



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

DEFORMAČNĚ-NAPĚŤOVÁ ANALÝZA TOROIDNÍ SKOŘEPINY

STRESS-STRAIN ANALYSIS OF A TOROIDAL SHELL

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Aneta Heidrová

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D.

BRNO 2022

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Studentka: **Aneta Heidrová**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce: **prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D.**
Akademický rok: 2021/22

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Deformačně–napět'ová analýza toroidní skořepiny

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Toroidní (prstencová) skořepina představuje komplikovanější aplikaci membránové teorie skořepin. V praxi se vyskytuje často v podobě duše pneumatiky, kdy však dochází k velkým deformacím a tím porušení předpokladů lineární pružnosti. Téma se tedy bude věnovat především výpočtu v mezích platnosti lineární pružnosti, splnění předpokladů membránové teorie skořepin u duše pneumatiky a možnostmi posouzení napjatosti skořepiny v případě porušení některých předpokladů.

Cíle bakalářské práce:

- 1) Zvládnutí membránové teorie skořepin a její aplikace na toroidní skořepinu z hookovského materiálu.
- 2) Posouzení možnosti použití teorie u skořepiny vyrobené z gumy, tj. duše pneumatiky.
- 3) Některý z provedených výpočtů verifikovat pomocí MKP.

Seznam doporučené literatury:

ONDRÁČEK E., VRBKA J., JANÍČEK, P., BURŠA, J.: Mechanika těles - PPII. Skriptum VUT v Brně, 2006.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2021/22

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Tato práce se zabývá deformačně-napětovou analýzou toroidní skořepiny. Obsahuje rešerši z oblasti využití toroidních skořepin a řešení napětí a deformací vzniklých v tělese zatíženém konstantním vnitřním tlakem. V práci jsou provedeny dva způsoby možného řešení deformačně-napětové analýzy pro model z oceli a gumy, a to jak analyticky, tak i numericky metodou konečných prvků v programu Ansys. Výsledky získané oběma typy řešení jsou následně pro oba materiály vzájemně porovnány.

Klíčová slova

Toroidní skořepina, deformačně napětová analýza, metoda konečných prvků, Ansys

ABSTRACT

This work deals with the stress-strain analysis of the toroidal shell. It contains literature search in the field of the use of toroidal shells and the solution of stresses and deformations arising in a body loaded with a constant internal pressure. Two ways of possible solution of stress-strain analysis for steel and rubber model are performed in this work, both analytically and numerically by finite element method in Ansys. The results obtained by both types of solutions are then compared for both materials

Key words

Toroidal shell, stress-strain analysis, finite element method, Ansys

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

HEIDROVÁ, Aneta. *Deformačně-napěťová analýza toroidní skořepiny*. Brno, 2022. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/140418>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Jiří Burša.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma **Deformačně-napětová analýza toroidní skořepiny Ústavu mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky** vypracovala samostatně s použitím odborné literatury a pramenů, uvedených v seznamu, který tvoří přílohu této práce.

19.5.2022

Datum

Jméno a příjmení

PODĚKOVÁNÍ

Ráda bych tímto poděkovala svému vedoucímu bakalářské práce prof. Ing. Jiřímu Buršovi Ph. D. za vedení, odbornou pomoc a cenné rady při jejím zpracovávání. Velký dík patří také mé rodině za podporu a trpělivost během studia.

OBSAH

1	Úvod	11
2	Toroidní skořepina	12
2.1	Membránová teorie skořepin	12
2.2	Aplikace toroidní skořepiny	12
3	Odvození rovnic pro analytický výpočet.....	17
3.1	Odvození rovnic napětí.....	17
3.1.1	Napětí v bodech ve vzdálenosti $r_0 > b$	17
3.1.2	Napětí v bodech ve vzdálenosti $r_0 < b$	21
3.2	Deformace skořepiny	25
4	Výpočet provedený pro konkrétní hodnoty analyticky	28
4.1	Napětí	28
4.1.1	Obvodové napětí.....	28
4.1.2	Meridiánové napětí	28
4.1.3	Redukované napětí	29
4.2	Přetvoření.....	30
4.2.1	Určení modulu pružnosti pro gumu.....	30
4.2.2	Přetvoření obvodové.....	31
4.2.3	Přetvoření meridiánové.....	32
4.2.4	Třetí hlavní přetvoření	33
4.2.5	Závislost přetvoření na Poissonově poměru	34
4.3	Posunutí v radiálním směru	35
5	Výpočet pro konkrétní hodnoty metodou MKP.....	37
5.1	Výsledky pro těleso vyrobené z oceli	38
5.1.1	Napětí.....	38
5.1.1.1	Obvodové napětí	38
5.1.1.2	Meridiánové napětí.....	39
5.1.1.3	Redukované napětí	40
5.1.2	Přetvoření.....	41
5.1.3	Posunutí v radiálním směru.....	41
5.2	Těleso vyrobené z gumy.....	41
5.2.1	Napětí.....	41
5.2.2	Přetvoření	42
5.2.3	Posunutí v radiálním směru.....	42
5.2.3.1	Závislost radiálního posunutí na Poissonově poměru	43
5.2.4	Celková deformace	44
5.2.5	Nelinearita	44
	ZÁVĚR	46
	SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ	47

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK	49
SEZNAM OBRÁZKŮ	51
SEZNAM TABULEK.....	52

1 Úvod

Předmětem této práce je deformačně-napěťová analýza toroidní skořepiny, která je prezentovaná modelem duše pneumatiky jízdního kola. U takového typu využití skořepiny dochází v praxi k velkým deformacím. Jedním z cílů práce je tedy potvrzení předpokladu, že chování tělesa z gumy bude za vnitřního zatížení o velikosti běžného tlaku v pneumatikách nelineární, na rozdíl od modelu z oceli, kde je předpokládáno lineární chování.

Dalším cílem práce je také posouzení možnosti aplikace numerického řešení pro tento typ problému, které například, na rozdíl od řešení analytického, uvažuje změnu napětí přes tloušťku skořepiny. Při analytickém řešení je tento fakt za účelem zjednodušení výpočtu zanedbán, jelikož změna napětí přes tloušťku nabývá výrazně menší hodnoty než samotné složky napětí, které v tělese působí.

Nestandardní tvar skořepiny je také příčinou větší obtížnosti při odvozování rovnic a jejich následném řešení. Za účelem optimalizace řešení problémů je ale složitějších tvarů daleko častěji využíváno a je jim tak věnována stále větší pozornost.

2 Toroidní skořepina

2.1 Membránová teorie skořepin

Ve skriptech z předmětu Pružnost a pevnost II [1] je uvedeno, že rotační bezmomentová skořepina je rotačně souměrné, tenkostěnné těleso, jehož tvar je dán rotací meridiánové křivky (meridiánu) kolem její osy. Plocha, která touto rotací vznikla, se nazývá střednicová. Meridiánové křivky mívají nejčastěji tvar přímky, kružnice nebo jejich částí, a mohou nebo nemusí protínat osu rotace. V případě toroidní skořepiny křivka osu rotace neprotíná a může mít tvar kruhu, elipsy, čtverce nebo jiného uzavřeného tělesa. V případě rotace kružnice, se takto vzniklé těleso nazývá torus. Proto, aby těleso mohlo být považováno za skořepinu, je nutné, aby splňovalo podmínku tenkostěnnosti. Ta je určena tím, že poměr charakteristického rozměru skořepiny a její tloušťky h musí být větší než 10. V případě toroidu je tímto charakteristickým rozměrem průměr kružnice, jejíž rotací kolem osy z skořepina vznikla. Tento průměr je označován jako d a musí tedy platit $\frac{d}{h} > 10$.

Výpočet je prováděn ve válcovém globálním souřadnicovém systému určeném osou r v radiálním směru, osou z , která je současně osou tělesa a úhlem φ . Lokální souřadnicový systém je dán osou x , která má směr normály střednicové plochy, osou m se směrem tečným k meridiánovému řezu a osou t , která je tečnou k řezu obvodovému. Počátek lokálního souřadnicového systému se nachází v konkrétním vyšetřovaném bodě na ploše skořepiny [1].

Vstupní charakteristiky jako geometrie, vlastnosti použitého materiálu, zatížení či vazby, jsou rotačně souměrné, stejně tak jako výstupy, kterými jsou napjatost a deformace [1]. Skořepinami jsou přenášeny jen membránové síly působící v jejich rovinách nebo ve směru k nim tečném. Ty vyvolají napětí, která jsou rovnoměrně rozložena po jejich tloušťkách. Ve skořepině tak působí dvouosá membránová napjatost. Pro dosažení tohoto napjatostního stavu je nutné, aby těleso a zatížení na něj působící, splňovali určité podmínky [2]:

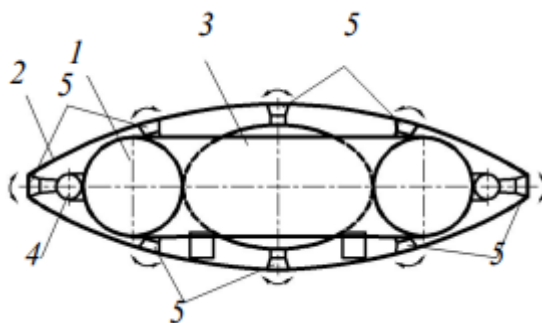
- 1) Zatížení kolmé k povrchu musí být spojitě nebo málo proměnné.
- 2) Vnější síly (včetně vazebných) musí mít směr tečny k povrchu.
- 3) Radiální deformace skořepiny nesmí být omezována.
- 4) Tloušťka stěny skořepiny se nesmí skokově měnit.
- 5) Střednicová plocha musí být hladká, bez skokových změn křivosti.

2.2 Aplikace toroidní skořepiny

Ve srovnání s válcovou, kuželovou či kulovou skořepinou je skořepina toroidní daleko méně používána z důvodu obtížného teoretického řešení a také složitější výroby. Existují však strojírenské oblasti, kde tento nestandardní tvar nebo jeho části, může být s výhodami aplikován.

Například oceánské inženýrství je velice intenzivně se rozvíjející oblastí, kde díky rozvoji nových technologií a materiálů vznikají architektonicky a konstrukčně zajímavé podvodní struktury a vozidla, jak je popsáno v [3]. Jelikož nám pokrok ve výrobě dovoluje produkci součástí daleko složitějších tvarů než před několika lety, umožňuje designérům, aby se odpoutali od tradičních, léty ověřených tvarů, a mohli přicházet s novými návrhy, které jsou daleko rozmanitější a řeší problémy, na které při v současnosti nejběžněji používaných strukturách narážíme. Vznikají tak projekty podvodních vrtných souprav, stanic či ponorek s tlakovým trupem toroidního tvaru. Konkrétně je možno zmínit například návrh podvodního vozidla typu "diving saucer", které je znázorněno na Obr. 1. Tento koncept by taktéž mohl

dosáhnout dobrého využití pro skladování kapalin v podmořském prostoru, v rámci ropného průmyslu. Dále kupříkladu u podvodních vozidel s touto neobvyklou konstrukcí je dosaženo lepších manévrovacích schopností či větší statické i dynamické stability. Toroid má dobrý hydrodynamický tvar a díky jeho dvojitému zakřivení je tužší a tloušťka stěny tak může být menší než pro podvodní vozidla s válcovým tvarem. Při návrhu těchto konstrukcí je nutné uvažovat, že budou namáhány především kompresí, kvůli působení vnějšího hydrostatického tlaku. Hlavním rizikovým mezním stavem skořepiny je z tohoto důvodu zborcení.



Obr. 1 . Podvodní vozidlo typu "diving saucer"

1 – hlavní toroidní kostra; 2 – hydrodynamický kryt; 3 – kostra tvaru elipsoidu; 4 – nádrž toroidního tvaru; 5 – trysky [3]

Další vědecké práce [4] se zabývají například možností využití toroidních skořepin ke skladování plynného paliva. Tyto tlakové nádoby mají tradičně tvar složený z válcových těles a klenutých hlav. Tato konstrukce však může být objemově neefektivní, což v konečném důsledku omezuje její konstrukční flexibilitu. Torus se díky své prostorové úspoře ukázal jako slibné řešení pro konstrukci nádrží na plynná paliva, které jsou vhodné zejména pro prostory s omezenou výškou a délkou, jakými jsou například dutiny pro náhradní pneumatiky v osobních vozidlech (Obr. 2, Obr. 3). Touto alternativou je také dosaženo snížení hmotnosti výsledné nádrže a je umožněno použití vyšších provozních tlaků. V současné době nicméně existuje mnoho mezer ve výzkumu toroidních tlakových nádob, které je třeba vyřešit, aby se naplno využil potenciál této technologie pro skladování energie.



Obr. 2 Kompozitní vodíková palivová nádrž nainstalovaná v kufru vozidla poháněného palivovými články [4]



Obr. 3 kovová toroidní palivová nádrž LPG nainstalovaná v dutině pro rezervní pneumatiku v kufru vozidla [4]

Zajímavou architektonickou stavbou, zobrazenou na fotografii (Obr. 4), využívající toroidní tvar je například vodojem Bania, který se nachází v polském Tarnówě. Je to jediná stále fungující stavba tohoto druhu na území Polska [5].



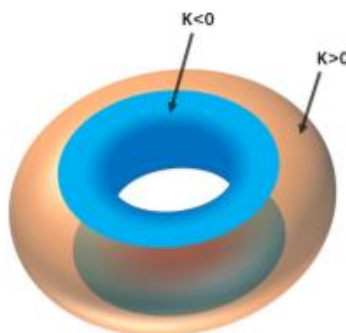
Obr. 4 Vodojem Bania v polském městě Tarnów [5]

Dalším možným využitím toroidních skořepin jsou také reaktory pro jadernou fúzi nazývané Tokamaky nebo urychlovače částic [6]. V praxi se však často nevyužívá celého toroidu, ale například jen jeho částí. Ty nacházejí uplatnění například při spojování potrubí [6]. U většiny z těchto aplikací nedochází vlivem vlastností materiálu k velkým deformacím. Z důvodu bezpečnosti by zde neměla být překročena mez kluzu. Většinou je tak výpočet prováděn oblasti lineárního chování materiálu. Tvar toroidní skořepiny je ale také uplatňován v případech, kde deformace dosahují poměrně velkých hodnot a je tak opuštěna oblast lineárního chování materiálu. Mezi takovéto aplikace patří například ultralehké nafukovací toroidní komponenty, pneumatiky vozidel či letadel nebo duše kola, která bude hlavním předmětem této práce [7].

