



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

TENZORY A JEJICH VYUŽITÍ V GEOMETRII A MECHANICE

TENSORS AND THEIR USAGE IN GEOMETRY AND MECHANIC

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Daniel Kunz

doc. RNDr. Jiří Tomáš, Dr.

BRNO 2018

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Student: **Daniel Kunz**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **doc. RNDr. Jiří Tomáš, Dr.**
Akademický rok: 2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č. 111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Tensory a jejich aplikace v geometrii a mechanice

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Student vypracuje přehled základních pojmů týkajících se tensorů, tensorových polí, a operací nad nimi, přičemž v centru pozornosti bude metrický tensor. Součástí bude výklad metrického tensoru v souvislosti s klasickou diferenciální geometrií. Výklad doprovodí geometrickými i fyzikálními aplikacemi, uvede konkrétní příklady z fyziky a mechaniky.

Cíle bakalářské práce:

Student se seznámí s aparátem tensorů a tensorových polí potřebným pro pokročilejší studium geometrických struktur, teoretické fyziky a mechaniky kontinua. Práce umožní studentovi pochopit zásadní význam metrického tensoru ve výše uvedených oborech.

Seznam doporučené literatury:

BUDINSKÝ, B. a B. KEPR. Základy diferenciální geometrie s technickými aplikacemi. SNTL Praha, 1970. ISBN 04-014-70.

DOUPOVEC, M. Diferenciální geometrie a tensorový počet. Brno: skripta VUT, 1999. ISBN 80-21-1470-7.

KOLÁŘ, I. Úvod do globální analýzy. Masarykova univerzita Brno, 2003. ISBN 80-210-3205-7.

FEYNMAN, R. P., R. B. LEIGHTON a M. SANDS. Feynmanovy přednášky z fyziky. Fragment 2013. Orig. Addison: Wesley Publishing Company, 1966. 978-80-253-1644-3.

WALD R. M. General Relativity. The University of Chicago, 1984. ISBN 0-226-87033-2.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18.

V Brně, dne 21. 9. 2017



prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt:

V této práci popisuji konstrukci tenzorové algebry a následné využití této zajímavé struktury pro popis zakřivených ploch. Této struktury se dá využít v geometrii nebo například v mechanice. Důraz je kladen na jasnou konstrukci, a navíc pokud je možnost zachovat vizuální představu o daném problému. Hlavním úkolem této práce bylo seznámit se s tenzorovou algebrou a její konstrukcí a následně ji využít na příkladech z fyziky a mechaniky.

Abstract:

In this thesis I describe construction of tensor algebra and its following usage of this magnificent structure for description of curved surfaces. This structure can be used in geometry or for example in mechanic. The thesis is focused on clear construction and if it is possible than to sustain visual aspect of current problem. Main task of this thesis was got the feel of tensor algebra and its construction and then use it on tasks in physic and mechanic.

Klíčová slova:

Tenzory, metrický tenzor, kovariantní derivace, křivost, souřadný systém

Keywords:

Tensors, metric tensor, covariant derivate, curvature, coordinate system

Prohlašuji na svou čest, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a s použitím uvedené literatury.

Kunz Daniel

V Brně, dne 25.5.2018

Děkuji svému vedoucí práce doc. RNDr. Jiřímu Tomášovi, Dr. za jeho cenné rady a za pomoc při vedené mé bakalářské práce. Mé poděkování také patří Pavlovi Grinfeldovi, který mi umožnil použít jeho práci a následně i velice ochotně pomohl se strukturou práce.

Obsah

Úvod	9
1. Tenzorová algebra.....	10
1.1 Báze a přechody mezi nimi	10
1.2 Lineární a bilineární formy.....	11
1.3 Tenzory	13
1.4 Operace s tenzory.....	14
1.5 Symetrické a antisymetrické tenzory	15
2. Jiný přístup k tenzorové algebře	17
2.1 Skaláry, vektory a skalární součin	17
2.2 Směrová derivace	18
2.3 Derivování vektorů	18
2.4 Souřadný systém	20
2.5 Změna souřadného systému	20
2.6 Vektor jako funkce souřadnic	21
2.7 Kovariantní báze	22
2.8 Kovariantní metrický tenzor	24
2.9 Kontravariantní metrický tenzor	25
2.10 Kontravariantní báze.....	25
2.11 Christoffelovy symboly.....	27
2.12 Variant.....	31
2.13 Tenzory a dodatečná definice	31
2.14 Gradient	32
2.15 Směrová derivace.....	32
2.16 Zvedání a spouštění indexů.....	33
2.17 Kovariantní derivace	34
2.18 Laplaceův operátor	36
3. Plochy a jejich tenzorový popis.....	37
3.1 Parametrizace plochy	37
3.2 Základní objekty plochy	38
3.3 Christoffelovy symboly	39
3.4 Křivka na ploše.....	39
3.5 Kovariantní derivace	40

3.6	Kovariantní derivace normály.....	41
3.7	Částice pohybující se po zakřivené ploše	45
3.8	Riemann Christoffelův tenzor	46
3.9	Gauss Bonnet Theorem	47
4.	Příklady.....	47
4.1	Vedení tepla.....	47
4.2	Hydrostatika nestlačitelné kapaliny	48
4.3	Mechanika kontinua	49
	Závěr	54
	Bibliografie	55
	Seznam Obrázků.....	56

Úvod

Tenzorová algebra je schopna zachycovat různé vlastnosti matematických objektů s maximální užitečností, transparentností a elegancí. Pokud chceme proniknout do diferenciální geometrie, je její aplikace nevyhnutelná. Albert Einstein byl jeden z propagátorů této struktury a taktéž do ní přispěl zavedením Einsteinovy sumační konvekce, které dovolila úžasné komprese, jinak velmi rozsáhlých vztahů. Tensorový počet využívá sílu souřadných systémů, ale zároveň zachovává všeobecnost díky tomu, že nevybírá žádný ze souřadných systémů, dokud to není nutné. V tomto je obrovská síla tenzorového počtu, jeho velký rozsah, díky tomu, že ho lze napasovat na všechny souřadné systémy. Aby ale něco takového mohlo fungovat, bylo třeba zjištění, že invariant, který je nezávislý na souřadném systému, lze poskládat ze struktur, které nazýváme tenzory a ty mají tu speciální vlastnost, že existuje jasně daný vztah, který je převádí z jednoho souřadného systému do druhého. Tedy úkolem tenzorového počtu je právě najít takové objekty, které když zkombinujeme, tak dostaneme invariant, který bude platit na všech souřadných systémech.

V této práci se tedy budu zabírat konstrukcí těchto tensorů a následně se budu snažit kombinací tenzoru dosáhnout invariantnosti. Abych mohl něco natolik komplikovaného vytvořit, musím se opřít o základy matematiky, které vybudovali známí matematici Descartes, Christoffel, Euklid a mnoho dalších. Poté lze tuto strukturu aplikovat na mnoho jinak těžko popsatelných objektů, jako jsou třeba zahnuté plochy nebo obecněji manifoldy.

Tato práce obsahuje dva přístupy ke stejné problematice. V první části se formou definic dostávám k tenzorové algebře ovšem za cenu ztráty geometrické interpretace. K tomu slouží druhá část, která nechává jisté definice povolnější, ale za to se snaží vnést geometrickou interpretaci do konstrukce. Tedy na úkor preciznosti zajišťujeme intuitivnost. Ani jeden z přístupů rozhodně není špatný právě naopak je zcela vhodné si oba přístupy osvojit, jelikož oba směry se v určitém kroku dokonale propletou a začnou navzájem na sebe odkazovat. Nejvíce patrné to je v kapitole plochy a jejich tenzorová algebra.

V závěru kapitoly plochy dochází k velmi zajímavému zjištění. Postup, kterým se k němu dostanu, je naprosto fenomenální, jelikož poté, co jsem vybudoval v přechodích kapitolách, začnou věci do sebe zapadat a už stačí se jenom dívat, jak se struktury a vztahy v podstatě tvoří sami.

1. Tenzorová algebra

1.1 Báze a přechody mezi nimi

Nechť máme konečně rozměrný vektorový prostor V nad tělesem $\mathbb{R}$. Dále v něm existuje báze vektorového prostoru $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, pak každý prvek $u \in V$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci.

$$u = u^1 \vec{e}_1 + \dots + u^n \vec{e}_n, u^i \in \mathbb{R} \quad 1.1$$

Tedy jednotlivé prvky u^i jsou souřadnice vzhledem k dané bázi. Dále budeme využívat Einsteinovu sumační konvenci. Tedy zápis 1.1 lze přepsat na:

$$u = \sum_{i=1}^n u^i \vec{e}_i = u^i \vec{e}_i \quad 1.2$$

Tedy pokud dolní index a horní index mají stejné označení, automaticky je indukovaná sumace přes tyto členy. Uvažujme tento výraz:

$$Z_{mn}^{ij} Z_{ik}^m = \sum_i \sum_m Z_{mn}^{ij} Z_{ik}^m \quad 1.3$$

Sumujeme tedy přes dva indexy a to i, m . Tyto indexy se někdy označují jako „dummy indices“, tedy „fiktivní indexy“, přes ně se sčítá a naopak indexy j, n, k se nazývají „live indices“, tedy „živé indexy“, ty nám posléze určují velikost výsledného výrazu.

Už z lineární algebry víme, že v takto definovaném vektorovém prostoru V lze sestavit více bází. Tedy tuto myšlenku rozvineme.

Uvažujme nyní dvě báze $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ a $\{\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n\}$. Libovolný vektor druhé báze lze jednoznačně určit lineární kombinací z báze první.

$$\vec{e}'_i = J_i^{i'} \vec{e}_i \quad 1.4$$

A naopak lze každý vektor první báze definovat jako kombinaci druhé báze.

$$\vec{e}_i = J_i^{i'} \vec{e}'_{i'} \quad 1.5$$

Jednotlivé složky $J_i^{i'}$ (resp. $J_i^{i'}$) tvoří „matici“ přechodu z nečárkované báze do čárkované (resp. z čárkované do nečárkované báze). Tyto dvě matice mají velice hezkou vlastnost a to, že jedna je inverzní k druhé, lze tedy psát.

$$J_i^{i'} J_{j'}^i = \delta_{j'}^{i'} = \begin{cases} 1 & i' = j' \\ 0 & i' \neq j' \end{cases} \quad 1.6$$

Kde pod symbolem $\delta_{j'}^{i'}$ chápeme pojem Kronekerovo delta, která je vždy nenulová, jedině když jsou si indexy rovny pak nabývá hodnoty jedna viz. 1.13.

Pojem matice je zde sice použit správně, ale v pozdější části této práce zjistíme, že intuitivní představa matici nám přestane fungovat již pro tenzory třetího řádu, a tedy je lépe mluvit o sérii čísel s danými pořadovými koeficienty.

Tato definice je naprosto přesná a legitimně nadefinovaná, ale není dosti průhledná na pochopení. Dříve zmíněné matice přechodu $J_i^{i'}, J_{j'}^i$ lze získat i zcela intuitivním přístupem, který je dobře znám z obvyklé matematické analýzy.

Mějme tedy dva souřadné systémy, a tedy i dvě sady proměnných Z^i a $Z^{i'}$. Intuitivně lze uvést příklad polárního a kartézského souřadného systému a jejich proměnné r, θ a x, y . Pokud vyjádříme první proměnné za pomoci druhých dostaneme tuto identitu.

$$Z^{i'} = Z^{i'}(Z^i) \quad 1.7$$

Nyní uvažujme parciální derivaci podle první proměnné.

$$\frac{\partial Z^{i'}}{\partial Z^i} = J_i^{i'} \quad 1.8$$

Takto lze obdržet matici transformace a dále zjistíme, že obdobně lze vypočítat i matici přechodu $J_{i'}^i$, stačí prohodit dosazení proměnných. Z analýzy víme, že tento objekt složených parciálních derivací se nazývá Jacobiho matice, odtud označení J .

Celé toto snažení lze obsáhnout do jedné rovnice, ze které plynou všechny vlastnosti, které jsem definovali.

$$\frac{\partial Z^{i'}}{\partial Z^i} \frac{\partial Z^i}{\partial Z^{j'}} = \delta_{j'}^{i'} \quad 1.9$$

Která pro náš příklad kartézského a polárního souřadného systému naprosto koresponduje s touto rovnicí. Například $i' = 1, j' = 2 \Rightarrow \delta_2^1 = 0$:

$$\begin{aligned} r(x(r, \theta), y(r, \theta)) &\equiv r \\ \theta(x(r, \theta), y(r, \theta)) &\equiv \theta \\ \frac{\partial r}{\partial Z^i} \frac{\partial Z^i}{\partial \theta} &= \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = 0 \end{aligned} \quad 1.10$$

1.2 Lineární a bilineární formy

Mějme $r + 1$ vektorových prostorů $V_1, \dots, V_r, W$ a zobrazení $f : V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow W$ jež je multilineární, tedy platí pro každé $v_j \in V_j, j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, r$ dostaneme lineární zobrazení:

$$f(v_1, \dots, v_{i-1}, -, v_{i+1}, \dots, v_r) : V_i \rightarrow W \quad 1.11$$

A dále prostor $L(V_1, \dots, V_r; W)$ všech těchto multilineárních zobrazení je vektorový prostor, jestliže definujeme, že:

$$(f_1 + f_2)(v_1, \dots, v_r) = f_1(v_1, \dots, v_r) + f_2(v_1, \dots, v_r) \quad 1.12$$

$$(kf)(v_1, \dots, v_r) = k(f(v_1, \dots, v_r)), \quad k \in \mathbb{R} \quad 1.13$$

Prvky duálního prostoru $V^* = L(V, \mathbb{R})$ nazveme kovektory. Jelikož víme, že platí $V = L(V^*, \mathbb{R})$. Pak lze usoudit, že existuje symetrie mezi těmito dvěma prostory a to následující $V^{**} = V$.

Díky symetrii mezi V a V^* lze psát, pro $v \in V$ a $u \in U$:

$$u(v) = \langle u, v \rangle \quad 1.14$$

Toto zobrazení nazveme vyčíslovací zobrazení $V \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$.

Je dobré zmínit ještě jednu zajímavou vlastnost mezi vektory a kovektory, které jsme právě zavedli. Jestliže $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ je báze prostoru V a $\{\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n\}$ je báze prostoru V^* . Pak tedy platí následující.

$$\langle \vec{e}^i, \vec{e}_j \rangle = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad 1.15$$

Takto nadefinovanou bázi V^* nazveme duální bázi. Nyní když víme, jak vytvořit bázi V^* , lze každý prvek $u \in V^*$ rozložit do lineární kombinace bazických vektorů.

$$u = \sum_{i=1}^n u_i \vec{e}^i \quad 1.16$$

Zobrazení $Z_{**}: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme bilineární formou na V , jestliže Z_{**} zachovává linearitu pro libovolné $u, v, w \in V, c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Z_{**}(u + v, w) &= Z_{**}(u, w) + Z_{**}(v, w) \\ Z_{**}(u, v + w) &= Z_{**}(u, v) + Z_{**}(u, w) \\ Z_{**}(c \cdot u, v) &= c \cdot Z_{**}(u, v) = Z_{**}(u, c \cdot v) \end{aligned} \quad 1.17$$

Pozitivně definitní a symetrické forma se nazývá „dot product“, tedy skalární součin, na V , dále jej budeme značit pouze jako symbol krát $Z_{ikj} \cdot T_l$.

Nyní uvažujeme bázi $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ na vektorovém prostoru V pak čísla, které obdržíme z:

$$Z_{ij} = Z_{**}(\vec{e}_i, \vec{e}_j) \quad 1.18$$

uspořádáme do matice a tu nazveme maticí bilineární formy Z_{**} nebo taky jako metrický tenzor, či kovariantní metrický tenzor. Více se lze dočíst (1).

Tato matice je taky známá jako Gramova matice. Tento objekt je velice zajímavý a nese v sobě spoustu informací o daném souřadném systému. Uvažujme nyní skalární součin dvou prvků $u, v \in V$:

$$u \cdot v = u^i \vec{e}_i \cdot v^j \vec{e}_j = u^i v^j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = u^i v^j Z_{ij} \quad 1.19$$

Jelikož tato definice platí pro libovolnou bázi, lze předpokládat jinou bázi a jestli mezi nimi existuje vztah.

Nechť existují dvě báze $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ a $\{\vec{e}_{1'}, \dots, \vec{e}_{n'}\}$. Přejít z jedné do druhé lze lehce odvodit, a to z definice Z_{**} .

$$Z_{i'j'} = \vec{e}_{i'} \cdot \vec{e}_{j'} = \vec{e}_i J_{i'}^i \cdot \vec{e}_j J_{j'}^j = Z_{ij} J_{i'}^i J_{j'}^j \quad 1.20$$

Toto je mimochodem důkaz, že matice bilineární formy je ve skutečnosti tenzor, jelikož tenzory mají vlastnost, že při změně souřadného systému se transformují pomocí předepsaných transformačních vztahů.

K této problematice existuje navíc kontravariantní metrický tenzor Z^{ij} , který je definován jako:

$$Z^{ij} \cdot Z_{jk} = \delta_k^i \quad 1.21$$

Jedná se tedy o inverzní matici. Tato konstrukce a definice nám pomůže později při zvedání a spouštění indexů. Pojmy jako kovariantní a kontravariantní objasníme v další sekci a konečně zavedeme i pojem tenzory.

1.3 Tenzory

Již jsme ukázali vlastnosti lineární a bilineární formy a zavedli jsme i vyčíslovací zobrazení. Tedy nám už nic nebrání v definování pojmu tenzor.

Nechť existuje vektorový prostor konečné dimenze V a vyčíslovací zobrazení pak:

$$F: \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{r \text{ krát}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{s \text{ krát}} \rightarrow \mathbb{R} \quad 1.22$$

Kde r je počet kopií V^* a s počet kopií V . Elementy $T_s^r(V)$ nazýváme tenzory na $\mathbb{R}$, kontravariantního řádu r a kovariantního řádu s . Pro jednoduchost ale zápis zkracujeme, píšeme a říkáme typu (r, s) a číslo $r + s$ nazýváme řád tenzoru F . Tedy pro triviální případy $T_0^1 V = V^*$ a $T_1^0 V = V$. Pro vektorový prostor $\dim V = 3$ má tenzor typu $T_2^2 V$ 81 složek $a_{km}^{ij}, i, j, k, m = 1, 2, 3$.

