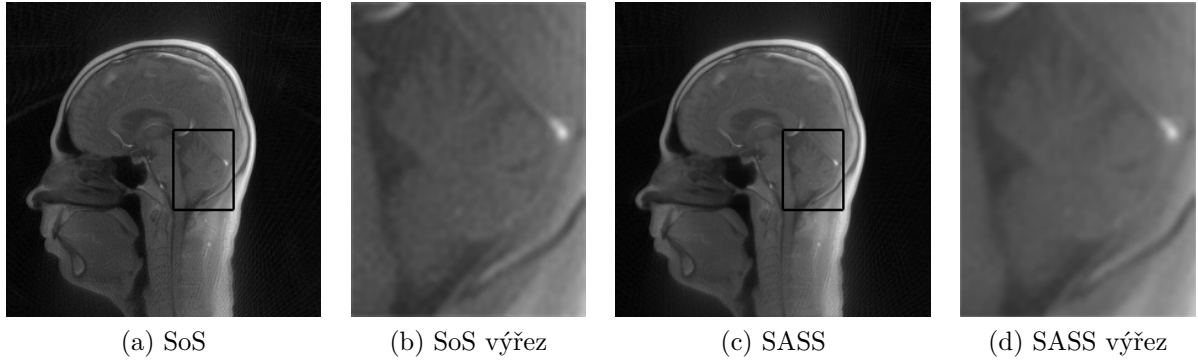
Z těchto dílčích obrazů je možné složit obraz celkový pomocí jednoho ze vzorců v sekci 2.4.1.

5.3.3 Výhody a nevýhody SASS

Hlavní výhodou algoritmu SASS je, že se v jeho implementaci přes FBS nepracuje s operátorem \mathcal{R} . Díky tomu je výpočet poměrně rychlý.

Mezi nevýhody patří nutnost vytvoření vhodného filtru, což pro Butterworthův filtr (1.52) odpovídá volbě dvou parametrů f_0 a n , jejichž volba navíc ovlivňuje i optimální hodnotu regularizačního parametru τ . Také se ukázalo, že metoda není vhodná pro rekonstrukce s příliš velkým podvzorkováním, protože nedokáže úspěšně odstranit artefakty. Z toho důvodu nebude v experimentu v další kapitole uvažována.

Pro nízkou míru podvzorkování, kde jsou artefakty méně výrazné, je však metoda schopná je spolu se šumem potlačit (obr. 5.3).



Obr. 5.3: Rekonstrukce provedená metodou SASS z 200 trajektorií. Došlo k potlačení artefaktů a šumu. Parametry metody: $\tau = 0.0001$, $f_0 = 128$, $n = 1$.

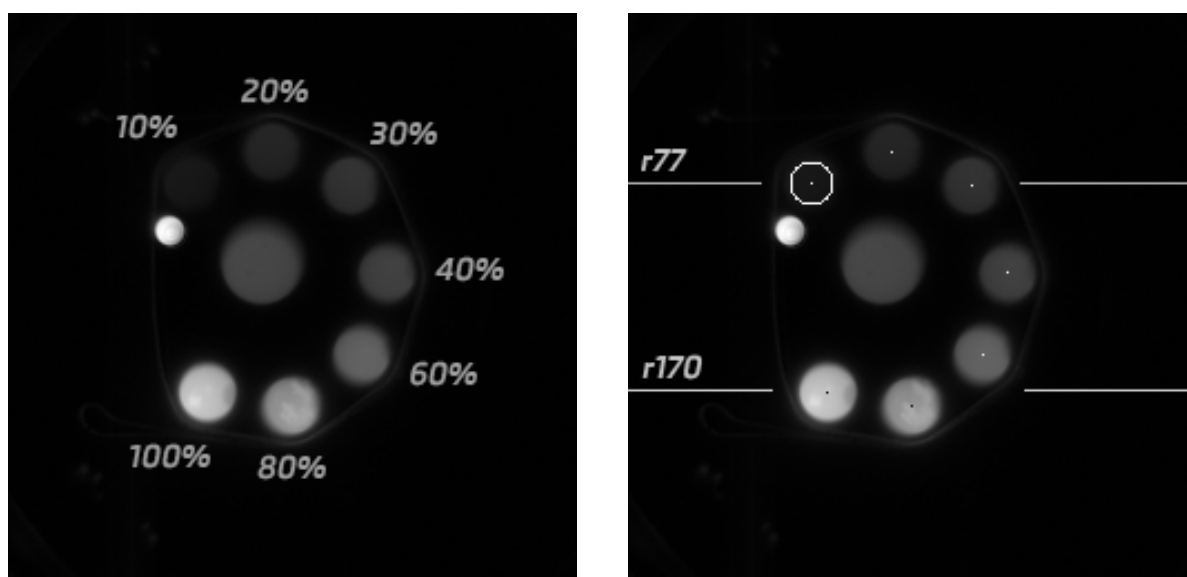
6 Výsledky experimentu

V rámci práce byl proveden experiment na reálných datech dodaných výzkumným centrem CEITEC. Jedná se o data z měření tzv. fantomu.

Cílem experimentu bylo zjistit, nakolik je možné signál podvzorkovat, aniž by výrazně utrpěla kvalita rekonstruovaného obrazu. Podvzorkování bylo simulováno zachováním pouze každé i -té projekce (radiály). Výsledné rekonstrukce z menšího počtu dat pak byly porovnány s „originálním“ obrazem získaným metodou Sum of Squares (SoS) ze všech naměřených projekcí.

6.1 Popis fantomu

Fantom se skládá ze zkumavek, které jsou z části naplněné těžkou vodou D_2O , jenž v magnetické rezonanci neposkytuje žádný signál, a běžnou vodou H_2O , která naopak zdrojem signálu je. Podíl H_2O tedy určuje intenzitu signálu z dané zkumavky. Čím větší intenzita signálu, tím světlejší lze očekávat obraz. Rozložení zkumavek spolu s podílem H_2O lze vidět na obr. 6.1a.