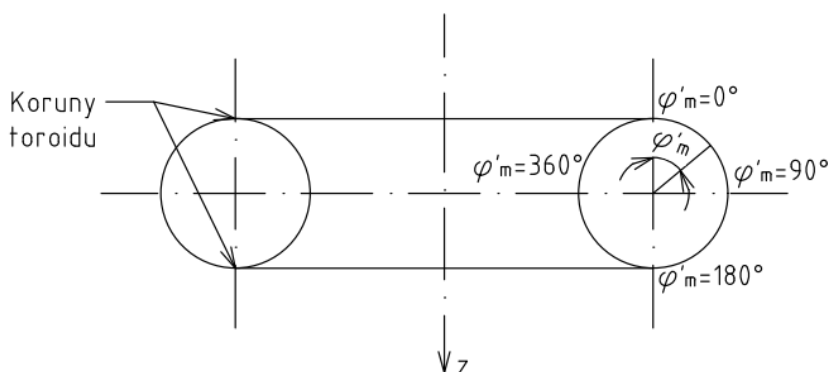
Duše kola odpovídá použití skořepiny, která není vystavena tlaku vnějšímu a působí na ní pouze konstantní vnitřní tlak. Pro zjednodušení považujeme duši kola za uzavřenou tlakovou nádobu. Právě výpočtem napětí a deformací na nádobě zatížené vnitřním tlakem ve tvaru toroidní skořepiny, která je určena pro skladování LPG, se ve své práci [8] zabývá Veličkovič. V tomto konkrétním případě se průřez finálního kontejneru mírně odlišuje od tvaru kruhového, kterému bude dále věnovaná pozornost v této práci. Pro takový nestandartní tvar, jehož výpočtem se Veličkovič zabývá, nicméně není možné použít analytický výpočet. Nejprve byl

tedy výpočet proveden analyticky pro toroidní skořepinu s kruhovým průřezem. Tyto výsledky se následně porovnály s těmi, kterých se dosáhlo při numerickém výpočtu metodou konečných prvků, aby se ověřila správnost výpočtového modelu. Následně, po potvrzení shody výsledků, získaných těmito dvěma metodami, bylo numerické řešení upraveno a použito na konkrétní průřez kontejneru LM-630. Analytický výpočet napětí byl proveden na základě silové rovnováhy. Vztah pro výpočet posuvů je zde pouze uveden v konečné podobě a není nijak odvozován. Pro náš výpočet bude využita právě část týkající se toroidu s kruhovým průřezem.

Ve zmíněné práci [8] je výpočet proveden stejně pro celou skořepinu a není bráno v potaz, že geometrie tělesa není ve všech jeho bodech stejná. Gaussova křivost K^1 mění své znaménko při hodnotách úhlu φ'_m od 0° do 360° , jak je vykresleno na Obr. 5. U této skořepiny je možné pozorovat takzvanou smíšenou křivost. To znamená, že toroid má na své vnější straně ($\varphi'_m \in (0^\circ; 180^\circ)$) povrch eliptický ($K > 0$), na rozdíl od strany vnitřní ($\varphi'_m \in (180^\circ; 360^\circ)$), kde je povrch hyperbolický ($K < 0$), a má tvar sedla. Bodem změny znaménka jsou místa s hodnotou úhlu $\varphi'_m = 0^\circ$ a $\varphi'_m = 180^\circ$, které jsou nazývány jako horní a dolní koruna toroidu (Obr. 6) a platí zde $K = 0$ [9]. Existence bodů obratu toroidní skořepiny je jedním ze zdrojů potíží při hledání řešení. U většiny skořepin se totiž objevuje jen jeden typ křivosti. Proto jsou pro tento typ tělesa očekávána rozdílná řešení pro vnější a vnitřní část tělesa se shodou na korunách toroidu.



Obr. 5 Gaussova křivost na toroidní skořepině [9]



Obr. 6 Koruny toroidní skořepiny, upraveno podle [9]

¹Jak je uvedeno v [10], jsou-li hlavní křivosti plochy k_1 a k_2 , pak pro Gaussovu křivost plochy platí $K = k_1 k_2$. Podle její hodnoty v bodech plochy je možné rozlišit, zda se jedná o body eliptické ($K > 0$), o body hyperbolické ($K < 0$) či o body parabolické nebo planární ($K = 0$).

Ve výše zmíněných, ale také dalších pracích věnujících se toroidním skořepinám, se tento geometrický jev vůbec nezmiňuje, nebo, pokud je zde uveden, je řešení provedeno pomocí diferenciálních rovnic. Tento typ řešení ovšem není předmětem této práce. Výpočet bude sestaven na základě rovnic silové rovnováhy, které mají lineární charakter. U řady studií je také uvedeno pouze numerické řešení, neboť jednoduchá analytická řešení pro uzavřený tvar toroidní pláště jsou platná pouze pro dosti omezený rozsah parametrů. Problémy nastávají převážně pro složitější tvary meridiánových křivek. V seznamech vzorců pro výpočet napětí a přetvoření na tělesech se u toroidních skořepiny nachází vztahy sestavené v závislosti na úhlu φ_m [11] nebo v závislosti na poloměru r_0 [12], který udává vzdálenost vyšetřovaného bodu na skořepině od osy z . V obou případech je zde uveden pouze jeden vzorec, který popisuje celé těleso. Není nijak rozlišena jeho vnitřní a vnější část. Na základě těchto informací je možno přepokládat, že řešení by nemělo být závislé na rozdílné geometrii a pro celé těleso budou pro výpočet napětí a deformací platit stejné vztahy. Právě o potvrzení tohoto tvrzení bude v této práci usilováno, neboť se na první pohled nejeví jako reálné. Následně budou výsledky, získané analytickým řešením, porovnány s hodnotami, jichž bude dosaženo numerickým výpočtem pomocí programu Ansys.

3 Odvození rovnic pro analytický výpočet

3.1 Odvození rovnic napětí

Jak již bylo zmíněno výše, Gaussova křivost se mění s úhlem φ_m . Pro body na tělese, které leží od hlavní osy z ve větší vzdálenosti než b (Obr. 8), jsou středy meridiánových i obvodových křivostí na stejné straně. Na rozdíl od bodů s menší vzdáleností od této osy, pro něž jsou středy křivostí na opačných stranách. Jelikož má elementárního prvek skořepiny pro vnější a vnitřní část tělesa jinou geometrii, je nutné provést výpočet pro vnější a vnitřní část skořepiny zvlášť. Nejprve se bude pozornost zaměřena na část vnější.

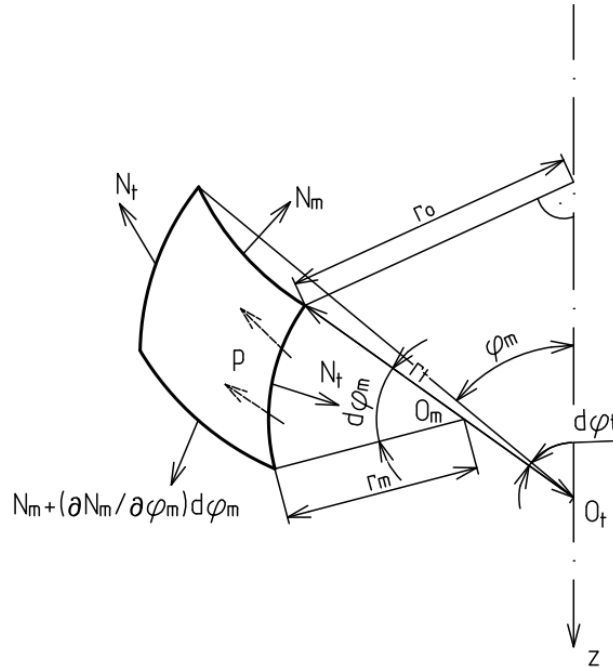
3.1.1 Napětí v bodech ve vzdálenosti $r_0 > b$

Na Obr. 7 je znázorněn dvojnásobně elementární prvek skořepiny, který je vyříznut dvěma meridiánovými řezy, jejichž poloha je dána úhlem $d\varphi_t$, a dvěma kuželovými řezy, mezi nimiž se nachází úhel $d\varphi_m$. Tyto řezy se nazývají hlavní normálové řezy. Meridiánový řez je vytvořen průnikem roviny meridiánu, jež prochází osou skořepiny, se střednicovou plochou. V této rovině se nacházejí normály střednicové plochy a zmíněný průnik je meridián. Ten je v konkrétním bodě střednicové plochy určen meridiánovým poloměrem křivosti r_m a meridiánovým středem křivosti O_m , ležícím na normále n , jež prochází vyšetřovaným bodem. Řez kuželový, který protíná střednicovou plochu v kružnici γ_t o poloměru $r_0 = r_t \sin \varphi_m$, je dán průsečnicí kužele se skořepinou. Tento kužel má vrchol O_t , jenž leží vždy na ose skořepiny. Kuželový poloměr křivosti daný délkou površky kužele je označen jako r_t . Površky kužele jsou také normálami střednicové plochy [1].

Na elementární prvek působí meridiánová liniová síla N_m a obvodová liniová síla N_t , které jsou vztaženy na jednotku délky. Pro skořepinu konstantní tloušťky je možné výsledná hlavní napětí vypočítat podle vztahů uvedených v [1]:

$$\sigma_m = \frac{N_m}{h}; \quad \sigma_t = \frac{N_t}{h} \quad (3.1)$$

Jak je také popsáno v [1], vliv normálových napětí působících ve střednicových plochách σ_n je zanedbán, jelikož je značně menší než napětí obvodová a meridiánová. Smyková napětí jsou následkem nulových přetvoření γ_{tn} , γ_{mn} , γ_{mt} také nulová. Zatížení p je vyvoláno tlakem uvnitř tělesa.



Obr. 7 Dvojnásobně elementární prvek skořepiny pro $r_0 > b$, upraveno podle[8]

V dalším kroku řešení je sestavena rovnice rovnováhy pro napětí v radiálním směru:

$$p r_m d\varphi_m r_t d\varphi_t - 2N_t r_m d\varphi_m \sin \frac{d\varphi_t}{2} - 2N_m r_t d\varphi_t \sin \frac{d\varphi_m}{2} = 0 \quad (3.2)$$

Při malých velikostech úhlu, je sinus daného úhlu přibližně roven velikosti tohoto úhlu. Je tedy možné zapsat $\sin \frac{d\varphi_m}{2} \approx \frac{d\varphi_m}{2}$ a rovnici dále upravit:

$$p r_m d\varphi_m r_t d\varphi_t - N_t r_m d\varphi_m d\varphi_t - N_m r_t d\varphi_t d\varphi_m = 0 \quad (3.3)$$

$$p r_m r_t - N_t r_m - N_m r_t = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{N_m}{r_m} + \frac{N_t}{r_t} = p \quad (3.5)$$

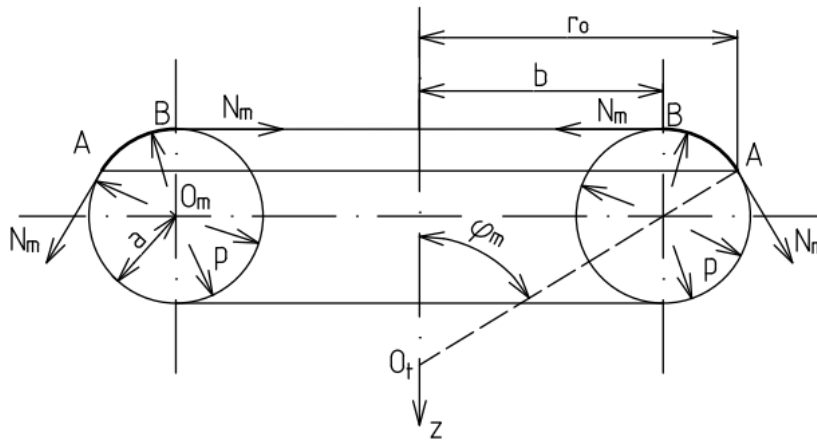
Tloušťka skořepiny se nemění. Liniové síly N_t a N_m jsou nahrazeny reálně působícím napětím podle vztahů (3.1). Těmito úpravami je získaná rovnice rovnováhy napětí, která je nazývána Laplaceova rovnice, a je také uvedena v [1]:

$$\frac{\sigma_m}{r_m} + \frac{\sigma_t}{r_t} = \frac{p}{h} \quad (3.6)$$

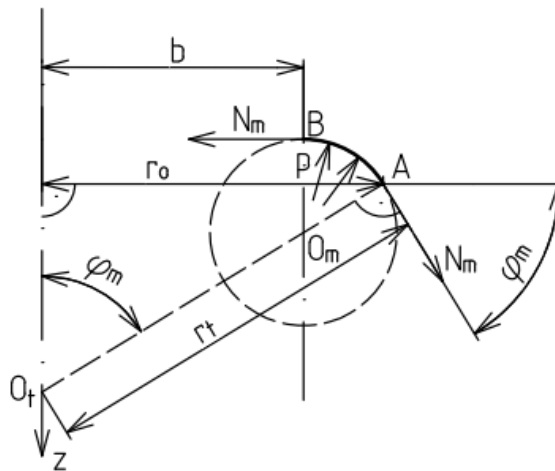
Napjatost libovolné bezmomentové skořepiny lze řešit pomocí Laplaceovy rovnice a rovnice rovnováhy prvku skořepiny v axiálním směru. Za tímto účelem je uvolněna prstencová část AB, znázorněná na Obr. 8 zelenou čarou. Na následujícím obrázku (Obr. 9) je pak zobrazená jen pravá část skořepiny, kterou budeme ve výpočtu využívat. Pro část levou jsou výsledky symetrické. Bod A se nachází na kruhu o poloměru $r_0 = b + a \sin \varphi_m$ a bod B na kruhu o poloměru b . Velikost meridiánového a obvodového poloměru vyjádříme následovně:

$$r_m = a, r_t = \frac{r_0}{\sin \varphi_m} = a + \frac{b}{\sin \varphi_m} \quad (3.7)$$

Jelikož jsou síly N_m působící podél rovnoběžné kružnice BB vodorovné a vzájemně se vyruší, jsou uvažovány pouze síly N_m podél kružnice AA a vnější síly působící na prstenec, které jsou v našem případě vyvolány tlakem působícím uvnitř tělesa.



Obr. 8 Uvolnění prstencové části AB pro $r_0 > b$, upraveno podle [8]



Obr. 9 Uvolnění pravé části prstence AB pro $r_0 > b$, upraveno podle [8]

Pro napětí působící v ose z platí:

$$2\pi r_0 N_m \sin\varphi_m = \pi p(r_0^2 - b^2) \quad (3.8)$$

Nahrazením $\sin\varphi_m$ podle vztahu $\sin\varphi_m = \frac{r_0 - b}{a}$ je získáno následující:

$$N_m = \frac{p(r_0^2 - b^2)}{2r_0 \sin\varphi_m} = \frac{pa(r_0 + b)}{2r_0} \quad (3.9)$$

Dosazením rovnice (3.9), která vyjadřuje působení meridiánové liniové síly v bodě A, do Laplaceovy rovnice pro liniové síly (3.5) je získán vztah pro obvodovou liniovou sílu působící v tomto bodě. Poloměry r_t a r_m jsou nahrazeny rovnicemi (3.7), $\sin\varphi_m$ je eliminován stejně jako v předchozí rovnici:

$$\begin{aligned} N_t &= \left(p - \frac{N_m}{r_m}\right) r_t = \left(p - \frac{\frac{pa(r_0 + b)}{2r_0}}{a}\right) \left(a + \frac{b}{\sin\varphi_m}\right) = \\ &= \left(\frac{p(2r_0 - r_0 - b)}{2r_0}\right) \left(a + \frac{ab}{r_0 - b}\right) = \\ &= \left(\frac{p(r_0 - b) \left(\frac{a(r_0 - b)}{r_0 - b} + \frac{ab}{r_0 - b}\right)}{2r_0}\right) = \\ &= \frac{p(ar_0 - ab + ab)}{2r_0} = \frac{pa}{2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Pro skořepinu konstantní tloušťky je možné napětí, které zde působí, vyjádřit následovně:

$$\sigma_m = \frac{pa(r_0 + b)}{2hr_0} \quad (3.11)$$

$$\sigma_t = \frac{pa}{2h} \quad (3.12)$$

Napětí obvodové, je tak oproti meridiánovému nezávislé na velikosti poloměru toroidu a má stejnou hodnotu ve všech bodech skořepiny.