Nechť máme bázi ve vektorovém prostoru V a v duálním V^* označeny jako $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ a $\{\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n\}$ a dále F bude tenzor typu (r, s) . Máme tedy s vektorů $v_1, \dots, v_s \in V$ a r lineárních forem $f^1, \dots, f^r \in V^*$. Tyto prvky lze rozepsat jako lineární kombinace v příslušných bázích.

$$\begin{aligned} F(v_1^{i_1} e_{i_1}, \dots, v_s^{i_s} e_{i_s}, f_{j_1}^1 e^{j_1}, \dots, f_{j_r}^r e^{j_r}) &= \\ &= v_1^{i_1} \dots v_s^{i_s} f_{j_1}^1 \dots f_{j_r}^r F(e_{i_1}, \dots, e_{i_s}, e^{j_1}, \dots, e^{j_r}) \end{aligned} \quad 1.23$$

Dále přeznačíme toto zobrazení na čísla $a_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s}$ tedy, platí tato rovnost

$$a_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r} = F(e_{i_1}, \dots, e_{i_s}, e^{j_1}, \dots, e^{j_r}) \quad 1.24$$

Tato čísla nám jednoznačně určují souřadnice tenzoru F vzhledem k bázi $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$.

Nyní jsme opět definovali pro libovolnou bázi z toho lze předpokládat, že může existovat více bází. Necht' tedy existují dvě báze $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ a $\{\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n\}$. Podle 1.4 jsme schopni vytvořit matice přechodu jak z první do druhé J_i^i , tak i naopak $J_i^{i'}$. Pak pro nové souřadnice tenzoru F v čárkovaném systému platí:

$$\bar{a}_{i'_1 \dots i'_s}^{j'_1 \dots j'_r} = J_{i'_1}^{i_1} \dots J_{i'_s}^{i_s} J_{j_1}^{j'_1} \dots J_{j_r}^{j'_r} a_{i_1 \dots i_s}^{j_1 \dots j_r} \quad 1.25$$

1.4 Operace s tenzory

Necht' máme dva tenzory stejného řádu i typu (r, s) . Pak součtem tenzorů rozumíme tento vztah $F = G + H$ opět typu (r, s) a definujeme jen následovně:

$$F(v_1, \dots, v_s, f^1, \dots, f^r) = G(v_1, \dots, v_s, f^1, \dots, f^r) + H(v_1, \dots, v_s, f^1, \dots, f^r) \quad 1.26$$

A pod součinem tenzoru F s číslem $c \in \mathbb{R}$ rozumíme definici:

$$(cF)(v_1, \dots, v_s, f^1, \dots, f^r) = cF(v_1, \dots, v_s, f^1, \dots, f^r) \quad 1.27$$

Samozřejmě můžeme jednotlivé prvky rozložit do bází a až pak aplikovat součin, či součet.

Nyní mějme $t_1 \in T_{s_1}^{r_1}(V)$ a prvek $t_2 \in T_{s_2}^{r_2}(V)$, pak operaci $t_1 \otimes t_2$ nazveme tenzorovým součinem, kde výsledek padne do struktury $t_1 \otimes t_2 \in T_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(V)$ a je definován jako:

$$\begin{aligned} (t_1 \otimes t_2)(f^1, \dots, f^{r_1}, g^1, \dots, g^{r_2}, v_1, \dots, v_{s_1}, w_1, \dots, w_{s_2}) = \\ = t_1(f^1, \dots, f^{r_1}, v_1, \dots, v_{s_1}) t_2(g^1, \dots, g^{r_2}, w_1, \dots, w_{s_2}) \end{aligned} \quad 1.28$$

Kde $f^i, g^i \in V^*$ a $v_i, w_i \in V$. Z výše zmíněného plyne, že tento součin není jistě komutativní. Pokud bychom to přepsali do řeči kovariantních a kontravariantních indexů, pak bychom obdrželi:

$$f_{kmn}^{ij} = g_{km}^i \cdot h_n^j \quad 1.29$$

Tedy v příkladu jsme zvolili G typu $(1,2)$ a H typu $(1,1)$ a výsledný tenzor F je typu $(2,3)$.

Mějme definovaný tenzor F , který je typu (r, s) pokud vybere jeden kovariantní f_i a jeden kontravariantní f^j index, pak kontrakcí (zúžením) je operace podle těchto dvou indexů, jež vytvoří tenzor G typu $(r-1, s-1)$, který je definovaný následovně:

$$\begin{aligned} G(v_1, \dots, v_{s-1}, f^1, \dots, f^{r-1}) = \\ = F(v_1, \dots, v_{i-1}, e_k, v_{i+1}, \dots, v_s, f^1, \dots, f^{j-1}, e^k, f^{j+1}, \dots, f^r) \end{aligned} \quad 1.30$$

Kde v tenzoru F je užitá sumace. Jelikož jsme ale tenzory volili v libovolné bázi, nastává otázka zda tato operace není různá pro různé báze. To ale lze lehce vyvrátit a dokázat, že pro

libovolnou bázi se tato operace chová pořád stejně. Uvažujme bázi $\{\vec{e}_{1'}, \dots, \vec{e}_{n'}\}$ a $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, potom pro přechody platí:

$$\begin{aligned} e_{k'} &= J_{k'}^l e_l \\ e^{k'} &= J_m^{k'} e^m \end{aligned} \quad 1.31$$

Díky linearitě F lze tyto transformační matice vytknout a jak jsme již ukazovali v 1.9 tyto matice jsou si navzájem inverzní, tedy při násobení vznikne δ_m^l , což neovlivní výsledek. Nezávisí na volbě souřadného systému, což jsme chtěli ukázat.

Pokud bychom opět převedli tento problém do řeči kovariantních a kontravariantních indexů, dostaneme pro tenzor F typu (5,2) a zúžení přes druhý kontravariantní a první kovariantní výsledný tenzor G typu (4,1):

$$c_p^{ijkn} = f_{mp}^{imjkn} \quad 1.32$$

Zvedání a spouštění indexů je velmi užitečná operace, kterou budeme potřebovat v pozdější části práce, a je definovaná jedině pokud existuje na V skalární součin, což je metrický tenzor Z_{**} . Jelikož Z_{**} zadává izomorfismus $V \rightarrow V^*$ a dále inverzní zobrazení značíme $Z^{**}: V^* \rightarrow V$. Z^{**} je inverzní k Z_{**} , jak jsme uvedli v 1.21. Dále jsou-li dány souřadnice metrického tenzoru $Z_{ij} = Z_{**}(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, pak pro souřadnice lineární formy platí $f_i = Z_{ij} u^j$. V případě libovolného tenzoru $A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ typu (r, s) provádíme spouštění nějakého horního indexu či zvedání dolního indexu tak, že ostatní indexy v multilineárním zobrazení zafixujeme. Spouštění k -tého horního indexu je tedy zobrazení:

$$A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_k \dots i_r} \mapsto Z_{i_k m} A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots m \dots i_r} \quad 1.33$$

Na pravé straně jsme tedy obdrželi tenzor typu $(r-1, s+1)$. Obdobně definujeme zvedání s tím, že využijeme inverzního zobrazení Z^{**} .

$$A_{j_1 \dots j_k \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \mapsto Z^{jk m} A_{j_1 \dots m \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \quad 1.34$$

V přepisu do kovariantních a kontravariantních indexů platí:

$$f_{ijk} = g_{ij}^m Z_{km} \quad h_{km}^l = c_{nkm} Z^{in} \quad 1.35$$

Z této vlastnosti plyne tedy jedna velice zajímavá vlastnost. Nyní už dokážeme „přetáčet“ indexy jednotlivých tenzorů, tedy pokud máme nějaký objekt (viz Laplacián), tak pokud jsou v něm obsaženy tenzory dokážeme tyto tenzory převést z typu (r, s) na typ (r', s') , kde je splněna rovnost $r + s = r' + s'$. Tato operace se v anglicky mluvících zemích označuje jako „index juggling“.

1.5 Symetrické a antisymetrické tenzory

V této kapitole budeme uvažovat pouze „čisté tenzory“, tedy takové, které mají buď jenom kovariantní indexy $(0, s)$, nebo naopak jenom kontravariantní indexy $(r, 0)$.

Nechť $F \in T_s^0 V$ je kovariantní tenzor a platí o něm, že je:

Symetrický, pokud pro libovolné vektory lze psát:

$$F(v_1, \dots, v_s) = F(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(s)}) \quad 1.36$$

Pro všechna $\sigma \in P_s$, tedy pro všechny členy permutace množiny, která obsahuje s prvků.

Asymetrický, pokud pro libovolné vektory lze psát:

$$F(v_1, \dots, v_s) = \text{sgn}(\sigma)F(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(s)}) \quad \sigma \in P_s \quad 1.37$$

Kde $\text{sgn}(\sigma)$ je znaménko permutace σ . Tato vlastnost je tedy rovnocenná s tím, že výraz změní znaménko vždy když dojde k prohození dvou argumentů. Tento postup by šel samozřejmě aplikovat i pro kontravariantní tenzory. Tedy je zcela namístě říci, že symetrické tenzory tvoří podprostor $\odot^s V \subseteq T_s^0 V$ a analogicky antisymetrické tvoří taktéž podprostor $\wedge^s V \subseteq T_s^0 V$.

Stále uvažujme $F \in T_s^0 V$. Pak pod pojmem symetrizace tenzoru F rozumíme takový tenzor, že $\text{Sym}(F) \in \odot^s V$, jež je definován:

$$\text{Sym}(F) = \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in P_s} F(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(s)}) \quad 1.38$$

Tedy slovně součet všech, kterých F může nabývat při permutacích argumentů a pak celou sumu podělíme počtem permutací s .

Antisymetrizací tenzoru F rozumíme tenzor $\text{Alt}(F) \in \wedge^s V$ definovaný:

$$\text{Alt}(F) = \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in P_s} \text{sgn}(\sigma)F(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(s)}) \quad 1.39$$

Opět se jedná o součet všech, kterých F může nabývat při permutacích s tou výjimkou, že pokud se jedná o lichou permutaci násobíme ji -1 . Poté, co projedeme celou permutaci množiny, celý součet podělíme permutací s .

Každý tenzor stupně 2 lze rozložit na součet symetrického a antisymetrického tenzoru. To lze zapsat jako $F = \text{Sym}(F) + \text{Alt}(F)$. Pro vyšší stupně toto pravidlo už zaniká.

Jelikož při tenzorovém součinu 1.28 se obecně nezachovává vlastnost symetrie a antisymetrie. Proto se zavádí nový pojem symetrický a antisymetrický součin.

Nechť $F \in \odot^k V$ a $G \in \odot^m V$. Pak symetrický součin tenzorů F a G budeme označovat jako $F \odot G \in \odot^{k+m} V$, jež je definovaný vztahem:

$$F \odot G = \frac{(k+m)!}{k! m!} \text{Sym}(F \otimes G) \quad 1.40$$

Nechť $F \in \wedge^k V$ a $G \in \wedge^m V$. Pak antisymetrický (vnější) součin F a G značíme $F \wedge G \in \wedge^{k+m} V$ a definujeme jako:

$$F \wedge G = \frac{(k+m)!}{k! m!} \text{Alt}(F \otimes G) \quad 1.41$$

Pro antisymetrický součin platí ještě jeden vztah:

$$F \wedge G = (-1)^{k+m} G \wedge F \quad 1.42$$

To nám říká, že vnější součin není komutativní, ale symetrický nemá tuto vlastnost, tedy pro něj platí komutativita.

2. Jiný přístup k tenzorové algebře

Doposud jsme se zajímali o exaktní definice, ve kterých ne vždy byla viditelná geometrická vlastnost, která je těsně spjata s tenzory a tenzorovou algebrou. Tedy v této kapitole budeme vycházet čistě z geometrické představy a vždy se o ni budeme opírat. Dále se budeme snažit za pomoci tenzorů vytvářet invarianty, tedy objekty které nejsou závislé na souřadném systému. To už jsme, ale dost předběhli.

Všechny objekty, které budeme popisovat budou spjaty s Euklidovským prostorem. Tento prostor je pojmenovaný po řeckém matematikovi jménem Euklides. Ten sepsal knihu Elementy (2), ve které jsou popsány objekty z geometrie. Euklidova geometrie je založena na studování přímých čar a rovin. Tento fakt později porušíme při popisu zakřivených ploch. Pokud tedy přijmeme koncept od Euklida, pak pro nás pojmy jako délka, obsah a objem jsou dosti blízké. Tyto pojmy nelze jednoduše obhájit. Už Archimédes demonstroval, že objem koule je roven $\frac{4}{3}\pi R^3$ nebo že povrch koule je roven $4\pi R^2$, ale matematický důkaz o této kvadratuře dodal skoro až o 2000 let později Isaac Newton. Tedy budeme si muset pomoci trochu jinak.

2.1 Skaláry, vektory a skalární součin

Skalární pole a vektorové pole jsou dosti intuitivní pojmy, které si lze jednoduše představit. Například pod pojmem skalární pole lze chápat teplotu v pokoji, která je v každém bodě jiná, a tedy má hodnotu reálného čísla. Pod pojmem vektorové pole si lze představit gravitaci, tedy „šipka“ která ukazuje směr kudy bude těleso padat nebo rychlost proudění kapaliny to je také vektorové pole. My k těmto pojmům posléze přidáme pojem tenzorového pole.

Skalární součin je pojem z lineární algebry, který je vybudovaný na základech délky a úhlu, což jsou prvky, které popisuje Euklides. Tedy tento pojem vzešel opět z Euklidovské geometrie. Vektory budeme odlišovat od skaláru šipkou nad nimi. Pro skalární součin platí:

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = |\vec{U}||\vec{V}| \cos \gamma \quad 2.1$$

Tuto rovnost lze interpretovat slovy. Skalární součin dvou vektorů je roven součinu jednotlivých délek vektorů a kosinu úhlu mezi nimi. Lze si povšimnout, že se jedná o komutativní operaci.

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = |\vec{U}||\vec{V}| \cos \gamma = |\vec{V}||\vec{U}| \cos \gamma = \vec{V} \cdot \vec{U} \quad 2.2$$

Dokonce zachovává linearitu v každém argumentu:

$$(\vec{U} + \vec{V}) \cdot \vec{W} = \vec{U} \cdot \vec{W} + \vec{V} \cdot \vec{W} \quad 2.3$$

Pokud použijeme skalární součin na stejný vektor, lze po úpravě obdržet délku tohoto vektoru:

$$\sqrt{\vec{U} \cdot \vec{U}} = |\vec{U}| \quad 2.4$$

Podobně, lze odvodit úhel mezi dvěma vektory. Tyto vlastnosti jsou nám známy z lineární algebry.

2.2 Směrová derivace

Další pojem, který je nám dobře znám, tentokrát z analýzy je směrová derivace. My tento pojem převede na striktně geometrický problém. Směrová derivace zachycuje rychlost změny na skalární poli F na rovné čáře. Mějme bod P a rovnou čáru z něj vycházející l . Dále uvažujme, že další bod P^* leží na této čáře l a nechť vzdálenost těchto bodů jde k nule. Potom směrovou derivaci prohlásíme jako limitu tohoto stavu:

$$\frac{dF(P)}{dl} = \lim_{P^* \rightarrow P} \frac{F(P^*) - F(P)}{|PP^*|} \quad 2.5$$

Tento pojem je zcela intuitivní geometrické představě, navíc není třeba ani zavádět souřadný systém, tak jak to bylo potřeba v matematické analýze.

2.3 Derivování vektorů

Abychom mohli definovat tento pojem musíme vědět, že vektorové pole má určité vlastnosti. Lze sečíst dva vektory a výsledný vektor opět padne do vektorového prostoru, vektor lze násobit skalárem a výsledek opět padne do vektorového prostoru a nejdůležitější je, že pokud vektor je závislý na parametru α pak pro něj lze říct, že $\vec{V}(\alpha) \rightarrow \vec{U}$ když $\alpha \rightarrow 0$ pokud platí:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} |\vec{V}(\alpha) - \vec{U}| = 0 \quad 2.6$$

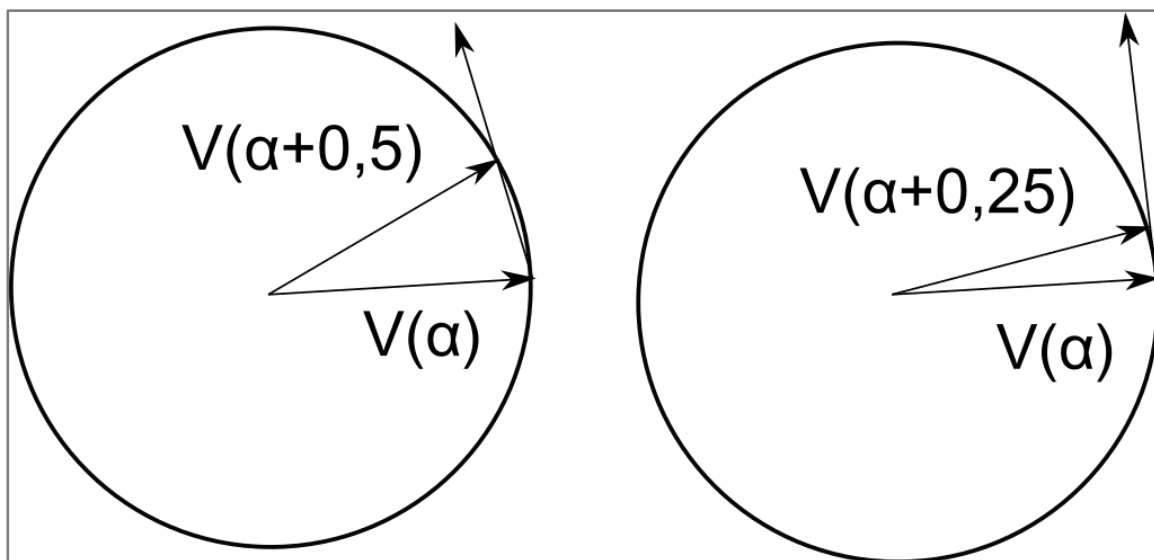
Nyní mějme vektor $\vec{V}(\alpha)$ závislý na úhlu α takový, že jeho délka se nemění, lze tedy rozmyslet, že se jedná o „kružnici“. Dále dle definice směrové derivace budeme přičítat malou změnu h k argumentu α a od něj budeme odčítat původní argument:

$$\Delta \vec{V} = \vec{V}(\alpha + h) - \vec{V}(\alpha) \quad 2.7$$

Celý tento výraz podělíme změnou h a pokud h pošleme limitně k nule dostáváme derivaci tohoto vektoru jež budeme označovat $\vec{V}'(\alpha)$:

$$\vec{V}'(\alpha) = \frac{\vec{V}(\alpha + h) - \vec{V}(\alpha)}{h} \quad 2.8$$

Na obrázku jde vidět, že limita $h \rightarrow 0$ je potřeba jen, aby byla zaručena kolmost mezi těmito vektory (ukážeme záhy), ale velikost i hlavní myšlenka platí, i když za h zvolíme třeba 0,5 nebo 0,25.