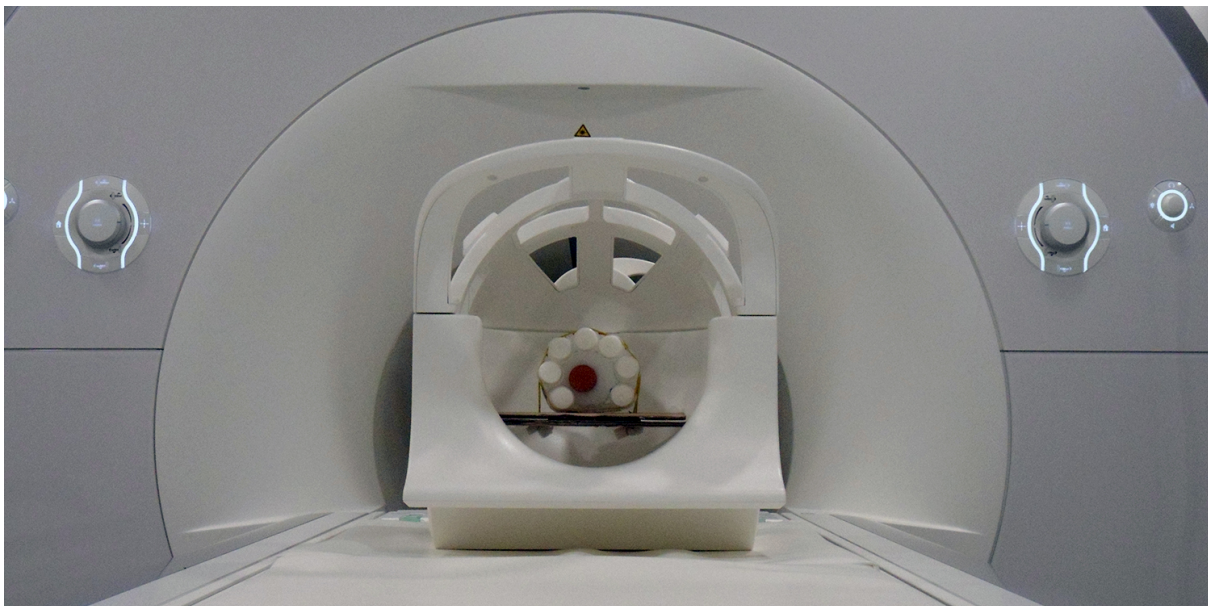
(a) Obraz fantomu s popsáním podílem H_2O ve zkumavkách. Nepopsané kruhy nejsou pro experiment důležité.

(b) Bílé, respektive černé tečky, značí středy kruhů, pro ilustraci je také vykreslena jedna kružnice. Dále jsou naznačeny dva řezy $r77$ a $r170$.

Obr. 6.1: Obraz fantomu s popisky.

Snímání bylo provedeno na 1600 radiálách vycházejících vždy ze středu¹ k -prostoru. Na každé radiále bylo rovnoměrně měřeno 161 vzorků. Celkem byl signál snímán na 16 rovnoměrně rozmístěných přijímacích cívkách. Rozlišení obrazu bylo zvoleno na 256×256 . Foto z měření lze vidět na obr. 6.2.

¹Často se lze setkat i se způsobem měření, kdy radiály nevycházejí ze středu, ale začínají na okraji, projdou středem a pokračují opět na okraj, do „opačné“ části, než ze které vycházely. Tímto způsobem lze dosáhnout ještě přibližně dvojnásobného ušetření času.



Obr. 6.2: Foto z měření. Rekonstruované obrazy jsou oproti skutečnosti otočené o 90 stupňů po směru hodinových ručiček.

6.2 Podvzorkování

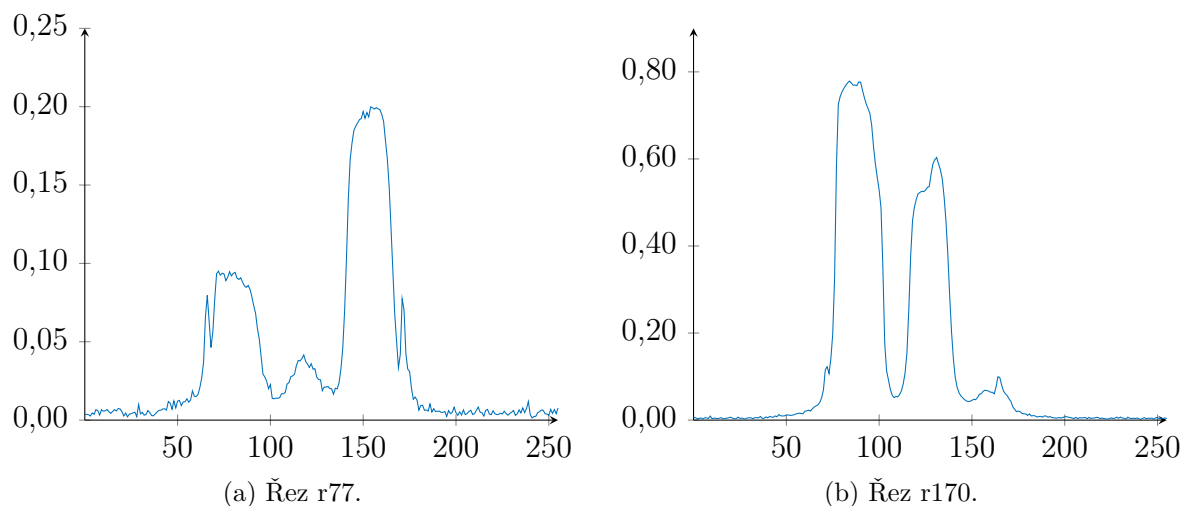
Rekonstrukce byly provedeny pro 80, 64, 50 a 40 projekcí, vzorky na každé radiále byly ponechány všechny. Použity byly metody SoS a regularizace TV a TGV normami. Regularizační parametry τ byly v obou případech určovány experimentálně. Hodnoty pixelů byly převedeny do intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Na rekonstruovaných obrazech byly zkoumány hodnoty pixelů uvnitř jednotlivých kruhů s poloměrem 10 pixelů a také dva řezy nazvané r77 a r170 podle pixelového řádku, kde se řezy nachází, viz obr. 6.1b.