Zajímavým bodem na vnější straně toroidu je místo s největší vzdáleností od osy z s poloměrem $r_{0,max} = b + a$. Tento vztah je dosazen do vztahu (3.11) a následně je vyjádřena velikost meridiánového napětí, jež působí na největším poloměru toroidní skořepiny:

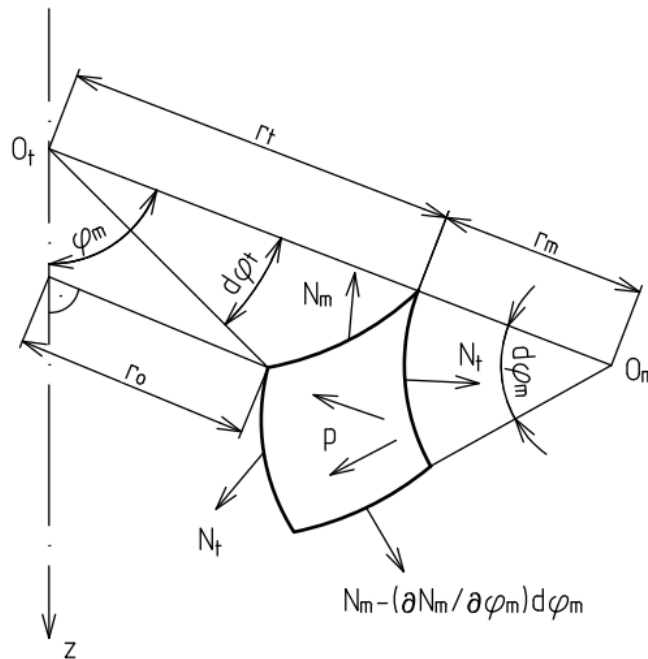
$$\sigma_{m,r_{0,max}} = \frac{pa(2b + a)}{2h(b + a)} \quad (3.13)$$

Pro lepší zobrazení výsledků je výhodné si napětí vyjádřit v závislosti na velikosti úhlu φ_m . Dosazením $r_0 = b + a \sin \varphi_m$ do rovnice (3.11) je získán tento vztah:

$$\sigma_m = \frac{pa(b + a \sin \varphi_m + b)}{2h(b + a \sin \varphi_m)} = \frac{pa(2b + a \sin \varphi_m)}{2h(b + a \sin \varphi_m)} \quad (3.14)$$

3.1.2 Napětí v bodech ve vzdálenosti $r_0 < b$

Pro vnitřní část tělesa bude postup stejný jako pro část vnější. Na Obr. 10 je znázorněn dvojnásobně elementární prvek skořepiny.



Obr. 10 Dvojnásobně elementární prvek skořepiny pro $r_0 < b$, upraveno podle [8]

Opět je sestavena rovnice silové rovnováhy pro napětí v radiálním směru, díky čemuž je získán tvar Laplaceovy rovnice:

$$-pr_m d\varphi_m r_t d\varphi_t - 2N_t r_m d\varphi_m \sin \frac{d\varphi_t}{2} + 2N_m r_t d\varphi_t \sin \frac{d\varphi_m}{2} = 0 \quad (3.15)$$

$$-pr_m d\varphi_m r_t d\varphi_t - N_t r_m d\varphi_m d\varphi_t + N_m r_t d\varphi_t d\varphi_m = 0 \quad (3.16)$$

$$-pr_m r_t - N_t r_m + N_m r_t = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{N_m}{r_m} - \frac{N_t}{r_t} = p \quad (3.18)$$

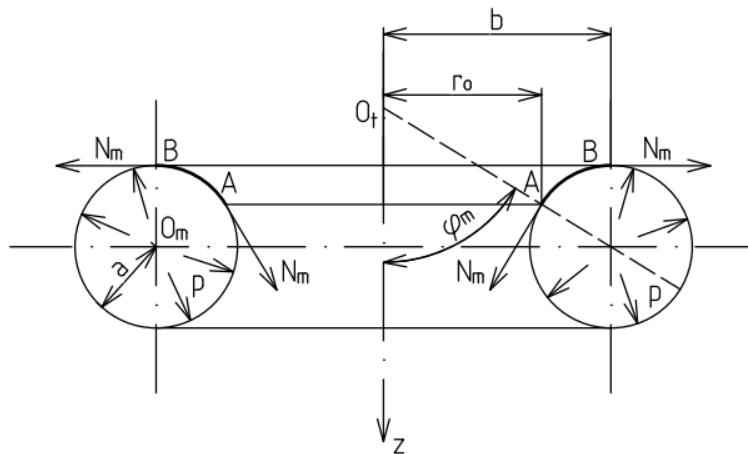
$$\frac{\sigma_m}{r_m} - \frac{\sigma_t}{r_t} = \frac{p}{h} \quad (3.19)$$

Tento zápis Laplaceovy rovnice se od předchozího vyjádření (3.6) liší v záporném znaménku před členem $\frac{\sigma_t}{r_t}$, což je způsobeno tím, že středy křivosti O_m a O_t leží na rozdílných stranách tělesa.

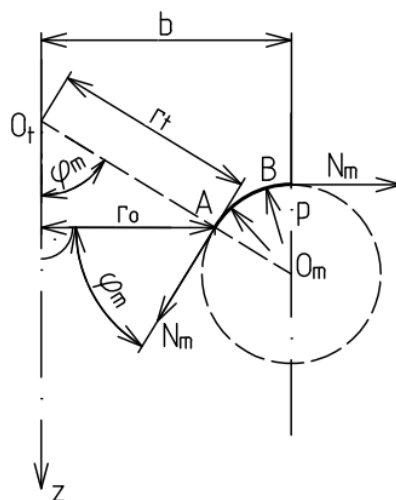
Za účelem získání napětí v konkrétním bodě vnější části skořepiny je na Obr. 11 opět uvolněna prstencová část AB. Na následujícím obrázku (Obr. 12) je pak detailněji znázorněná pravá část toroidní skořepiny. Bod A se nachází na kruhu o poloměru $r_0 = b - a \sin \varphi_m$ a bod B na kruhu o poloměru b . Vztahy pro výpočet velikosti meridiánového a obvodového poloměru vypadají následovně:

$$r_m = a; \quad r_t = \frac{r_0}{\sin \varphi_m} = \frac{b}{\sin \varphi_m} - a \quad (3.20)$$

Síly N_m působící podél rovnoběžné kružnice BB se opět vzájemně vyruší. Mohou být tedy uvažovány jen síly N_m podél kružnice AA a síly působící na prstenec, v důsledku existence vnitřního tlaku uvnitř tělesa.



Obr. 11 Uvolnění prstencové části AB pro $r_0 < b$, upraveno podle [8]



Obr. 12 Uvolnění pravé části prstence AB pro $r_0 < b$, upraveno podle [8]

Pro napětí působící v ose z platí:

$$2\pi r_0 N_m \sin\varphi = \pi p(b^2 - r_0^2) \quad (3.21)$$

$\sin\varphi_m$ je možné vyjádřit vztahem $\sin\varphi_m = \frac{r_0-b}{a}$, čímž je získána uvedenou rovnice:

$$N_m = \frac{p(b^2 - r_0^2)}{2r_0 \sin \phi} = \frac{pa(b + r_0)}{2r_0} \quad (3.22)$$

Po dosazení do rovnice (3.22), jež vyjadřuje působení meridiánové liniové síly v bodě A, do Laplaceovy rovnice pro liniové síly (3.18) je získán vztah pro obvodovou liniovou sílu, která v tomto bodě působí. Poloměry r_t a r_m jsou opět nahrazeny rovnicemi (3.7) a $\sin\varphi_m$ je eliminován výše zmíněným vztahem:

$$\begin{aligned}
 N_t &= -\left(p - \frac{N_m}{r_m}\right)r_t = -\left(p - \frac{\frac{pa(r_0+b)}{2r_0}}{a}\right)\left(\frac{b}{\sin\phi_m} - a\right) = \\
 &= -\left(\frac{p(2r_0 - r_0 - b)}{2r_0}\right)\left(\frac{ab}{b - r_0} - a\right) = \\
 &= -\left(\frac{p(r_0 - b)\left(\frac{ab - a(b - r_0)}{b - r_0}\right)}{2r_0}\right) = \\
 &= \frac{p(ab - ab + ar_0)}{2r_0} = \frac{pa}{2}
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Jelikož je tloušťka skořepiny neměnná, může být napětí zde působící vyjádřeno takto:

$$\sigma_m = \frac{pa(r_0 + b)}{2hr_0} \quad (3.24)$$

$$\sigma_t = \frac{pa}{2h} \quad (3.25)$$

Na vnitřní straně toroidu je nejzásadnější velikost napětí v místě s nejmenší vzdáleností od osy z , jež má poloměr $r_{0,min} = b - a$. Právě ta bývá u skořepin nejkritičtější. Dosazením tohoto vyjádření poloměru $r_{0,min}$ do rovnice (3.24), je získán vztah vyjadřující velikost meridiánového napětí, jež působí na nejmenším poloměru toroidní skořepiny:

$$\sigma_{m,r_{0,min}} = \frac{pa(2b - a)}{2h(b - a)} \quad (3.26)$$

Dosazením do vztahů (3.13) a (3.26) bylo zjištěno, že největší napětí působí na vnitřní straně tělesa. Na straně vnější je naopak napětí nejmenší.

Pro lepší vykreslení výsledků je i zde napětí vyjádřeno jako závislost na velikosti úhlu φ_m . Dosazením vztahu $r_0 = b - a \sin \varphi_m$ do rovnice (3.24) je získán následující vztah:

$$\sigma_m = \frac{pa(b + b - a \sin \varphi_m)}{2h(b - a \sin \varphi_m)} = \frac{pa(2b - a \sin \varphi_m)}{2h(b - a \sin \varphi_m)} \quad (3.27)$$

Je zřejmé, že na rozdíl od vztahů (3.11) a (3.24), které vyjadřují meridiánové napětí v závislosti na poloměru r_0 a jsou naprosto totožné, mezi rovnicemi (3.14) a (3.27), jež vyjadřují stejné napětí a kde figuruje úhel φ_m , je určitá změna patrná. To je způsobeno rozdílným vyjádřením poloměru r_0 pro vnitřní a vnější část tělesa. Pokud obě tyto části počítáme zvlášť, dosahuje v obou případech zmíněný úhel hodnot $0^\circ - 180^\circ$. Vhodné by však bylo vyjádřit napětí pro celé těleso jednotně, v závislosti na úhlu φ'_m . Ten má vrchol ve středu meridiánové křivosti, stejně jako úhel φ_m , a narůstá ve směru hodinových ručiček, uvažuje-li se část tělesa, která ve vertikálním řezu leží napravo směrem od osy z . Proti směru hodinových ručiček narůstá, je-li uvažována strana levá. Pro část vnější je tento úhel shodný s úhlem φ_m a pro část vnitřní platí $\varphi'_m = \varphi_m + 180^\circ$. Při použití vztahu (3.27), který je platný jen pro body ve vzdálenosti $r_0 < b$, a $\varphi_m \in (0^\circ; 180^\circ)$, je dosaženo naprosto stejných výsledků, jako když je ve vyjádření (3.14), které platí pouze pro body ve vzdálenosti $r_0 > b$, použit úhel $\varphi'_m = \varphi_m + 180^\circ$, kde $\varphi_m \in (0^\circ; 180^\circ)$. Tento jev je způsoben lichostí funkce sinus. Rovnici (3.14) je tedy možno při využití úhlu φ'_m , aplikovat pro všechny body na tělese.

Tímto odvozením bylo dokázáno, že pro výpočet napětí není rozhodující rozdílná geometrie elementárního prvku skořepiny v jejích různých bodech, a není ji potřeba ve výpočtu uvažovat. To je naprosto v souladu s literaturou, kde tato změnu tvaru, při tomto typu výpočtu, není brána v úvahu.

Uvedená napětí působící v různých směrech je možné podle podmínky HMM, která je také známá jako hypotéza von Mises, převést na redukované napětí σ_{red} . To je v [13] definováno jako napětí fiktivní tahové napjatosti, přiřazené obecné napjatosti tak, že prostá bezpečnost je vzhledem mezní hodnotě σ_k stejná pro obecnou i fiktivní napjatost. Za předpokladu, že $\sigma_n = 0$ je určeno následovně:

$$\sigma_{RED} = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_t^2 - \sigma_m \sigma_t} \quad (3.28)$$

3.2 Deformace skořepiny

V konkrétním bodě skořepiny působí, za předpokladu zanedbání napětí σ_n , obecná dvouosá napjatost, jak také uvádí [1]. Deformace je dána nenulovým délkovým přetvořením $\varepsilon_n, \varepsilon_m, \varepsilon_t$ a nulovým úhlovým přetvořením $\gamma_{tn}, \gamma_{mn}, \gamma_{mt}$. Přetvoření γ_{mt} musí být nulové pro zachování osové souměrnosti a přetvoření γ_{tn}, γ_{mn} jsou nulová důsledkem tenkostěnnosti tělesa a dalších podmínek membránové napjatosti. Délková přetvoření mohou být vypočtena na základě následujících vztahů:

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} [\sigma_t - \mu(\sigma_m + \sigma_n)] \quad (3.29)$$

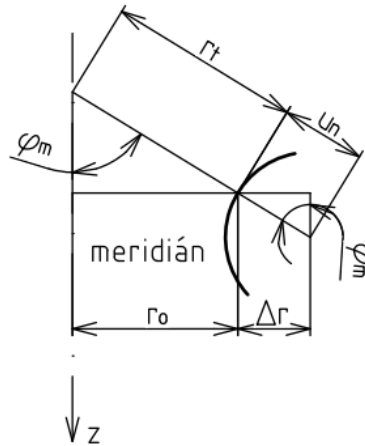
$$\varepsilon_m = \frac{1}{E} [\sigma_m - \mu(\sigma_t + \sigma_n)] \quad (3.30)$$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{E} [\sigma_n - \mu(\sigma_m + \sigma_t)] \quad (3.31)$$

Vlivem působení vnějších sil dochází k posunutí obecného bodu střednicové plochy ve směru normály u_n a také k posunutí v směru tečném k meridiánu u_m . Předmětem našeho kurzu bylo pouze odvození posuvu u_r v radiálním směru čili změnou poloměru Δr , čehož bylo dosaženo následujícími kroky [1].