Obrázky 2-1 Konstrukce derivace vektoru $V(\alpha)$

Pro skalární součin $\vec{V}(\alpha)$ platí:

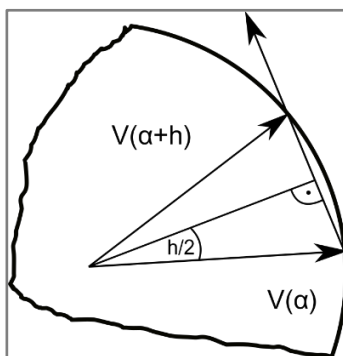
$$\vec{V}(\alpha) \cdot \vec{V}(\alpha) = A \quad 2.9$$

Kde pod A si lze představit délku vektoru $\vec{V}(\alpha)$ na druhou. To plyne z definice 2.22. Nyní tuto rovnici s derivujeme vzhledem k parametru α . To, že pro skalární součin při derivaci funguje pravidlo o derivaci součinu není jednoduché dokázat, to ale není předmětem této práce, a tedy po derivaci obdržíme tento tvar.

$$\begin{aligned} \vec{V}(\alpha) \cdot \vec{V}'(\alpha) + \vec{V}'(\alpha) \cdot \vec{V}(\alpha) &= 0 \\ \vec{V}'(\alpha) \cdot \vec{V}(\alpha) &= 0 \end{aligned} \quad 2.10$$

Tedy tyto dva vektory jsou na sebe kolmé (ortogonální). Pro derivaci $\vec{V}(\alpha)$ je velice zajímavý fakt, že jeho délka je rovna $\sqrt{A}$. Pokud budeme operovat na jednotkovém kruhu $A = 1$. Tuto vlastnost, lze jednoduše odvodit z trojúhelníku Obrázky 2-2.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{A} \sin \frac{h}{2}}{h} = \sqrt{A} \quad 2.11$$



Obrázky 2-2 Trojúhelník pro odvození limity

2.4 Souřadný systém

V dnešní době si nedokážeme představit analýzu bez souřadného systému, tento pojem ale zavedl až René Descartes, nevíme sice jestli byl prvním, kdo tento pojem použil, ale rozhodně je první, který ho dokázal využít s neuvěřitelnou efektivností. Celé jeho bádání v tomto odvětví zahrnul do mistrovského díla *The Geometry* (3). Díky zavedení souřadného systému, lze třeba předchozí případ pro vektor $\vec{V}(\alpha)$, dosti zjednodušit. Díky bázím $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ lze $\vec{V}(\alpha)$ rozepsat do kartézského souřadného systému jako:

$$\vec{V}(\alpha) = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \sin \alpha \quad 2.12$$

Což lze podle znalostí matematické analýzy lehce zderivovat:

$$\vec{V}'(\alpha) = -\vec{i} \sin \alpha + \vec{j} \cos \alpha \quad 2.13$$

Tento přístup je tedy mnohem jednodušší, což by mohlo vést k myšlence, že držet se této terminologie by bylo správné. Pokud bychom tak doopravdy udělali, ztratili bychom naši geometrickou intuici a museli bychom se omezit pouze na jeden souřadný systém, to my ale nechceme a snažíme se právě o opak. Tedy najít takové identity, které by platili pro všechny souřadné systémy zároveň. Kromě kartézského souřadného systému existují i jiné např.: polární, sférický, válcový a mnoho dalších souřadných systémů. Každý se volí dle potřeby k danému problému. Pokud bychom chtěli třeba měřit vzdálenost dvou bodů na kouli, rozhodně bychom volili sférický souřadný systém. Jednoduše řečeno budeme tedy využívat souřadné systémy, jelikož výhody jsou nesporné, ale budeme se je snažit držet v obecném tvaru.

2.5 Změna souřadného systému

V přechodí odstavci jsme si nadefinovali jednotlivé souřadné systémy, dle Reného Descartese. Nyní se budeme snažit zkonstruovat nějakou formuli za pomoci, které bychom mohli přejít z jednoho souřadného systému do druhého.

Mějme tedy proměnné z prvního souřadného a z druhého souřadného systému. Tady se ale zastavíme, protože toto jsme již popisovali na začátku této práce viz vzorec 1.9. Zde se nám schází dva různé přístupy.

Některé vztahy ale musíme přepsat do naší notace. Nejdříve označíme proměnné jednotlivých souřadných systémů. První proměnné jako Z^i a $Z^{i'}$ pro proměnné druhého souřadného systému.

Jistě platí, že pokud do sebe dosadíme dvakrát proměnné různých souřadných systému dostaneme tuto identitu:

$$\begin{aligned} Z^i(Z'(Z)) &\equiv Z^i \\ Z^{i'}(Z(Z')) &\equiv Z^{i'} \end{aligned} \quad 2.14$$

A při parciální derivaci podle proměnné pro daný souřadný systém dostáváme:

$$\frac{\partial Z^i}{\partial Z^{i'}} \frac{\partial Z^{i'}}{\partial Z^j} = \frac{\partial Z^i}{\partial Z^j} \quad 2.15$$

Kde jsme museli použít pravidlo pro derivování vnitřní funkce. Zcela analogicky bychom to udělali pro druhou identitu. A objekt $\partial Z^i / \partial Z^{i'}$ je přesně námi již dříve nadefinovaná Jacobiho matice neboli matice přechodu, jak jsme ji nazývali dříve. Nyní už ale přesně vidíme důvod, proč ji tak nazýváme. Je totiž totožná s definicí z matematické analýzy pro Jacobiho matici.

$$\begin{aligned} J_{i'}^i &= \frac{\partial Z^i(Z')}{\partial Z^{i'}} \\ J_i^{i'} &= \frac{\partial Z^{i'}(Z)}{\partial Z^i} \end{aligned} \quad 2.16$$

A opět bude platit vztah mezi těmito Jakocobiány, tak jak se vystihuje rovnice 1.6. Pozorný čtenář si určitě všiml, že v rovnici 2.15 umíme přepsat ještě jeden člen a to $\partial Z^i / \partial Z^j$ nejedná se o nic jiného než o Kronekerovo delta δ_j^i . Pokud bychom byli v kartézském souřadném systému s proměnnými x, y , lehce ověříme, že jestliže proměnou x derivujeme, tak obdržíme buď 0 nebo 1 v závislosti podle čeho derivujeme. V rovnici 2.15 dochází ke kontrakci přes index i' , to je očividné. Zatím jsme tomu nevěnovali moc velkou pozornost, proto nyní prozkoumáme, zda je tato kontrakce závislá na pořadí. Nechť máme objekt S_{jm}^{ik} a u něj nejdříve provedeme kontrakci přes i, j a pak přes k, m . Následně postup prohodíme. Je dosti triviální ukázat, že nezávisí na pořadí, protože jde o součet jednotlivých prvků a součet je komutativní, a tedy i kontrakce bude komutativní.

Pro jednoduchost uvedeme příklad pro $n = 2$:

$$\begin{aligned} S_i \delta_j^i &= S_1 \delta_j^1 + S_2 \delta_j^2 = \\ &= S_1 \delta_1^1 + S_1 \delta_2^1 + S_2 \delta_1^2 + S_2 \delta_2^2 = S_1 \delta_1^1 + S_2 \delta_2^2 \end{aligned} \quad 2.17$$

Kronekerovo delta má tu vlastnost, že je rovno nule, pokud se indexy neshodují, odtud pro náš příklad lze jasně zachytit proč „přežili“ pouze dva výrazy ze sumy.

2.6 Vektor jako funkce souřadnic

Již dříve jsme tuto problematiku „naťuknuli“. Ale tam jsme byli vázáni na jeden konkrétní souřadnicový systém. Nyní ho tedy zobecníme a vektor $\vec{R}$ bude funkce souřadnic Z^i .

$$\vec{R} = \vec{R}(Z) \quad 2.18$$

Ještě, než se posuneme dále, objasníme si jistou skutečnost, kterou jsme možná měli zmínit dříve. Nechť máme křivku, která je definovaná parametrem t v každém bodě. A tedy poziční vektor, který má počátek v bodě P , popisuje celou tuto křivku za pomoci parametru t . Pak délka křivky je dána tímto vztahem:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t^*} \sqrt{\vec{R}'(t) \cdot \vec{R}'(t)} dt \quad 2.19$$

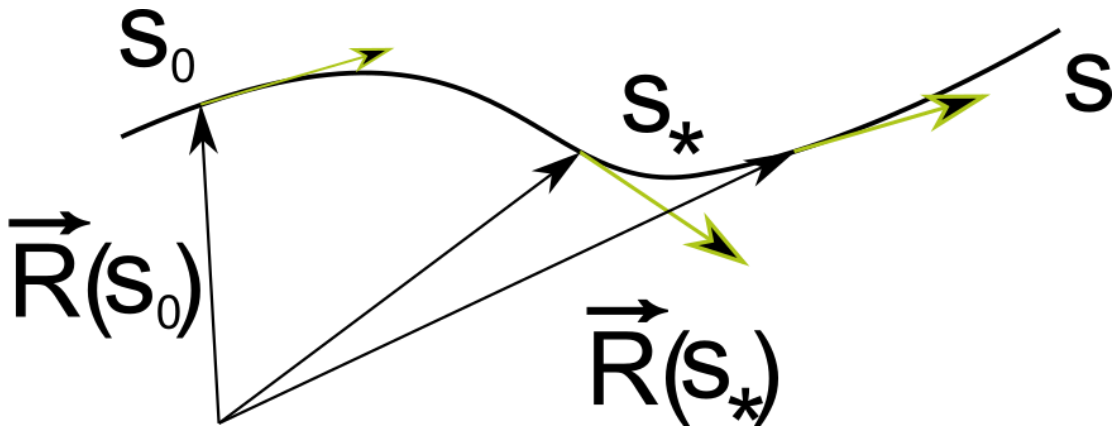
Nyní si budeme muset opřít o znalosti z fyziky. Uvažujme částici, která se pohybuje po této křivce s nějakou rychlostí $\vec{R}'(t)$, pak dráha, kterou urazí za čas t^* je jistě rovna 2.19. Tento vztah jistě nezávisí na parametrizaci. Nechť tedy například částice letí stejnou dráhu, ale tentokrát dvakrát rychleji, pak výraz pod odmocninou je čtyřikrát větší než před reparametrizací. Po odmocnění dostáváme opět dvojnásobek. Jenomže meze budou tentokrát dvakrát menší, jelikož částice stihne stejnou dráhu uletět za poloviční čas. Nyní budeme uvažovat jako parametr délku oblouku s . Tedy značíme je od určitého bodu na křivce, jak daleko jsou od námi zvoleného bodu. Jistě platí pro rychlost:

$$s'(t) = \sqrt{\vec{R}'(t) \cdot \vec{R}'(t)} \quad 2.20$$

Pro naši reparametrizaci platí:

$$1 = s'(s) = \sqrt{\vec{R}'(s) \cdot \vec{R}'(s)} \quad 2.21$$

To nám tedy říká, že pokud jako parametr zvolím délku oblouku tak délka tečného vektoru je rovna jedné.



Obrázky 2-3 Parametrizace délkou obloukem

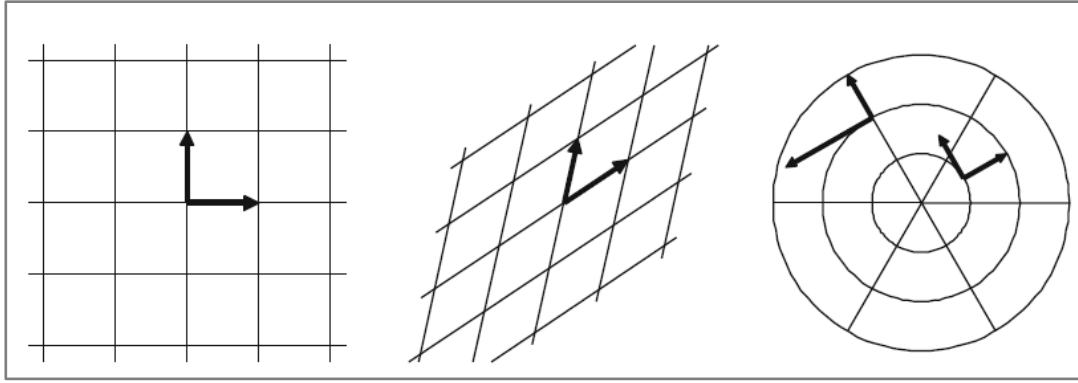
Na obrázku nám $R'(s)$ odpovídá zelenému tečnému vektoru.

2.7 Kovariantní báze

Kovariantní bázi zavedeme pomocí vektoru $\vec{R}(Z)$ a jeho parciálními derivacemi podle jednotlivých proměnných Z^i .

$$\vec{Z}_i = \frac{\partial \vec{R}(Z)}{\partial Z^i} \quad 2.22$$

Je zde velmi důležité podotknout, že tyto kovariantní báze se liší bod od bodu. Tato skutečnost je zachycena na obrázku Obrázky 2-4, pro různé volby souřadných systémů. Podrobnější definice a hodnoty jednotlivých bází lze nalézt v (4).



Obrázky 2-4: Kovariantní báze v kartézském, afiním a polárním - 2D

Tedy pro kartézský systém ve 2D máme dvě kovariantní báze. Obě jsou navzájem kolmé a obě mají délku rovné jedné. Pro polární souřadný systém jsou opět kolmé, ale velikost druhého kovariantní báze je rovna r , tedy vzdálenosti od počátku.

Nyní se vraťme k tečnému vektoru $\vec{R}(s) = \vec{T}$, který jsme před chvílí definovali. Jelikož jsme nyní nadefinovali kovariantní báze, je nasnadě uvažovat, jak bude vypadat „rozložení“ do těchto bází. Jinak řečeno, jak vypadá lineární kombinace toho tečného vektoru. Chtěli bychom dostat tento výraz (pro 2D).

$$\vec{T} = T^1 \vec{Z}_1 + T^2 \vec{Z}_2 \quad 2.23$$

Koeficienty T^i , ale vzhledem k Z^i neznáme. Opět použijeme dosazení za s a vyjádříme jej za pomoci proměnných Z^i :

$$\vec{R}(s) = \vec{R}(Z(s)) = \vec{R}(Z^1(s), Z^2(s)) \quad 2.24$$

Nyní abychom získali tečný vektor $\vec{T}$ stačí dle definice derivovat podle s . Jedná se o vnořenou funkci, derivujeme dle tohoto pravidla.

$$\vec{T}(s) = \frac{d\vec{R}(s)}{ds} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial Z^1} \frac{dZ^1}{ds} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial Z^2} \frac{dZ^2}{ds} \quad 2.25$$

Nyní přirozeně můžeme dosadit definované kovariantní báze.

$$\vec{T} = \vec{Z}_1 \frac{dZ^1}{ds} + \vec{Z}_2 \frac{dZ^2}{ds} \quad 2.26$$

To je ale odpověď na náš problém, který jsme řešili v 2.23. Jednotlivé koeficienty se rovnají derivacím vzhledem k původnímu parametru s .

$$T^i = \frac{dZ^i}{ds} \quad 2.27$$

Nyní vše zobecníme. Pro vektor $\vec{T}$ platí:

$$\vec{T} = T^i \vec{Z}_i \quad 2.28$$

Lze si povšimnout, že tato definice odkazuje na fakt, že dva identické vektory $\vec{U}, \vec{V}$ mohou mít rozdílné kontravariantní složky, i když jsou identické, jak jsme zmiňovali, vše je zapříčiněno kovariantní bází, která je bod od bodu jiná.

2.8 Kovariantní metrický tenzor

Je definován za pomoci skalárního součinu:

$$Z_{ij} = \vec{Z}_i \cdot \vec{Z}_j \quad 2.29$$

Objekt, který jsme nyní nadefinovali je občas nazýván jako fundamentální tenzor. Tento objekt jsme již popisovali dříve a víme, že ho nazýváme Gramovou maticí nebo taky jenom metrický tenzor. Díky symetrii skalárního součinu i kovariantní metrický tenzor je symetrický ve svých indexech. V tomto tenzoru se navíc uchovává veškeré informace o skalární součinu. Bude klíčový pro měření délek, obsahů a objemů. Uvažujme nyní dva vektory $\vec{U}, \vec{V}$ ve stejném bodě.

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = U^i \vec{Z}_i \cdot V^j \vec{Z}_j = U^i V^j Z_{ij} \quad 2.30$$

Nyní můžeme konečně rozvést naši myšlenku s kovariantním metrickým tenzorem Z_{ij} , jak již bylo zmíněno tento tenzor má velice zajímavé vlastnosti.

Délka vektoru U lze vyjádřit z lineární algebry jako

$$|U| = \sqrt{U \cdot U} \quad 2.31$$

Když na to nasadíme, ale tenzorovou algebru dostaneme

$$|U| = \sqrt{U \cdot U} = \sqrt{U^i Z_i \cdot U^j Z_j} = \sqrt{Z_{ij} U^i U^j} \quad 2.32$$

Jelikož jsme metrický tenzor definovali pro libovolný souřadný systém neboli bází tak jsme zjistili, jak lze vypočítat délku vektoru v jakémkoliv souřadném systému neboli bází.

