



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

ŠÍŘENÍ TRHLINY V PŘÍMÝCH
PRIZMATICKÝCH PRUTECH

CRACK IN PRISMATIC BARS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Samuel Meňhert

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

BRNO 2017

doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a
biomechaniky

Student: **Samuel Meňhert**

Studijní program: Strojírenství

Studijní obor: Základy strojíního inženýrství

Vedoucí práce: **doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D.**

Akademický rok: 2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

ŠÍŘENÍ TRHLINY V PŘÍMÝCH PRIZMATICKÝCH PRUTECH

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Prut je jeden ze základních prvků, jimiž se zabývá teorie pružnosti a pevnosti. Nedílnou součástí jejich studia je případ jeho poškození trhlinou. Cílem práce bude srovnání klasického přístupu, kdy je součinitel intenzity napětí přibližně vyjádřen pomocí nekonečných rozvojų, a přístupu založeného na tzv. Kienzlerově hypotéze, kdy je součinitel intenzity napětí na čele trhliny vyjádřen v uzavřeném tvaru pomocí hnací síly šířící se trhliny a známých vnitřních účinků v místě porušeného příčného průřezu prutu.

Cíle bakalářské práce:

Seznámení se s tzv. Kienzlerovou hypotézou, kdy je součinitel intenzity napětí na čele trhliny vyjádřen v uzavřeném tvaru pomocí hnací síly šířící se trhliny a známých vnitřních účinků v místě porušeného příčného průřezu prutu.

Srovnání klasického přístupu, kdy je součinitel intenzity napětí přibližně vyjádřen pomocí nekonečných rozvojų.

Seznam literatury:

Janíček, P., Ondáček, E., Vrbka, J., Mechanika těles - pružnost a pevnost II, 1. vydání, Praha, SNTL, 1987, skripta.

Lia Y., Fantuzzi, N., Tornabene, F., On mixed mode crack initiation and direction in shafts: Strain energy density factor and maximum tangential stress criteria, Engineering Fracture Mechanics, 109, 2013, 273–289.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L.S.

.....
prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.

.....
doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.

ředitel ústavu

děkan fakulty

Abstrakt

Táto práca sa venuje sumarizácii poznatkov o lomovej mechanike , predovšetkým metódam na stanovenie súčiniteľov intenzity napätia, ktoré sú dôležitou súčasťou určenia chovania trhlín v inžinierskej praxi. Cieľom tejto práce bude zoznámenie sa s tzv. *Kienzlerovou hypotézou*, v ktorej je súčiniteľ intenzity napätia vyjadrený pomocou hnacej sily trhliny a známych vnútorných účinkov v mieste porušenia priečneho prierezu a porovnanie s klasickou metódou tzv. *K-koncepciou*, kde je súčiniteľ intenzity napätia vyjadrený pomocou nekonečných rozvojev.

Abstract

This thesis deals with summarization of information about fracture mechanics mainly with methods which estimate stress intensity factors. They play an important role in determination of behavior of cracks in engineering process. The main goal of this thesis will be familiarization with *Kienzler hypothesis* which deals with strain energy release rate and internal effects in a point of disrupted cross section and comparison with classic K-concept, when the stress intensity factors are determined by infinite series.

Kľúčové slová

Lomová mechanika, Trhlina, Súčiniteľ intenzity napätia, K-koncepcia, Kienzlerova hypotéza

Key words

Fracture mechanics, Crack, Stress intensity factor, K-concept, Kienzler hypothesis

Bibliografická citácia

MENŠHERT, S. *Šíření trhliny v přímých prizmatických prutech*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 33 s. Vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Tomáš Profant, Ph.D..

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že som bakalársku prácu na téma „*Šíření trhliny v přímých prizmatických prutech*“ vypracoval samostatne s použitím odbornej literatúry a prameňov uvedených v zozname použitých zdrojov.

V Brne dňa 26.5.2017

.....

Samuel Meňhart

Pod'akovanie

Ďakujem pánovi doc. Ing. Tomášovi Profantovi, Ph.D. za cenné rady a odbornú pomoc pri vedení mojej bakalárskej práce.

OBSAH

1.Úvod	9
3.Lineárne-elastická lomová mechanika	11
3.1 K-koncepcia	12
3.2 Koncepcia energetickej bilancie	16
3.3 Vzťah medzi veličinami K a G	17
3.4 SEDF-kritérium	18
3.5 J-integrál.....	19
4. Kienzlerova hypotéza	20
4.1 Faktory intenzity napätia	21
4.2Prút zaťažený ťahovou silou N	23
4.3Prút zaťažený ohybovým momentom M	24
5.Praktická časť	24
5.1 Výpočet K-koncepciou.....	25
5.2Výpočet Kienzlerovou hypotézou	26
6.Záver.....	29

1.Úvod

Trhlina je defekt materiálu, který je neodlučitelnou součástíou většiny konstrukcií v každém odvětví průmyslu. Svojím vrubovým účinkem působí jako koncentrátor napětí a je s nimi spojené nebezpečí ich šíření a následného lomu součásti. Kvůli možnostem určení velikostí napětí a podmínkám šíření trhlin byla založena vedná disciplína pomenovaná jako lomová mechanika. Táto veda dokáže pomocou jedného alebo viacerých parametrov popísať napätosť na čele trhliny. Porušovanie telies vplyvom trhlín vzniká za statických podmienok zaťažovania alebo pri premennom zaťažovaní napríklad cyklickým namáhaním.

V minulosti bolo zaznamenaných množstvo prípadov, ktoré podmienili rozvoj tejto vedy. Jedným z prvých ľudí, ktorý sa zaoberal možnosťami kvantifikovať podmienky v trhlíne bol A. A. Griffith, ktorý je považovaný za jedného z priekopníkov lomovej mechaniky. Jeho štúdie zaoberajúce sa šírením a vznikom trhlín za pomoci globálneho energetického princípu upozornili väčšinu konštruktérov na nebezpečie, ktoré z toho vzniká. Na základe jeho prínosu bolo zlepšených mnoho konštrukcií v rôznych odvetviach průmyslu.

Veľkým prelomom v lomovej mechanike bola druhá svetová vojna a konkrétne lode Liberty (obrázok 1), ktoré boli zostrojené pre prepravu zásob na podporu Anglicka cez Atlantický oceán. Pri výrobe lodí boli prvý krát použité zvarové spoje, ktoré boli počas vojny vysoko efektívne kvôli rýchlej výrobe veľkého množstva kusov. Zvary umožňovali ľahší prechod trhlín, ktoré boli schopné prejsť väčšiu vzdialenosť a tým spôsobiť lom lode. Avšak lom bol primárne zapríčinený druhom ocele, ktorá vykazovala tranzitné chovanie. Nízka teplota Atlantického oceánu spôsobila prechod zo stavu húževnatého na stav krehký a tým poskytla trhlinám lepšie podmienky pre ich iniciáciu a ďalší rast.