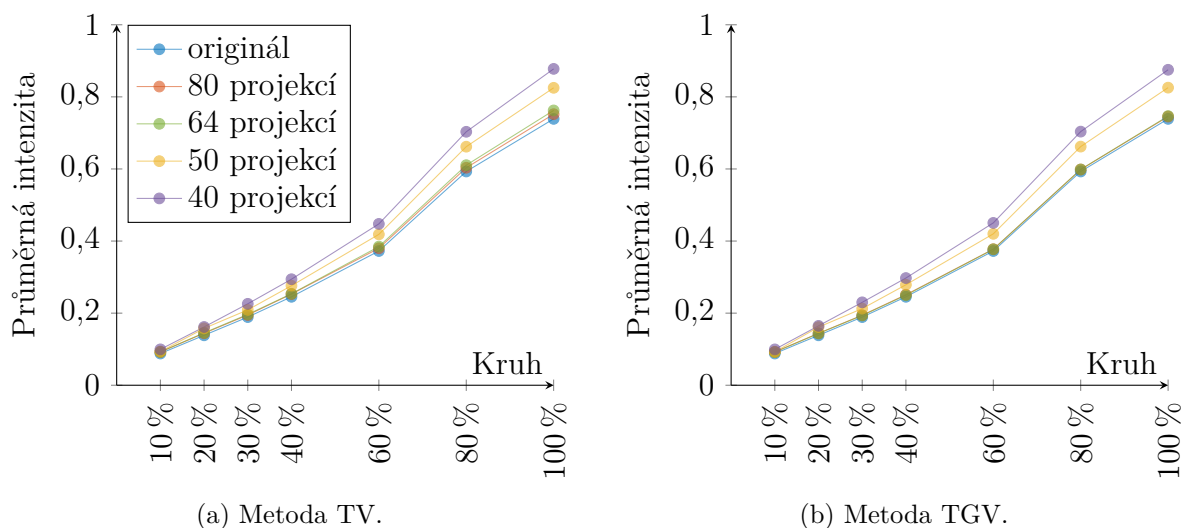
V rámci jednotlivých kruhů byla zkoumána průměrná hodnota pixelů, zatímco řezy byly vyneseny do grafu. Na průměrných hodnotách bylo sledováno, jak moc a jakým způsobem metody mění intenzitu obrazu uvnitř kruhů. Grafy řezů sloužily k určení „míry“ rozmazání v okolí hran. Průměry originálního obrazu, vůči kterým se rekonstrukce budou porovnávat, lze nalézt v tabulce 6.1. Pro představu jsou uvedeny i směrodatné odchylky, maxima a minima. Řezy jsou na obr. 6.3.

Tab. 6.1: Průměrné hodnoty (Avg), směrodatné odchylky (Std), maxima a minima originálního obrazu v rámci jednotlivých kruhů.

	Avg	Std	Max	Min
10 %	0,08798	0,00647	0,09804	0,06275
20 %	0,13853	0,00781	0,14902	0,11765
30 %	0,18906	0,00972	0,20392	0,16078
40 %	0,24525	0,00919	0,25882	0,21961
60 %	0,37238	0,01395	0,38824	0,31765
80 %	0,59288	0,04128	0,67059	0,49412
100 %	0,73900	0,05552	0,87059	0,58039



Obr. 6.3: Řezy r77 a r170 originálního obrazu.



Obr. 6.4: Průměry v rámci jednotlivých kruhů v závislosti na podvzorkování.

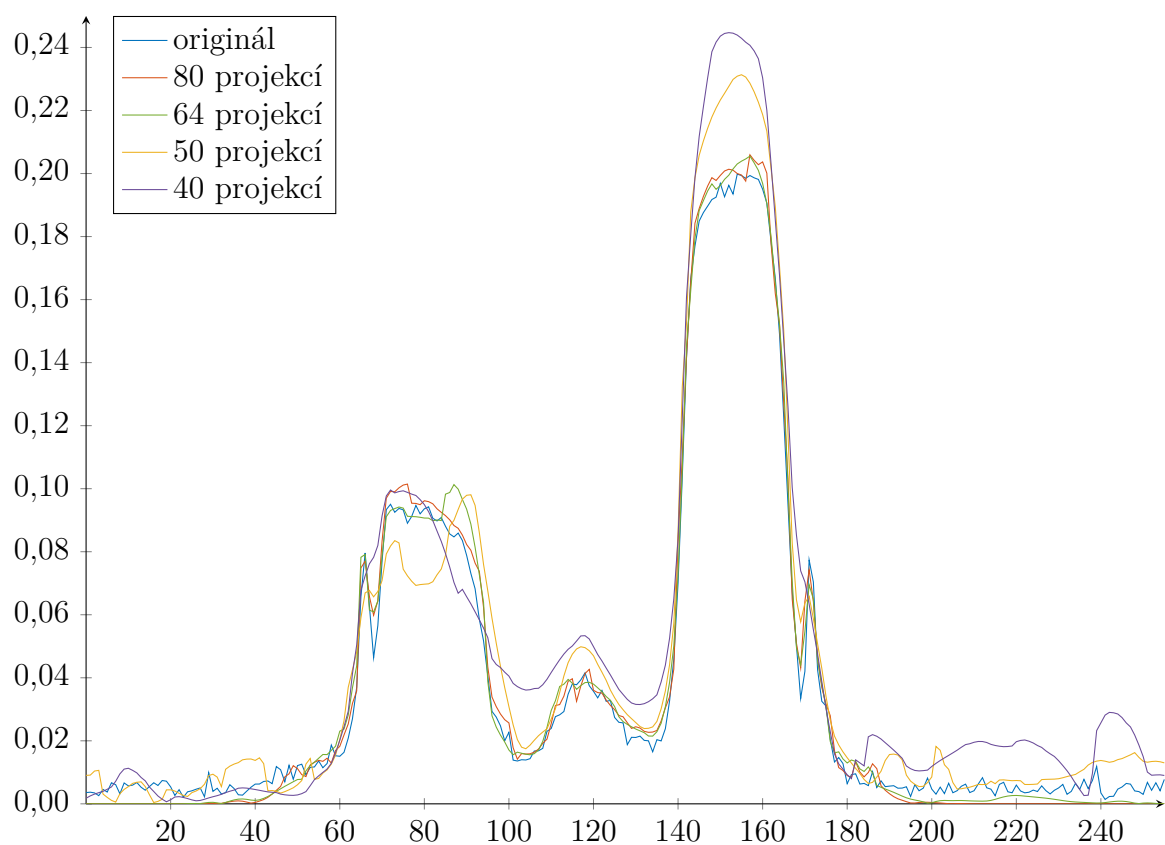
6.3 Vyhodnocení

Z řezů i průměrů je patrné, že nepatrně lepších výsledků dosahuje metoda TGV. Podařilo se provést kvalitní rekonstrukci s pouze 64 projekcemi, která zachovává téměř bezchybně průměrné intenzity jednotlivých kruhů (obr. 6.4b) i hodnoty v řezu r170 (obr. 6.7). Drobné odchylky lze najít pouze v řezu r77 (obr. 6.5) např. mezi pixely 80 a 100.