Další vlastnost metrického tenzoru se nazývá objemový element $\sqrt{\det(Z_{..})}$, který se využívá při integracích, kovariantní derivaci atd.

Nejběžnější využití se ale nachází v obyčejné analýze, při zjišťování délky křivky. Již známe, že délka křivky L s parametrizací v kartézském souřadném systému $(x(t), y(t))$ se vypočítá

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad 2.33$$

Po převedení do tenzorové algebry pro souřadnice $(Z^1(t), Z^2(t))$ máme

$$L = \int_a^b \sqrt{Z_{ij} \frac{dZ^i}{dt} \frac{dZ^j}{dt}} dt \quad 2.34$$

Abychom mohli alespoň ověřit tento zápis musíme si spočítat Z_{ij} pro kartézský souřadný systém. Precizní odvození s příkladem lze najít v (4).

$$Z_{ij} = \vec{Z}_i \cdot \vec{Z}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 2.35$$

A tedy opravdu rovnice 2.35 a 2.34 jsou si rovny.

Objekt, který může být zjištěn měřením vzdálenosti nebo derivacemi se nazývá vnitřní. Do této skupiny patří rozhodně náš metrický tenzor a dále třeba Christoffelovy symboly nebo Riemann Christoffel tenzory, tyto pojmy zavedeme později. Tyto objekty budou velmi důležité při konstrukci obecné relativity, či při studii a popisu zahnutých ploch. Díky metrickému tenzoru vlastně zavádíme pojem skalárního součinu v chápání tenzorové algebry. Z lineární algebry víme, že existuje-li ortogonální báze $\{\vec{e}_i, \vec{e}_j\}$, pak platí následující:

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0, \quad i \neq j \quad 2.36$$

Nechť V_i jsou komponenty $\vec{V}$ vzhledem ke zmíněné bázi, pak:

$$\vec{V} = V_1 \vec{e}_1 + \dots + V_n \vec{e}_n \quad 2.37$$

Pokud tento vztah skalárně vynásobíme bázovým vektorem $\vec{e}_i$:

$$\begin{aligned} (\vec{V}, \vec{e}_i) &= V_i (\vec{e}_i, \vec{e}_i) \\ V_i &= \frac{(\vec{V}, \vec{e}_i)}{(\vec{e}_i, \vec{e}_i)} \end{aligned} \quad 2.38$$

Nasnadě je tedy definovat pojem ortonormality tj. když $(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = 1$ pak výraz přechází do tvaru:

$$\vec{V} = V_i (\vec{V}, \vec{e}_i) \quad 2.39$$

Pokud by, ale nebyli ortonormální pak bychom ale museli každý komponent vyjadřovat z matice $n \times n$. Tento problém řeší zavedení kontravariantní báze, tu si nadefinujeme záhy.

2.9 Kontravariantní metrický tenzor

Je definován jako inverze k Z_{jk} . Tuto skutečnost zachycujeme následovně:

$$Z^{ij} Z_{jk} = \delta_k^i = Z_{kj} Z^{ji} \quad 2.40$$

Opět se přenáší symetrie, navíc i z algebry víme, že platí $AA^{-1} = I \Leftrightarrow A^{-1}A = I$. Jeho využití si ukážeme později, zatím nám bude stačit skutečnost, že víme, jak ho zkonstruovat.

2.10 Kontravariantní báze

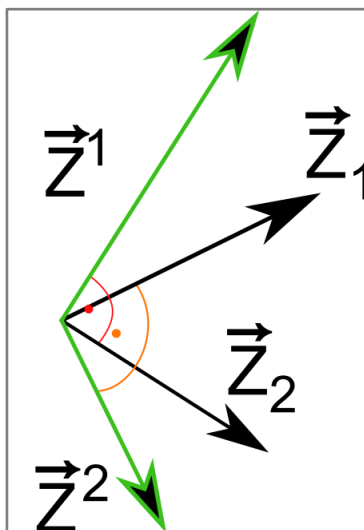
Definujeme:

$$\vec{Z}^i = Z^{ij} \vec{Z}_j \quad 2.41$$

I pozorný čtenář asi ztratil vizuální (geometrický) pojem, co jsou nebo jak vlastně vypadají kontravariantní báze. Proto si za chvíli uvedeme tuto problematiku na příkladu. Nyní, ale ještě z této definice plyne určitá vlastnost mezi kovariantními a kontravariantními bázemi.

$$\vec{Z}^i \cdot \vec{Z}_j = Z^{ik} \vec{Z}_k \cdot \vec{Z}_j = Z^{ik} Z_{kj} = \delta_j^i \quad 2.42$$

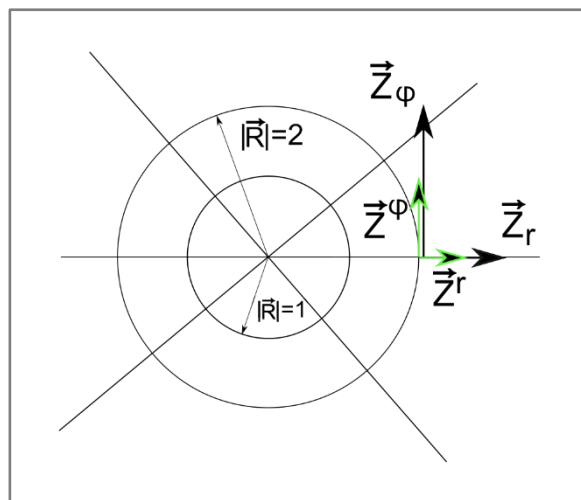
Pokud vztah vyjádříme slovně. Kovariantní a kontravariantní složky jsou na sebe kolmé, pokud se indexy nerovnají, pokud ano tak je jejich skalární součin roven jedné. Tuto skutečnost zachycuje taktéž Obrázky 2-5, tedy pro 2D.



Obrázky 2-5 Kovariantní a kontravariantní báze

Orientace kontravariantní báze je daná díky tomu, že úhel musí být v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Nyní vyobrazíme kontravariantní a kovariantní báze v polární souřadném systému.



Obrázky 2-6 Polární souřadnice a báze

Nyní se vrátíme k problému z lineární algebry. Když známe kontravariantní báze lze celý problém s rozkladem zcela zjednodušit:

$$\vec{V} \cdot \vec{Z}^i = V^j \vec{Z}_j \cdot \vec{Z}^i = V^j \delta_j^i = V^i \quad 2.43$$

Tedy komponent může být vypočítán jedinou operací a není třeba počítat celou matici $n \times n$. Rozhodně tento přístup není jednodušší pro výpočet kontravariantní báze je třeba vynaložit velké úsilí, nám jde ale o vyjádření, a to je mnohem efektivnější a kompaktnější.

2.11 Christoffelovy symboly

Tento koeficient se nám objeví poté, co se budeme snažit zachytit změnu kovariantních nebo kontravariantních bází vzhledem k proměnným. Tyto báze jsou různé bod od bodu. Následně zachycenou změnu rozložíme do kovariantních nebo kontravariantních bází. Z této úvahy plyne, že pokud máme N rozměrný Euklidovský prostor, pak derivace nám dává N^2 vektorů a následná dekompozice do bází nám dá N^3 koeficientů, které budeme značit jako Christoffelovy.

$$\frac{\partial \vec{Z}_i}{\partial Z^j} = \Gamma_{ij}^k \vec{Z}_k \quad 2.44$$

Kde indexy se přiřazují zcela intuitivně. Pojem Christoffelových symbolů se poprvé objevila v práci (5) geniálního matematika Elwina Bruna Christoffela. Jde tedy pouze o přeznačení druhé derivace pozičního vektoru $\vec{R}$ a následná dekompozice do kovariantní báze.

$$\frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial Z^j \partial Z^i} = \frac{\partial \vec{Z}_i}{\partial Z^j} \quad 2.45$$

Navíc platí, že

$$\frac{\partial \vec{Z}_i}{\partial Z^j} = \frac{\partial \vec{Z}_j}{\partial Z^i} \quad 2.46$$

Což nám zapříčiní symetrii v dolních indexech Christoffelových symbolů $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Tedy víme, jak tyto koeficienty vypadají, ale zatím pro ně nemáme explicitní vyjádření proto 2.44 skalárně vynásobíme obě strany kontravariantní bází $\vec{Z}^m$.

$$\vec{Z}^m \cdot \frac{\partial \vec{Z}_i}{\partial Z^j} = \Gamma_{ij}^k \vec{Z}_k \cdot \vec{Z}^m = \Gamma_{ij}^k \delta_k^m = \Gamma_{ij}^m \quad 2.47$$

$m \rightarrow k$

$$\Gamma_{ij}^k = \vec{Z}^k \cdot \frac{\partial \vec{Z}_i}{\partial Z^j}$$

Nyní udělejme menší trik a „vtáhněme“ $\vec{Z}^k$ do parciální derivace, tak aby byla zachována rovnost:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial (\vec{Z}^k \cdot \vec{Z}_i)}{\partial Z^j} - \frac{\partial (\vec{Z}^k)}{\partial Z^j} \cdot \vec{Z}_i \quad 2.48$$

Výraz je totožný s rovnicí 2.47, dále si lze povšimnout, že tento tvar lze zjednodušit, když výraz $\vec{Z}^k \cdot \vec{Z}_i$ převedeme na δ_i^k a následná derivace konstanty vymizí:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial(\delta_i^k)}{\partial Z^j} - \frac{\partial(\vec{Z}^k)}{\partial Z^j} \cdot \vec{Z}_i = -\frac{\partial(\vec{Z}^k)}{\partial Z^j} \cdot \vec{Z}_i \quad 2.49$$

Po převodu do původní definice dostáváme:

$$\frac{\partial \vec{Z}^k}{\partial Z^j} = -\Gamma_{ij}^k \cdot \vec{Z}^i \quad 2.50$$

Nyní jsme dostali nový popis Christoffelových symbolů vzhledem k rozkladu do kontravariantní báze.

Co nám tedy tyto symboly říkají? Popisují nám změnu $\partial \vec{Z}_i / \partial Z^j$ kovariantních bází vzhledem k proměnným Z^j . Pro $N = 3$ máme tedy 27 složek, které dostaneme, pokud kontravariantní bázi $\vec{Z}^k$ skalárně vynásobíme se „změnou“ kovariantní báze $\partial \vec{Z}_i / \partial Z^j$. Tyto symboly jsou tedy něco tak fundamentálního, jako je metrický tenzor, který nám zachycuje kovariantní báze, což je změna pozičního vektoru $\vec{R}$, a Christoffelovy symboly v podstatě zachycují druhou derivaci tohoto vektoru. Odtud je intuitivní tato důležitost. Pokud bychom vyjádřili Christoffelovy symboly za pomoci metrických tenzorů obdrželi bychom tvar:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} Z^{km} \left(\frac{\partial Z_{mi}}{\partial Z^j} + \frac{\partial Z_{mj}}{\partial Z^i} + \frac{\partial Z_{ij}}{\partial Z^m} \right) \quad 2.51$$

Tento tvar lze najít i s důkazem zde (6). Sice jsme ještě nezavedli pojem „spouštění“ a „zvedání“ indexů v této kapitole, ale už ho vlastně používáme z definice metrického tenzoru $\vec{Z}^i = Z^{ij} \cdot \vec{Z}_j$. Převodli jsme tedy kovariantní bázi na kontravariantní bázi. Pokud bychom prohodili v definici 2.47 kontravariantní za kovariantní bázi dostali bychom:

$$\Gamma_{k,ij} = \vec{Z}_k \cdot \frac{\partial \vec{Z}_i}{\partial Z^j} \quad 2.52$$

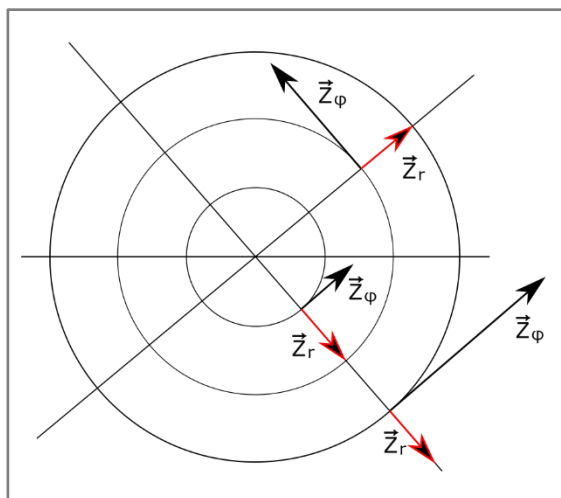
Tento typ Christoffelových symbolů se v jiných literaturách nazývá Christoffelovy symboly prvního druhu, kdežto Γ_{ij}^k se nazývají druhého druhu. Toto označení plyne, jak je Elwin Bruno Christoffel postupně odvozoval.

Pojďme nyní vypočítat tyto symboly pro různé souřadné systémy. Nejdříve uvažujme kartézský souřadný systém v dimenzi $N = 2$.

$$\frac{\partial \vec{Z}_i}{\partial Z^j} = \Gamma_{ij}^k \vec{Z}_k \quad 2.53$$

Všechny indexy se sčítají od 1 do 2. Musíme tedy vypočítat 2^3 Christoffelových symbolů. Stačí nám zjistit derivace kovariantní báze a následně ji rozložíme do kovariantní báze $\vec{Z}_\nu$, ta splývá s námi dobře známými bázeovými vektory $\{\vec{i}, \vec{j}\}$. A tedy derivace konstanty je vždy nula odtud vidíme, že kartézský souřadný systém je triviální z pohledu Christoffelových symbolů, jelikož platí $\Gamma_{ij}^k = 0$.

Přejděme na trochu lepší příklad. Mějme polární souřadný systém. V něm jsou kovariantní vektory orientovány takto:



Obrázky 2-7 Kontravariantní báze – polární souřadnice

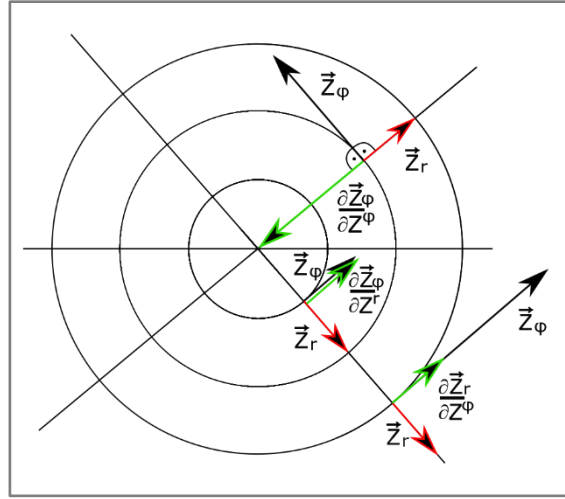
Pro první sadu Christoffelových symbolů Γ_{rr}^r a Γ_{rr}^ϕ . Jaká je změna $\vec{z}_r$ v závislosti na r . Odpověď je jasně vidět z Obrázky 2-7 $\Gamma_{rr}^r = \Gamma_{rr}^\phi = 0$.

Uvažujme druhou sadu $\Gamma_{r\phi}^r$ a $\Gamma_{r\phi}^\phi$. Změna $\vec{z}_r$ v závislosti na ϕ . Jedná se pro nás už známý problém 2.8. Tedy výsledek je kolmý k $\vec{z}_r$ v kladném smyslu (proti směru hodinových ručiček). A jeho délka je stejná jako $\vec{z}_r$ a ta je rovna 1. Pokud tedy tento vektor rozložíme do kovariantních bází získáváme $\Gamma_{r\phi}^r = 0$, $\Gamma_{r\phi}^\phi = 1/r$.

Další sada $\Gamma_{\phi r}^r$ a $\Gamma_{\phi r}^\phi$ nám popisuje změnu $\vec{z}_\phi$ v závislosti na r . Z obrázku je vidět jasná linearita v závislosti na r . Výsledný vektor bude mít tedy délku jedna a směr bude mít stejný jako $\vec{z}_\phi$ viz definice derivace. Po rozložení obdržíme $\Gamma_{\phi r}^r = 0$, $\Gamma_{\phi r}^\phi = 1/r$.

A konečně poslední sada $\Gamma_{\phi\phi}^r$ a $\Gamma_{\phi\phi}^\phi$ nám popisuje změnu $\vec{z}_\phi$ v závislosti na ϕ . Znovu zjišťujeme, že se jedná o stejný problém, který jsme již řešili akorát orientace vektoru nyní směřuje jinam. Stejnou konstrukcí obdržíme vektor, který je kolmý k $\vec{z}_\phi$ a orientovaný v kladném směru. Pro jeho délku, ale neplatí, že by byla pořád jedna, ale odpovídá délce $\vec{z}_\phi$ v daném bodě, což je hodnota r . Při dekompozici dostáváme $\Gamma_{\phi\phi}^r = -r$, $\Gamma_{\phi\phi}^\phi = 0$.

Všechny tyto operace jsou zaznačeny v Obrázku 2-8.