Platí závislost mezi posunutím a přetvořením [1]:

$$\varepsilon_t = \frac{u_n}{r_t} \quad (3.32)$$



Obr. 13 Odvození změny Δr poloměru r radiálního řezu, upraveno podle [1]

Z Obr. 13 vyplývá následující vztah:

$$\Delta r = u_n \sin \varphi_m = \varepsilon_t r_t \sin \varphi_m \quad (3.33)$$

Dosazením $r_t = \frac{r_0}{\sin \varphi_m}$ do vztahu (3.33) je získána následující rovnice:

$$\Delta r = r_0 \varepsilon_t \quad (3.34)$$

Konstitutivní rovnice pro obvodové přetvoření (3.29) byla dosazena do vztahu (3.34). Jelikož má napětí σ_n zanedbatelnou velikost, je získána rovnice vyjadřující změnu poloměru r radiálního řezu:

$$\Delta r = \frac{r_0}{E} [\sigma_t - \mu \sigma_m] \quad (3.35)$$

Do vztahu (3.35) jsou dosazena hlavní napětí ve tvarech (3.24) a (3.25):

$$\begin{aligned} \Delta r &= \frac{r_0}{E} \left[\frac{pa}{2h} - \mu \frac{pa(r_0 + b)}{2r_0 h} \right] = \frac{r_0}{E} \left[\frac{r_0 pa - \mu pa(r_0 - b)}{2r_0 h} \right] = \\ &= \frac{pa}{2Eh} (r_0 - \mu(r_0 + b)) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Pro názornější grafickou interpretaci výsledků je změna poloměru Δr vyjádřena v závislosti na úhlu φ_m . Zde je nutné postupovat zvlášť pro vnější a vnitřní část skořepiny. Nejprve tedy částí vnější, kde platí $r_0 = b + a \sin \varphi_m$:

$$\begin{aligned}\Delta r &= \frac{pa}{2Eh} (b + a \sin \varphi_m - \mu(b + a \sin \varphi_m + b)) = \\ &= \frac{pa^2}{2Eh} \left(\frac{b}{a} (1 - 2\mu) + (1 - \mu) \sin \varphi_m \right)\end{aligned}\tag{3.37}$$

Pro stranu vnitřní naopak platí $r_0 = b - a \sin \varphi_m$ a vztah pro změnu poloměru má tento tvar:

$$\begin{aligned}\Delta r &= \frac{pa}{2Eh} (b - a \sin \varphi_m - \mu(b - a \sin \varphi_m + b)) = \\ &= \frac{pa^2}{2Eh} \left(\frac{b}{a} (1 - 2\mu) + (\mu - 1) \sin \varphi_m \right)\end{aligned}\tag{3.38}$$

Ve vyjádřeních (3.37) a (3.38) je objevuje stejná odlišnost ve znaménkách, jako tomu bylo v rovnicích pro meridiánová napětí. Tento rozdíl má zde stejný důvod, a proto je i tady možné využívat vztah pro vnější část skořepiny (3.37) pro všechny body toroidu, při použití výše zmíněného úhlu φ'_m .

4 Výpočet provedený pro konkrétní hodnoty analyticky

Pro demonstraci výsledků bude proveden výpočet na duši jízdního kola o průměrech $D = 665 \text{ mm}$ a $d = 30 \text{ mm}$ a tloušťce pláště $h = 1 \text{ mm}$, která symbolizuje toroidní skořepinu. Ve všech výše zmíněných vztazích pracujeme s poloměry $a = \frac{D}{2} = 15 \text{ mm}$ a $b = \frac{D}{2} = 332,5 \text{ mm}$. Tlak působící uvnitř pneumatiky je $p = 0,4 \text{ MPa}$. Materiálem je guma o Poissonově poměru $\mu = 0,5$ a Youngově modulu pružnosti $E = 4,5 \text{ MPa}$. Jeho velikost je v této fázi pouze odhadnutá a bude upřesněna v průběhu výpočtu. Jelikož je předpokládáno, že chování gumy bude nelineární z důvodu větších deformací, je následující výpočet proveden také na materiálu s chováním lineárním. Tím bude ocel o Youngově modulu pružnosti $E = 210 \text{ GPa}$ a Poissonově poměru $\mu = 0,3$. Rozměry zkoumaného tělesa zůstanou stejné a výsledky pro oba materiály pak budou na závěr vzájemně porovnány.

4.1 Napětí

Napětí, která v tělese v důsledku vnitřního tlaku působí, jsou za podmínek lineární pružnosti nezávislá na materiálových charakteristikách, a proto pro ocel i gumu dosahují stejných hodnot a výpočet je možné provést pro oba materiály současně.

4.1.1 Obvodové napětí

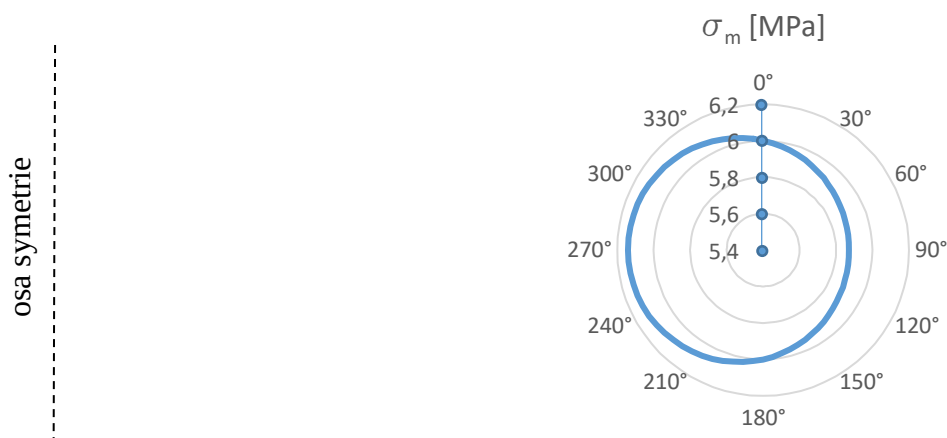
Jak už bylo zmíněno výše, normálové napětí σ_n je pro nás zanedbatelné. Velikost napětí obvodového σ_t , která je ve všech bodech tělesa stejná, byla získána dosazením konkrétních hodnot do vztahu (3.12):

$$\sigma_t = \frac{pa}{2h} = \frac{0,4 \cdot 15}{2 \cdot 1} = 3 \text{ MPa} \quad (4.1)$$

4.1.2 Meridiánové napětí

Napětí meridiánové σ_m se mění v závislosti na úhlu φ'_m . Největší napětí působí v místě s nejmenším poloměrem r_0 , které je proto nejkritičtější. Pro toho místo platí $\varphi'_m = 270^\circ$. Dosazením do rovnice (3.14) byla zjištěna velikost meridiánového napětí v tomto bodě. Velikost tohoto napětí v ostatních bodech skořepiny je vykreslena následujícím grafem (Obr. 14):

$$\sigma_m = \frac{pa(2b + a \sin \varphi_m)}{2h(b + a \sin \varphi_m)} = \frac{0,4 \cdot 15 \cdot (2 \cdot 332,5 + 15 \cdot \sin (270^\circ))}{2 \cdot 1 \cdot (332,5 + 15 \cdot \sin (270^\circ))} = 6,14 \text{ MPa} \quad (4.2)$$

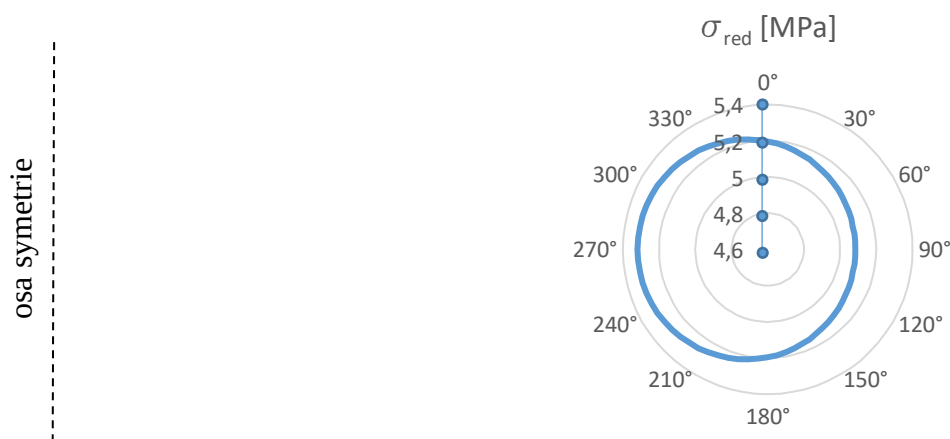


Obr. 14 Meridiánové napětí

4.1.3 Redukované napětí

Také redukované napětí σ_{red} , určené podle podmínky HMH, mění svou velikost v závislosti na úhlu φ'_m . Největších hodnot opět dosahuje v místě s nejmenším poloměrem r_0 . Dosazením do rovnice (3.28) byla spočtena velikost redukovaného napětí pro tento konkrétní bod. Jeho hodnoty pro ostatních body skořepiny jsou opět vykresleny grafem (Obr. 15). Hodnoty redukovaného napětí v jednotlivých bodech nejsou příliš rozdílné. Na skořepině tedy není žádné místo, které by bylo výrazně nebezpečnější než místa ostatní.

$$\sigma_{RED} = \sqrt{\sigma_m^2 + \sigma_t^2 - \sigma_m \sigma_t} = \sqrt{6,14^2 + 3^2 - 6,14 \cdot 3} = 5,32 \text{ MPa} \quad (4.3)$$



Obr. 15 Redukované napětí

4.2 Přetvoření

Přetvoření je zapříčiněno působením vnitřního tlaku v tělese, který v něm vyvolává trojosý stav deformace. Dochází tak k přetvoření k přetvoření meridiánovému ε_m , k přetvoření obvodovému ε_t a k nim kolmému přetvoření ve směru normály, které označujeme ε_n . Přetvoření je na rozdíl od napětí působících ve skořepině závislé na materiálu. Je tedy nutné postupovat pro ocel a gumu zvlášť.

4.2.1 Určení modulu pružnosti pro gumu

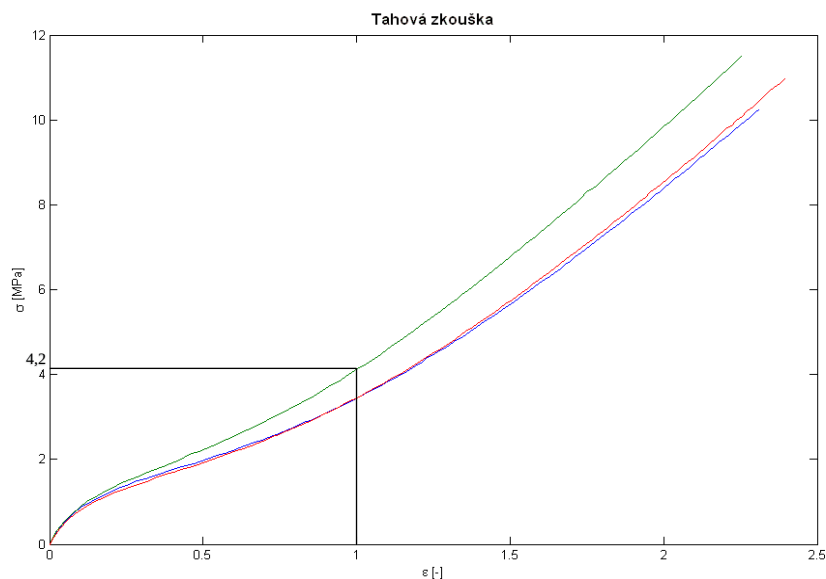
Pro materiály lineárně elastické je Youngův modul pružnosti směrnici lineární části grafu tahové zkoušky a je určen pomocí Hookova zákona podle vztahu [13]:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (4.4)$$

V našem případě však bude docházet k deformacím daleko větším, při kterých je chování materiálu nelineární. V oblasti grafu, která zobrazují nelineární chování materiálu, se velikost modulu pružnosti mění s rostoucím zatížením. V takovém případě se využívá sečný modul pružnosti. Sečný modul pružnosti je určen sklonem čáry, jež začíná v počátku tahového diagramu, a protíná křivku ve zkoumaném bodě. Dosazením do vztahu (4.4) je pak určena hodnota Youngova modulu pružnosti pro konkrétní velikost zatížení v dané oblasti deformací.

Pro výpočet byl zvolen konkrétní typ gumy, který je na Obr. 16 znázorněn zelenou křivkou. Pro zjištění, v jakých deformacích se přibližně budeme pohybovat a pro jakou oblast bude hodnota Youngova modulu pružnosti následně určena, neboť je v nelineární oblasti nekonstantní, byla jeho hodnota v první fázi výpočtu odhadnuta na $E = 4,5 \text{ MPa}$. Dosazením tohoto čísla do vztahu (3.30) získáme přibližně $\varepsilon = 1$. Pro tuto velikost přetvoření byla odečtena z obrázku (Obr. 16) pro zelenou křivku příslušná velikost napětí a dosazením do vztahu (4.4) byl určen Youngův modul pružnosti v tomto bodě, který bude použit v následujícím výpočtu.

$$E = \frac{4,2}{1} = 4,2 \text{ MPa} \quad (4.5)$$

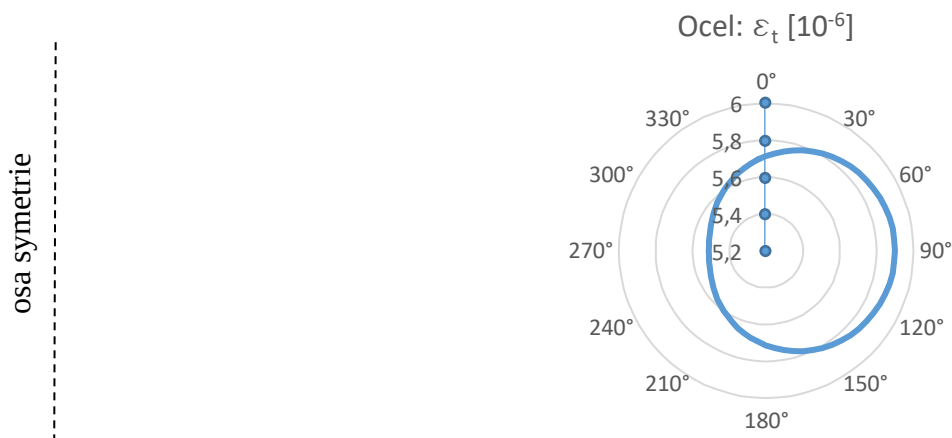


Obr. 16 Tahový diagram gumy použité ve výpočtu [14]

Pro tuto konkrétní hodnotu bude velikost přetvoření lehce větší než 1. Pohybujeme se tedy na křivce v blízkosti bodu, pro který byla hodnota Youngova modulu pružnosti odhadnutá, a tak i v této oblasti je možné, vzhledem k přesnosti ostatních výpočtů, jeho hodnotu považovat za platnou.

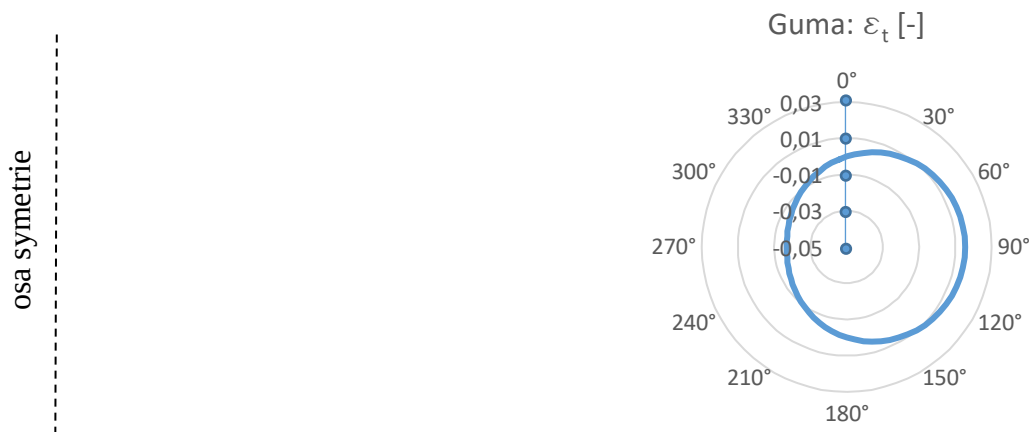
4.2.2 Přetvoření obvodové

Velikost obvodového přetvoření pro těleso vyrobené z oceli, byla vypočtena dosazením příslušných veličin do vztahu (3.29). Jak je možné vidět v následujícím grafu (Obr. 17), největší bude v místě, které je od osy rotace nejvzdálenější. Obvodové přetvoření dosahuje pro všechny body tělesa velice malých hodnot a tyto hodnoty se také pro různé body tělesa příliš neliší.