Obrázok 1 : Poškodená loď Liberty na následky krehkého lomu

Kvôli stále zväčšujúcim sa požiadavkám na zlepšenie vlastností materiálov museli strojní inžinieri vyvíjať nové mechanizmy a postupy pri výrobe a spracovaní materiálov. Griffithova teória začala byť pre tieto materiály horšie použiteľná. V roku 1957 G. R. Irwin priniesol zlepšenie jeho popisu z globálneho na lokálny. Zaviedol nový parameter faktor intenzity napätia, ktorý dokázal popísať napätosť v okolí trhliny.

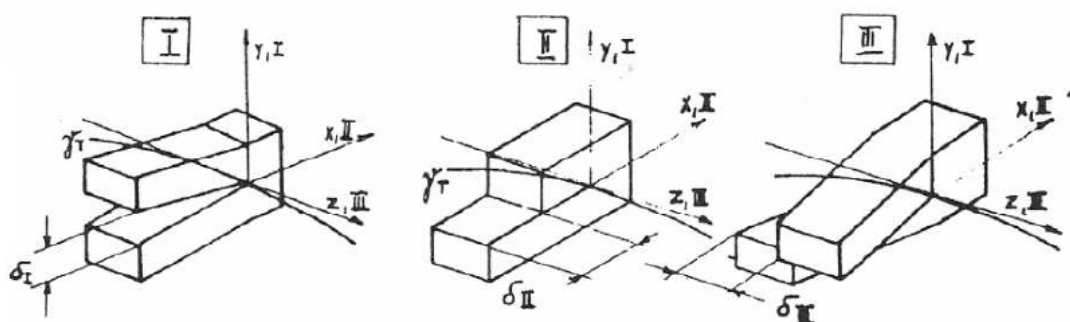
Pre veľké požiadavky leteckého priemyslu na pevnosť materiálu pri ponechaní čo najmensej hmotnosti hrala lomová mechanika v tomto odvetví veľkú rolu. V histórii poznáme mnoho prípadov havárii lietadiel zapríčinené trhlinami zaťažnými cyklickým namáhaním. Vtedajšie znalosti tohto odboru neumožňovali výpočet kritickej dĺžky trhliny, pri ktorej sa stabilné šírenie trhliny zmenilo na nestabilné a nastal lom. Prítomnosti trhlín sa ani v dnešnej dobre nejde vyhnúť, ale je možné nadimenzovať strojné súčasti tak, aby sa šírenie trhlín iniciovalo v smere, ktorý nepredstavuje veľké nebezpečenstvo, respektíve je trhlina pri kontrole objavená ešte skôr ako by došlo k havárii.

Lomovú mechaniku delíme na lineárne-elastickú a elasticko-plastickú. Pri lineárne-elastickej lomovej mechanike je vzťah medzi napätím a deformáciou lineárny, pričom veľkosť plastickej oblasti na čele trhliny je malá (do 2% hrúbky materiálu). Elasticko-plastická lomová mechanika slúži k popisu chovania materiálu, pri ktorom došlo pred porušením k časovo nezávislej plastickej deformácii.

2. Základné případy telesa s trhlinou

Zařazení trhliny boli obecně rozdělené do troch základných typov, tzv. módov zařazení, podľa ktorých charakterizujeme napätie a deformáciu na čele trhliny[1]:

- I. Mód I (normálový mód) – dva povrchy v okolí trhliny sa posunú iba v smere $y(u_y)$, pohybujú sa symetricky vzhľadom k nedeformovanej rovine.
- II. Mód II (šmykový mód) – dva povrchy v okolí trhliny sa posunú iba v smere $x(u_x)$, sklúzu sa voči sebe pozdĺž smerov kolmých ku priamke tvoriacej čelo trhliny, ale v tej istej nedeformovanej rovine.
- III. Mód III (antirovinný mód) – dva povrchy v okolí trhliny sa posunú iba v smere $z(u_z)$, odpútavajú sa od seba v smeroch rovnobežných ku priamke tvoriacej čelo trhliny, ale v tej istej nedeformovanej rovine.



Obrázok 2 : Módy lokálneho zaťaženia v oblasti trhliny[2]

Pri procese zaťažovania trhlín sa dá nahradiť akékoľvek zaťaženie telesa superpozíciou všetkých troch módov.

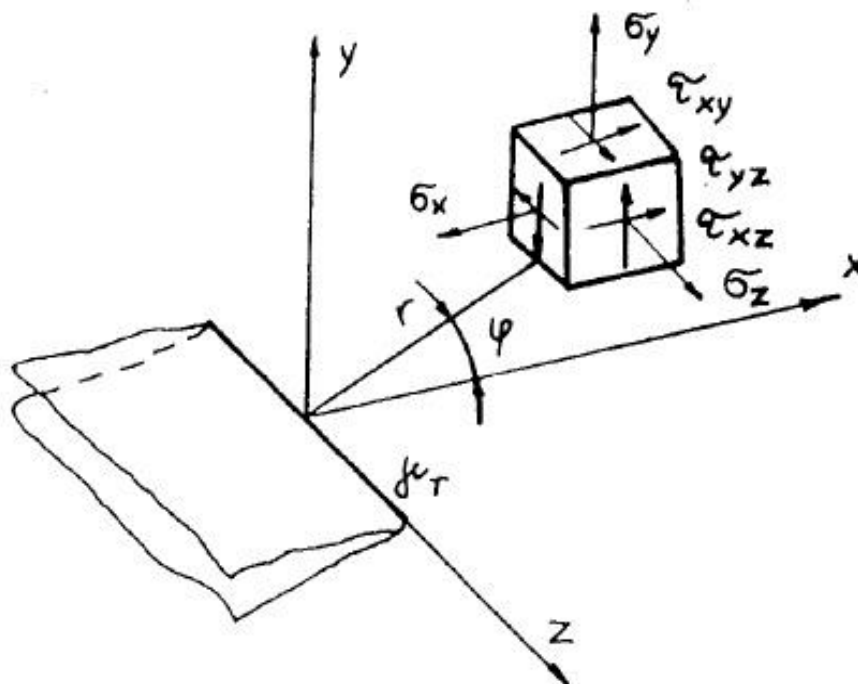
3. Lineárne-elastická lomová mechanika

Koncept lomovej mechaniky, ktorá bola vyvíjaná do roku 1960 je aplikovateľná iba na materiáli, ktoré podliehajú Hookovmu zákonu navzdory tomu, že v roku 1948 prebehli menšie korekcie pre malú plasticitu. Tieto analýzy boli však smerované pre štruktúry, ktoré vykazovali globálne lineárne-elastické správanie. Po roku 1960 boli tieto teórie vylepšené, aby boli použiteľné pre rôzne druhy nelineárne chovajúcich sa materiálov. No všetky nové teórie boli len rozšírením pôvodnej lineárne-elastickej mechaniky a práve preto je jej porozumenie esenciálne pre komplikovanejšie problémy lomovej mechaniky.

V lineárne-elastickej lomovej mechanike je väčšina rovníc stanovená pre rovinnú deformáciu alebo rovinnú napätosť súvisiac s tromi módmi zaťažovania telesa s trhlinou. Táto teória je zároveň založená na elastickej mechanike kontinua, pri ktorej musí platiť malá veľkosť plastickej zóny v okolí čela trhliny, s čím súvisí aj nutnosť telesa vykazovať elastické chovanie. Ak nie sú splnené zmienené podmienky, nasleduje nutnosť použitia elasticko-plastickej lomovej mechaniky [1].