Obrázky 2-8 Derivace kovariantní báze

Už jsme vykonstruovali dosti silnou algebru, použijme ji tedy na fyzikální problém. Nechť máme částici, která se pohybuje po křivce a je parametrizována v závislosti na čase:

$$Z^i \equiv Z^i(t) \quad 2.54$$

Tedy poziční vektor $\vec{R}$ je funkcí proměnných Z^i, t , což zapíšeme jako $\vec{R}(Z(t))$. Rychlost částice obdržíme jako derivaci tohoto vektoru:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial Z^i} \frac{dZ^i}{dt} \quad 2.55$$

Rozložme tento vektor do kovariantní báze $\vec{V} = V^i \vec{Z}_i$. Parciální derivace $\vec{R}$ podle Z^i je právě definice kovariantní báze $\vec{Z}_i$ a tedy V^i musí být rovno výrazu:

$$V^i = \frac{dZ^i}{dt} \quad 2.56$$

Pokračujme dál a získejme zrychlení $\vec{A}$:

$$\vec{A} = \frac{d(V^i \vec{Z}_i)}{dt} = \frac{dV^i}{dx} \vec{Z}_i + V^i \frac{\partial \vec{Z}_i}{\partial Z^j} \frac{dZ^j}{dt} \quad 2.57$$

Opět přeznačíme prvky, které jsme si již definovali Γ_{ij}^k a V^j .

$$\vec{A} = \frac{dV^i}{dt} \vec{Z}_i + V^i \Gamma_{ij}^k \vec{Z}_k V^j \quad 2.58$$

Přejmenujeme indexy $k \rightarrow i, i \rightarrow k, j \rightarrow m$ a vytkneme $\vec{Z}_i$.

$$\vec{A} = \frac{dV^i}{dt} \vec{Z}_i + V^k \Gamma_{km}^i \vec{Z}_i V^m = \left(\frac{dV^i}{dt} + V^k \Gamma_{km}^i V^m \right) \vec{Z}_i \quad 2.59$$

Opět se $\vec{A}$ dá rozložit do kovariantní báze, což je do vztahu $\vec{A} = A^i \vec{Z}_i$, z toho plyne:

$$A^i = \frac{dV^i}{dt} + V^k \Gamma_{km}^i V^m \quad 2.60$$

Pokud bychom uvažovali další derivaci, tak bychom obdrželi tento tvar:

$$\vec{J}(t) = \frac{d\vec{A}}{dt} = \left(\frac{dA^i}{dt} + \Gamma_{kj}^i A^j \right) \vec{Z}_i \quad 2.61$$

A takto by se dala pokračovat, ale vyšší derivace už ve fyzice postrádají smysl.

2.12 Variant

Je definovaný jako objekt, který je závislý na souřadném systému a při přechodu se mění. Pro nás nejznámější příklad je kovariantní báze $\vec{Z}_i$, který je získán jako parciální derivace vzhledem k proměnným určitého souřadného systému. Vlastně skoro vše, co jsme definovali je nějak spjato se souřadným systémem $Z_{ij}, \Gamma_{ij}^k, Z^{ij}$ atd. Přechod mezi souřadnými systémy jsme zachycovali za pomoci Jacobiho matice $J_i^{i'}$. Mezi varianty existuje určitá třída, která se při přechodu do jiného systému řídí pořádkem podle určitého pravidla. Tuto třídu nazýváme Tenzory. Je tedy dosti zřejmá konstrukce, kterou tady vedeme, pokud lze nějaký objekt K , který je vyjádřený ve dvou různých souřadných systémech, převést za pomoci Jacobiho matice na ten druhý, pak tento objekt nazveme tenzorem.

2.13 Tenzory a dodatečná definice

Variant T_i nazveme kovariantním tenzorem prvního řádu, pokud pro něj platí:

$$T_i = J_i^{i'} T_{i'} \quad 2.62$$

Tento pojem se analogicky rozšíří pro kontravariantní tenzor:

$$T^{i'} = T^i J_i^{i'} \quad 2.63$$

Tohle je ale velmi zásadní zjištění, protože tento pojem ihned vede k dalšímu, a to je invariant. O objektu řekneme, že je invariantní, pokud nezávisí na souřadném systému a je tím pádem stejný ve všech souřadných systémech. Tento fakt zobrazíme na příkladu. Nechť máme kovariantní tenzor T_i a kontravariantní tenzor S^i . Využijeme nyní zúžení přes i . A měli bychom dostat, dle zachování kontrakce:

$$R = T_i S^i \quad 2.64$$

Takže objekt R se zdá jako invariantní. Pojdme to ověřit. Přejdeme do čárkovaného systému.

$$R' = T_{i'} S^{i'} = J_{i'}^i T_i J_k^{i'} S^k = T_i S^k \delta_k^i = T_i S^i = R \quad 2.65$$

Tedy jsme odvodili, že i po změně souřadného systému jsme dostali stejný objekt $R = R'$. Více o této problematice lze najít v (4) strany 88 – 93. Nyní když jsme konečně nadefinovali precizně pojem tenzor, tak dojde opět k propojení s první kapitolou. Přesněji dojde k přenosu vlastností pro sčítání, násobení a zúžení tenzorů. Jediné, co bychom měli vyzdvihnout je zúžení

neboli kontrakce. Tento pojem nám hrál velkou roli při tvoření invariantů. Nyní budeme uvažovat obecnější vlastnosti. Kontrakce tenzoru je zase tenzor a o kontrakci lze uvažovat pouze pokud tenzor má alespoň jeden kontravariantní a kovariantní index. Toto je třeba ukázat, zda platí. Opět využijeme inverzi Jacobiho matice a Jacobiho matici obecně. Necht' S_{jk}^i je tenzor řádu 3. Naše snaha bude ukázat, že S_{ik}^i je tenzor a že je řádu 1. Vyjádříme S_{jk}^i v čárkované soustavě a za pomoci matic přechodu vytvoříme rovnici:

$$S_{j'k'}^{i'} = S_{jk}^i J_i^{i'} J_{j'}^j J_{k'}^k \quad 2.66$$

Nyní kontrakce přes i', j' vede k:

$$S_{i'k'}^{i'} = S_{jk}^i J_i^{i'} J_{i'}^j J_{k'}^k = S_{jk}^i \delta_i^j J_{k'}^k = S_{ik}^i J_{k'}^k \quad 2.67$$

Jelikož sčítám přes i' a i dostávám tenzor, který je řádu 1, což lze poznat i z toho, že „přežil“ pouze jedna Jacobiho matice.

Takto jsme vybudovali velmi silný nástroj, který nám jasně říká, co je invariant. Jedná se o tenzor nultého řádu. Jinými slovy tato operace vlastně vystihuje vše, o co se snaží tenzorová algebra. Snažíme se vytvořit takové objekty, které jsou invariantní, tedy nezávislé na souřadných systémech.

2.14 Gradient

Necht' máme skalární pole F (třeba teplotu v místnosti). Pak gradient ∇F je dobře definovaný z matematické analýzy, jako směr největšího růstu. Tento pojem rozhodně nezávisí na souřadnicích, a přesto jsme jej v matematické analýze zapisovali takto (převáděno do řeči tenzorové algebry):

$$\nabla F = \sum_i \frac{\partial F}{\partial Z^i} \vec{Z}_i \quad 2.68$$

Ale my víme, že gradient by neměl být závislý na souřadném systému. Jak je to tedy možné? Pozorný čtenář si všimne, že abychom dostali invariant z tohoto vztahu museli bychom kovariantní bázi nahradit kontravariantní bází. Vztah 2.68 jistě platí, to víme z matematické analýzy. Je to způsobeno, díky tomu, že tento vzorec byl odvozen pro kartézský souřadný systém a v něm platí $\vec{Z}_i = \vec{Z}^i$. Správně má tedy vzorec pro obecný souřadný systém vypadat takto.

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial Z^i} \vec{Z}^i \quad 2.69$$

Dokonce zde naběhla Einsteinova sumační konvence, vše zapadá dohromady.

2.15 Směrová derivace

Poprvé jsme viděli sílu tenzorové algebry, když jsme za pomoci znalosti invariantu dokázali upravit vzorec z matematické analýzy do správného tvaru. Pojdme proto „zkontrolovat“ vzorec pro směrovou derivaci.

$$\frac{dF}{dl} = \nabla F \cdot \vec{L} \quad 2.70$$

Dlužíme objasnění některých pojmů. Necht' l je „přímá“ (tento pojem později zobecníme, ale pro Euklidovský prostor je zcela v pořádku) čára procházející bodem P ve směru jednotkového vektoru $\vec{L}$ a dále platí, že l je parametrizována za pomoci délky oblouku s .

$$\begin{aligned} Z^i &= Z^i(s) \\ F(s) &= F(Z(s)) \end{aligned} \quad 2.71$$

Objasnili jsme, že skalární pole F je nyní funkcí s . Zjistíme tedy změnu tohoto pole vzhledem k tomuto parametru dF/ds :

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial Z^i} \frac{dZ^i}{ds} \quad 2.72$$

Po přeznačení $dF/ds = dF/dl$, $\partial F/\partial Z^i = \nabla F$ a $dZ^i/ds = \vec{L} =$ jednotkový tečný vektor dostáváme rovnici 2.70. Tato struktura je opravdu invariantní a není ji třeba vzhledem k tenzorové algebře nijak upravovat.

2.16 Zvedání a spouštění indexů

Tento pojem jsme sice už zavedli u kontravariantní báze, ale tuto vlastnost lze generalizovat na celou strukturu tenzorové algebry. Obecně platí:

$$\vec{U}^j = \vec{U}_i Z^{ij} \quad 2.73$$

Sice $\vec{U}^j$ a $\vec{U}_i$ jsou úplně rozdílné, ale i přesto mezi nimi existuje vztah, který zachycuje buď kovariantní nebo kontravariantní metrický tenzor. Z toho závěru plyne, že každý kovariantní index může být „zvednut“ a tak se stát kontravariantním indexem. Při těchto operacích je důležité sledovat pořadí těchto změn indexů. Toto sledování odpadá třeba při symetrických tenzorech, které jsme uvedli v přechozí kapitole nebo taky se lze o této třídě dočíst v (6) na stranách 42 – 45.

Příklad:

Mějme souřadný systém, který má v bodě P metrický tenzor Z_{ij} roven:

$$Z_{ij} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 2.74$$

A dále máme tenzor T_{jkm}^i , která má všechny komponenty rovny nule, kromě $T_{212}^1 = \pi$. Určete komponenty tenzoru $T_{n j k m}$, který byl vytvořen zpuštěním horního indexu i .

$$T_{n j k m} = T_{j k m}^i Z_{in} \quad 2.75$$

Smysl má uvažovat jenom indexy $i = 1, j = 2, k = 1$ a $m = 2$ zbytek bude roven nule.

$$T_{n 2 1 2} = \pi Z_{1n} \quad 2.76$$

A z tohoto vztahu obdržíme $T_{1212} = 4\pi, T_{2212} = \pi$.

Efekt zvedání a snižování indexů demonstrujeme u skalárního součinu dvou vektorů $\vec{U}$ a $\vec{V}$:

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = U^i \vec{Z}_i \cdot V^j \vec{Z}_j = U^i V^j Z_{ij} = U^i V_i \quad 2.77$$

Tento zápis vypadá dosti elegantně a krásně, a proto by se mohlo zdát, že je to jednodušší způsob, jak vypočítat skalární součin dvou vektorů. Opak je pravdou. Vypočítat kovariantní složky vektoru $\vec{V}$ je extrémně netriviální, Tento způsob formulace se využívá, jelikož má jednoduchý zápis.

2.17 Kovariantní derivace

Již několikrát jsme se zmiňovali, že tenzorové vlastnosti objektů jsou klíčem k vytváření invariantů. A právě samotné derivace podle souřadnic $\partial/\partial Z^i$ nám z tenzoru nevytvoří tenzor. Tento problém by se objevil, kdybychom chtěli definovat Lapacián. Pojďme nyní ověřit, že opravdu derivace podle souřadnic z tenzoru není tenzor. Nechť tedy existuje tenzor S_{ij} , který vznikne ze vztahu $\partial T_i/\partial Z^j$. Pokud by byl výsledek tenzor druhého řádu pak bychom změnou souřadnic a následnou úpravou dostat vztah mezi nimi za pomoci matic přechodu.

$$S_{ij} = \frac{\partial T_i}{\partial Z^j} \stackrel{?}{=} \frac{\partial T_{i'}}{\partial Z^{j'}} J_{j'}^j J_i^{i'} = S_{ij} J_{j'}^j J_i^{i'} \quad 2.78$$

Zkusme dle definic upravit v čárkovanou soustavu tak, aby vznikli matice transformace.

$$\frac{\partial T_{i'}}{\partial Z^{j'}} = \frac{\partial (T_i J_i^{i'})}{\partial Z^{j'}} = \frac{\partial (T_i(Z(Z'))) J_i^{i'}(Z')}{\partial Z^{j'}} \quad 2.79$$

Jelikož budu derivovat podle čárkované proměnné vše musí být vyjádřeno jako funkce čárkovaných proměnných.

$$\frac{\partial (T_i(Z(Z'))) J_i^{i'}(Z')}{\partial Z^{j'}} = \frac{\partial T_i}{\partial Z^j} \frac{\partial Z^j}{\partial Z^{j'}} J_i^{i'} + T_i \frac{\partial J_i^{i'}}{\partial Z^{j'}} = S_{ij} J_{j'}^j J_i^{i'} + T_i J_{i',j'}^i \quad 2.80$$

Kde druhou derivaci souřadného systému píšeme jako $J_{i',j'}^i$. Objekt, který jsme ale dostali, rozhodně není tenzor, protože se neřídí pravidlem, který požadujeme. Právě část $T_i J_{i',j'}^i$, tento vztah „pokazila“. Tento velmi nepříjemný problém dokázali vyřešit až pánové Gregori Ricci-Curbasto a Tullio Levi-Civita. V práci, která je známa pod jménem *Methods of Absolute Differential Calculus and Their Applications*. Totiž zavedli nový pojem a to ∇_i kovariantní derivaci. Tato „derivace“ má tíženou vlastnost, že pokud na vstupu byl tenzor tak na výstupu se nachází opět tenzor, který je o řád vyšší. Pro zajímavost existuje i kontravariantní derivace a tu získáme za pomoci zvýšení indexu, tedy když využijeme metrický tenzor $\nabla^i = Z^{ij} \nabla_j$. Zatím jsme ji, ale pořád nedefinovali. Ale její definice zcela intuitivně vyplyne z příkladu, který už známe, proto pro lepší demonstraci konstrukci ukážeme právě na tomto příkladu.

Nechť existuje vektorové pole $\vec{V}$ definované na v Euklidovském prostoru, který má souřadnice Z^i . Chtějme zjistit změnu tohoto pole v závislosti na souřadnicích:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial Z^j} = \frac{\partial (V^i \vec{Z}_i)}{\partial Z^j} = \frac{\partial (V^i)}{\partial Z^j} \vec{Z}_i + V^i \frac{\partial (\vec{Z}_i)}{\partial Z^j} \quad 2.81$$

Nyní využijeme definice Christoffelových symbolů a tvar upravíme na:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial Z^j} = \frac{\partial V^i}{\partial Z^j} \vec{Z}_i + V^i \Gamma_{ij}^k \vec{Z}_k \quad 2.82$$

Přejmenujeme indexy v druhé části $i \rightarrow k$ a $k \rightarrow i$ a dostáváme po vytknutí:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial Z^j} = \left(\frac{\partial V^i}{\partial Z^j} + V^i \Gamma_{ij}^k \right) \vec{Z}_i \quad 2.83$$

Což nám říká, že výraz $\partial V^i / \partial Z^j + V^i \Gamma_{ij}^k$ je kontravariantní tenzor, tento fakt jsme odvodili v příkladu s částicí a intuitivně taktéž plyne ze zavedení. Co tedy jednotlivé elementy zachycují? První člen $\partial V^i / \partial Z^j$ zachycuje rychlost změny v komponentu V^i , ale naprosto ignoruje změnu v kovariantních bázích $\vec{Z}_i$. Druhý člen $V^i \Gamma_{ij}^k$ zachycuje jak oba komponenty V^i a $\vec{Z}_i$ přispívají na změně $\vec{V}$ v souřadnicích. Nyní konečně zavedeme kovariantní derivaci:

$$\nabla_j V^i = \frac{\partial V^i}{\partial Z^j} + V^m \Gamma_{jm}^i \quad 2.84$$

Z této definice je velmi patrné, že výsledný tenzor bude tenzor, který je o řád vyšší. Sílu tohoto nového operátoru oceníme až za chvíli. Vektor $\vec{V}$ se dá rozložit i do kontravariantní báze. Postup bude dosti podobný, akorát si musíme uvědomit jistou skutečnost, kterou jsme si odvodili již dříve 2.49. Pak se vše zjednoduší a dojdeme k výrazu:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial Z^j} = \frac{\partial (V_i \vec{Z}^i)}{\partial Z^j} = \frac{\partial (V_i)}{\partial Z^j} \vec{Z}^i + V_i \frac{\partial (\vec{Z}^i)}{\partial Z^j} = \left(\frac{\partial V^i}{\partial Z^j} - \Gamma_{ij}^m V_m \right) \vec{Z}^i \quad 2.85$$

A zcela analogicky odvodíme definici kovariantní derivace pro kovariantní tenzor:

$$\nabla_j V_i = \frac{\partial V_i}{\partial Z^j} - \Gamma_{ij}^m V_m \quad 2.86$$

Prozkoumejme jisté vlastnosti tohoto nového operátoru, co se stane, když jej aplikujeme na $\vec{Z}_i$ a $\vec{Z}^i$.

$$\nabla_j \vec{Z}_i = \frac{\partial \vec{Z}_i}{\partial Z^j} - \Gamma_{ij}^m \vec{Z}_m \quad 2.87$$

Ale tento výraz jde upravit dle definice Christoffelových symbolů $\frac{\partial \vec{Z}_i}{\partial Z^j} = \Gamma_{ij}^k \vec{Z}_k$ a po přejmenování indexů zjišťujeme:

$$\nabla_j \vec{Z}_i = \Gamma_{ij}^k \vec{Z}_k - \Gamma_{ij}^m \vec{Z}_m = \vec{0} \quad 2.88$$

Že výsledek je nulový vektor. Stejný výsledek obdržíme, pokud dosadíme kontravariantní bázi $\vec{Z}^i$.

$$\nabla_j \vec{Z}^i = \frac{\partial \vec{Z}^i}{\partial Z^j} + \Gamma_{jm}^i \vec{Z}^m = -\Gamma_{jk}^i \vec{Z}^k + \Gamma_{jm}^i \vec{Z}^m = \vec{0} \quad 2.89$$

Tento postup jde zobecnit na tenzory, které mají více jak jeden kovariantní a kontravariantní index. Uvažujme pro jednoduchost T_i^j a dále bychom rozšiřovali analogicky.

$$\nabla_k T_i^j = \frac{\partial T_i^j}{\partial Z^k} + \Gamma_{km}^j T_i^m - \Gamma_{ki}^n T_n^j \quad 2.90$$

Kolik je kovariantních a kontravariantních indexů v „derivovaném“ tenzoru tolik Christoffelových symbolů bude dodáno.