Obr. 17 Obvodové přetvoření pro model z oceli

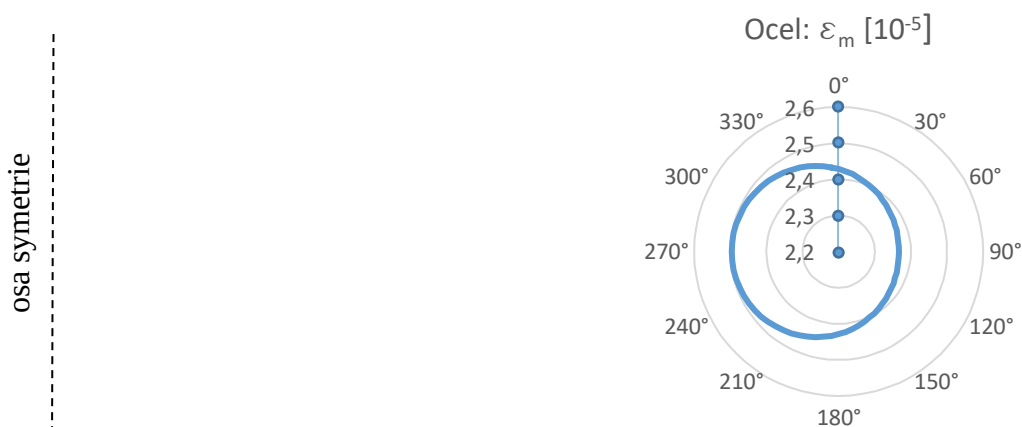
Pro těleso z gumy je dosazením příslušného modulu pružnosti do rovnice (3.29) dosaženo zcela odlišných výsledků (Obr. 18). Pro body ležící na vnější polovině toroidu je obvodové přetvoření kladné a pro body ležící na straně vnitřní záporné. Na korunách toroidu je dokonce nulové. Deformace se tedy po povrchu tělesa výrazně mění. To je způsobeno tím, že meridiánové napětí je v případě použití tohoto materiálu v některých bodech tělesa lehce větší a v jiných lehce menší než dvojnásobek napětí obvodového, a při použití Poissonova poměru $\mu = 0,5$, dochází ke skoro úplnému odečtení členů v závorce ve vztahu (3.29). Vypočtené hodnoty přetvoření jsou tak nulová, blízké nule, záporné, ale také kladné. Největší je obvodové přetvoření v místě kde $\varphi_m = 270^\circ$. Zde dojde ke zmenšení rozměru tělesa v obvodovém směru zhruba o 1,5 %. V žádném místě však není deformace větší než 2 %, čím by byla opuštěna oblast lineárního chování materiálu. U gumy očekáváme hyperelastické chování neboli velké elastické deformace. Z toho je možné vyvodit, že na rozdíl od většiny skořepin nastane největší deformace v jiném než obvodovém směru.



Obr. 18 Obvodové přetvoření pro model z gumy

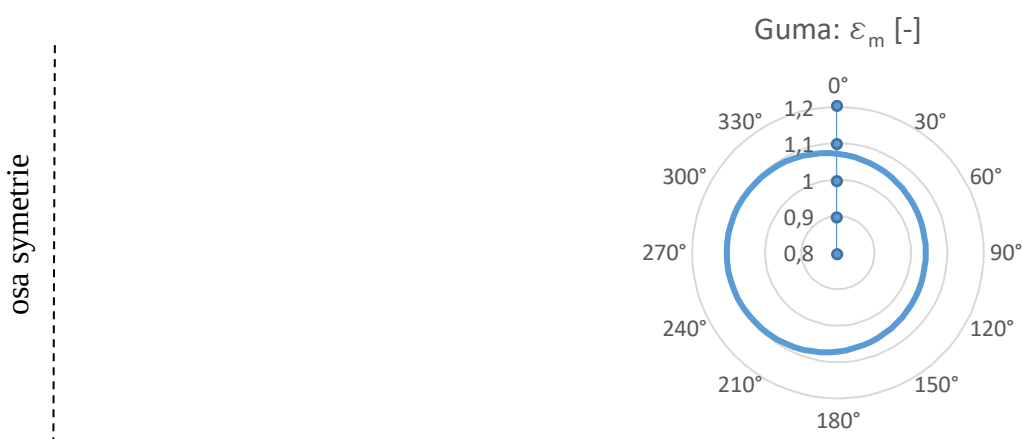
4.2.3 Přetvoření meridiánové

Velikost přetvoření meridiánové byla vypočtena dosazením do vztahu (3.30). Pro ocel jsou hodnoty zhruba o jeden řád vyšší, než tomu bylo u přetvoření obvodového, ale v jednotlivých místech skořepiny však opět není příliš odlišné (Obr. 19). Nejvyšších hodnot bylo dosaženo na nejmenším poloměru toroidu.



Obr. 19 Meridiánové přetvoření pro model z oceli

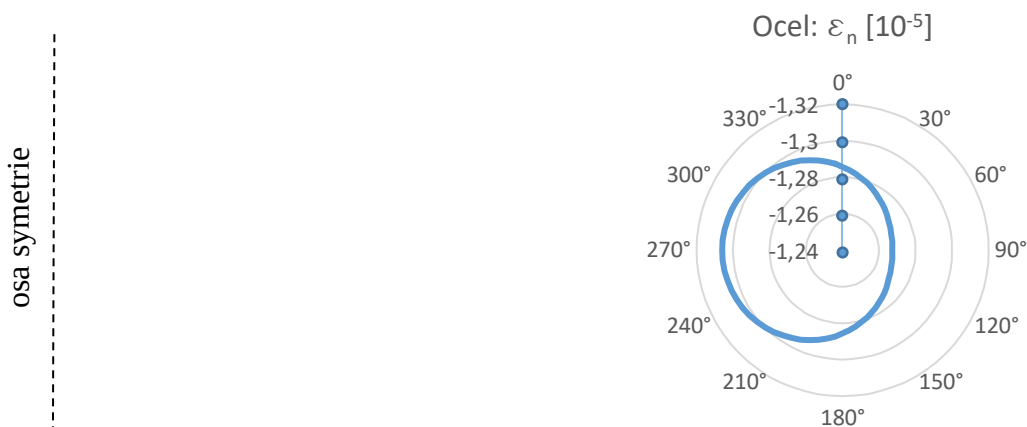
Naopak v případě gumy (Obr. 20) jsou hodnoty zcela odlišné než pro přetvoření obvodové, při použití druhého materiálu. Pro rozdílné hodnoty úhlu φ_m má přetvoření meridiánové velmi podobné hodnoty ve všech bodech tělesa. Konkrétně se pohybujeme kolem 100 % deformace, která je všude kladná.



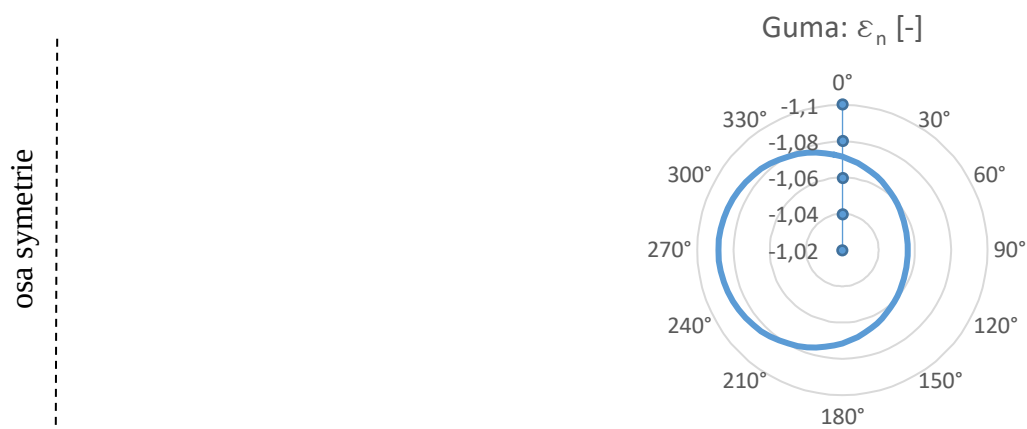
Obr. 20 Meridiánové přetvoření pro model z gumy

4.2.4 Třetí hlavní přetvoření

Využitím vztahu (3.31) je dosaženo závěru, že jak pro ocel, tak i pro gumu bude třetí hlavní přetvoření (kolmé k meridiánu) záporné. Rozměry skořepiny ve směru normály (tloušťka) se tedy budou působení vnitřního tlaku zmenšovat. Jak je možné vidět v uvedených grafech (Obr. 21, Obr. 22), největší přetvoření nastává na nejmenším poloměru a jeho hodnoty jsou pro oba materiály podobné jako u přetvoření meridiánového. Rozdíly mezi jeho hodnotami v různých oblastech tělesa jsou pro ocel i gumu zcela minimální.



Obr. 21 Přetvoření pro model z oceli



Obr. 22 Přetvoření pro model z gumy

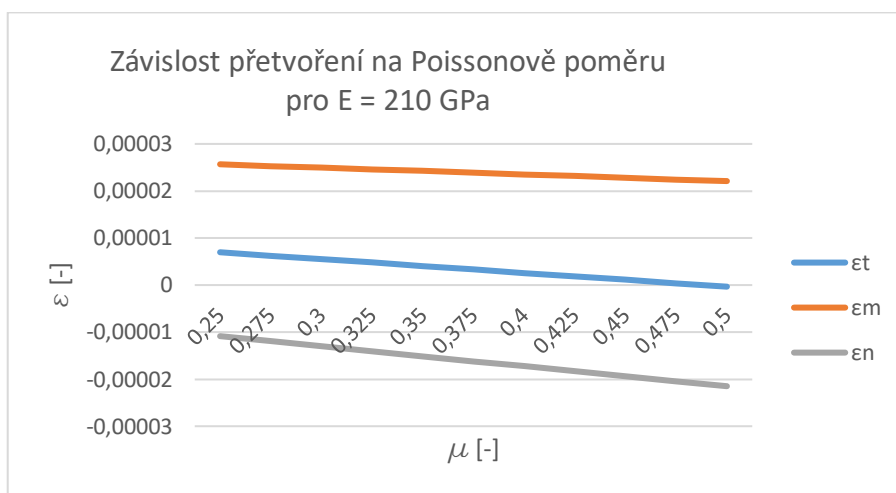
Z dosažených výsledků je možný vyvodit následující. Pro těleso vyrobené z oceli mají přetvoření ve všech směrech velmi malé hodnoty a při působení daného zatížení, takže se chování skořepiny pokládá za lineární. Naopak u gumy deformace ve dvou směrech zřetelně překračuje dvouprocentní hranici a dochází zde k nelinearitě.

4.2.5 Závislost přetvoření na Poissonově poměru

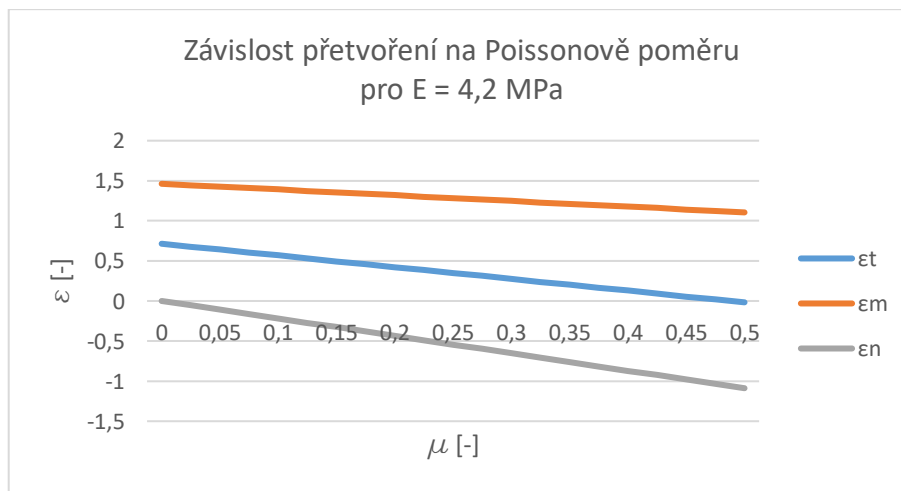
Další analýza je inspirována skutečností, že obvodová přetvoření u gumy vyšla překvapivě malá a má zodpovědět otázku, proč tomu tak je. Následujícími grafy (Obr. 23, Obr. 24) má být ukázána změna ve velikosti přetvoření v momentě, kdy se Poissonův poměr začne přibližovat hodnotě $\mu = 0,5$. Závislost je vyjádřena jednotně pro místo toroidní skořepiny, kde platí $\varphi_m = 90^\circ$. Poissonův poměr je bezrozměrná hodnota, která se pro většinu materiálů pohybuje od 0 do 0,5. Pro kovy dosahuje hodnot z intervalu $\mu \in (0,25; 0,5)$. Kovy nám v této závislosti bude reprezentovat materiál s $E = 210 \text{ GPa}$ ze zadání. U většiny typů gum má Poissonův poměr hodnotu téměř $\mu = 0,5$ odpovídající jejich objemové nestlačitelnosti. Existují však druhy gum, které v sobě obsahují značné množství vzduchových bublinek, a jeho

hodnota se tak může pohybovat dokonce i velmi blízko nuly. Závislost pro gumu s $E = 4,2 \text{ MPa}$ tedy bude vykreslena v intervalu $\mu \in (0; 0,5)$.

Z uvedených grafů (Obr. 23, Obr. 24) je zřejmé, že přetvoření obvodové a meridiánové pro oba materiály s rostoucím Poissonovým poměrem klesá. Naopak přetvoření normálové roste, pokud bereme v úvahu jeho absolutní hodnotu. Pro hodnoty blízké $\mu = 0,5$ přetvoření obvodové klesá k nule, což vysvětluje, proč se u gumy v této složce neobjevují vyšší hodnoty přetvoření obvodového a dominantními se stávají ostatní složky délkových přetvoření.