3.1 K-koncepcia

Táto koncepcia vychádza zo stanovenia faktorov intenzity napätia a príslušných napätí s využitím nekonečnej rady tzv. Williamsovo rozvoju. Pre stanovenie medzného stavu šírenia trhliny sa následne porovná faktor intenzity napätia s materiálovou charakteristikou, ktorá sa volá lomová húževnatosť.



Obrázok 3: Súradnicový systém s počiatkom v čele trhliny[2]

Pri zredukovaní úlohy z trojrozmernej na rovinnú s použitím kartézskych súradníc uvedených na obrázku (3) sa dajú zložky tenzoru napätia vyjadriť pomocou Airyho funkcie nasledovne [3]:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad (3.1)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad (3.2)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad (3.3)$$

Pre splnenie rovníc kompatibility a rovnováhy, musí byť hľadaná funkcia F biharmonická v tvare [3]:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2 \partial y^2} = \nabla^2 \nabla^2 F = 0. \quad (3.4)$$

Riešenie hľadáme v tvare nekonečnej rady:

$$F(r, \varphi) = \sum_k A_k r^{x_k} f_k(\varphi). \quad (3.5)$$

Po zavedení okrajových podmienok pre $\varphi = \pm \pi$ dostávame $\sigma_{r\varphi} = 0$ a $\sigma_{\varphi\varphi} = 0$ čím je výraz pre napätie v tvare nekonečnej rady známej ako Williamsov rozvoj [3]:

$$\sigma_{ij} = \frac{A_1}{\sqrt{r}} f_{ij}^{(1)}(\varphi) + A_2 f_{ij}^{(2)}(\varphi) + A_3 f_{ij}^{(3)}(\varphi) \sqrt{r} + \dots \quad (3.6)$$

pre oblasť v blízkosti koreňa trhliny kde $r \rightarrow 0$ platí:

$$\sigma_{ij} = \frac{A_1}{\sqrt{r}} f_{ij}^{(1)}(\varphi) + A_2 f_{ij}^{(2)}(\varphi). \quad (3.7)$$

Ak vezmeme do úvahy iba prvý člen, tak pomocou faktorov intenzity napätia K dokážeme definovať napätia pre jednotlivé módy zaťaženia [3]:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(I)} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(I)}(\varphi), \quad (3.8)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(II)} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(II)}(\varphi), \quad (3.9)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_{ij}^{(III)} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{(III)}(\varphi), \quad (3.10)$$

Rozdelenie posuvov v malom okolí čela trhliny dokážeme pre rôzne záťažové módy za pomoci faktorov intenzity napätia zapísať nasledovne [3]:

$$u_i^I = \frac{2K_I(1+\mu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i(\varphi, \mu), \quad (3.11)$$

$$u_i^{II} = \frac{2K_{II}(1+\mu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i(\varphi, \mu), \quad (3.12)$$

$$u_i^{III} = \frac{2K_{III}(1+\mu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} g_i(\varphi, \mu), \quad (3.13)$$

kde μ je Poissonovo číslo a E je Youngov modul pružnosti. Hodnoty funkcií f a g sú vyjadrené v tabuľke (1).

Pre kombináciu jednotlivých módov dostaneme vzťah zložený superpozíciou jednotlivých napätí:

$$\sigma_{ij}^{celkové} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II} + \sigma_{ij}^{III}. \quad (3.14)$$

Faktor intenzity napätia popisuje amplitúdu singularity v čele trhliny, čo znamená, že napätia v blízkosti čela trhliny sa zväčšujú na základe veľkosti K . Tento faktor úplne definuje podmienky v čele trhliny. Po určení faktoru intenzity napätia je možné vypočítať všetky zložky napätí, deformácií a posuvov ako funkcie r a φ . Popis podmienok v čele trhliny na základe faktoru intenzity napätia sa stal jedným z najvýznamnejších a najpoužívanějších koncepcií v rámci lomovej mechaniky.

Funkcia	I	II	III
f_x	$\cos \frac{\varphi}{2} \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right)$	$-\sin \frac{\varphi}{2} \left(2 + \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} \right)$	0
f_y	$\cos \frac{\varphi}{2} \left(1 + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right)$	$\sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2}$	0
f_{xy}	$\sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2}$	$\cos \frac{\varphi}{2} \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right)$	0
g_u	$\cos \frac{\varphi}{2} \left(1 - 2\mu + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)$	$\sin \frac{\varphi}{2} \left(2 - 2\mu + \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right)$	0
g_v	$\sin \frac{\varphi}{2} \left(2 - 2\mu - \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right)$	$\cos \frac{\varphi}{2} \left(-1 + 2\mu - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)$	0
g_w	0	0	$\sin \frac{\varphi}{2}$
f_{xz}	0	0	$-\sin \frac{\varphi}{2}$
f_{yz}	0	0	$\cos \frac{\varphi}{2}$

Tabuľka 1 : Funkcie pre normálové a smykové napätia pre rôzne typy záťažových módov[2]

Lineárne elastická lomová mechanika predpokladá, že materiál je elasticky zaťažený respektíve plastická deformácia je zanedbateľná. Z rovníc napätí je vidno, že v miestach kde $r \rightarrow 0$ môžu byť napätia veľmi vysoké. Materiály ako kovy a plasty nie sú schopné preniesť také veľké napätia a v okolí čela trhliny vzniká relaxácia napätia čo podmieňuje vznik plastickej zóny. Plastická zóna musí byť malá vzhľadom na dĺžku trhliny $r_y \ll a$.

Pri uvažovaní podmienok rovinnej napätosti (iba dve napätia) a zaťaženií módom I, pričom v rovine trhliny kde $\varphi=0$ je priebeh napätia daný rovnicami [1]:

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}. \quad (3.15)$$

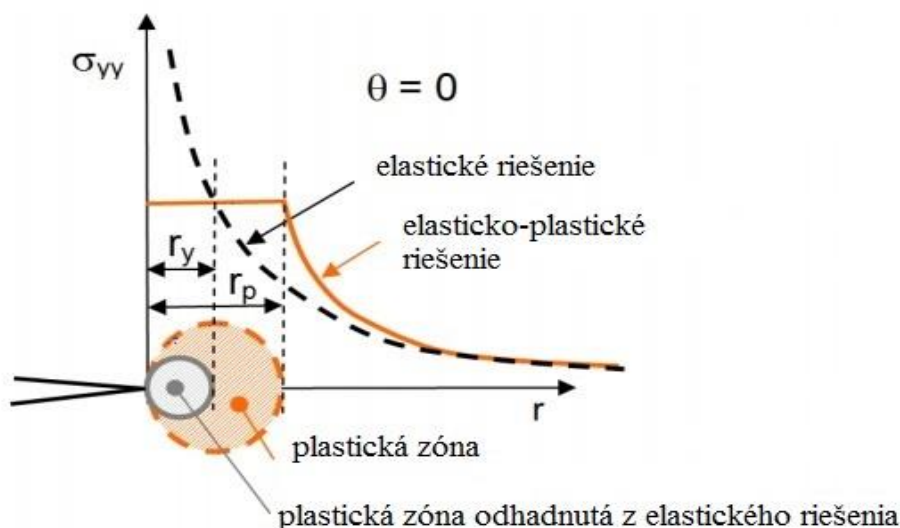
Pri predpoklade, že k vzniku plastickej deformácie dôjde v okolí čela trhliny až do miesta, kde sa napätie rovná medzi klzu R_e , bude polomer plastickej oblasti daný vzťahom [1]:

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{R_e} \right)^2. \quad (3.16)$$

V případě podmínek rovinnej deformácie je plastická deformácia potlačená trojosím stavom napätosti. Rozmer plastickej zóny je približne tri-krát menší ako pri podmienkach rovinnej napätosti [1]:

$$r_y = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{K_I}{R_e} \right)^2. \quad (3.17)$$

Avšak odhad plastickej zóny nie je úplne správny, pretože uvažujeme iba elastické rozdelenie napätí pred čelom trhliny. V skutočnosti nastane prerozdelenie napätí vplyvom plastifikácie materiálu čím vzrastie veľkosť plastickej zóny:



Obrázok 4 : Veľkosť plastickej zóny v okolí čela trhliny[9]

Väčšina konfigurácií *K-koncepcie* vychádza z riešenia trhliny, ktorá je jednoduchého tvaru napríklad obdĺžnika alebo elipsy v nekonečne dlhej doske. Riešenie vychádza z predpokladu, že veľkosť trhliny je malá v porovnaní s dĺžkou telesa. Keď dĺžka trhliny dosiahne veľkosť rádoovo prislúchajúcu rozmerom telesa, faktory intenzity napätia začnú byť ovplyvnené rozmermi telesa.

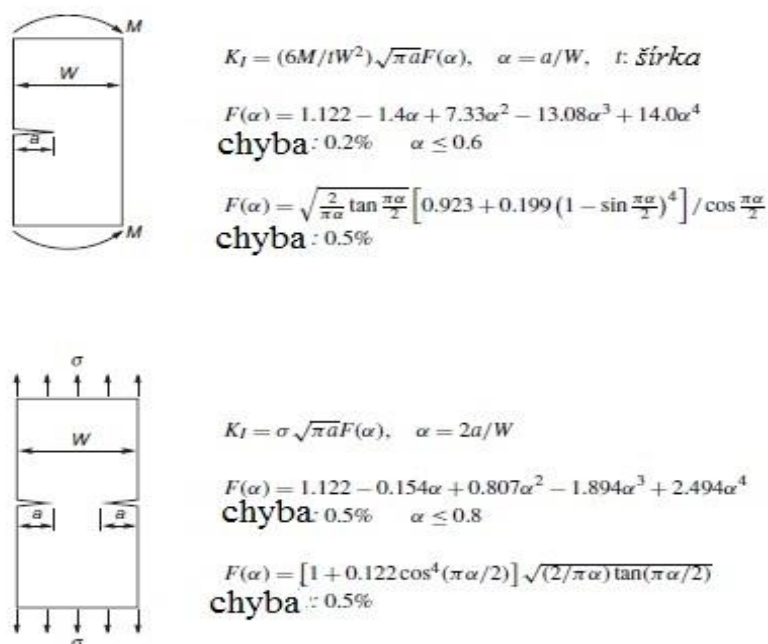
Pri predpoklade trhliny, ktorá sa nachádza v strede telesa, ktoré je zaťažované ťahom s výškou telesa $2H$ a šírkou $2b$ s dĺžkou trhliny $2a$ sa dá vo všeobecnosti zapísať vzťah pre faktor intenzity napätia pre mód *I* nasledovne [1]:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F \left(\frac{a}{b}, \frac{a}{H} \right), \quad (3.18)$$

kde F je bezrozmerná funkcia závislá na pomeroch a/b a a/H . Ak je $H \gg b$ doska môže byť považovaná za nekonečne dlhú a parameter a/H môže byť vynechaný z rovnice (3.18). Pre $F(a/b)$ boli odvodené niektoré empirické vzťahy Irwinom [1]. Jedným z nich je vzťah, ktorý má tvar:

$$F \left(\frac{a}{b} \right) = 1.122 - 1.4 \left(\frac{a}{b} \right) + 7.33 \left(\frac{a}{b} \right)^2 - 13.08 \left(\frac{a}{b} \right)^3 + 14 \left(\frac{a}{b} \right)^4. \quad (3.19)$$

Relatívna odchýlka medzi Irwinovou [6] interpretáciou a numerickým riešením je menej ako 0.5% ak $a/b \leq 0.7$. Niektoré typy zaťaženia s použitou geometriou sú ukázané na obrázku (5).



Obrázok 5 : Vzťahy funkcie F pre rôzne typy zaťaženia geometrie telesa[1]

Pre stanovenie charakteru správania trhliny určujeme medzný stav šírenia trhliny. Veličina, ktorá charakterizuje tento medzný stav sa nazýva lomová húževnatosť K_{IC} . Táto charakteristika je takzvanou kritickou hodnotou faktoru intenzity napätia a stanovuje sa experimentálne pomocou skúšania vzorky materiálu, ktorý má predpísanú geometriu a je opatrený vrubom ukončený únavovou trhlinou. Vzorka je následne zaťažená trojbodovým ohybom alebo excentrickým ťahom.

Trhlina sa začne šíriť, keď hodnota faktoru intenzity napätia nadobudne hodnotu lomovej húževnatosti K_{IC} :

$$K_I = K_{IC}. \quad (3.20)$$

3.2 Konceptia energetickej bilancie

Jednou z ďalších koncepcii lomovej mechaniky, ktorá sa zaoberá šírením trhlín, je koncepcia popisujúca energetickú bilanciu v telese. Na základe prvého zákona termomechaniky je známe, že keď sa sústava, ktorá je v nerovnovážnej forme chce dostať do stavu rovnovážneho musí nastať pokles celkovej energie. V roku 1920 tento zákon aplikoval *Griffith* [6] na vytváranie trhlín.

Trhliny môžu vznikať alebo sa šíriť iba vtedy, keď tento proces spôsobí, že celková energia v systéme zostane konštantná alebo nastane jej pokles. Pri uvažovaní nekonečnej steny s konštantným napätím, v ktorej je trhlina s dĺžkou $2a$ a práca spojená s prírastkom lomovej plochy dA bude uhradená elastickou energiou v okolí rastúcej trhliny, potom *Griffithova energetická bilancia* bude mať tvar [3]:

$$\frac{dW}{dA} = \frac{dW_{el}}{dA} + \frac{dW_s}{dA} = 0, \quad (3.21)$$

kde W je celková energie v systému, W_{el} je elastická energie akumulovaná v systému a W_s je práce spojená s vytvorením nových povrchov.