Je třeba mnoho operací ověřit, jestli fungují pro kovariantní derivace, například jestli je komutativní, jak se chová při součinu atd. Toto předkládáme k věření a odkážeme se na knihu od pana Grinfelda (4). Přesto pojďme si ověřit alespoň jak se chová při násobení. Což lze zapsat takto $\nabla_k (T^i S_j)$:

$$\begin{aligned} \nabla_k (T^i S_j) &= \frac{\partial (T^i S_j)}{\partial Z^k} + \Gamma_{km}^i T^m S_j - \Gamma_{kj}^m T^i S_m = \\ &= \frac{\partial T^i}{\partial Z^k} S_j + \Gamma_{km}^i T^m S_j + \frac{\partial S_j}{\partial Z^k} T^i - \Gamma_{kj}^m T^i S_m = \\ &= (\nabla_k T^i) S_j + (\nabla_k S_j) T^i \end{aligned} \quad 2.91$$

Tato vlastnost nám, ale ihned implikuje, jak se zachová metrický tenzor Z_{ij} při „derivaci“, jelikož víme, že je získat jako skalární součin $\vec{Z}_i \cdot \vec{Z}_j$ a jelikož víme, jak se zachovají při kovariantní derivaci, lze tedy psát:

$$\nabla Z_{ij} = \nabla(\vec{Z}_i \cdot \vec{Z}_j) = (\nabla_k \vec{Z}_i) \vec{Z}_j + (\nabla_k \vec{Z}_j) \vec{Z}_i = 0 \quad 2.92$$

Zmiňme ještě jeden zajímavý fakt, který platí pro invariant (žádný index $\rightarrow$ žádný Christoffel) a jeho derivaci:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial Z^k} = \nabla_k \vec{V} = \nabla_k (V^i \vec{Z}_i) = (\nabla V^i) \vec{Z}_i \quad 2.93$$

2.18 Laplaceův operátor

Mějme skalární pole F , pak pro něj platí, dle pravidel matematické analýzy, že:

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \quad 2.94$$

Výsledek bude ale zase invariant, a to v tomhle případě není pravda, opět je „háček“ v metrickém tenzoru kartézského souřadného systému. Nyní předložíme k věření vzorec pro Laplacián v obecném souřadném systému. Jeho důkaz je velmi nad rámec této práce.

$$\Delta F = Z^{ij} \nabla_i \nabla_j F \quad 2.95$$

Opravdu pro kartézský souřadný systém platí:

$$Z^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \nabla_j F = \frac{\partial F}{\partial x^j}, \nabla_i \frac{\partial F}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^j \partial x^i} \quad 2.96$$

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

Opravdu vzorec, co jsme předložili k věření, odvodil velmi známý vztah z matematické analýzy.

3. Plochy a jejich tenzorový popis

Doposud jsme vytvářeli nástroj, který jak brzy zjistíme, je velice silný. Nebude třeba již nic definovat ba naopak nově vzniklé věci budou tvořeny tenzorovou algebrou. V této kapitole se budeme zabývat pojmem plocha. Zaměříme se na dvou dimenzionální povrchy v trojrozměrném Euklidovském prostoru. To že jsme se omezili na tuto dimenzi, neznamená, že by tato konstrukce, nešla rozšířit do dimenzí vyšších řádů. Pak už bychom ale mluvili o hyperploše, tedy o diferencovatelném $(n - 1)$ dimenzionálním podprostoru na n dimenzionálním prostoru. Tato hyperplocha může být taky zachycena za pomoci kodimenze, která je rovna jedné. Pro doplnění křivky mají kodimenzi rovnu dvěma. S tímto zavedením se používá označení manifold. V dnešní době tento pojem je ale tento pojem spjat spíše s topologií. Původně, ale manifold je podprostor Euklidovského prostoru, který může být parametrizován, za pomoci hladké funkce na oblasti $\mathbb{R}^m$. Pokud se vrátíme k naší terminologii, tak pokud $m = 1$ jedná se o křivku a pro $m = n - 1$ dostáváme hyperplochu. V této kapitole budeme popisovat povrch za pomoci tečných a normálových prostorů. Tyto plochy existují vždy, když je zaručena hladkost na ploše (vrchol kuželu nemá tečnou rovinu). Tečná rovina bude popsána kovariantní bází a abychom obsáhli celý n rozměrný prostor zavedeme pojem normály $\vec{N}$, která bude jedno rozměrná, a právě obal kovariantní báze a tečného povrchu bude tvořit celý n rozměrný prostor.

3.1 Parametrizace plochy

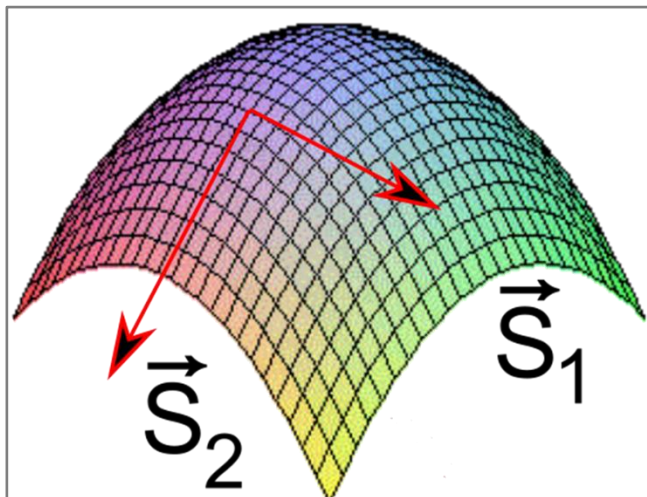
Je mnoho způsobů, jak popsat plochu. My volíme parametrický popis. Pro naši dvou rozměrnou plochu dostaneme dvě proměnné, které označíme S^1 a S^2 neboli S^α . Opět využijeme pozičního vektoru $\vec{R}$, který se nyní stane proměnou těchto dvou parametrů $\vec{R}(S)$. V momentu kdy získáme toto vyjádření dá se hned nasadit konstrukce, kterou jsme již popisovali.

3.2 Základní objekty plochy

Kovariantní báze se definují zcela a analogicky, jako většina objektů, které jsme již popisovali:

$$\vec{S}_\alpha = \frac{\partial \vec{R}}{\partial S^\alpha} \quad 3.1$$

Obal těchto vektorů $\vec{S}_\alpha$ tvoří zcela intuitivní představu tečné roviny. Pro náš případ se tedy jedná o $a\vec{S}_1 + b\vec{S}_2$, $a, b \in \mathbb{R}$. Tato tečná rovina neleží v námi popisované ploše, pokud se nejedná o rovinu.



Obrázky 3-1 Zakřivený povrch a kovariantní báze v jednom bodě

Další objekt, který lze sestavit je jednotková normála $\vec{N}$, která je kolmá k oběma vektorům. Tato interpretace, ale dovoluje sestavit dva tyto vektory, každý s jinou orientací. Některé literatury ihned „lpí“ k jedné z těchto normál. Pro naši konstrukci je ale naprosto jedno, kterou zvolíme. Tato svoboda je zapříčiněná díky obecnosti tenzorové algebry.

$$\begin{aligned} \vec{N} \cdot \vec{S}_\alpha &= 0 \\ \vec{N} \cdot \vec{N} &= 1 \end{aligned} \quad 3.2$$

Kovariantní metrický tenzor $S_{\alpha\beta}$, lze získat z kovariantních bází:

$$S_{\alpha\beta} = \vec{S}_\alpha \cdot \vec{S}_\beta \quad 3.3$$

Kontravariantní metrický tenzor $S^{\alpha\beta}$:

$$S^{\alpha\beta} \cdot S_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha \quad 3.4$$

Opět budeme uvažovat S jako determinant $S_{\alpha\beta}$ a jeho odmocninu jako plošný element. Nový pojem Levi-Civita symboly $\varepsilon_{\alpha\beta}$ definujeme podle předpisu:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \sqrt{S} e_{\alpha\beta} \quad 3.5$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \frac{e^{\alpha\beta}}{\sqrt{S}} \quad 3.6$$

Kde $e_{\alpha\beta}$ je antisymetrický systém s nenulovými prvky $e_{12} = -e_{21} = 1$.

Kontravariantní báze:

$$\overrightarrow{S^\alpha} = S^{\alpha\beta} \cdot \overrightarrow{S_\beta} \quad 3.7$$

Opět lze ověřovat, jestli se jedná o tenzory, ale při kratší rozvaze je to zcela triviální. Jelikož opět můžeme definovat Jacobiho matice pro přechod mezi čárkovaným a nečárkovaným systémem:

A naopak zcela analogicky a pak ověřování, že kovariantní a kontravariantní báze jsou tenzory atd. Jistě je to třeba dokázat, ale je to čistě stejná aplikace Jacobiho matic jako v 2.66.

3.3 Christoffelovy symboly

Jak jsme již definovali tyto symboly zachycují změnu kovariantní báze vzhledem k proměnným. Toto nám říká rovnice, kterou jsme již zmiňovali:

$$\frac{\partial \overrightarrow{Z_i}}{\partial Z^k} = \Gamma_{ik}^j Z_j \quad 3.8$$

Tato definice pro náš systém, ale nebude možná. To z jednoduchého důvodu, pokud bychom rozkládali do S_α zachytávali bychom jenom změnu na tečné rovině, a nikoliv na ploše samotné. Jistě ve speciálních případech by se dal tento předpis použít, ale nelze jej využít jako obecný. Proto si budeme muset pomoci jinou interpretací Christoffelových symbolů, jež jsme zavedli. Přepíšme tedy vztah 2.47 do naší notace.

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \overrightarrow{S^\gamma} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{S_\alpha}}{\partial S^\beta} \quad 3.9$$

Zde už se žádný problém nevyskytuje, jelikož nerozkládáme. I další definice Christoffelových symbolů, za pomoci kovariantního a kontravariantního metrického tenzoru, lze přepsat do naší notace.

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} S^{\gamma\omega} \left(\frac{\partial S_{\omega\beta}}{\partial S^\gamma} + \frac{\partial S_{\omega\gamma}}{\partial S^\beta} - \frac{\partial S_{\beta\alpha}}{\partial S^\omega} \right) \quad 3.10$$

3.4 Křivka na ploše

Jelikož už máme na této ploše opět vykonstruováno dost z tenzorové algebry, můžeme opět zařadit využití. Mějme nějakou křivku na ploše, která je dána parametricky $(S^1(t), S^2(t))$ to jistě existuje a v tenzorové algebře to zapíšeme jako $S^\alpha(t)$. Opět se opřeme o již uvedené 2.34 a přepíšeme jej do naší notace.

$$L = \int_a^b \sqrt{S_{\alpha\beta} \frac{dS^\alpha}{dt} \frac{dS^\beta}{dt}} dt \quad 3.11$$

Tento vztah rozhodně není dokázaný z toho, co jsme uvedli. Je třeba dokázat mnoho věcí, než to prohlásíme jako platný vztah. Nám ale postačí, že tento vztah platí a že byl odvozen. Pro nás má hodnotu v tom, že existuje jistá symetrie mezi vztahem 2.34 a 3.11.

3.5 Kovariantní derivace

Víme, že pokud aplikujeme kovariantní derivaci ∇_α na kovariantní bázi $\vec{S}_\beta$, tak vymizí. Pojdme tuto vlastnost ověřit na ploše.

$$\nabla_\alpha \vec{S}_\beta = \frac{\partial \vec{S}_\beta}{\partial S^\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vec{S}_\gamma \quad 3.12$$

Když jsme si tento vztah odvozovali a dokázali, že je roven nule. Tak jsme využili faktu, že $\partial S_\beta / \partial S^\alpha = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vec{S}_\gamma$ a po dosazení jsme obdrželi kýženou nulu. My ale tuto možnost nemáme. Musíme si pomoci jinak. Skalárně vynásobíme rovnici prvkem $\vec{S}^\omega$:

$$\vec{S}^\omega \cdot \nabla_\alpha \vec{S}_\beta = \vec{S}^\omega \cdot \frac{\partial \vec{S}_\beta}{\partial S^\alpha} - \vec{S}^\omega \cdot \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vec{S}_\gamma \quad 3.13$$

Dále upravíme $\vec{S}^\omega \cdot \vec{S}_\gamma = \delta_\gamma^\omega$ a po využití 3.9. Obdržíme:

$$\vec{S}^\omega \cdot \nabla_\alpha \vec{S}_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}^\omega - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \delta_\gamma^\omega = \vec{0} \quad 3.14$$

Je-li skalární součin $\vec{S}^\omega$ a $\nabla_\alpha \vec{S}_\beta$ roven nule pak jsou na sebe kolmé. Tedy všechny 4 prvky $\nabla_\alpha \vec{S}_\beta$ jsou kolmé na $\vec{S}^\omega$. Připomínáme, že jsme v trojrozměrném prostoru na dvourozměrném manifoldu. Z toho ale může plynout jen jediné, a to že musí být nějakým násobkem jednotkové normály $\vec{N}$:

$$\nabla_\alpha \vec{S}_\beta = \vec{N} B_{\alpha\beta} \quad 3.15$$

Koeficient $B_{\alpha\beta}$ zachycuje právě poměr mezi kovariantní derivací kovariantní báze a jednotkové normály. Jako celek ho nazveme tenzor křivosti. Pro získání explicitního vyjádření $B_{\alpha\beta}$ obě stany skalárně vynásobíme jednotkovým vektorem $\vec{N}$:

$$\vec{N} \cdot \nabla_\alpha \vec{S}_\beta = \vec{N} \cdot \vec{N} B_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} \quad 3.16$$

Díky symetrii skalárního součinu opět $B_{\alpha\beta} = B_{\beta\alpha}$. Dále po „zvednutí“ jednoho indexu a kontrakci tohoto výrazu dostaneme střední křivost B_α^α jedná se o stopu „matice“ B_α^β .

$$B_\alpha^\gamma = S^{\gamma\beta} B_{\beta\alpha}$$

V naší představě dvou rozměrného manifoldu, tedy obdržíme dvě čísla κ_1 a κ_2 , která nazveme hlavními křivostmi povrchu. Pokud bychom se zabývali determinantem B_α^α a jeho vlastními čísly dostali bychom stejně hodnoty pro hlavní křivosti. Definujeme:

$$\begin{aligned} B_\alpha^\alpha &= \kappa_1 + \kappa_2 \\ \det(B_\alpha^*) &= \kappa_1 \kappa_2 \end{aligned} \quad 3.17$$

Metrický tenzor $S_{\alpha\beta}$ bývá často pojmenován jako první základní forma. A tenzor křivosti $B_{\alpha\beta}$ jako druhá základní forma. Existuje i třetí základní forma, která je definovaná jako násobek „matice“ $B_{\alpha\beta}$ sama se sebou. To se hlavně využívá v aplikacích v pojetí geometrickém to, žádnou velkou hodnotu nemá.

3.6 Kovariantní derivace normály

Tento pojem odvodíme ze vztahu 3.2 a následnou aplikací kovariantní derivace ∇_α :

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha(\vec{N} \cdot \vec{N}) &= \nabla_\alpha 1 \\ \nabla_\alpha \vec{N} \cdot \vec{N} &= 0 \end{aligned} \quad 3.18$$

Kde opět narážíme na zvolení orientaci normály, opět si můžeme, ale nemusíme zvolit normálu. Každopádně ať už uděláme tak nebo tak jistě orientace normály nám zaručí změnu nejméně jednoho znaménka v tenzoru křivosti. To jsme odvodili ze vztahu 3.15. Tuto skutečnost ještě zmíníme.

Z 3.18 plyne jedna z nejfundamentálnějších vlastností celého života. Pokud máme jakýkoliv vektor jakkoliv parametrizovaný a zachovávající si svoji délku během času, pak jeho míra změny (derivace) bude vždy kolmá k původnímu vektoru.