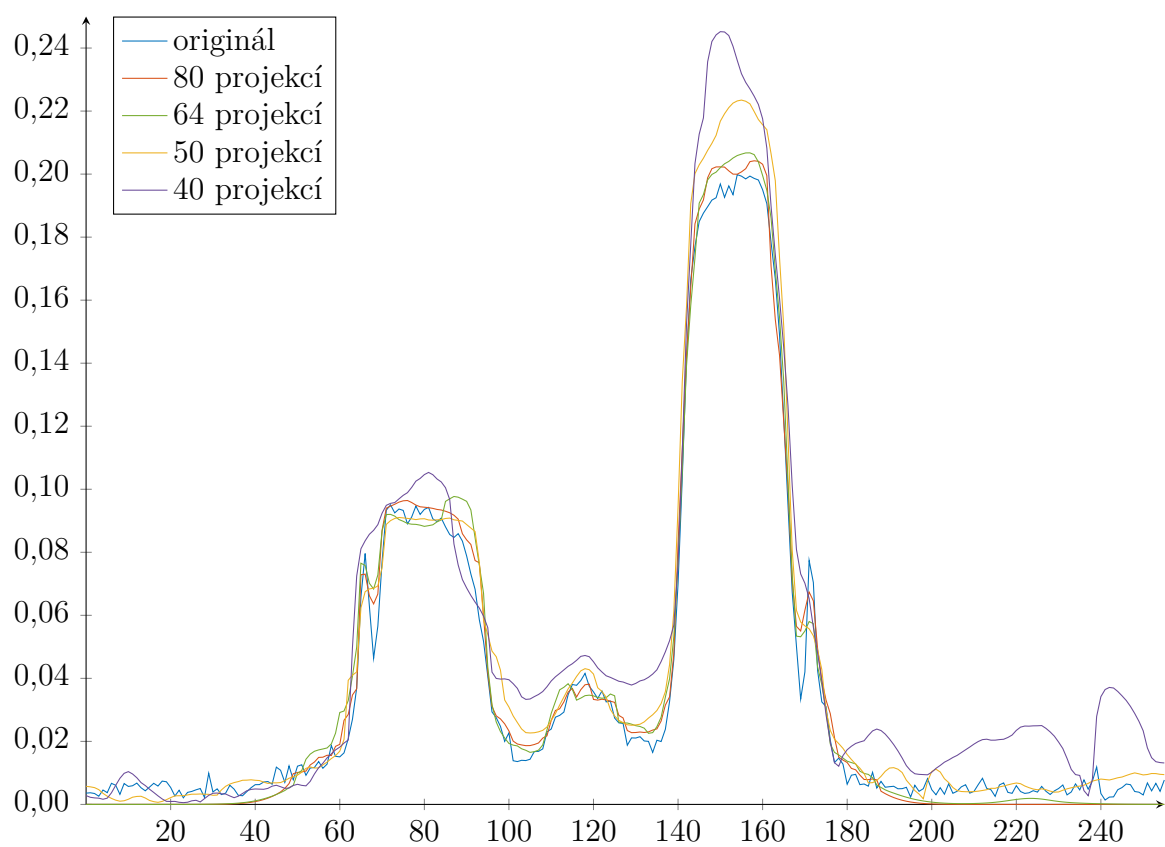
U běžného kartézského snímání by bylo třeba použít 256 projekcí, snímání by tedy bylo možné v tomto případě zrychlit 4×.

Při 50 projekcích se v obou rekonstrukcích začínají průměrné hodnoty odchylvat od originálních. To nemusí být v některých aplikacích problém, v tomto případě však bylo cílem intenzity zachovat, proto je rekonstrukce hodnocena jako nezdařilá. Podstata obrazu i hrany kruhů však zůstaly zachovány a zároveň došlo k odstranění artefaktů (obr. 6.9).

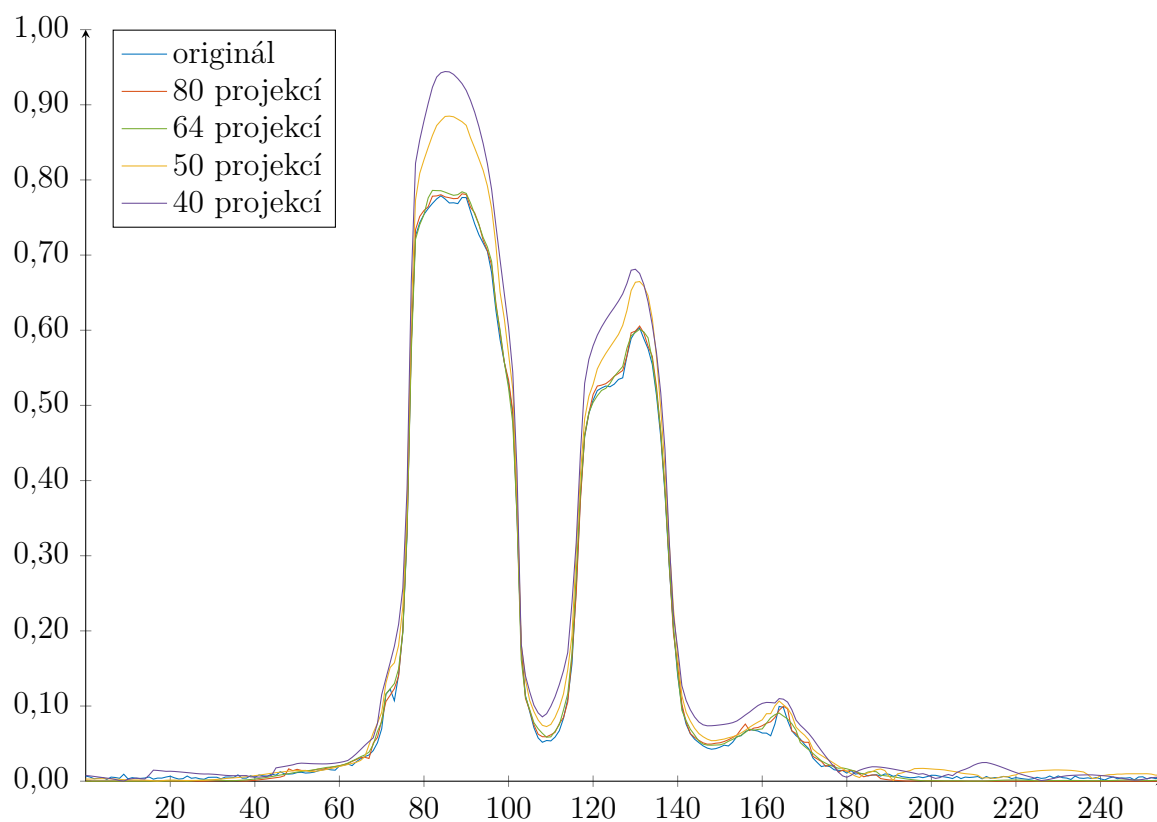
Další snižování počtu projekcí na 40 kromě neodpovídajících průměrů poškodí obraz i vizuálně. Kruhy jsou na první pohled rozmazané a „roztékají“ se do okolí.