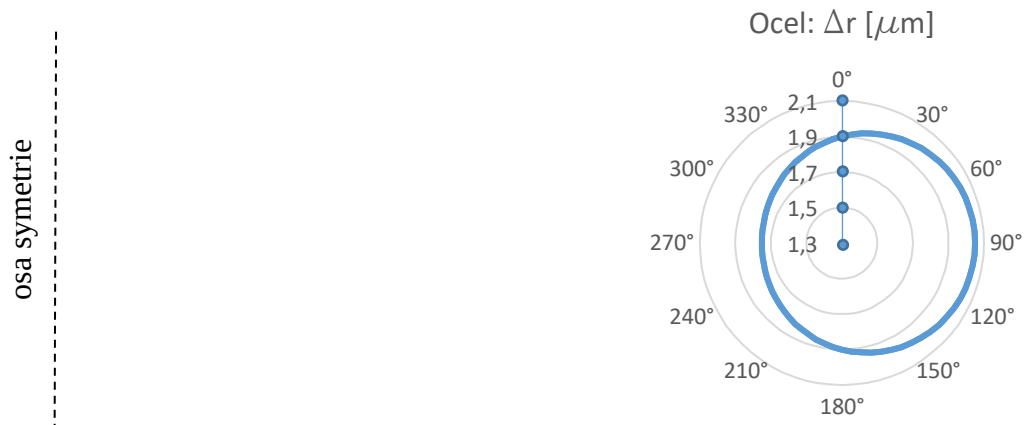
Obr. 23 Závislost přetvoření na Poissonově poměru pro model $E = 210 \text{ GPa}$



Obr. 24 Závislost přetvoření na Poissonově poměru pro model $E = 4,2 \text{ MPa}$

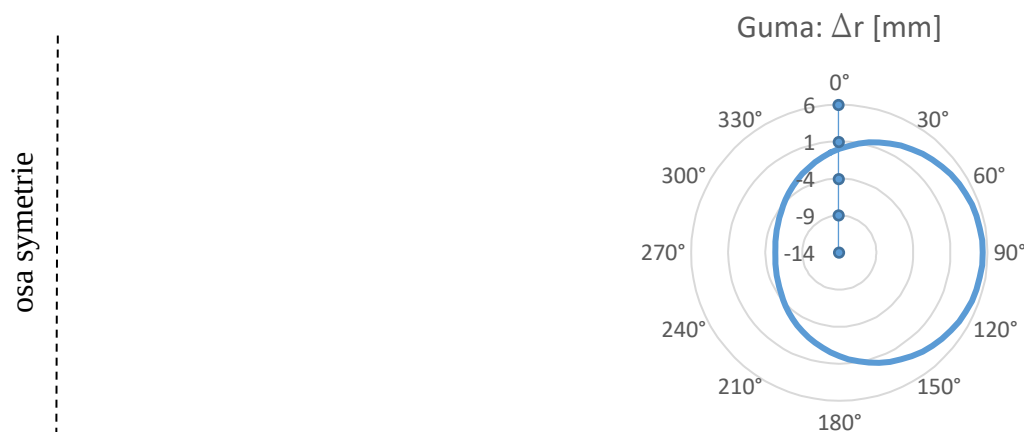
4.3 Posunutí v radiálním směru

Velikost posunutí v radiálním směru byla určena dosazením do výše odvozeného vztahu (3.37). V případě oceli dojde k největšímu posunutí v místě s největším poloměrem r_0 . Jak vidíme v příloženém grafu (Obr. 25), dosahují posunutí poměrně malých hodnot, konkrétně v řádech jednotek mikrometrů. Ve všech místech skořepiny jsou také posunutí kladná, tj. poloměr toroidu roste.



Obr. 25 Posunutí v radiálním směru pro model z oceli

U toroidní skořepiny vyrobené gumy nastávají kladná i záporná posunutí (Obr. 26). V některých místech se tak poloměr tělesa bude zvětšovat a v jiných zmenšovat. Deformace na vnější a vnitřní straně skořepiny dosahují stejných hodnot, ale opačného směru. Posuvy pro tento materiál jsou také o několik řádů vyšší, než tomu bylo u oceli a nejsou zanedbatelné v porovnání s rozměry tělesa. Příímým důsledkem je pak porušení předpokladů lineární pružnosti, protože uvolnění prvku tělesa v nedeformovaném stavu není možné použít pro popis jeho stavu deformovaného.

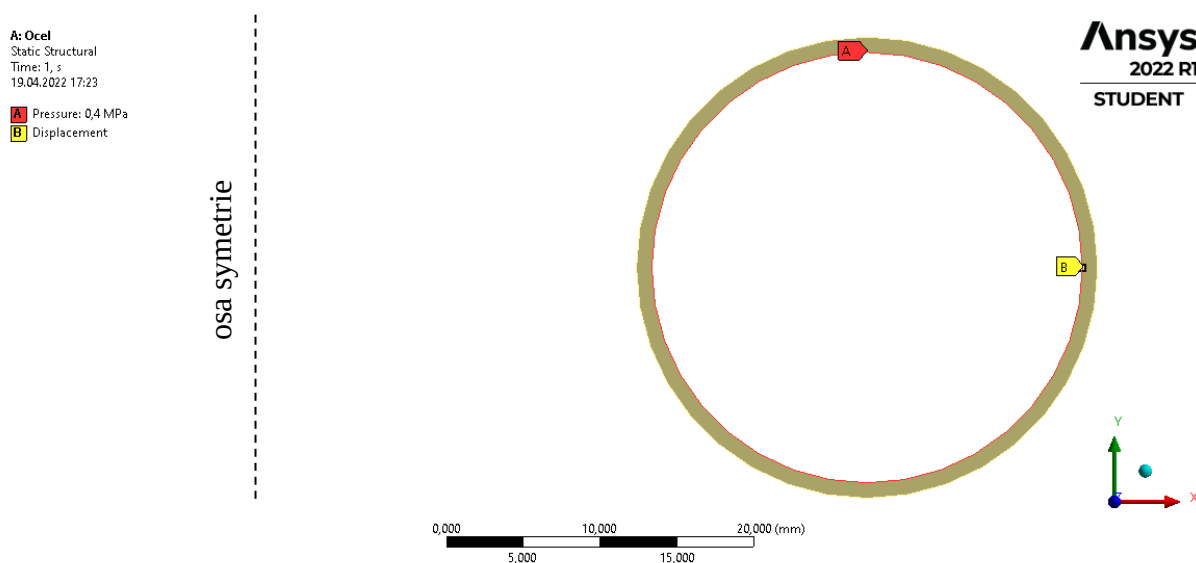


Obr. 26 Posunutí v radiálním směru pro model z gumy

5 Výpočet pro konkrétní hodnoty metodou MKP

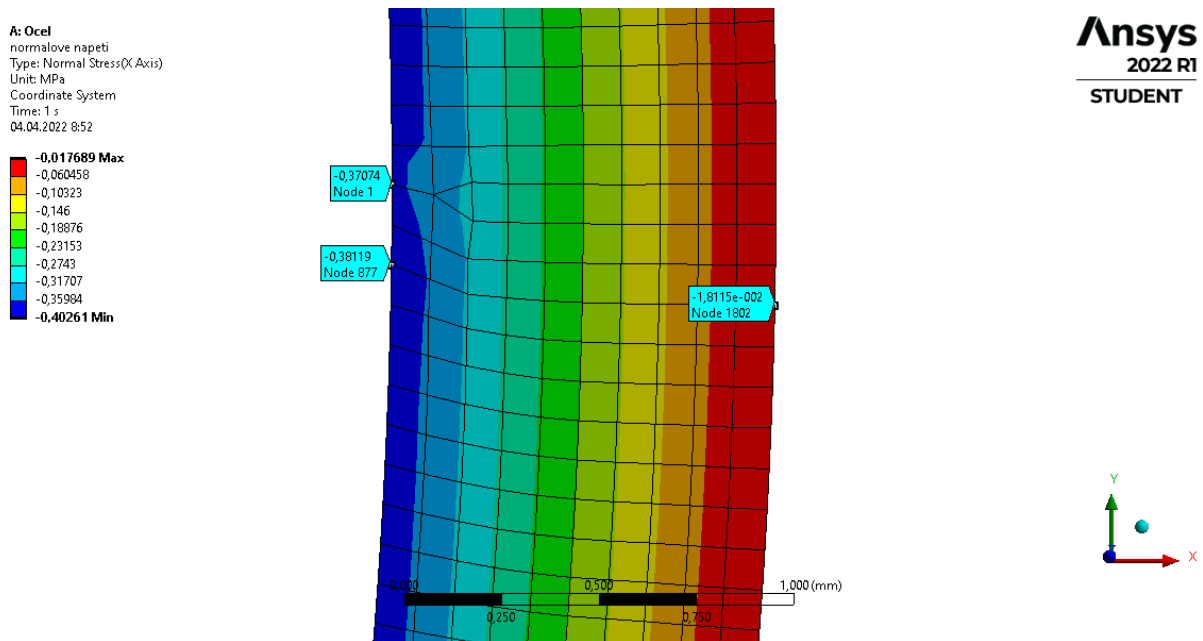
Pro ověření správnosti výsledků získaných analyticky byl zhotoven model toroidní skořepiny v programu ANSYS Workbench, který pro výpočet využívá metodu konečných prvků (MKP).

Pro tvorbu modelu byly využity 2D prvky s osovou symetrií okolo osy y . Ta také omezuje pohyb v osách x a z . Pohyb v ose y byl omezen pomocí vazby, jak je znázorněno na Obr. 27. Její umístění nemá na výsledky značný vliv. Rozměry, materiálové charakteristiky a zatížení zůstaly stejné jako v kapitole 4.



Obr. 27 Zatížení a zamezení posuvů v ose y

Po vytvoření geometrie a zadání materiálových charakteristik bylo přistoupeno k tvorbě sítě. Programem defaultně vytvořená síť obsahovala po šířce skořepiny jen jeden prvek, což je naprosto nedostačující, a bylo tak potřeba síť zjemnit. Jako kontrolu pro dostatečnou hustotu sítě je možné využít složku normálového napětí kolmého k meridiánu. To by při zatížení vnitřním tlakem $0,4 \text{ MPa}$ mělo na vnitřním povrchu skořepiny dosahovat právě této hodnoty. Na povrchu vnějším, který nijak zatížen není by jeho hodnota měla být nulová. Obecně platí, že u numerického modelu akceptujeme chybu do 5 %. Síť tedy bude dostatečná, pokud bude na všech místech vnitřního povrchu hodnota napětí dosahovat maximálně hodnoty $\sigma_n = -0,38 \text{ MPa}$ a na povrchu vnějším minimálně $\sigma_n = -0,02 \text{ MPa}$. Toho bylo dosaženo při použití lineárních prvků o velikosti $0,1 \text{ mm}$ po celém tělese. Tloušťka skořepiny je tak vyplněna deseti prvky (Obr. 28). Důsledkem tvaru tělesa je vytvoření ne příliš přesných trojúhelníkových prvků v některých oblastech. V těchto místech se tak mohou výsledné hodnoty lehce odlišovat, což také způsobuje mírný posuv minim a maxim oproti analytickému modelu.



Obr. 28 Síť použitá pro model toroidní skořepiny

Při výpočtu provedeném analyticky s využitím teorie membránové skořepiny se předpokládá, že velikost napětí, přetvoření ani posunutí jsou po tloušťce skořepiny neměnné. To však neplatí pro numerický model. Ten dává reálné, tedy proměnné výsledky v uzlech sítě, které jsou rozmístěny přes tloušťku tělesa. Pro dosažení stejných hodnot, jaké byly získány výpočtem analytickým, by bylo nutné udělat vážený průměr hodnot v uzlech v každém místě meridiánu. Tento fakt je nutné brát při porovnávání konkrétních čísel v úvahu. Z tohoto důvodu bude pro srovnání výsledků s analytickým řešením uvažován aritmetický průměr hodnot na vnějším a vnitřním povrchu pro místa s nejmenším a největším poloměrem r_0 , které jsou dále označeny jako C a D.

5.1 Výsledky pro těleso vyrobené z oceli

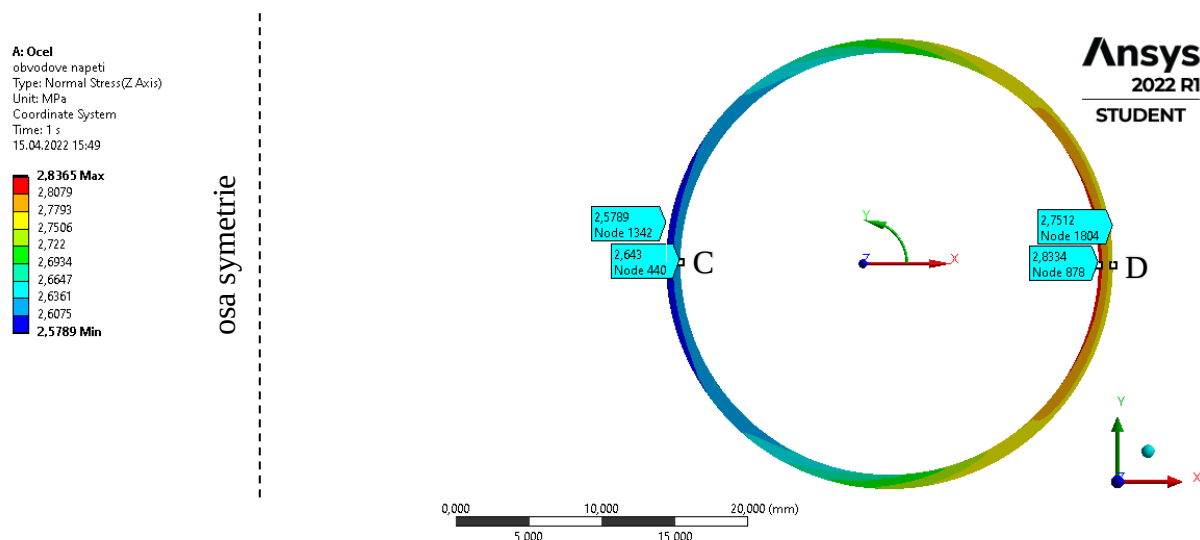
Analytickým výpočtem bylo potvrzeno, že chování tělesa vyrobeného z oceli je za daného zatížení lineární. Numerický výpočet bude proto nejdříve proveden pro tento materiál, aby byla ověřena jeho správnost. Po porovnání výsledků dosažených oběma metodami výpočtu přejdeme k tělesu vyrobenému z gumy, které vykazuje chování nelineární.

5.1.1 Napětí

5.1.1.1 Obvodové napětí

Na základě analytického výpočtu bylo dosaženo závěru, že obvodové napětí je nezávislé na poloze vyšetřovaného bodu a má pro všechna místa skořepiny stejnou hodnotu $\sigma_t = 3 \text{ MPa}$. Z Obr. 29 je zřejmé, že jeho velikost, vypočtená pomocí MKP, se se zmenšující se vzdáleností od osy rotace také zmenšuje. Spočtením aritmetického průměru z hodnot na vnějším a vnitřním povrchu skořepiny pro body C a D, dosahuje obvodové napětí hodnot

uvedených v (Tab. 1). Výsledky, kterých bylo dosaženo numerickým výpočtem se od těch získaných analyticky liší přibližně o 7 – 13 %.



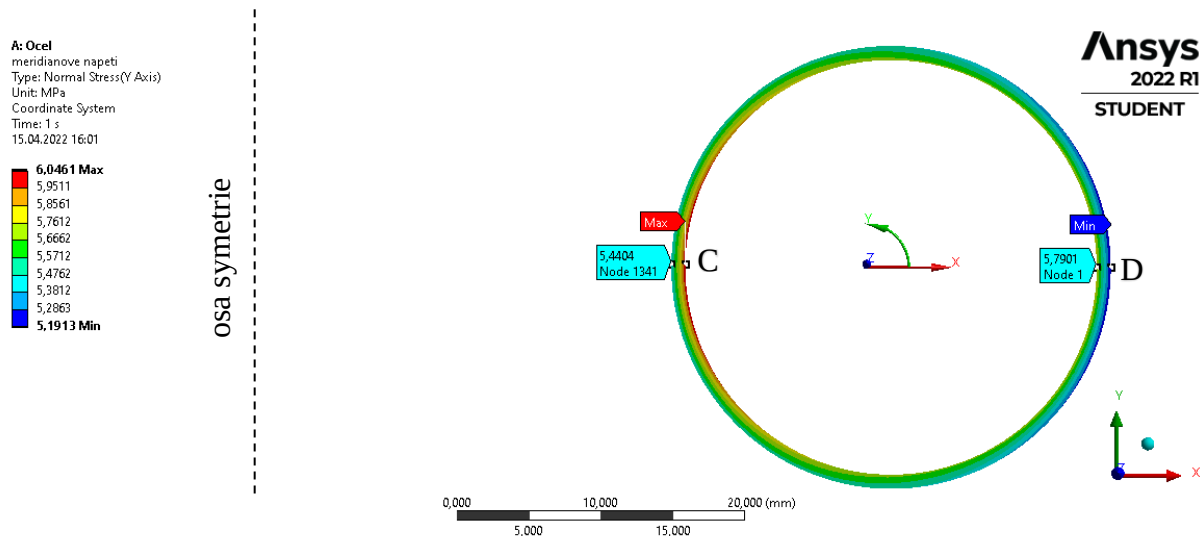
Obr. 29 Obvodové napětí pro model z oceli

Tab. 1 Porovnání hodnot obvodového napětí pro model z oceli v bodech C a D

Napětí	Bod	Analytický výpočet	Numerický výpočet	Rozdíl hodnot
σ_t [MPa]	C	3	2,61	13 %
	D		2,79	7 %

5.1.1.2 Meridiánové napětí

Místa s maximální a minimální hodnotou meridiánového napětí se pro oba typy výpočtu shodují, jak je také vykresleno na Obr. 30. Zprůměrováním hodnot na vnějším a vnitřním povrchu pro body C a D dostáváme hodnoty uvedené v (Tab. 2). Získané hodnoty se pro oba body odlišují od předchozího výpočtu maximálně o 6,5 % a tudíž mohou být považovány za přijatelné. Rozdíl mezi maximálním a minimálním napětím po tloušťce stěny je v obou hodnocených bodech cca 10% (Tab. 2), což naznačuje porušení předpokladů membránové napjatosti. Tím lze vysvětlit rozdíly mezi analytickým a numerickým řešením. Stejný rozdíl se objevuje i u dalších vypočtených charakteristik. Vzhledem k absenci omezujících předpokladů lze proto MKP řešení považovat za přesnější.