Dále jistě platí, že $\nabla_\alpha \vec{N}$ leží jistě v tečné rovině. Z toho plyne, že musí být vyjádřitelná v kovariantních bázích $\vec{S}_\alpha$, jako jejich kombinace. Prozatím od této myšlenky upustíme a podíváme se na druhý vztah z 3.2 a aplikujeme na něj kovariantní derivaci.

$$\begin{aligned} \nabla_\beta(\vec{N} \cdot \vec{S}_\alpha) &= \nabla_\beta 0 \\ \nabla_\beta \vec{N} \cdot \vec{S}_\alpha + \nabla_\beta \vec{S}_\alpha \cdot \vec{N} &= 0 \\ \nabla_\beta \vec{N} \cdot \vec{S}_\alpha + B_{\alpha\beta} &= 0 \\ \nabla_\beta \vec{N} \cdot \vec{S}_\alpha &= -B_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad 3.19$$

Poté, co jsme tento vztah odvodili vrátíme se k naší úvaze o $\nabla_\alpha \vec{N}$. Pokud jde rozložit do kovariantních bází pak koeficient u normály $\vec{N}$ by měl být nula. Ověříme:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \vec{N} &= x_\alpha \vec{N} + y_\alpha^\beta \vec{S}_\beta \\ \nabla_\alpha \vec{N} \cdot \vec{N} &= x_\alpha \vec{N} \cdot \vec{N} + y_\alpha^\beta \vec{S}_\beta \cdot \vec{N} \\ 0 &= x_\alpha \cdot (1) + y_\alpha^\beta \cdot (0) \end{aligned} \quad 3.20$$

Což jsme měli ověřit. Z tohoto vztahu jsme, ale nezjistili hodnotu y_α^β . Proto jsme odvozovali 3.19. Mějme opět výraz $\nabla_\alpha \vec{N}$, ale tentokrát jej „vynásobíme“ kontravariantí bází $\vec{S}^\gamma$:

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha \vec{N} \cdot \vec{S}^\gamma &= x_\alpha \vec{N} \cdot \vec{S}^\gamma + y_\alpha^\beta \vec{S}_\beta \cdot \vec{S}^\gamma \\ \nabla_\alpha \vec{N} \cdot \vec{S}^\gamma &= x_\alpha \cdot (0) + y_\alpha^\beta \cdot \delta_\beta^\gamma \\ \nabla_\alpha \vec{N} \cdot \vec{S}^\gamma &= y_\alpha^\gamma\end{aligned}\tag{3.21}$$

Než uděláme poslední krok je si třeba něco uvědomit, což by pro někoho nemuselo být zcela zřejmé. Nejdříve vztah vynásobíme kontravariantním tenzorem $\vec{S}^\beta$, pak využitím metrického tenzoru $S_{\alpha\beta}$, upravíme podlední část vztahu 3.19. Jak se ale zachová metrický tenzor, to bude ještě třeba přiblížit. Ověříme jak interaguje metrický tenzor $S_{\alpha\beta}$ s kovariantní derivací.

$$\begin{aligned}\nabla_\gamma S_{\alpha\beta} &= \nabla_\gamma (\vec{S}_\alpha \cdot \vec{S}_\beta) = \nabla_\gamma \vec{S}_\alpha \cdot \vec{S}_\beta + \nabla_\gamma \vec{S}_\beta \cdot \vec{S}_\alpha = \\ &= \left(\frac{\partial \vec{S}_\alpha}{\partial S^\gamma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\omega \vec{S}_\omega \right) \cdot \vec{S}_\beta + \left(\frac{\partial \vec{S}_\beta}{\partial S^\gamma} - \Gamma_{\beta\gamma}^\omega \vec{S}_\omega \right) \cdot \vec{S}_\alpha = \\ &= \left(\frac{\partial \vec{S}_\alpha}{\partial S^\gamma} \cdot \vec{S}_\beta - \vec{S}_\beta \cdot \vec{S}_\omega \frac{\partial \vec{S}_\alpha}{\partial S^\gamma} \vec{S}_\omega \right) + \left(\frac{\partial \vec{S}_\beta}{\partial S^\gamma} \cdot \vec{S}_\alpha - \vec{S}_\alpha \cdot \vec{S}_\omega \frac{\partial \vec{S}_\beta}{\partial S^\gamma} \vec{S}_\omega \right) = \\ &= \left(\frac{\partial \vec{S}_\alpha}{\partial S^\gamma} \cdot \vec{S}_\beta - \frac{\partial \vec{S}_\alpha}{\partial S^\gamma} \vec{S}_\beta \right) + \left(\frac{\partial \vec{S}_\beta}{\partial S^\gamma} \cdot \vec{S}_\alpha - \frac{\partial \vec{S}_\beta}{\partial S^\gamma} \vec{S}_\alpha \right) = 0\end{aligned}\tag{3.22}$$

To že se nám podařilo zachytit, jak se zachová metrický tenzor a že je roven nule, je velmi zajímavá skutečnost. Jelikož víme, že kovariantní derivace aplikovaná na kovariantní bázi nedává nulu tak jako v minulé kapitole, ale jejich skalární součin už ano.

Zjištění, že metrický tenzor se „vypaří“ pod kovariantní derivací, nám dává možnost v 3.21 přejít na vztah.

$$\nabla_\alpha \vec{N} \cdot \vec{S}^\gamma = -B_\alpha^\gamma\tag{3.23}$$

Po seskupení 3.21 a 3.23 dostáváme, že koeficient y_α^γ přejde na $-B_\alpha^\gamma$ což vyústí ve vztah:

$$-\nabla_\alpha \vec{N} \cdot \vec{S}^\gamma = B_\alpha^\gamma\tag{3.24}$$

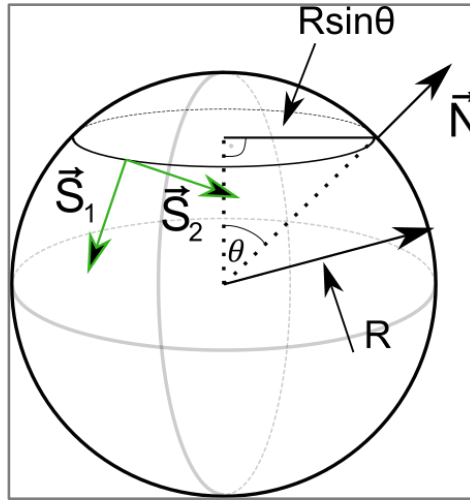
To je další popis tenzoru křivosti. Tento vztah je asi ze všech, co jsme zmiňovali s touto problematikou, díky tomu že normála je invariant, tedy kovariantní derivace přejde na parciální derivace.

Opět zařadíme příklad:

Nechť máme kouli o poloměru R v trojrozměrném prostoru, to bude náš manifold. Tedy povrch dle jisté intuice budeme popisovat za pomoci systému sférických souřadnic, který má proměnné φ a θ , kde φ popisuje přirozeně pohyb po rovnoběžkách a θ pohyb po polednicích.

Z výpočtu parciální derivace pozičního vektoru $\vec{R}$, který je ve středu této sféry, vzhledem k proměnným dostáváme, že velikost $\vec{S}_\varphi$ je rovna $R \sin \theta$ a velikost $\vec{S}_\theta$ je rovna R . S tím, že

orientace je jednoznačně daná dle změny jednotlivých proměnných, z čehož plyne, že jsou navzájem na sebe kolmé. Pro upřesnění máme vizualizaci na obrázku.



Obrázky 3-2 Kovariantní báze na kouli

Metrický tenzor $S_{\alpha\beta}$ lze tedy z těchto údajů dopočítat:

$$S_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad 3.25$$

Ted' už je nasnadě dopočítat $S^{\alpha\beta}$:

$$S^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad 3.26$$

Pro „objemový“ element $\sqrt{S_{**}} = R^2 \sin \theta$. Jelikož se jedná o uzavřený povrch normálu budeme volit, že jde „ven“ z koule.

Abychom mohli dopočítat tenzor křivosti musíme si uvědomit, že kovariantní derivace invariantu přejde pouze na parciální derivaci:

$$B_{\alpha\beta} = \nabla_\beta \vec{N} \cdot \vec{S}_\alpha = \vec{S}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{N}}{\partial S^\beta} \quad 3.27$$

Kovariantní bázi známe, nyní musíme zjistit parciální derivaci jednotkové normály $\vec{N}$, vzhledem k derivacím. Jeho délka bude jistě rovna zase jedné, ale orientace se bude měnit. Pokud budeme uvažovat změnu v souřadnici θ , pak tato změna má stejnou orientaci jako kovariantní báze $\vec{S}_\theta$. Navíc je kolmý s $\vec{S}_\varphi$ a má stejnou orientaci jako má báze $\vec{S}_\theta$. Druhá složka je trochu složitější, ale pokud využijeme znalosti z fyziky, pak tuto normálu rozložíme a budeme zjišťovat změny pro jednotlivé složky. Po krátké úvaze zjistíme, že jeho délka bude $\sin \theta$ a orientace stejná jako $\vec{S}_\varphi$:

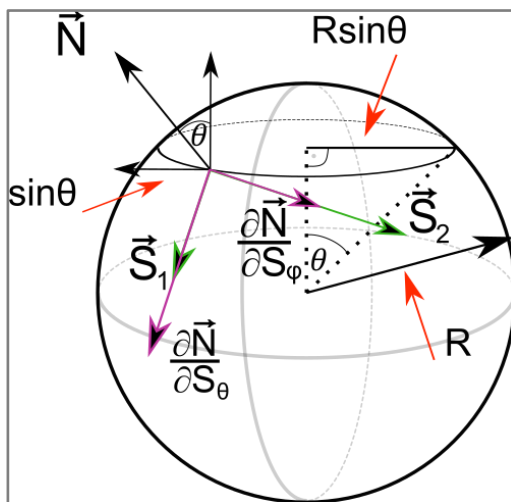
$$B_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & -R \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad 3.28$$

Převědeme na střední křivost $B_\beta^\alpha = S^{\alpha\gamma} B_{\gamma\beta}$ a po kontrakci obdržíme $B_\alpha^\alpha = -2/R$.

Pokud bychom vzali objekt B_β^α a dále uvažovali determinant z něj. Dostali bychom hlavní křivosti a jako celek se tento objekt nazývá Gaussova křivost K :

$$K = \det(B_*^*) = \frac{1}{R^2} \quad 3.29$$

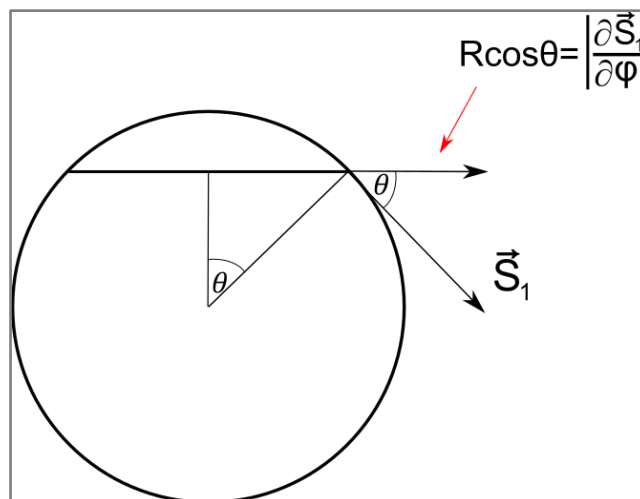
Pro ilustraci opět předkládáme obrázek:



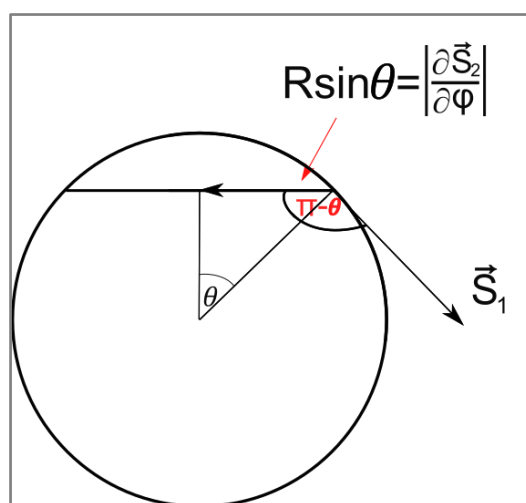
Obrázky 3-3 Koule a parciální derivace normály

Nyní už můžeme dopočítat Christoffelovy symboly dle definice 3.9. Potřebujeme dopočítat změně kovariantní báze $\vec{S}_\alpha$ v závislosti na proměnných S^β . A následně jej skalárně vynásobíme s kontravariantní bází $\vec{S}^\gamma$. Zase nám vzniknou sady Christoffelů:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^\gamma &= 0 \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \cot \theta \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = 0 \\ \Gamma_{22}^2 &= 0 \\ \Gamma_{22}^1 &= -\sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad 3.30$$



Obrázky 3-4 Christoffelovy symboly pomocný náčrt



Obrázky 3-5 Christoffelovy symboly pomocný náčrt

3.7 Částice pohybující se po zakřivené ploše

Dostí podobný problém jsme už řešili v 2.55, tam jsme se ale nacházeli v prostoru, který měl globální souřadný systém. Tento přístup nyní selže, jelikož máme proměnné S^α pouze na zakřivené ploše. Nechť je tedy trajektorie částice závislá na čase t a takto definovaná na ploše:

$$S^\alpha = S^\alpha(t) \quad 3.31$$

Pak za pomoci směrového vektoru $\vec{R}(t)$, lze obdržet vztah pro rychlost $\vec{V}$:

$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{R}(S(t))}{\partial t} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial S^\alpha} \frac{dS^\alpha}{dt} = \vec{S}_\alpha V^\alpha \quad 3.32$$

Nabízí se uvažovat zrychlení $\vec{A}$ jako druhou derivaci pozičního vektoru podle času.

$$\vec{A} = \frac{\partial^2 \vec{R}(S(t))}{\partial t^2} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial (V^\alpha \vec{S}_\alpha)}{\partial t} = \frac{\partial (V^\alpha)}{\partial t} \vec{S}_\alpha + V^\alpha \frac{\partial (\vec{S}_\alpha)}{\partial t} \quad 3.33$$

Pro další krok se budeme muset odvolat na vztahy 3.15 a 3.12.

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= \frac{\partial(V^\alpha)}{\partial t} \vec{S}_\alpha + V^\alpha \frac{\partial \vec{S}_\alpha}{\partial S^\beta} \frac{dS^\beta}{dt} = \frac{\partial(V^\alpha)}{\partial t} \vec{S}_\alpha + V^\alpha V^\beta \frac{\partial \vec{S}_\alpha}{\partial S^\beta} = \\
&= \frac{\partial(V^\alpha)}{\partial t} \vec{S}_\alpha + V^\alpha V^\beta \left(\nabla_\beta \vec{S}_\alpha + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vec{S}_\gamma \right) = \\
&= \frac{\partial(V^\alpha)}{\partial t} \vec{S}_\alpha + V^\alpha V^\beta \nabla_\beta \vec{S}_\alpha + V^\alpha V^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vec{S}_\gamma = \\
&\quad \gamma \rightarrow \alpha, \quad \alpha \rightarrow \gamma \\
&\left(\frac{\partial(V^\alpha)}{\partial t} + V^\alpha V^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \right) \vec{S}_\alpha + V^\alpha V^\beta \vec{N} B_{\alpha\beta} = \vec{A}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Kde $V^\alpha V^\beta \vec{N} B_{\alpha\beta}$ je z fyziky známo jako dostředivé zrychlení.

3.8 Riemann Christoffelův tenzor

Tento pojem jsme mohli zavést už dříve, ale až nyní „oceníme“ jeho krásu. Jedná se o implikování složené kovariantní derivace na kontravariantní tenzor.

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta T^\gamma - \nabla_\beta \nabla_\alpha T^\gamma = R_{\delta\alpha\gamma}^\gamma T^\delta \tag{3.35}$$

Tento vztah po vyčíslení a snížení indexu γ dostáváme:

$$R_{\gamma\delta\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma_{\gamma,\beta\delta}}{\partial S^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{\gamma,\alpha\delta}}{\partial S^\beta} + \Gamma_{\omega,\gamma\beta} \Gamma_{\alpha\delta}^\omega - \Gamma_{\omega,\gamma\alpha} \Gamma_{\beta\delta}^\omega \tag{3.36}$$

Tento vztah, ale pro Euklidovský prostor přejde na nulu tedy všechny koeficienty Riemann Christoffelova tenzoru $R_{\gamma\delta\alpha\beta}$ jsou rovny nule. Z této rovnice taktéž plyne antisymetrie a symetrie v některých prvcích $R_{\gamma\delta\alpha\beta}$.

$$\begin{aligned}
R_{\gamma\delta\alpha\beta} &= -R_{\gamma\delta\beta\alpha} \\
R_{\gamma\delta\alpha\beta} &= -R_{\delta\gamma\alpha\beta} \\
R_{\gamma\delta\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta\gamma\delta}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Pro námi uvažované dvojrozměrné manifoldy, díky těmto vlastnostem, přejde $R_{\gamma\delta\alpha\beta}$ na jedinou rovnici:

$$R_{\gamma\delta\alpha\beta} = R_{1212} e_{\gamma\delta} e_{\alpha\beta} \tag{3.38}$$

S využitím vztahu 3.5 a následným získání invariantu obdržíme Gaussovu křivost vyjádřenou v závislosti na metrickém tenzoru a Riemann Christoffelově tenzoru:

$$K = \frac{R_{1212}}{S} \tag{3.39}$$

Gaussova křivost je jedna z nejzákladnějších vlastností povrchů, ale tento vztah je ještě známý trochu jinak, a to ve vyjádření tenzorů křivosti. Vztah, který nyní popíšeme bývá označován

jako jeden z nejhezčích vztahů v celé diferenciální geometrii a sám Gauss ho pojmenoval Theorema Egregiuma (Pozoruhodný teorém):

$$R_{\gamma\delta\alpha\beta} = B_{\alpha\gamma}B_{\beta\delta} - B_{\beta\gamma}B_{(\alpha\delta)} = K\varepsilon_{\gamma\delta}\varepsilon_{\alpha\beta} \quad 3.40$$

Tento vztah je naprosto fenomenální. Existuje mnoho závěrů z této rovnice. My vybereme jeden. Mějme válec, třeba plechovku, pokud ji zmačkáme tak, že nedojde k deformaci délek na povrchu Riemann Christoffelův tenzor se nezmění. To se rozhodně nedá říct o jednotlivých tenzorech křivosti, které se budou dosti divoce měnit. Jednotlivé křivosti se mezi sebou tedy „přelévají“ tak že Riemann Christoffelův tenzor se nemění. Něco podobného se děje ve fyzice při změně potenciální energie na kinetickou, ty představují jednotlivé tenzory křivosti, ale soustava jako celek zachovává pořád stejný součet těchto energií, což je v naší impretaci Riemann Christoffelův tenzor.

O ploše řekneme, že je rozvinutelná, pokud má stejnou Gaussovu křivost jako rovina. Křivost roviny je $K = 0$. Pokud bychom dopočítali křivosti pro další plochy neboli manifoldy dostali bychom, že kužel a válec mají stejnou křivost. Tyto manifoldy nazveme rozvinutelné.

3.9 Gauss Bonnet Theorem

Tento teorém je důsledek diferenciální geometrie a topologie. Pokud máme uzavřený povrch S , pak celková křivost je definovaná, jako integrál Gaussovy křivosti K . Pak výsledek závisí pouze na počtu děr g , nikoliv na tvaru objektu:

$$\int K dS = 4\pi(1 - g) \quad 3.41$$

Velice pěkný náhled a bližší upřesnění tohoto vztahu lze najít v knize (7) od profesora Normana Wildberga. Jelikož sféra nemá díry, pak integrál je roven 4π . Pro torus je roven 0. Pro torus se dvěma dírami je roven -4π atd.

4. Příklady

Pokud jsme si povšimli tak značná část příkladů, již zazněla během výkladu, jednotlivých kapitol. V této kapitole budeme využívat tenzory a jejich vlastnosti, které jsme si osvojili v předchozích kapitolách. Více příkladu lze najít v knize (8), která je plná příkladů, které využívají jednak tenzorovou algebru anebo alespoň podobný přístup.