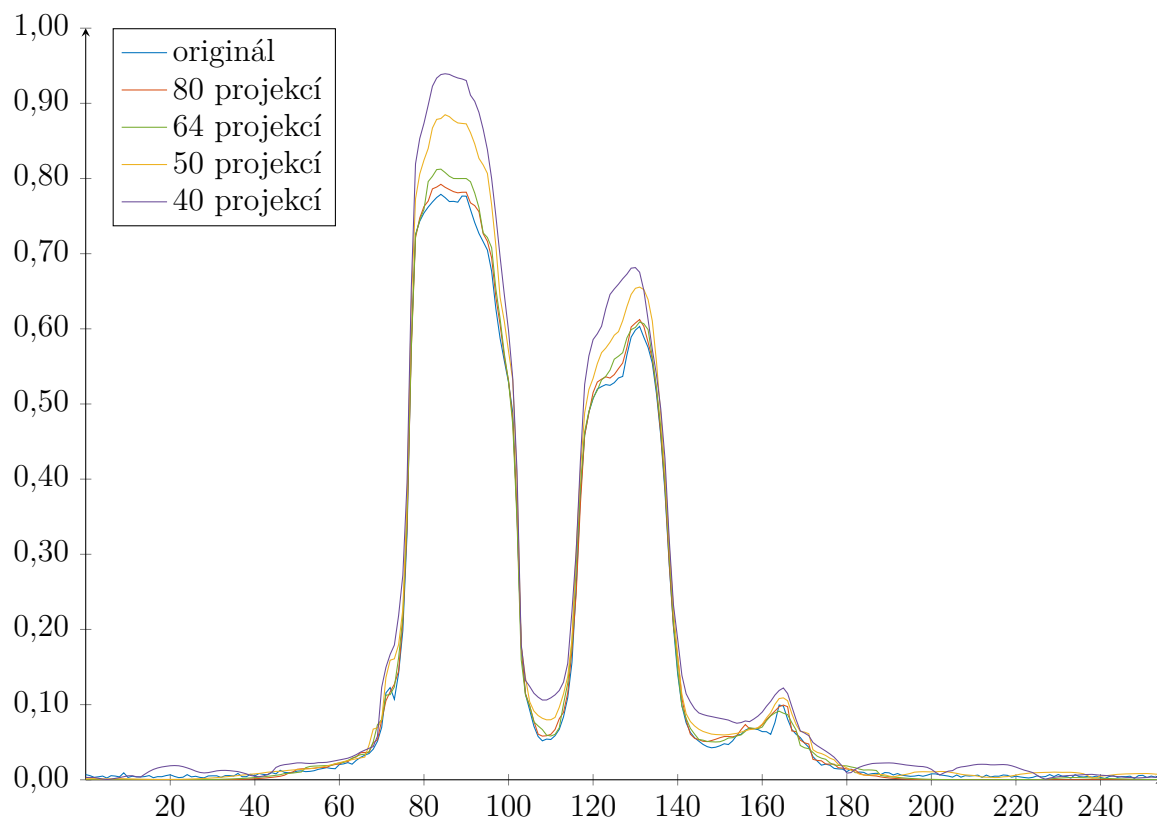
Obr. 6.5: Řez r77 v závislosti na počtu projekcí u metody TGV.



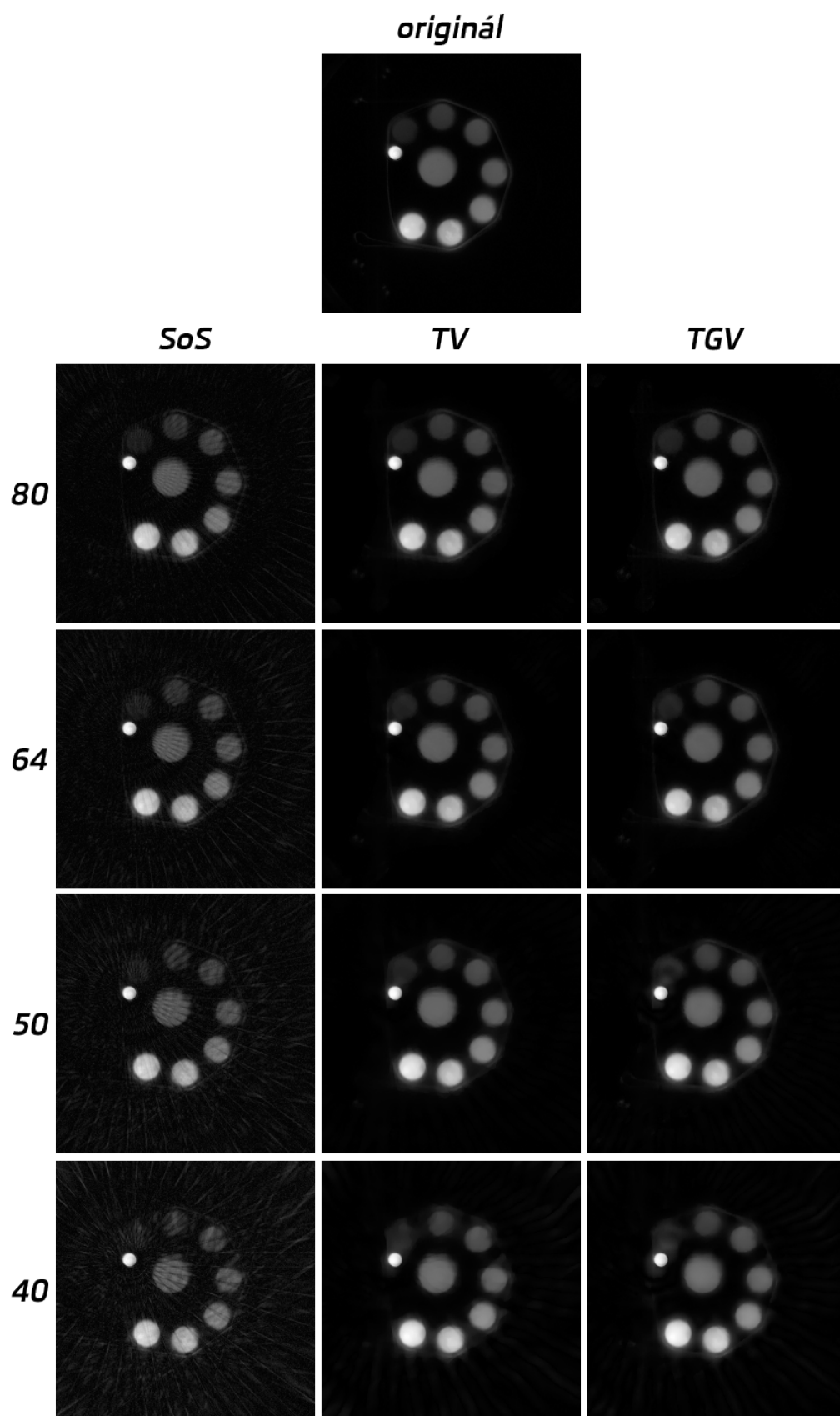
Obr. 6.6: Řez r77 v závislosti na počtu projekcí u metody TV.