Obr. 30 Meridiánové napětí pro model z oceli

Tab. 2 Porovnání hodnot meridiánového napětí pro model z oceli v bodech C a D

Napětí	Bod	Analytický výpočet	Numerický výpočet – vnitřní povrch	Numerický výpočet – vnější povrch	Numerický výpočet – průměr	Rozdíl hodnot analytického a numerického výpočtu
σ_m [MPa]	C	6,14	6,0461	5,4404	5,74	6,5 %
	D	5,87	5,7901	5,1913	5,5	6,3 %

5.1.1.3 Redukované napětí

Pro redukované napětí, určené podle podmínky HMH, dostáváme obdobné výsledky jako pro napětí meridiánové. Maximum a minimum se nacházejí na stejných místech, jako při analytickém výpočtu. Konkrétní hodnoty pro C a D (Tab. 3), vykazují odlišnost od analytického řešení mírně větší než 3 %, což je v rámci obvyklé nepřesnosti výsledků.

Tab. 3 Porovnání hodnot redukovaného napětí pro model z oceli v bodech C a D

Napětí	Bod	Analytický výpočet	Numerický výpočet	Rozdíl hodnot
σ_{red} [MPa]	C	5,32	5,14	3,4 %
	D	5,08	4,93	3 %

5.1.2 Přetvoření

Pro všechna přetvoření se poloha maxim a minim nacházela na stejných místech, jaké byly zjištěny analytickým výpočtem. Jejich hodnota je také velmi malá, čímž bylo potvrzeno, že chování toroidní skořepiny vyrobené z oceli je pro dané zatížení lineární. Získané hodnoty (Tab. 4), vykazují, až na obvodové přetvoření v bodě C, dobrou shodu s analytickým modelem. Odlišnost této hodnoty odpovídá odlišnost obvodového napětí pro tento bod oproti analytickému výpočtu a má zřejmě stejný původ.

Tab. 4 Porovnání hodnot přetvoření pro model oceli v bodech C a D

Přetvoření	Bod	Analytický výpočet	Numerický výpočet	Rozdíl hodnot
$\varepsilon_t \cdot 10^6$ [-]	C	5,51	4,51	18,1 %
	D	5,9	5,74	2,7 %
$\varepsilon_m \cdot 10^5$ [-]	C	2,5	2,39	4,4 %
	D	2,37	2,24	5,5 %
$\varepsilon_n \cdot 10^5$ [-]	C	-1,31	-1,29	1,5 %
	D	-1,27	-1,28	1 %

5.1.3 Posunutí v radiálním směru

Stejně jako pro analytický model i zde platí, že s rostoucí vzdáleností od osy rotace posunutí v radiálním směru narůstá (Tab. 5). Značná odlišnost hodnoty od předchozího výpočtu pro bod C souvisí s rozdílným výsledkem pro obvodové přetvoření pro tento bod.

Tab. 5 Posunutí v radiálním směru pro model z oceli v bodech C a D

Posunutí v radiálním směru	Bod	Analytický výpočet	Numerický výpočet	Rozdíl hodnot
Δr [mm]	C	0,00175	0,00143	18,3 %
	D	0,00205	0,00199	2,9 %

5.2 Těleso vyrobené z gumy

Analytickým výpočtem bylo dosaženo závěru, že se guma pro tento případ zatížení bude chovat nelineárně. Fakt, že deformace tělesa pro tento materiál budou až 100%, ověříme následně také numericky.

5.2.1 Napětí

Jak bylo zmíněno výše, napětí jsou nezávislá na materiálu, a proto by hodnoty, jak pro těleso z gumy, tak pro těleso z oceli měly vyjít stejné (při použití lineární teorie pružnosti). Vytvořením numerického modelu bylo dokázáno, že získaná napětí liší o méně než 1 %, čímž byla potvrzena shoda s analytikou.

5.2.2 Přetvoření

Také numerickým modelem bylo dosaženo závěru, že k velkým přetvořením bude docházet pouze ve směru meridiánovém a ve směru jeho normály. Získané výsledky (Tab. 6), se pro tyto dva typy přetvoření od těch získaných analyticky zásadně nelišily. Naopak pro přetvoření obvodové, které nabývá velice malých hodnot, jsou dosažené výsledky po porovnání s předchozím výpočtem výrazně odlišné. Vzhledem k nestlačitelnosti gumy je absolutní chyba pro všechny složky přetvoření podobná. Přetvoření obvodové je nicméně velmi malé a při procentuálním porovnávání výsledků obou typů výpočtu procentuální chyba výrazně naroste.

Tab. 6 Porovnání hodnot přetvoření pro model z gumy v bodech C a D

Přetvoření	Bod	Analytický výpočet	Numerický výpočet	Rozdíl hodnot	Absolutní rozdíl hodnot
ε_t [-]	C	-0,017	-0,04	135,3 %	0,023
	D	0,015	0,036	140 %	0,021
ε_m [-]	C	1,11	1,08	2,7 %	0,03
	D	1,04	1	3,8 %	0,04
ε_n [-]	C	-1,09	-1,04	4,6 %	0,05
	D	-1,06	-1,03	2,8 %	0,03

Jelikož používáme u gumy nestlačitelný model, tedy $\mu = 0,5$, měla by být splněna podmínka nestlačitelnosti, tedy že by součet všech přetvoření pro konkrétní bod měl být roven 0. Tato podmínka byla ověřena pro body C a D. Jak je uvedeno v (Tab. 7) součet se pro oba body a oba typy výpočtu pohyboval velice blízko nule nebo byl dokonce nulový. Podmínka nestlačitelnosti tak byla potvrzena.

Tab. 7 Podmínka nestlačitelnosti pro model z gumy pro body C a D

Součet přetvoření	Bod	Analytický výpočet	Numerický výpočet
$\varepsilon_t + \varepsilon_m + \varepsilon_n$ [-]	C	0,003	0
	D	-0,005	0,006

5.2.3 Posunutí v radiálním směru

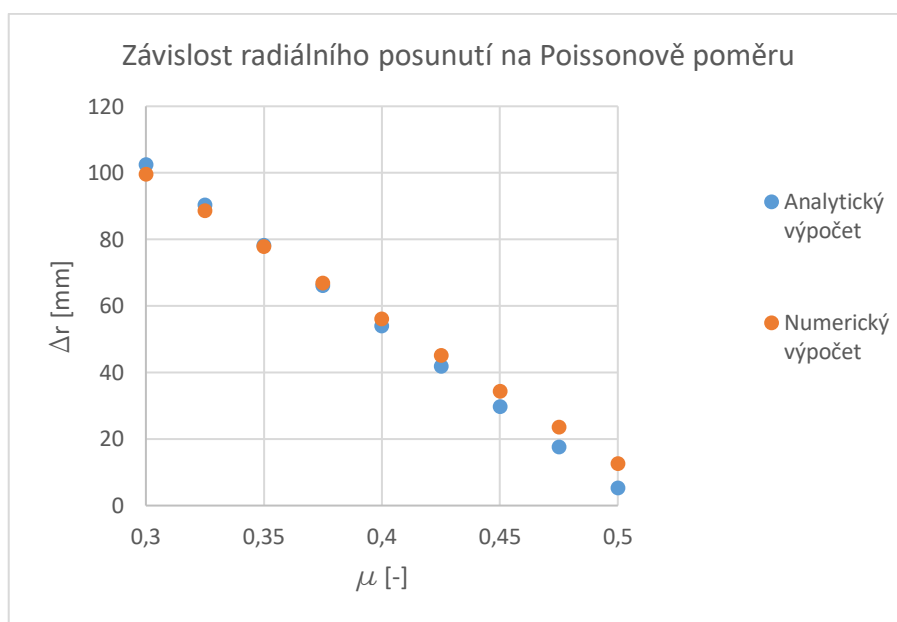
Jak je možné vidět v (Tab. 8), velikost posunutí v radiálním směru se od hodnot vypočtených analyticky zásadně odlišuje. Posunutí jsou pro oba typy řešení na korunách toroidu nulová a pro body ve vzdálenosti $r_0 > b$ a $r_0 < b$, ležící na stejném radiálním řezu, symetrická. Numerickým výpočtem však byly získány hodnoty více než dvojnásobné. Vzhledem k velkým deformacím nelze ani jeden výpočet považovat za správný, ten lze dostat jedině nelineárním MKP řešením, což je mimo možnosti této práce. Přesto však bylo usilováno o nalezení důvodu tak velkého rozdílu vyhodnocením závislosti výsledků na Poissonově poměru.

Tab. 8 Posunutí v radiálním směru pro model z gumy v bodech C a D

Posunutí v radiálním směru	Bod	Analytický výpočet	Numerický výpočet	Rozdíl hodnot
Δr [mm]	C	-5,36	-12,6	135,1 %
	D	5,36	12,6	135,1 %

5.2.3.1 Závislost radiálního posunutí na Poissonově poměru

Jelikož je posunutí v radiálním směru dopočítáváno pomocí vztahu (3.34), ve kterém figuruje obvodové přetvoření, jehož velikost je značně ovlivněna velikostí Poissonova poměru, lze očekávat, že i hodnoty radiálního posunutí se budou s měnícím se Poissonovým poměrem značně lišit. V následujícím grafu (Obr. 31) je zobrazena závislost velikosti radiálního posunutí na hodnotě Poissonova poměru pro výsledky získané jak numericky, tak i analyticky. Z grafu je zřejmé, že velikost radiálního posunutí s rostoucím Poissonovým poměrem klesá přibližně lineárně a pro $\mu=0.5$ klesne o řád, zatímco rozdíl mezi získanými výsledky výrazně naroste. Absolutní rozdíl hodnot získaných oběma metodami sice není v porovnání s největšími hodnotami příliš velký, ale pokud je brán v úvahu relativní rozdíl v procentech, tak především pro velmi malá radiální posunutí ($\mu = 0,5$) nabývá velkých hodnot. To vysvětluje značnou odlišnost výsledků zapsaných v Tab. 8.

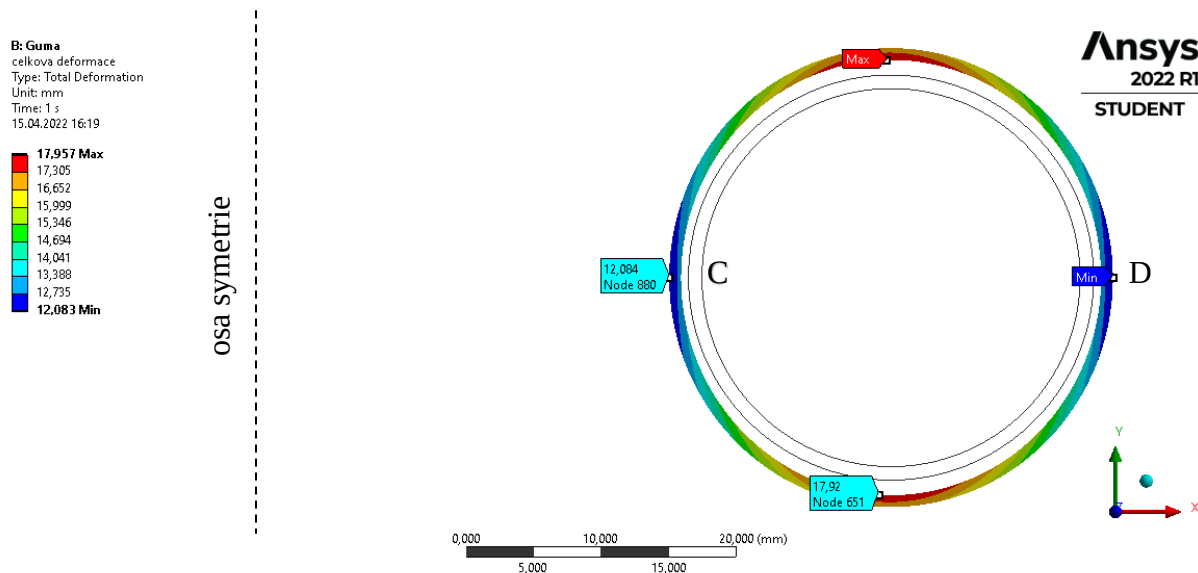


Obr. 31 Závislost radiálního posunutí na Poissonově poměru pro analytický a numerický výpočet

Skoro stejné procentuální neshody mezi analytickým a numerickým modelem bylo dosaženo pro obvodové přetvoření. Ta má zde stejný původ, neboť se přetvoření přímo přepočítává na radiální posuv a obráceně.

5.2.4 Celková deformace

Celková deformace, kterou jsme analytickým výpočtem určovali, je pro model řešený MKP zvětšeně zobrazena na Obr. 32. Skořepina se deformuje symetricky podle horizontální a vertikální osy procházející středem meridiánové křivosti, tvar meridiánu se tedy mění na eliptický.



Obr. 32 Celková deformace pro model z gumy

5.2.5 Nelinearita

Při řešení toroidní skořepiny vyrobené z gumy se v programu ANSYS Workbench objevovalo upozornění, že deformace jsou příliš velké a bylo by vhodné změnit okrajové podmínky nebo povolit velké deformace, čímž by byl zapnut nelineární výpočet. Jak bylo dokázáno předcházejícím výpočtem, těleso z gumy se za daného zatížení chová nelineárně. Z tohoto důvodu bude tato možnost řešení vyzkoušena a porovnána s analytickým lineárním řešením.

Při ponechání vnitřního tlaku $p = 0,4 \text{ MPa}$ výpočet nekonvergoval, a proto bylo nutné přistoupit ke snížení zatížení až na $p = 0,05 \text{ MPa}$, pro které už byl výpočet úspěšně proveden. Nicméně i za těchto podmínek jsou, jak bylo ověřeno analyticky, deformace v řádech desítek procent a lineární model již nemůže být platný.

Rozdíly mezi lineárním analytickým a nelineárním numerickým modelem jsou již pro použité osmkrát nižší zatížení mnohem větší než mezi lineárními modely a pohybují se přibližně od 30 do 50 %. Ještě větší odchylky řádu stovek procent vykazují výsledky pro obvodové přetvoření a posunutí v radiálním směru. Na základě nelineárního numerického modelu je možno předpokládat, že veškeré výstupní veličiny na tělese budou mnohem větší, než jaké dává výpočet lineární. Ani výsledky numerického (nelineárního) MKP modelu však nelze považovat za správné, protože předpokládají lineárně elastický materiál. Další zpřesnění numerického modelu je však mimo možnosti této práce.