V prípade , že práca spojená so vznikom trhliny je vykonaná elastickou energiou naakumulovanou v systéme , potom:

$$-\frac{dW_{el}}{dA} = \frac{dW_s}{dA}. \quad (3.22)$$

Neskôr bol tento model upravený tak, aby bol použiteľný pri riešení problémov v technickej praxi. Bola zavedená nová veličina G , ktorá popisovala rýchlosť uvoľňovania energie , ktorá predstavuje energiu potrebnú pre veľmi malý prírastok trhliny [3]:

$$G = -\frac{dW_{el}}{dA}. \quad (3.23)$$

Táto veličina je chápaná ako rýchlosť zmeny potenciálnej energie sústavy v závislosti na raste lomovej plochy. Pretože je G získané deriváciou energie a tým má význam sily, dostala názov hnacia sila trhliny. Táto veličina môže byť zapísaná aj v tvare:

$$G = \frac{\pi \sigma^2 a}{E}. \quad (3.24)$$

Druhá strana rovnice (3.23) vyjadruje podmienku, kedy nastane iniciácia šírenia trhliny v telese a teda pri istej kritickej hodnote [3]:

$$G_c = \frac{dW_s}{dA} = 2w_f. \quad (3.25)$$

Veličina G_c je merateľná a nazýva sa húževnatosť materiálu a w_f je energia spotrebovaná pri tvorbe novej plochy.

K iniciácii trhliny určite dôjde, keď hodnota hnacej sily trhliny dosiahne hodnoty dvojnásobku energie $2w_f$, no nasledujúci rast trhliny môže byť:

- Stabilný- trhlina sa nešíri ak nerastie zaťažujúca sila
- Nestabilný- trhlina sa šíri samovoľne, bez nutnosti ďalšieho zaťaženia

Tieto prípady nastanú v závislosti od toho, ako sa veličiny G a $2w_f$ menia na dĺžke trhliny.

3.3 Vzťah medzi veličinami K a G

V tejto práci boli doposiaľ predstavené dva parametre opisujúce chovanie trhlín. Faktor intenzity napätia, ktorý popisuje napätia a posuvy v blízkosti čela trhliny a teda charakterizujú lokálne vlastnosti. Hnacia sila trhliny naopak popisuje zmenu energie napätosti z globálneho hľadiska. Tieto veličiny sú pri lineárne elasticom chovaní v jednoznačnom vzťahu a dajú sa zameniť. Pri vyjadrení napätí z rovníc (3.15) a (3.24) dostávame vzťah:

$$G = \frac{K_I^2}{E'}, \quad (3.26)$$

pričom platí, že pre rovinnú napätosť má E' hodnotu *Youngovho modelu pružnosti* a pre rovinnú deformáciu platí vzťah [3]:

$$E' = \frac{E}{1-\mu^2}. \quad (3.27)$$

Keďže je hnacia sila trhliny energetická veličina, pri prítomnosti všetkých troch módov zaťaženia má ich vzťah nasledovný tvar:

$$G = \frac{K_I^2}{E'} + \frac{K_{II}^2}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2\mu}. \quad (3.28)$$

3.4 SEDF-kritérium

Ďalším kritériom lineárne-elastickej lomovej mechaniky je kritérium minimálnej mernej energie napätosti (*Minimum elastic strain energy density*). Táto teória bola vyvinutá Sihom[7] a poskytuje lepšie zaobchádzanie s problémami lomovej mechaniky kvôli jej schopnosti popisu poškodenia materiálu a poradenie si s kombinovaným módom namáhania trhlín v telese. Najväčšou výhodou tohto kritéria je jeho ľahkosť a jednoduchosť ako aj schopnosť poradiť si množstvom rôznych kombinácií zaťaženia telesa. Naopak nevýhodou je jeho zložitá fyzikálna interpretácia, hlavne v prípadoch nehomogénnych materiálov.

Základom tohto kritéria je parameter nazvaný faktor mernej energie napätosti S , ktorý môže byť vyjadrený za pomoci faktorov intenzity napätia pre všetky módy pre lineárnu elasticitu ako [7]:

$$S = a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_IK_{II} + a_{22}K_{II}^2 + a_{33}K_{III}^2, \quad (3.29)$$

kde a_{ij} sú doplnujúce funkcie, ktoré závisia na elastických vlastnostiach materiálu, modulu elasticity, Poissonovom čísle μ a modulu v strihu ν a polárnej súradnici φ a dajú sa zapísať nasledovne [7]:

$$a_{11} = \frac{1}{16\pi\nu} [(3 - 4\mu - \cos \varphi)(1 + \cos \varphi)], \quad (3.30)$$

$$a_{12} = \frac{1}{16\pi\nu} 2 \sin \varphi [\cos \varphi - (1 - 2\mu)], \quad (3.31)$$

$$a_{22} = \frac{1}{16\pi\nu} [4(1 - \mu)(1 - \cos \varphi) + (1 + \cos \varphi)(3 \cos \varphi - 1)], \quad (3.32)$$

$$a_{33} = \frac{1}{4\pi\nu}. \quad (3.33)$$

Aplikáciou tohto kritéria je možná predikcia iniciácie trhliny a určenie smeru na základe dvoch hypotéz [7]:

1. Iniciácia šírenia trhliny nastane keď faktor mernej energie napätosti dosiahne kritickú hodnotu pre $\varphi = \varphi_0$:

$$S_c = S. \quad (3.34)$$

Parameter S_c závisí iba na materiáli pričom existuje priama relácia medzi ním a lomovou húževnatosťou:

$$S_c = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2\pi E} K_{IC}^2. \quad (3.35)$$

2. Iniciácia trhliny začne v smere maximálnej mernej potenciálnej energie alebo minimálnej mernej energie napätosti:

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0 \text{ a } \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2} > 0. \quad (3.36)$$

3.5 J-integrál

Krivkový J-integrál mal veľký úspech ako parameter, ktorý charakterizoval lom materiálu u ktorého je závislosť napätia a deformácie nelineárna. Idealizáciou elasticko-plastickej deformácie položil Rice [8] základy k rozšíreniu metodológie lomovej mechaniky za hranice platnosti lineárne-elastickej mechaniky.

J-integrál je zovšeobecnením hnacej sily trhliny a je použiteľný aj v prípadoch väčšej plastickej deformácie. Vzťah, ktorý popisuje uvoľňovanie elastickej energie v telese s trhlinou má teda tvar:

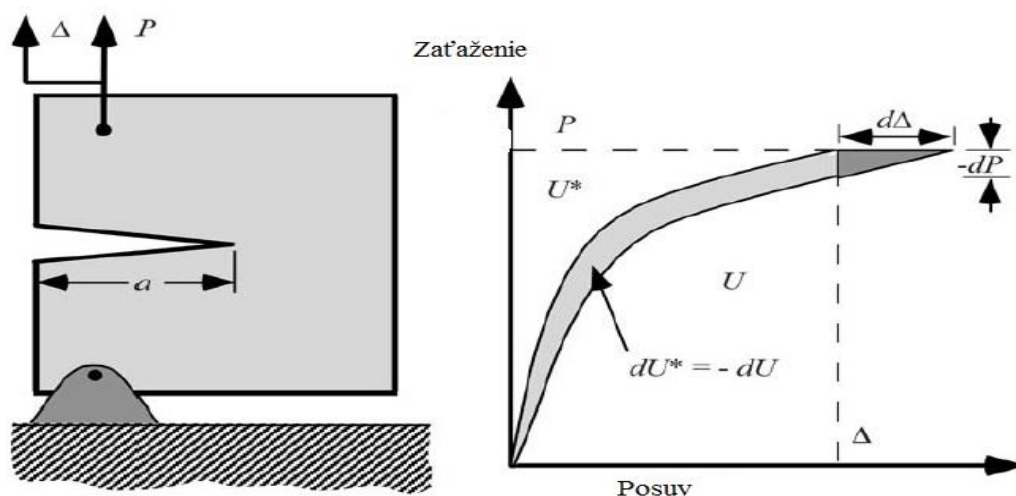
$$J = -\frac{d\Pi}{dA}, \quad (3.37)$$

kde Π je potenciálna energia trhliny a A je plocha, ktorú zaujme trhlina v telese. Potenciálnu energiu je vyjadrená ako rozdiel deformačnej energie uložennej v telese a práce vonkajších síl:

$$\Pi = U - F^*. \quad (3.38)$$

Pre teleso zaťažené módom I sa dá potenciálna energia napísať v tvare:

$$\Pi = U - \Delta P = U^*, \quad (3.39)$$



Obrázok 6 : Graf nelineárneho uvoľňovania energie v telese s trhlinou[3]

kde U^* je deformačná energia naznačená na obrázku(6) a vyjadrená vzťahom:

$$U^* = \int_0^P \Delta dP, \quad (3.40)$$

kde P je silové zaťaženie a Δ je deformačné zaťaženie na telese. J-integrál sa potom dá zapísať ako:

$$J = \left(\frac{dU^*}{da}\right)_P = \left(\frac{\partial}{\partial a} \int_0^P \Delta dP\right)_P = \int_0^P \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_P dP, \quad (3.41)$$

alebo

$$J = \left(\frac{dU}{da} \right)_P = - \left(\frac{\partial}{\partial a} \int_0^\Delta P d\Delta \right)_\Delta = - \int_0^\Delta \left(\frac{\partial P}{\partial a} \right)_\Delta d\Delta. \quad (3.42)$$

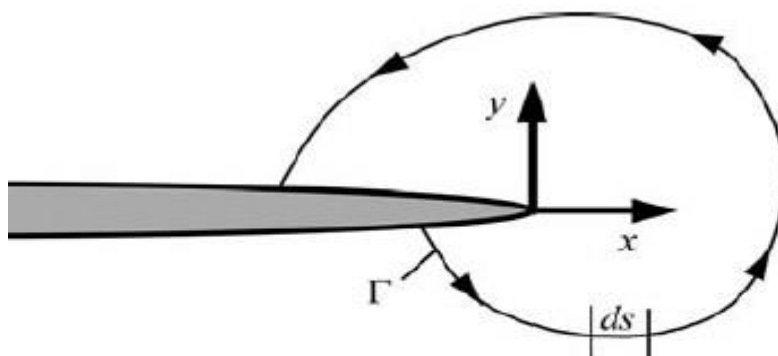
J-integrál sa zároveň dá vyjadriť ako krivkový integrál po ľubovoľnej ceste v protismere hodinových ručičiek v čele trhliny ako:

$$J = \int_\Gamma (w dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} ds), \quad (3.43)$$

kde u_i je zložka vektoru posunutia, s je dĺžka krivky Γ znázornená na obrázku (7), T_i je zložka vektoru napätia a w je hustota deformačnej energie daná vzťahom:

$$w = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (3.44)$$

kde ε_{ij} a σ_{ij} sú zložky tenzoru deformácie respektíve napätia.



Obrázok 7 : Integračná cesta v okolí čela trhliny[3]

4. Kienzlerova hypotéza

Hodnoty súčiniteľov intenzity napätia, ktoré boli určené na základe numerických metód ako napríklad metódy konečných prvkov, sú pre mnohé konfigurácie dostupné v rôznych výtlačkoch a učebniciach. Pre zložitejšie štruktúrne konfigurácie sú ich hodnoty ešte stále nedostupné. Pri inžinierskych výpočtoch zahrňujúcich pevnosť porušeného telesa sa občas vyžaduje menšie množstvo výpočtov aj napriek slabšej presnosti. Významnú metódu na blízku aproximáciu faktorov intenzity napätia v telesách s trhlinou alebo vrubom bola vyvinutá Kienzlerom a Herrmannom.

Táto metóda je založená na základnej teórii prútových predpokladov a rýchlosti uvoľňovania energia napätosti, kde sa trhlina rozširuje až do lomovej oblasti.

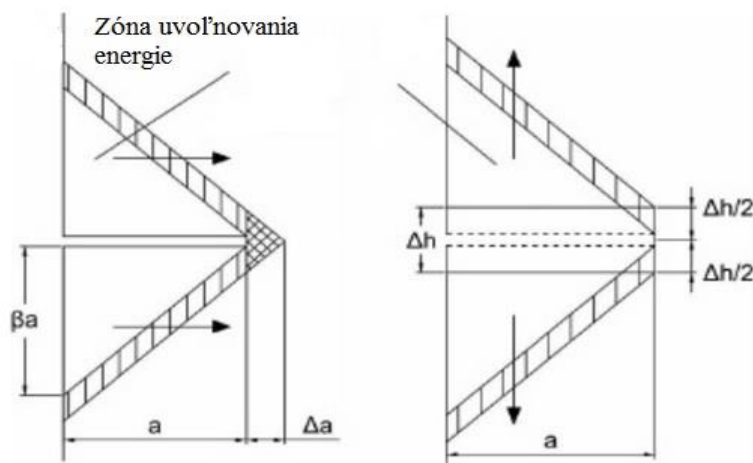
Nasledujúca kapitola bude vypracovaná na základe článku[5] .

4.1 Faktory intenzity napětí

Pri predpoklade porušeného telesa s trhlinou je dĺžka trhliny a predĺžená o $a+\Delta a$ alebo rozšírená o Δh . Uvoľňovanie potenciálnej energie U je potom dané vzťahom:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 2\beta \frac{\partial U}{\partial h}, \quad (4.1)$$

kde β je faktor sklonu, ktorý závisí na type zaťaženia a geometrii telesa.