Obr. 6.7: Řez r170 v závislosti na počtu projekcí u metody TGV.



Obr. 6.8: Řez r170 v závislosti na počtu projekcí u metody TV.



Obr. 6.9: Rekonstruované obrazy fantomu.

Parametry metody TV: $\tau_{80} = 0,000375$, $\tau_{64} = 0,000375$, $\tau_{50} = 0,0006$, $\tau_{40} = 0,00075$.

Parametry metody TGV: $\tau_{80} = 0,000375$, $\tau_{64} = 0,0006$, $\tau_{50} = 0,0006$, $\tau_{40} = 0,00075$.

7 Závěr

Magnetická rezonance je diagnostická metoda používaná pro zobrazení vnitřních orgánů těla, jejíž hlavní nevýhodou je dlouhá doba snímání, která lineárně závisí na množství snímaných dat. Teorie komprimovaného snímání však říká, že za určitých podmínek lze provést rekonstrukci z výrazně menšího počtu dat, aniž by došlo ke snížení kvality snímků.

Při použití klasických metod rekonstrukce na takto podvzorkovaná data ke ztrátě kvality dochází, problém však lze řešit sestavením optimalizační úlohy, která zahrnuje věrnost obrazu k naměřeným datům a předpoklad řídkosti obrazu ve vhodné transformační doméně.

Hlavním cílem této práce bylo vybrané optimalizační metody popsat a naprogramovat v prostředí MATLAB. Konkrétně se jednalo o metody regularizace totální variační (TV) normou a regularizace zobecněnou totální variační (TGV) normou. V rámci práce navíc byla pro použití v MRI zobecněna metoda Sparsity assisted signal smoothing (SASS), která byla dosud popsána jen pro 1D signály.

Naprogramované algoritmy poté byly použity na reálná data měření z fantomu a porovnány. Nejlepších výsledků dosáhla metoda regularizace TGV normou, pomocí níž byly provedeny kvalitní rekonstrukce při ponechání pouze čtvrtiny dat. Algoritmy i s daty a spustitelnými skripty lze najít na příloženém CD.

Na tuto práci lze navázat mnoha způsoby. Jednou z možností je paralelizace popsaných algoritmů a snížení jejich výpočetní doby. Dále existuje celá řada dalších optimalizačních přístupů, kterými lze popsaný problém řešit. Místo zmíněných regularizačních členů je populární například waveletová transformace. Také se jeví jako možné místo ℓ_1 normy v regularizačních členech použít ℓ_p normu, kde $p < 1$, což vede na úlohu nekonvexní optimalizace.

Literatura

- [1] BECK, A. a M. TEBOULLE. Fast Gradient-Based Algorithms for Constrained Total Variation Image Denoising and Deblurring Problems. *IEEE Transactions on Image Processing*. 2009, **18**(11), 2419-2434. DOI: 10.1109/TIP.2009.2028250. ISSN 1057-7149. Dostupné také z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/5173518/>
- [2] BOYD, Stephen P. a Lieven. VANDENBERGHE. *Convex optimization*. New York: Cambridge University Press, 2004. ISBN 978-0-521-83378-3.
- [3] BREDIES, Kristian, Karl KUNISCH a Thomas POCK. Total Generalized Variation. *SIAM Journal on Imaging Sciences* [online]. 2010, **3**(3), 492-526 [cit. 2018-05-20]. DOI: 10.1137/090769521. ISSN 1936-4954. Dostupné z: <http://epubs.siam.org/doi/10.1137/090769521>
- [4] BROWN, Robert W., Yu-Chung N. CHENG, E. Mark. HAACKE, Michael R. THOMPSON a Ramesh. VENKATESAN. *Magnetic resonance imaging: physical principles and sequence design*. Second edition. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2014. ISBN 978-047-1720-850.
- [5] BUSHONG, Stewart C a Geoffrey CLARK. *Magnetic resonance imaging: physical and biological principles*. 5. vydání. St. Louis: Mosby, 2014. ISBN 9780323073547.
- [6] BYDDER, M., D.J. LARKMAN a J.V. HAJNAL. Combination of signals from array coils using image-based estimation of coil sensitivity profiles. *Magnetic Resonance in Medicine* [online]. 2002, **47**(3), 539-548 [cit. 2018-04-23]. DOI: 10.1002/mrm.10092. ISSN 0740-3194. Dostupné z: <http://doi.wiley.com/10.1002/mrm.10092>
- [7] COMBETTES, Patrick L. a Jean-Christophe PESQUET. Proximal Splitting Methods in Signal Processing. *Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering* [online]. New York, NY: Springer New York, 2011, 2011-5-9, , 185-212 [cit. 2017-12-21]. Springer Optimization and Its Applications. DOI: 10.1007/978-1-4419-9569-8_10. ISBN 978-1-4419-9568-1. Dostupné z: http://link.springer.com/10.1007/978-1-4419-9569-8_10
- [8] ELAD, M. *Sparse and redundant representations: from theory to applications in signal and image processing*. New York: Springer, 2010. ISBN 978-1-4419-7011-4.
- [9] FESSLER, Jeffrey A. On NUFFT-based gridding for non-Cartesian MRI. *Journal of Magnetic Resonance* [online]. 2007, **188**(2), 191-195 [cit. 2018-03-27]. DOI: 10.1016/j.jmr.2007.06.012. ISSN 10907807. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1090780707002054>
- [10] FIGUEIREDO, Mário A. T., Robert D. NOWAK a Stephen J. WRIGHT. Gradient Projection for Sparse Reconstruction: Application to Compressed Sensing and Other Inverse Problems. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing* [online]. 2007, **1**(4), 586-597 [cit. 2018-05-02]. DOI: 10.1109/JSTSP.2007.910281. ISSN 1932-4553. Dostupné z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/4407762/>
- [11] FLORESCU, Anisia, Emilie CHOUZENOUX, Jean-Christophe PESQUET, Philippe CIUCIU a Silviu CIOCHINA. A complex-valued Majorize-Minimize Memory Gradient method with application to parallel MRI. In: *21st European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2013)* [online]. Marrakech, 2013, s. 1-5.