Tab. 9 Porovnání hodnot pro lineární analytický a nelineární numerický model z gumy
v bodech C a D při osmině maximálního zatížení

Napětí/přetvoření /posunutí	Bod	Lineární analytický výpočet	Nelineární numerický výpočet	Rozdíl hodnot
σ_t [MPa]	C	0,375	0,48	28 %
	D		0,53	41,3 %
σ_m [MPa]	C	0,77	1,06	37,7 %
	D	0,73	1,01	38,4 %
σ_{red} [MPa]	C	0,66	0,94	42,4 %
	D	0,64	0,89	39,1 %
ε_t [-]	C	-0,0021	-0,0095	352,4 %
	D	0,0019	0,0086	352,6 %
ε_m [-]	C	0,14	0,2	42,9 %
	D	0,13	0,18	38,5 %
ε_n [-]	C	-0,14	-0,19	35,7 %
	D	-0,13	-0,19	46,2 %
Δr [mm]	C	-0,67	-3,01	349,3 %
	D	0,67	3,01	349,3 %

ZÁVĚR

Bakalářská práce se zabývá deformačně-napěťovou analýzou toroidní skořepiny, která je zatížená konstantním vnitřním tlakem. První část práce tvoří shrnutí membránové teorie skořepin pro skořepiny obecného tvaru, následovaná rešerší z oblasti využití toroidních skořepin. Dále je zde nastíněn problém rozdílné geometrie tělesa pro body ležící na vnitřní a vnější straně toroidu, který ve studovaných pracích ani v seznamech vzorců určených pro výpočet napětí a přetvoření na tělesech není uvažován. Ten je objasněn v další části práce, kde jsou odvozeny rovnice pro výpočet napětí a deformací na toroidní skořepině. Rovnice, kterých bylo odvozením dosaženo mají stejný tvar jak pro body ležící na skořepině ve vzdálenosti $r_0 > b$, tak i pro body ve vzdálenosti $r_0 < b$. Nezáleží tedy na poloze vyšetřovaného místa na skořepině a je využíváno stále stejných vzorců. Teoretická část je následovaná analytickým výpočtem a jeho verifikací numerickým výpočtem pomocí MKP, pro model skořepiny z oceli a gumy.

Oběma typy výpočtů bylo dospěno k závěru, že největší napětí působí na nejmenším poloměru skořepiny $r_{0,min}$. Naopak nejmenší hodnotu má na poloměru největším označeném jako $r_{0,max}$. Napětí obvodové, které mělo pro analytický výpočet stejnou hodnotu pro celé těleso, se pro numerický výpočet zvyšuje s narůstající vzdáleností od osy symetrie z . Celkově je jeho hodnota menší než ta získaná analyticky o 7 – 13 %, což je víc než obvyklá nepřesnost daná předpokladem membránové napjatosti, tedy napětí konstantních po tloušťce skořepiny. Důvod tak velké rozdílnosti hodnot není znám. Rozhodnout by se to dalo experimentem, který je však mimo možnosti této bakalářské práce. Výpočet přetvoření ukázal, že největší hodnoty bude dosahovat jeho meridiánová složka, která má pro model z gumy hodnotu vyšší než 100 %, čímž je potvrzeno, že chování skořepiny z gumy za daného zatížení na rozdíl od oceli nebude lineární. Obvodové přetvoření nabývá nečekaně malých hodnot, což je způsobeno jeho závislostí na Poissonově poměru, kdy se jeho hodnoty se zvyšujícím se Poissonovým poměrem přibližují nule. Malé hodnoty přetvoření obvodového jsou zejména pro těleso vyrobené z gumy také důvodem velkého procentuálního rozdílu hodnot mezi analytickým a numerickým řešením. Při uvažování rozdílu absolutního jsou však rozdíly přetvoření ve všech třech směrech srovnatelné mezi oběma typy řešení. Rozdíl mezi hodnotami získaných pomocí MKP a analytického výpočtu pro těleso z gumy byl zaznamenán také u velikosti radiálního posunutí a má zde stejný původ jako u přetvoření obvodového. Také pro přetvoření obvodové a posunutí v radiálním směru na nejmenším poloměru $r_{0,min}$ pro skořepinu z oceli je evidován rozdíl hodnot mezi oběma typy řešení zhruba 18 %, což je pravděpodobně způsobenou rozdílnou hodnotou obvodového napětí, které v tomto bodě bylo numericky vypočteno. Ostatní numericky vypočtené charakteristiky se od těch získaných analyticky liší maximálně o 7 %, což je přijatelná odchylka.

Závěr práce tvoří nelineární výpočet v programu Ansys, který byl proveden za sníženého napětí z důvodu, že výpočet při ponechání původního napětí nekonvergoval. Na jeho základě je možno předpokládat, že veškeré výstupní veličiny na tělese budou ve skutečnosti podstatně větší, než jaké byly získány výpočtem lineárním.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] ONDRÁČEK, E., J. VRBKA, P. JANÍČEK a J. BURŠA. *Mechanika těles: Pružnost a pevnost II.* 4. přeprac. vyd. Brno: CERM, 2006, s. 30, 148-155. ISBN 80-214- 3260-8.
- [2] BURŠA, Jiří. *Přednáška-10* [online]. [cit. 2022-02-02]. Dostupné z: http://www.old.umt.fme.vutbr.cz/~jbursa/Stud_opory/10-prednaska.pdf
- [3] BURDUN, Yu. T. a A. V. KREPTIUK. Rational designing of composite toroidal pressure hull for ocean engineering. *Vestnik of Astrakhan State Technical University. Series: Marine engineering and technologies* [online]. 2014, (2), 27-36 [cit. 2022-02-24]. ISSN 2073-1574. Dostupné z: <https://cyberleninka.ru/article/n/rational-designing-of-composite-toroidal-pressure-hull-for-ocean-engineering/viewer>
- [4] FOWLER, C., ORFICI, A and WANG, C. A review of toroidal composite pressure vessel optimisation and damage tolerant design for high pressure gaseous fuel storage. *International Journal of Hydrogen Energy* [online]. 2016, **41**(47), 22067-22089 [cit. 2022-04-04]. Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360319916330336>
- [5] „Bania” water tower. *Tarnowskie Centrum Informacji* [online]. [cit. 2022-03-01]. Dostupné z: <https://www.it.tarnow.pl/en/worth-seeing/did-you-know-that/bania-water-tower/>
- [6] QINGHAI, D., Z. GUANG, Z. BOWEN a W. ZHENGQUAN. Simplified theoretical solution of circular toroidal shell with ribs under uniform external pressure. *Thin-Walled Structures* [online]. 2015, **96**, 49-55 [cit. 2022-02-19]. ISSN 0263-8231. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/281396643_Simplified_theoretical_solution_of_circular_toroidal_shell_with_ribs_under_uniform_external_pressure
- [7] SUN, B. Closed-Form Solution of Axisymmetric Slender Elastic Toroidal Shells. *Journal of Engineering Mechanics* [online]. 2010, **136**(10), 1281-1288 [cit. 2022-02-19]. ISSN 0733-9399. Dostupné z: https://www.researchgate.net/publication/245287064_Closed-Form_Solution_of_Axisymmetric_Slender_Elastic_Toroidal_Shells
- [8] VELIČKOVIĆ, Vladan. Stress and Strain States in the Material of the Stressed Toroidal Container for Liquefied Petroleum Gas [online]. *Scientific Technical Review*. 2007, **52**(3-4), 94-105 [cit. 2021-11-12]. ISSN 1820-0206. Dostupné z: <https://www.semanticscholar.org/paper/Stress-and-Strain-States-in-the-Material-of-the-for-Veli%C4%8Dkovi%C4%87-Eng/a7cbee58b11d70b03a79e392c74f10cd8a760e60>
- [9] SUN, B. H. Geometry-induced rigidity in elastic torus from circular to oblique elliptic cross-section [online]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2021, **135**, Article 103754 [cit. 2022-02-26]. ISSN 0020-7462. Dostupné z: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020746221000883>

- [10] PÁTEK, V. *Určování křivosti v obecném bodě tepenných výdutí* [online]. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018, s. 38 [cit. 2022-04-04]. Vedoucí bakalářské práce prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D. Dostupné z: https://www.vut.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=173964
- [11] PILKEY, Walter D. *Formulas for stress, strain, and structural matrices* [online]. Second edition. United States of America: John Wiley, 2005, s. 1241 [cit. 2022-02-19]. ISBN 0-471-03221-2. Dostupné z: https://www.academia.edu/5503563/Formulas_for_Stress_Strain_and_Structural_Matrices
- [12] YOUNG, W. C. a R. D. BUDYNAS. *Roark's Formulas for Stress and Strain* [online]. Seventh edition. United States of America: McGraw-Hill, 2002, s. 600 [cit. 2021-11-16]. ISBN 0-07-072542-X. Dostupné z: https://www.academia.edu/10721718/Roarks_formulas_for_stress_and_strain
- [13] JANÍČEK, P., E. ONDRÁČEK, J. VRBKA a J. BURŠA. *Mechanika těles: Pružnost a pevnost I*. Brno: VUT, 2003, s. 267. ISBN 80-214- 2592-X.
- [14] BURŠA, Jiří. *Studijní opory pro předmět Konstitutivní modely materiálu* [online]. [cit. 2022-15-04]. Dostupné z: <http://www.old.umt.fme.vutbr.cz/~jbursa/>

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A ZKRATEK

Symbol	Veličina	Jednotka
a	Poloměr meridiánové kružnice	mm
b	Střední poloměr toroidu	mm
D	Střední průměr toroidu	mm
d	Průměr meridiánové kružnice	mm
Δr	Změna poloměru r radiálního řezu	mm
E	Youngův modul pružnosti	MPa
ε	Délkové přetvoření	—
ε_m	Meridiánové přetvoření	—
ε_n	Třetí hlavní přetvoření	—
ε_t	Obvodové přetvoření	—
φ_m	Úhel kuželového řezu	$^\circ$
φ_t	Úhel meridiánového řezu	$^\circ$
γ_{mn}	Úhlové přetvoření v rovině mn	—
γ_{mt}	Úhlové přetvoření v rovině mt	—
γ_t	Kružnice vytvořená kuželovým řezem	—
γ_{tn}	Úhlové přetvoření v rovině tn	—
h	Tloušťka stěny skořepiny	mm
K	Gaussova křivost plochy	mm^{-1}
k_1, k_2	Hlavní křivosti plochy	mm^{-1}
μ	Poissonův poměr	—
N_m	Meridiánová liniová síla	$F \cdot mm^{-1}$
N_t	Obvodová liniová síla	$F \cdot mm^{-1}$
O_m	Střed meridiánové kružnice	—
O_t	Vrchol kužele	—
p	Tlak	MPa
r_m	Meridiánový poloměr křivosti	mm
r_0	Vzdálenost ve směru osy r	mm
$r_{0,max}$	Největší poloměr toroidu	mm
$r_{0,min}$	Nejmenší poloměr toroidu	mm
r_t	Kuželový poloměr křivosti	mm
σ	Normálové napětí	MPa
$\sigma_{m,r_{0,max}}$	Meridiánové napětí na poloměru $r_{0,max}$	MPa
$\sigma_{m,r_{0,min}}$	Meridiánové napětí na poloměru $r_{0,min}$	MPa
σ_m	Meridiánové napětí	MPa
σ_n	Normálové napětí působící ve střednicových plochách	MPa
σ_{red}	Redukované napětí	MPa

σ_t	Obvodové napětí	<i>MPa</i>
u_m	Posunutí ve směru tečny k meridiánu	<i>mm</i>
u_n	Posunutí ve směru normály střednicové plochy	<i>mm</i>
u_r	Posunutí v radiálním směru	<i>mm</i>

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1 . Podvodní vozidlo typu "diving saucer"	13
Obr. 2 Kompozitní vodíková palivová nádrž nainstalovaná v kufru vozidla poháněného palivovými články [4]	13
Obr. 3 kovová toroidní palivová nádrž LPG nainstalovaná v dutině pro rezervní pneumatiku v kufru vozidla [4]	14
Obr. 4 Vodojem Bania v polském městě Tarnów [5]	14
Obr. 5 Gaussova křivost na toroidní skořepině [9]	15
Obr. 6 Koruny toroidní skořepiny, upraveno podle [9]	15
Obr. 7 Dvojnásobně elementární prvek skořepiny pro $r_0 > b$, upraveno podle [8]	18
Obr. 8 Uvolnění prstencové části AB pro $r_0 > b$, upraveno podle [8]	19
Obr. 9 Uvolnění pravé části prstence AB pro $r_0 > b$, upraveno podle [8]	19
Obr. 10 Dvojnásobně elementární prvek skořepiny pro $r_0 < b$, upraveno podle [8]	21
Obr. 11 Uvolnění prstencové části AB pro $r_0 < b$, upraveno podle [8]	22
Obr. 12 Uvolnění pravé části prstence AB pro $r_0 < b$, upraveno podle [8]	23
Obr. 13 Odvození změny Δr poloměru r radiálního řezu, upraveno podle [1]	26
Obr. 14 Meridiánové napětí	29
Obr. 15 Redukované napětí	29
Obr. 16 Tahový diagram gumy použité ve výpočtu [14]	31
Obr. 17 Obvodové přetvoření pro model z oceli	31
Obr. 18 Obvodové přetvoření pro model z gumy	32
Obr. 19 Meridiánové přetvoření pro model z oceli	33
Obr. 20 Meridiánové přetvoření pro model z gumy	33
Obr. 21 Přetvoření pro model z oceli	34
Obr. 22 Přetvoření pro model z gumy	34
Obr. 23 Závislost přetvoření na Poissonově poměru pro model $E = 210 \text{ GPa}$	35
Obr. 24 Závislost přetvoření na Poissonově poměru pro model $E = 4,2 \text{ MPa}$	35
Obr. 25 Posunutí v radiálním směru pro model z oceli	36
Obr. 26 Posunutí v radiálním směru pro model z gumy	36
Obr. 27 Zatížení a zamezení posuvů v ose y	37
Obr. 28 Síť použitá pro model toroidní skořepiny	38
Obr. 29 Obvodové napětí pro model z oceli	39
Obr. 30 Meridiánové napětí pro model z oceli	40
Obr. 31 Závislost radiálního posunutí na Poissonově poměru pro analytický a numerický výpočet	43
Obr. 32 Celková deformace pro model z gumy	44

SEZNAM TABULEK

Tab. 1 Porovnání hodnot obvodového napětí pro model z oceli v bodech C a D	39
Tab. 2 Porovnání hodnot meridiánového napětí pro model z oceli v bodech C a D	40
Tab. 3 Porovnání hodnot redukovaného napětí pro model z oceli v bodech C a D	40
Tab. 4 Porovnání hodnot přetvoření pro model oceli v bodech C a D	41
Tab. 5 Posunutí v radiálním směru pro model z oceli v bodech C a D.....	41
Tab. 6 Porovnání hodnot přetvoření pro model z gumy v bodech C a D	42
Tab. 7 Podmínka nestlačitelnosti pro model z gumy pro body C a D	42
Tab. 8 Posunutí v radiálním směru pro model z gumy v bodech C a D	43
Tab. 9 Porovnání hodnot pro lineární analytický a nelineární numerický model z gumy v bodech C a D při osmině maximálního zatížení	45