4.1 Vedení tepla

V termodynamice je třeba vyjádřit stacionární vedení tepla přes stěnu. Tato stěna může být válcová, sférická nebo rovinná. Z obecné diferenciální rovnice vedení tepla máme (první zákon termodynamiky):

$$\frac{dT}{d\tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{Q}^*}{c\rho} \quad 4.1$$

Tento vztah jsme odvodili pro kartézský souřadný systém. Kde a je teplotní vodivost, $\dot{Q}^*$ vnitřní zdroje, ρ hustota kapaliny, τ jednotka času a c je měrná objemová tepelná kapacita. Vidíme, že tento vztah není invariantní, jelikož je závislý na jednom souřadném systému. Tuto problematiku jsme v této práci už řešili. Vztah napravíme, když dosadíme správnou definici laplaciánu.

$$\frac{dT}{d\tau} = a(Z^{ij}\nabla_i\nabla_j T) + \frac{\dot{Q}^*}{c\rho} \quad 4.2$$

Tento vztah už je invariantní. Z něj dokážeme vypočítat vztah pro jednotlivé souřadné systémy. Pro úplnost lze tento vztah ještě upravit:

$$\frac{dT}{d\tau} = aZ^{ij}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial Z^i \partial Z^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial T}{\partial Z^k}\right) + \frac{\dot{Q}^*}{c\rho} \quad 4.3$$

Z tohoto vztahu nám plyne, že pro daný souřadný systém je třeba znát jeho Christoffelovy symboly a kontravariantní metrický tenzor.

Pro sférický souřadný systém s proměnnými r, θ, φ vzorec 4.3 přejde na:

$$\frac{dT}{d\tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2}\frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin \theta}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}\right) + \frac{\dot{Q}^*}{c\rho} \quad 4.4$$

Pro válcový souřadný systém s proměnnými r, θ, z vzorec přejde na:

$$\frac{dT}{d\tau} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{\dot{Q}^*}{c\rho} \quad 4.5$$

Od kartézského souřadného systému jsme se odráželi, ale lze vidět, že díky tomu, že všechny Christoffelovy symboly jsou pro tento souřadný systém rovny nule, tak by rovnice 4.2 velice snadno přešla do 4.1.

4.2 Hydrostatika nestlačitelné kapaliny

V této části se budeme muset opřít o jisté znalosti z Hydromechaniky. Popis nestlačitelné kapaliny vychází z rovnice pro napětí $\sigma = -P\mathbf{I}$, kde P je hydrostatický tlak. Pokud zavedeme tento předpoklad pak pohybová rovnice:

$$\nabla \cdot \sigma + \rho \mathbf{f} = \rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) \quad 4.6$$

Přejde do velmi jednoduchého vztahu:

$$-\text{grad}(P) + \rho \mathbf{f} = \rho \frac{d\vec{V}}{dt} \quad 4.7$$

Jelikož se pohybujeme v hydrostatice člen $\rho d\vec{V}/dt$ bude vždy nulový. Člen $\mathbf{f}$ popisuje vnější síly na kapalinu. Pokud kapalina setrvává v klidu pak na ni působí jenom gravitace $\mathbf{f} =$

$(0,0,-\vec{g})$. Orientaci souřadného systému intuitivně volíme stejně jako jsme zaváděli v hydromechanice. Další příklad je, když se nádoba s vodou pohybuje konstantním zrychlením $\vec{a}$, pak člen $\vec{f}$ přejde na $\vec{f} = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, -\vec{g})$, kde jsme zrychlení $\vec{a}$ rozložili do dvou směrů, vzhledem k souřadnému systému. Necht' máme tekutinu v obecné nádobě, ta se pohybuje konstantním zrychlením ve směru z jedné z proměnných, pak rovnici 4.7 upravíme na:

$$-\frac{\partial P}{\partial z^i} = \rho f \quad 4.8$$

Po integraci těchto tří rovnic, je zde jeden „živí“ index, dostaneme řešení pro tlak v jakémkoliv bodě tekutiny. Demonstrujme si to na příkladu. Mějme obdélníkovou nádobu a zvolme, že zrychlení $\vec{a}$ působí ve směru proměnné x . Pak dostaneme rovnice:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a, \quad -\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad -\frac{\partial P}{\partial z} = \rho g \quad 4.9$$

Po vyřešení této soustavy zjistíme, že tlak P je závislý pouze na složkách x, z , když navíc prohlásíme tlak na hladině jako referenční P_0 , dostaneme vztah pro výpočet tlaku v jakémkoliv bodě kapaliny.

$$P(x, z) = P_0 - \rho(|\vec{a}|x + |\vec{g}|z) \quad 4.10$$

Navíc z této rovnice lze zjistit rovnici hladiny. Je to takové místo, kde $P(x, z) = P_0$ odtud:

$$z = -\frac{|\vec{a}|}{|\vec{g}|}x \quad 4.11$$

Jedná se o přímku s úhlem klesání $\alpha = \tan^{-1}(|\vec{a}|/|\vec{g}|)$.

4.3 Mechanika kontinua

Při snaze popsat pohybu pevné látky, u nichž se mění vzdálenosti mezi jednotlivými body, se zavádí představa kontinua. Toto lze chápat, že jednotlivým geometrickým bodům přiřazujeme charakteristické veličiny prostředí. Pro popis kontinua jsou zavedeny dva přístupy.

Přístup podle Lagrange popisuje polohu y_j každé částice v čase t vzhledem k proměnným x_i :

$$y_j = y_j(x_i, t) \quad 4.12$$

Pokud se souřadnice mění v závislosti na čase nazveme tuto křivku trajektorii.

Druhý přístup podle Eulera je, že každé částici je předepsaná její rychlost v_i :

$$v_i = v_i(y_j, t) \quad 4.13$$

V tomto přístupu je třeba předpokládat, že rychlost částic v sousedních místech kontinua není příliš rozdílná. Dále je třeba uvažovat jednoznačnost kontinua a že tyto změny jsou spojité i se svými parciálními derivacemi. Pokud je to splněno, tak v každém okamžiku t , lze kontinuum proložit křivkou, která má tečny v každém bodě souhlasné s rychlostmi jednotlivých bodů.

Tyto křivky nazveme proudnicemi. Tyto proudnice lze pro pevný čas t vyjádřit v parametrickém tvaru jako:

$$y_i = y_i(s) \quad 4.14$$

Kde parametr s plyne z diferenciálních rovnic, jelikož víme, že tečny v jednotlivých bodech proudnice odpovídají rychlosti v jednotlivých bodech:

$$\frac{dy_i}{ds} = kv_i \quad 4.15$$

Pro trojrozměrný případ dostaneme soustavu tří diferenciálních rovnic. Navíc jsou-li splněny předpoklady, které jsme uváděli, platí, že každým bodem v okamžiku t prochází pouze jedna proudnice. Uvažujme speciální případy pohybu kontinua.

Translační pohyb je takový pohyb tuhého tělesa, v němž se všechny body kontinua pohybují po stejných, pouze posunutých, trajektoriích. To znamená, že nezáleží na původní poloze částice:

$$y_j = y_j(t) + x_j \quad 4.16$$

Pokud vykonává kontinuum translační pohyb pak je rychlost konstantní, pro všechny body kontinua.

Rotací kolem souřadné osy rozumíme v kartézském souřadném vztahu, takový pohyb, že každý bod koná kruhový pohyb kolem této osy o poloměru R , což je vzdálenost od osy rotace. Pokud bychom volili kartézský souřadný systém pak tato vzdálenost je rovna $R_j = \sqrt{x_{1j}^2 + x_{2j}^2}$. Pokud bychom volili válcový souřadný systém, pak bychom volili osu rotace pro proměnou z a vzdálenost R by se dala jednoduše vyjádřit jako $R_j = r_j$. Držme se nyní představy kartézského souřadného systému, pro tento systém bude tedy platit:

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cos \varphi \\ y_2 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sin \varphi \\ y_3 &= x_3 \end{aligned} \quad 4.17$$

Rychlost částice lze obdržet derivací vztahů 4.17 podle času t :

$$\begin{aligned} v_1 &= -\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sin \varphi = -\frac{d\varphi}{dt} y_2 \\ v_2 &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cos \varphi = \frac{d\varphi}{dt} y_1 \\ v_3 &= 0 \end{aligned} \quad 4.18$$

Pokud provedeme ještě jednu parciální derivaci, tentokrát podle souřadnic obdržíme tenzor:

$$\frac{\partial v_i}{\partial Z^j} \quad 4.19$$

Tento tenzor je skoro vždy nulový kromě případů:

$$\frac{\partial v_2}{\partial y_1} = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial y_2} = -\frac{d\varphi}{dt}, \quad 4.20$$

Jedná se tedy o antisymetrický tenzor. Z toho plyne vlastnost, že výraz 4.21 je vždy roven nule:

$$\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} = 0 \quad 4.21$$

A pro rozdíl tohoto vztahu plyne, že je vždy roven nule kromě výrazu:

$$\frac{\partial v_1}{\partial y_2} - \frac{\partial v_2}{\partial y_1} = -2 \frac{d\varphi}{dt} = -2\omega \quad 4.22$$

Kde jsme derivaci úhlu podle času přeznačili na úhlovou rychlost.

Mechanika kontinua se taktéž snaží zachytit změnu vzdáleností jednotlivých bodů kontinua. Ku příkladu tento jev se snažíme popsat při tahové zkoušce. Abychom zachytili tento jev uvažujme okolí bodu y_j a dále uvažujme rychlostní pole tohohle okolí. Pak dostáváme, že pro malou změnu vzdálenosti dy_j obdržíme rychlost v tomto bodě vztahem:

$$v_i(y_j + dy_j, t) = v_i(y_j, t) + \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy_j \quad 4.23$$

Jistě víme, z předcházejících kapitol, že pokud bereme parciální derivaci z rychlosti podle proměnných obdržíme tenzor druhého řádu. Tento vektor samozřejmě může být rozložen na symetrický a antisymetrický tenzor druhého řádu. Je třeba podotknout, že této vlastnosti, lze využít pouze u tenzorů druhého řádu, více se lze dočíst v knize (6). Po převedení tedy obdržíme vztah, který bývá označován jako první Helmholtzova věta:

$$v_i(y_j + dy_j, t) = v_i(y_j, t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} - \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right) dy_j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right) dy_j \quad 4.24$$

Popíšeme si jednotlivé členy, co v geometrii kontinua popisují. Člen $v_i(y_j, t)$ je námi známa translace kontinua, druhý člen $1/2(\partial v_i/\partial y_j - \partial v_j/\partial y_i)dy_j$ popisuje rychlost rotace kontinua jako celku a poslední člen $1/2(\partial v_i/\partial y_j + \partial v_j/\partial y_i)dy_j$ je při pohledu na kontinuum jako celek roven nule, ale pro malé okolí y_j popisuje právě změnu vzdáleností na tomto okolí. Poslední děj nám tedy popisuje deformační děj, který se děje na okolí jednotlivých bodů kontinua.

Vektor posunutí budeme definovat jako rozdíl polohy bodu y_j v čase Δt a hodnoty x_j , což je poloha bodu na začátku v čase $t = 0$:

$$u_i = y_i - x_i \quad 4.25$$

Pak lze změnu bodu x_i za čas Δt v prostoru kontinua zachytit za pomoci:

$$y_j = x_j + u_j(x_i) \quad 4.26$$

Díky jednoznačnosti, existuje právě jeden bod, který se takto přetransformuje lze psát vztah 4.26 i jako:

$$x_i = y_i - u_i(y_j) \quad 4.27$$

Tento způsob vyjádření je opravdu šikovný, jelikož v sobě zahrnuje veškerý pohyb, který musí částice vykonat, aby se dostala do koncového bodu y_j .

Pro malé okolí bodu x_j , lze psát podle vztahu 4.26, že platí:

$$dy_j = dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i \quad 4.28$$

Pro výpočet velikosti vektoru dx_j námi dobře známí vztah:

$$|dx_j| = \sqrt{Z^{ij} dx_i dx_j} \quad 4.29$$

Na začátku jsme uvažovali kartézský souřadný systém a pro něj Z^{ij} známe a vztah můžeme přepsat na:

$$|dx_j| = \sqrt{dx_j dx_j} \quad 4.30$$

V momentu kdy víme, jak zjistit velikosti je nasnadě zjistit teda deformaci jako rozdíl těchto délek, pro jednodušší počítání budeme brát kvadráty těchto velikostí $dy_j dy_j - dx_j dx_j$. Tento vztah bychom chtěli vyjádřit vzhledem k bodu x_i , musíme tedy druhou část upravit. Pro přepis využijeme vztah 4.28.

$$\begin{aligned} \left(dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} dx_k \right) \left(dx_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_m} dx_m \right) &= \\ &= \left(\delta_j^k + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) dx_k \left(\delta_j^m + \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right) dx_m \end{aligned} \quad 4.31$$

Následná úprava je dosti jednoduchá díky tomu, že již umíme dobře pracovat s indexy a parciálními derivacemi.

$$dy_j dy_j = dx_j dx_j + \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right) dx_k dx_m \quad 4.32$$

Závorku, která se vyskytuje v tomto vztahu 4.32, přeznačíme na $2\varepsilon_{km}$, toto přeznačení jistě bude tenzor druhého řádu, to víme díky dvěma živím indexům, víme že se jedná o tenzor druhého řádu. To, že parciální derivace z vektoru podle jeho proměnných je vektor jsme ověřovali v druhé kapitole. Z pořadí derivace proměnných je ihned viditelná symetrie ε_{km} .

Dále je jisté, že tento tenzor je funkcí proměnných Z^i , což jsou v našem případě kartézské proměnné x_i .

Pokud bychom chtěli vyjádřit tento kvadrát rozdílu velikosti délek vektorů v závislosti na y_j obdrželi bychom analogickým postupem, jiný tenzor, který označíme $\bar{\varepsilon}_{km}$:

$$\bar{\varepsilon}_{km} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_k} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right) \quad 4.33$$

Tyto tenzory, které jsme právě odvodili označujeme v mechanice jako tenzory velkých deformací. Pokud bychom uvažovali malé deformace tyto dva tenzory přijdou o svoji rozdílnost a budou si rovny. Je to možné díky tomu, že pokud uvažujeme malé deformace pak násobek parciálních derivací položíme rovny nule a tenzory velkých křivostí přejdou na tenzory malých křivostí:

$$\bar{e}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = e_{ij} \quad 4.34$$

Jelikož se jedná o jiné tenzory zaslouží si přeznačení. Tedy takto jsme odvodili tenzory malých a velkých deformací.

Závěr

Cílem této práce bylo seznámit se s tenzorovým počtem a zjistit důležitost metrického tenzoru v této struktuře. V první kapitole jsem rozvedl myšlenku, která dosti striktně definovala jednotlivé pojmy, které vedli k precizní definici tensorů a následně celé tensorové algebry. V druhé části jsem se pokoušel seznámit s geometrickou představou této struktury a jak se jednotlivé objekty chovají právě v geometrické interpretaci.

V následující kapitole jsem pak už jenom využíval těchto pojmů a získával jsem velmi zajímavé vztahy a z nich jsem odvozoval vlastnosti různých objektů a jejich geometrický význam v trojrozměrném Euklidovském prostoru. Sice se tato kapitola zajímala jenom tímto prostorem, ale analogicky by se dala převést většina pojmů i na více rozměrné prostory. To by ale zapříčinilo ztrátu intuitivnosti, a tedy i geometrického nadhledu, což by bylo v rozporu se zadáním práce. V závěru kapitoly, která se zabírala plochami, poté co se mi podařilo zachytit Gauss Bonnetův teorém, jsem byl z něj dosti nadšený a dále jsem tento teorém studoval a připojil jsem i v textu knihu, ze které jsem se dozvěděl mnohem více.

Každou geometrickou představu jsem se pokusil vyobrazit na oblázcích, které jsem za tímto účelem vytvořil, abych dopomohl k ilustraci daného problému. Doufám, že vděčný čtenář tuto skutečnost ocení. Taktéž jsem se pokoušel některé vztahy prokázat, abych ukázal, že této struktuře opravdu rozumím. Doufám, že ověření, která jsem poskytnul, přijdou případnému čtenáři vhod.

Bibliografie

1. **Doupovec, Miroslav.** *Diferenciální geometrie a tenzorový počet.* Brno : PC-DIR Real, 1999. ISBN 80-214-1470-7.
2. **Euklid.** *The Elements : Books I-XIII- Complete and Unabridged.* New York City : Barnes & Noble, 2006.
3. **Descartes, R.** *The Geometry.* New York : Dover Publications, 1954.
4. **Grinfeld, Pavel.** *Introduction to Tensor Analysis and the Calculus of Moving surfaces.* New York : Springer Science+Business Media, 2013. ISBN 978-1-4614-7866-9.
5. *Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data.* **Christoffel, E.** Berlin : Annali di Matematica Pura ed Applicata, 1867, Annali di Matematica Pura ed Applicata. ISSN 0373-3114.
6. **Kolář, Ivan.** *Úvod do globální analýzy.* Brno : Masarykova univerzita, 2003. ISBN 80-210-3205-7.
7. **WILDBERGER, Norman John.** *Divine Proportions: Rational trigonometry to universal geometry.* Sydney : Wild Egg, 2005. ISBN 0-9757492-0-X.
8. **FEYNMAN, Richard P., LEIGHTON, Robert B. a SANDS, Matthew.** *The Feynman lectures on Physics, vol. 1.-3. Reading.* Cambridge : CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2008. ISBN-13 978-0-521-87044-3.

Seznam Obrázků

Obrázky 2-1 Konstrukce derivace vektoru $V(\alpha)$	19
Obrázky 2-2 Trojúhelník pro odvození limity	19
Obrázky 2-3 Parametrizace délkou obloukem	22
Obrázky 2-4: Kovariantní báze v kartézském, affiním a polárním - 2D	23
Obrázky 2-5 Kovariantní a kontravariantní báze	26
Obrázky 2-6 Polární souřadnice a báze	26
Obrázky 2-7 Kontravariantní báze – polární souřadnice	29
Obrázky 2-8 Derivace kovariantní báze	30
Obrázky 3-1 Zakřivený povrch a kovariantní báze v jednom bodě	38
Obrázky 3-2 Kovariantní báze na kouli	43
Obrázky 3-3 Koule a parciální derivace normály	44
Obrázky 3-4 Christoffelovy symboly pomocný náčrt	45
Obrázky 3-5 Christoffelovy symboly pomocný náčrt	45