- [12] FOUCART, Simon a Holger RAUHUT. *A mathematical introduction to compressive sensing*. New York: Birkhauser, 2013. Applied and numerical harmonic analysis. ISBN 978-0-8176-4947-0.
- [13] GETREUER, Pascal. Total Variation Deconvolution using Split Bregman. *Image Processing On Line* [online]. 2012, **2**, 158-174 [cit. 2018-05-23]. DOI: 10.5201/ipol.2012.g-tvdc. ISSN 2105-1232. Dostupné z: http://www.ipol.im/pub/art/2012/g-tvdc/?utm_source=doi
- [14] GETREUER, Pascal. Total Variation Inpainting using Split Bregman. *Image Processing On Line* [online]. 2012, **2**, 147-157 [cit. 2018-05-23]. DOI: 10.5201/ipol.2012.g-tvi. ISSN 2105-1232. Dostupné z: http://www.ipol.im/pub/art/2012/g-tvi/?utm_source=doi
- [15] GREENGARD, Leslie a June-Yub LEE. Accelerating the Nonuniform Fast Fourier Transform. *SIAM Review* [online]. 2004, **46**(3), 443-454 [cit. 2018-03-23]. DOI: 10.1137/S003614450343200X. ISSN 0036-1445. Dostupné z: <http://epubs.siam.org/doi/10.1137/S003614450343200X>
- [16] HRBÁČEK, Radek, Pavel RAJMIC, Vítězslav VESELÝ a Jan ŠPIŘÍK. Řídké reprezentace signálů: komprimované snímání. *Elektrorevue* [online]. Brno, 2011, **2011/67**(6), 1-8 [cit. 2018-05-19]. ISSN 1213-1539. Dostupné z: <http://elektrorevue.cz/cz/download/ridke-reprezentace-signalu-komprimovane-snimani/>
- [17] HRBÁČEK, Radek, Pavel RAJMIC, Vítězslav VESELÝ a Jan ŠPIŘÍK. Řídké reprezentace signálů: úvod do problematiky. *Elektrorevue* [online]. Brno, 2011, **2011/50**(5), 1-10 [cit. 2018-03-11]. ISSN 1213-1539. Dostupné z: <http://www.elektrorevue.cz/cz/clanky/zpracovani-signalu/0/ridke-reprezentace-signalu-uvod-do-problematiky/>
- [18] CHAMBOLLE, Antonin. An Algorithm for Total Variation Minimization and Applications. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* [online]. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2004, **20**(1), 89-97 [cit. 2018-05-23]. DOI: 10.1023/B:JMIV.0000011325.36760.1e. ISSN 0924-9907. Dostupné z: <https://link.springer.com/article/10.1023/B:JMIV.0000011325.36760.1e>
- [19] KANWAL., Ram P. *Generalized Functions Theory and Technique*. Second edition. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 1997. ISBN 978-146-8400-359.
- [20] KNOLL, Florian, Kristian BREDIES, Thomas POCK a Rudolf STOLLBERGER. Second order total generalized variation (TGV) for MRI. *Magnetic Resonance in Medicine* [online]. 2011, **65**(2), 480-491 [cit. 2018-04-28]. DOI: 10.1002/mrm.22595. ISSN 07403194. Dostupné z: <http://doi.wiley.com/10.1002/mrm.22595>
- [21] KREUTZ—DELGADO, Ken. *The Complex Gradient Operator and the CR-Calculus*. University of California, San Diego, 2009. Dostupné také z: <https://arxiv.org/abs/0906.4835>
- [22] LARSSON, Erik G., Deniz ERDOGMUS, Rui YAN, Jose C. PRINCIPE a Jeffrey R. FITZSIMMONS. SNR-optimality of sum-of-squares reconstruction for phased-array magnetic resonance imaging. *Journal of Magnetic Resonance* [online]. 2003, **163**(1),

- 121-123 [cit. 2018-04-23]. DOI: 10.1016/S1090-7807(03)00132-0. ISSN 10907807. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1090780703001320>
- [23] LUSTIG, M., D.L. DONOHO, J.M. SANTOS a J.M. PAULY. Compressed Sensing MRI. *IEEE Signal Processing Magazine* [online]. 2008, **25**(2), 72-82 [cit. 2018-03-03]. DOI: 10.1109/MSP.2007.914728. ISSN 1053-5888. Dostupné z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/4472246/>
- [24] NISHIMURA, Dwight G. *Principles of magnetic resonance imaging*. 1996, 223 s.
- [25] PARIKH, Neal a Stephen P. BOYD. Proximal Algorithms. *Foundations and Trends® in Optimization*. 2014, **1**(3), 127-239. DOI: 10.1561/24000000003. ISSN 2167-3888. Dostupné také z: http://stanford.edu/~boyd/papers/pdf/prox_algs.pdf
- [26] PERRAUDIN, Nathanael, Vassilis KALOFOLIAS, David Shuman SHUMAN a Pierre VANDERGHEYNST. UNLocBoX A matlab convex optimization toolbox using proximal splitting methods. *ArXiv e-prints* [online]. 2014 [cit. 2018-03-27].
- [27] SELESNICK, Ivan W. Sparsity-Assisted Signal Smoothing. *Excursions in Harmonic Analysis, Volume 4*. Birkhäuser Basel, 2015, s. 149-176. ISBN 978-3-319-20188-7.
- [28] TRZASKO, J. a A. MANDUCA. Highly Undersampled Magnetic Resonance Image Reconstruction via Homotopic ℓ_0 -Minimization. *IEEE Transactions on Medical Imaging*. 2009, **28**(1), 106-121. DOI: 10.1109/TMI.2008.927346. ISSN 0278-0062. Dostupné také z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/4556634/>
- [29] UECKER, Martin, Peng LAI, Mark J. MURPHY, Patrick VIRTUE, Michael ELAD, John M. PAULY, Shreyas S. VASANAWALA a Michael LUSTIG. ESPIRiT-an eigenvalue approach to autocalibrating parallel MRI: Where SENSE meets GRAPPA. In: *Magnetic Resonance in Medicine* [online]. 2014, **71**(3), s. 990-1001 [cit. 2017-12-21]. DOI: 10.1002/mrm.24751. ISSN 07403194. Dostupné z: <http://doi.wiley.com/10.1002/mrm.24751>
- [30] VESELÝ, Vítězslav a Pavel RAJMIC. *Funkcionální analýza s aplikacemi ve zpracování signálů* [online]. Vysoké učení technické v Brně, 2015, 1-164 [cit. 2018-03-11]. ISBN 978-80-214-5186-5. Dostupné z: <http://hdl.handle.net/11012/61758>
- [31] *QUESTIONS AND ANSWERS IN MRI* [online]. [cit. 2018-03-03]. Dostupné z: <http://mriquestions.com>

Seznam příloh

A	Odvození rovnice MRI	57
B	Obsah CD	59

A Odvození rovnice MRI

Nechť $t = 0$ značí čas těsně po excitaci a vnější magnetické pole se skládá z konstantního hlavního pole $\mathbf{B}_0 = b_0 \mathbf{k}$ a časově i prostorově proměnlivého gradientního pole $\mathbf{B}_G(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{G}(t), \mathbf{r} \rangle \mathbf{k}$.