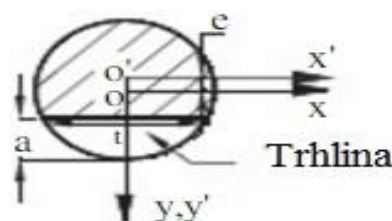
Obrázok 8 : Zóny uvoľňovania energie pri predĺžení a rozšírení trhliny

Hnacia sila trhliny G ako energia disipovaná počas lomu na jednotku novo vytvorenej lomovej plochy je blízko späť s uvoľňovaním potenciálnej energie:

$$G = -\frac{1}{t} \frac{\partial U}{\partial a}, \quad (4.2)$$

kde t je hrúbka prútu s obdĺžnikovým prierezom a trhlinou na kraji telesa. Avšak pri uvažovaní prútu s kruhovým prierezom, môže byť t dĺžka pásu čela trhliny v priečnej trhlíne. Je daná vzťahom:

$$t = 4R\sqrt{\eta - \eta^2}, \quad (4.3)$$



Obrázok 9 : Porušený kruhový priečny prierez

kde R je polomer kruhového prierezu a η je bezrozmerná hĺbka trhliny daná vzťahom:

$$\eta = \frac{a}{2R}. \quad (4.4)$$

Na základe známej relácie medzi G a K a známých veličín β a $\delta U/\delta h$ je možné faktor intenzity napätia zapísať ako:

$$K_i = \sqrt{-\frac{\beta E'}{2R\sqrt{\eta-\eta^2}} \frac{\delta U}{\delta h}}. \quad (4.5)$$

Kienzler a Hermann stanovili obzvlášť jednoduchú metódu na stanovenie $\delta U/\delta h$ za použitia jednoduchej prútovej teórie. Táto metóda sa dá dobre ilustrovať pri predpoklade prútu s trhlínou na kraji telesa zaťaženým ohybovým momentom M . Zo základnej prútovej teórie vychádza, že rozšírenie trhliny o Δh má vplyv na zmenšenie ohybovej tuhosti po dĺžke Δh a prislúchajúca zmena energie v prúte je :

$$\Delta U = \frac{M^2}{2} \left(\frac{1}{EI} - \frac{1}{EI^c} \right) \Delta h, \quad (4.6)$$

kde EI je ohybová tuhosť telesa bez trhliny a s kruhovým prierezom pričom EI^c platí pre porušený priečný prierez. Kvadratický moment I je daný vzťahom:

$$I = \frac{\pi R^4}{4}. \quad (4.7)$$

Kvadratický moment porušeného kruhového prierezu je možný vyjadriť ako :

$$I^c = \frac{R^4}{4} \left(\pi - \cos^{-1}(1-2\eta) + 2(1-2\eta)(1-8\eta+8\eta^2)\sqrt{\eta-\eta^2} \right), \quad (4.8)$$

pre $\Delta h \rightarrow 0$ sa dá prírastok energie napätosti pre zaťaženia ohybovým momentom M zapísať vzťahom ako:

$$\frac{\partial U}{\partial h} = -\frac{M^2}{2E} \left(\frac{1}{I} - \frac{1}{I^c} \right). \quad (4.9)$$

Pre zaťaženie ťahovou silou N sa dá tento vzťah zapísať analogicky:

$$\frac{\partial U}{\partial h} = -\frac{N^2}{2E} \left(\frac{1}{A^c} - \frac{1}{A^*} \right), \quad (4.10)$$

kde A^* je plocha neporušeného kruhového prierezu a A^c je plocha kruhového prierezu poškodenou trhlínou daná vzťahom:

$$A^c = R^2 \left(\pi - \cos^{-1}(1-2\eta) + 2(1-2\eta)\sqrt{\eta-\eta^2} \right). \quad (4.11)$$

Po prírastku energie napätosti je ďalšou neznámou veličinou faktor sklonu β , ktorý môže byť stanovený z asymptotického rozloženia funkcií faktorov intenzity napätia pre veľmi malé alebo veľmi veľké trhliny, pričom platí, že vo väčšine prípadov ide o jednu z nich. Faktory intenzity napätia teda môžu byť zapísané nahradením týchto vzťahov ako:

$$K_{1N} = \frac{N}{2} \sqrt{\frac{\beta}{R\sqrt{\eta-\eta^2}} \left(\frac{1}{A^c} - \frac{1}{A} \right)}, \quad (4.12)$$

$$K_{1M} = \frac{M}{2} \sqrt{\frac{\beta'}{R\sqrt{\eta-\eta^2}} \left(\frac{1}{I^c} - \frac{1}{I} \right)}, \quad (4.13)$$

kde K_{1N} a K_{1M} reprezentují faktory intenzity napětí v móde I a β' je vyjádřené ako:

$$\beta' = \frac{\beta E'}{E} \quad (4.14)$$

4.2 Prút zatížený ťahovou silou N

Předpoklad axiálně ťahovo zatíženého prutu silou N aplikovaného na prút kruhového prierezu s trhlinou vedie na kombinované zatížení ťahom a ohybom. Neutrálna osa sa posunie o hodnotu e naznačenú v obrázku (9). Hodnota tohto posunutia je daná vzťahom:

$$e = \frac{16R^3(\eta-\eta^2)^{3/2}}{3A^c}, \quad (4.15)$$

čím sa zväčšuje ohybový moment na:

$$M^N = eN. \quad (4.16)$$

Z rovníc (4.12) a (4.13) dostávame výraz pre faktor intenzity napětí pre kruhový prierez spojený s ťahovou silou N ako:

$$K_{1N} = \frac{N}{2} \sqrt{\frac{\beta'}{R\sqrt{\eta-\eta^2}} \left(\frac{1}{A^c} - \frac{1}{A} \right)} + \frac{M^N}{2} \sqrt{\frac{\beta'}{R\sqrt{\eta-\eta^2}} \left(\frac{1}{I^c} - \frac{1}{I} \right)}, \quad (4.17)$$

nahradením výrazov A, A^c, I a I^c do rovnice (5.17) a stanovením $\beta' = 1$ je táto rovnica daná ako:

$$K_{1N} = \frac{N}{R^{3/2}} F_N(\eta), \quad (4.18)$$

kde $F_N(\eta)$ je geometrická funkcia hĺbky trhliny reprezentovaná vzťahom:

$$F_N(\eta) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\psi} \left(\frac{1}{\Pi_1} - \frac{1}{\pi} \right)} + \frac{8\psi^3}{3\Pi_1} \sqrt{\frac{1}{\psi} \left(\left[\frac{\Pi_2}{4} + (1-2\eta)^3\psi - \frac{256\psi^6}{9\Pi_1} \right]^{-1} - \frac{4}{\pi} \right)}, \quad (4.19)$$

pričom Π_1, ψ a Π_2 sú dané ako:

$$\Pi_1 = \pi - \cos^{-1}(1-2\eta) + 2(1-2\eta)\sqrt{\eta-\eta^2}, \quad (4.20)$$

$$\Pi_2 = \pi - \cos^{-1}(1-2\eta) - 2(1-2\eta)\sqrt{\eta-\eta^2}, \quad (4.21)$$

$$\psi = \sqrt{\eta-\eta^2}. \quad (4.22)$$

Smer iniciácie trhliny môže byť získaný z SEDF-kritéria stanovením $K_I = K_{IN}$ a $K_{II} = K_{III} = 0$ pričom $\partial^2 S / \partial \varphi^2 > 0$ Smer šírenia trhliny sa zhoduje s $\varphi_0 = 0^\circ$ čo značí, že trhlina sa bude šíriť v jej vlastnej rovine.