Nejprve rozepíšeme jednotlivé složky rovnice (2.4)

$$\frac{dM_x}{dt} = \gamma(b_0 + \langle \mathbf{G}(t), \mathbf{r} \rangle) M_y - \frac{M_x}{T_2} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{dM_y}{dt} = -\gamma(b_0 + \langle \mathbf{G}(t), \mathbf{r} \rangle) M_x - \frac{M_y}{T_2} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{dM_z}{dt} = -\frac{M_z - M_0}{T_1}. \quad (\text{A.3})$$

Zajímají nás pouze složky v rovině xy , kde lze magnetizaci měřit. Rovnice (A.1) a (A.2) jsou nezávislé na M_z , proto je možné je řešit samostatně. Pro zjednodušení řešení označíme $M(\mathbf{r}, t) = M_x(\mathbf{r}, t) + iM_y(\mathbf{r}, t)$ a $b = b_0 + \langle \mathbf{G}(t), \mathbf{r} \rangle$. Potom platí

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \frac{dM_x}{dt} + i \frac{dM_y}{dt} = \gamma b M_y - \frac{M_x}{T_2} - i\gamma b M_x - i \frac{M_y}{T_2} = \\ &= \gamma b \underbrace{(-iM_x + M_y)}_{-iM} - \frac{1}{T_2} \underbrace{(M_x + iM_y)}_M = M \left(-\frac{1}{T_2} - i\gamma b \right). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Rovnici (A.4) lze řešit pomocí separace proměnných a integrováním od $\tau = 0$ do $\tau = t$.

$$\begin{aligned} \frac{dM}{M} &= \left(-\frac{1}{T_2} - i\gamma b \right) dt \\ \ln M(\mathbf{r}, t) - \ln M(\mathbf{r}, 0) &= -i\gamma b_0 t - i\gamma \int_0^t \langle \mathbf{G}(\tau), \mathbf{r} \rangle d\tau - \frac{t}{T_2} \\ M(\mathbf{r}, t) &= M(\mathbf{r}, 0) \exp \left(-i\omega_0 t - i\gamma \int_0^t \langle \mathbf{G}(\tau), \mathbf{r} \rangle d\tau - \frac{t}{T_2} \right). \end{aligned}$$

Předpokládejme dále, že citlivost přijímací cívky B_{1xy} je konstantní přes celý snímaný objem. Změny magnetizace vyvolají proměnlivý magnetický tok Φ , který podle Faradayova zákona indukuje napětí na snímací cívce ve tvaru $\varepsilon = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$. Přírůstek napětí způsobený objemem $d\mathbf{r}$ pak můžeme vyjádřit jako

$$d\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial t} [B_{1xy} M(\mathbf{r}, t)] d\mathbf{r}. \quad (\text{A.5})$$

Integrací přes excitovaný objem dostáváme naměřený signál

$$s_r(t) = \int_{\Omega} d\varepsilon = \int_{\Omega} -\frac{\partial}{\partial t} [B_{1xy} M(\mathbf{r}, t)] d\mathbf{r} = \quad (\text{A.6})$$

$$\int_{\Omega} B_{1xy} \frac{\partial}{\partial t} \left[M(\mathbf{r}, 0) \exp \left(-i\omega_0 t - i\gamma \int_0^t \langle \mathbf{G}(\tau), \mathbf{r} \rangle d\tau - \frac{t}{T_2} \right) \right] d\mathbf{r} \approx \quad (\text{A.7})$$

$$-i\omega_0 B_{1xy} e^{-i\omega_0 t} \int_{\Omega} M(\mathbf{r}, 0) \exp \left(-i\gamma \int_0^t \langle \mathbf{G}(\tau), \mathbf{r} \rangle d\tau - \frac{t}{T_2} \right) d\mathbf{r}, \quad (\text{A.8})$$

kde bylo využito $w \gg \langle \mathbf{G}(\tau), \mathbf{r} \rangle$, jelikož hlavní pole je výrazně silnější než pole gradientní. Také platí $w \gg \frac{1}{T_2}$.

Dále je signál demodulován (matematicky se jedná o vynásobení e^{iw_0t}) a jsou ignorovány konstanty:

$$s(t) = \iiint M(\mathbf{r}, 0) \exp \left(-i\gamma \int_0^t \langle \mathbf{G}(\tau), \mathbf{r} \rangle d\tau - \frac{t}{T_2} \right) dx dy dz. \quad (\text{A.9})$$

Předpokládejme, že byly excitovány spiny v řezu o tloušťce Δz a tento řez chceme zobrazit. Obraz v něm nadefinujeme jako

$$m(x, y, t) = \int_{z_0 - \Delta z/2}^{z_0 + \Delta z/2} M(x, y, z, 0) e^{-t/T_2(x, y, z)} dz \approx \quad (\text{A.10})$$

$$\Delta_z M(x, y, z, 0) e^{-T_E/T_2(x, y, z)} = m(x, y), \quad (\text{A.11})$$

kde T_E je konstanta ležící v časovém intervalu, ve kterém je signál přijímán, přičemž jeho délka je výrazně nižší než konstanta T_2 . Člen $e^{-T_E/T_2(x, y, z)}$ odpovídá tzv. T_2 -vážení. Dosazením (A.11) do (A.9) dostáváme

$$s(t) = \iint m(x, y) \exp \left(-i\gamma \int_0^t \langle \mathbf{G}(\tau), \mathbf{r} \rangle d\tau \right) dx dy, \quad (\text{A.12})$$

což pro $G_z = 0$ odpovídá rovnicím (2.5) a (2.6).

B Obsah CD

CD

- Data: složka s datovými soubory
 - hlava.mat
 - fantom.mat
- KompenzaceHustoty: funkce provádějící kompenzaci hustoty
- Obrazky: složka s obrázky
- proxTV
 - norm_tv.m: funkce pro výpočet TV normy
 - prox_tv.m: funkce pro výpočet proximálního operátoru TV normy
- SASS: funkce provádějící metodu SASS
 - SASS2D.m
 - SASS2DSensitivityButter.m
- Sensitivity: funkce pro výpočet sensitivit pomocí toolboxu ESPIRiT, jehož součástí jsou i funkce pro výpočet NUFFT
- Skripty: Spustitelné skripty provádějící rekonstrukce hlavy a fantomu
 - SASS_Fantom.m
 - SASS_Hlava.m
 - TGV_Fantom.m
 - TGV_Hlava.m
 - TVFBS_Fantom.m
 - TVFBS_Hlava.m
- Text: složka obsahující elektronický text této práce
- TGV: funkce pro metodu regularizace pomocí TGV
 - TGV.m
 - TGVSensitivity.m
- TV: funkce pro metodu regularizace pomocí TV
 - TV.m
 - TVSensitivity.m

Funkce byly testovány v prostředí MATLAB R2016a.