Na základě SEDF-kritéria nastane nestabilita trhliny, keď minimálna hodnota faktoru mernej energie napätosti S_{min} dosiahne kritickej hodnoty S_C , čo môže byť zapísane ako:

$$S_C = a_{11}|K_{I_N}|_{N=N_c}, \quad (4.23)$$

kde N_c je kritická hodnota zaťaženia a je vypočítaná dosadením rovnice (4.18) do rovnice (4.23):

$$N_c = \frac{2R^{3/2}}{F_{N(\eta)}} \sqrt{\frac{\pi\nu S_C}{1-2\mu}}. \quad (4.24)$$

4.3 Prút zaťažený ohybovým momentom M

Pre prút s kruhovým prierezom a priečnou trhlinou zaťažený ohybovým momentom M sa dá zapísať vzťah pre faktor intenzity napätia nahradením I^c a I do rovnice (4.13) a stanovením $\beta' = 1$ nasledovne:

$$K_{1M} = \frac{M}{R^{5/2}} F_M(\eta), \quad (4.25)$$

kde $F_M(\eta)$ je geometrická funkcia hĺbky trhliny stanovená ako:

$$F_M(\eta) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\psi} \left(\left[\frac{\Pi_2}{4} + (1-2\eta)^3 \psi - \frac{256\psi^6}{9\Pi_1} \right]^{-1} - \frac{4}{\pi} \right)}. \quad (4.26)$$

Smer šírenia trhliny sa určí analogicky vzhľadom ku zaťaženiu ťahom stanovením

$K_I = K_{I_M}$ a $K_{II} = K_{III} = 0$ pričom $\partial^2 S / \partial \varphi^2 > 0$. Počiatočný uhol trhliny je $\varphi_0 = 0^\circ$, čo znamená, že trhlina sa šíri vo svojej vlastnej rovine a korešponduje so smerom v ktorom dominuje rozširujúci efekt. Iniciácia trhliny nastane v momente kedy S_{min} dosiahne hodnoty S_C :

$$S_C = a_{11}|K_{I_M}|_{M=M_c}, \quad (4.27)$$

pričom M_c je kritická hodnota zaťaženia ohybovým momentom a je stanovená nahradením rovnice (4.25) do rovnice (4.27):

$$M_c = \frac{R^{5/2}}{F_M(\eta)} \sqrt{\frac{2\pi\nu S_C}{1-2\mu}}. \quad (4.24)$$

5. Praktická část

Jedným z cieľov tejto bakalárskej práce je porovnanie výsledkov metód klasickej K-koncepcie a teórie uvedenej Kienzlerom a Herrmannom. Pre výpočet faktorov intenzity napätia a ich následné porovnanie bude uvažovaný priamy prút, ktorý je z jednej strany votknutý k základovému telesu a z druhej strany zaťažený ohybovým momentom. Prút má obdĺžnikový prierez, pričom sa trhlina nachádza v strede prútu.

Budú uvažované rôzne veľkosti trhlín pre lepšie porovnanie oboch metód. Veľkosti sú dané nasledovne:

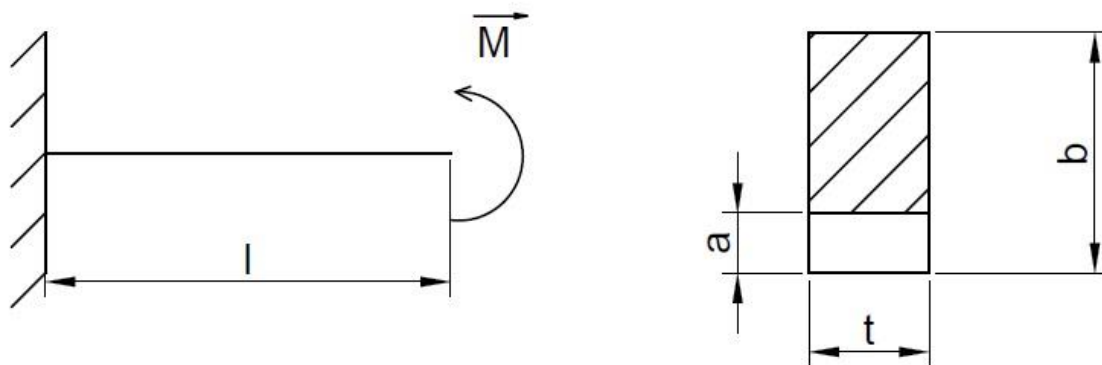
$$t = 10 \text{ mm}, \quad (5.1)$$

$$b = 20 \text{ mm}, \quad (5.2)$$

$$a = 1, \dots 5 \text{ mm}, \quad (5.3)$$

$$M = 200 \text{ Nm}. \quad (5.4)$$

$$l = 1 \text{ m}. \quad (5.5)$$



Obrázok 10 : Prút zaťažený ohybovým momentom

5.1 Výpočet K-koncepciou

Pre výpočet faktorov intenzity napätia je nutné najprv vypočítať funkciu $F(a/b)$, ktorá koriguje výsledok na základe geometrie a veľkosti trhliny. Po dosadení rôznych veľkostí trhliny do rovnice (3.19) dostávame nasledovné hodnoty:

$$a_1 = 1 \text{ mm} \Rightarrow F_1\left(\frac{a}{b}\right) = 1.0687, \quad (5.6)$$

$$a_2 = 2 \text{ mm} \Rightarrow F_2\left(\frac{a}{b}\right) = 1.0436, \quad (5.7)$$

$$a_3 = 3 \text{ mm} \Rightarrow F_3\left(\frac{a}{b}\right) = 1.0398, \quad (5.8)$$

$$a_4 = 4 \text{ mm} \Rightarrow F_4\left(\frac{a}{b}\right) = 1.0530, \quad (5.9)$$

$$a_5 = 5 \text{ mm} \Rightarrow F_5\left(\frac{a}{b}\right) = 1.0804. \quad (5.10)$$

Kvadratický moment I je pro obdélníkový prierez daný ako:

$$I = \frac{b^3 t}{12} = \frac{20^3 \cdot 10}{12} = 6666.67 \text{ mm}^4, \quad (5.11)$$

a potom normálové napätie v mieste trhliny je dané vzťahom:

$$\sigma_o = \frac{M}{I} z, \quad (5.12)$$

kde z je vzdialenosť okrajového vlákna od neutrálnej osy a má hodnotu $b/2$, potom napätie má hodnotu:

$$\sigma_o = \frac{6M}{tb^2} = 6 \cdot \frac{200000}{10 \cdot 20^2} = 300 \text{ MPa}. \quad (5.13)$$

Faktory intenzity napätia pre mód I sú pre rôzne veľkosti trhlín dané podľa rovnice (3.18) nasledovne:

$$K_I^1 = \sigma_o \sqrt{\pi \cdot a_1} \cdot F_1 \left(\frac{a}{b} \right) = 300 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0.001} \cdot 1.0687 = 17.97 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}, \quad (5.14)$$

$$K_I^2 = \sigma_o \sqrt{\pi \cdot a_2} \cdot F_2 \left(\frac{a}{b} \right) = 300 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0.002} \cdot 1.0436 = 24.82 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}, \quad (5.15)$$

$$K_I^3 = \sigma_o \sqrt{\pi \cdot a_3} \cdot F_3 \left(\frac{a}{b} \right) = 300 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0.003} \cdot 1.0398 = 30.28 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}, \quad (5.16)$$

$$K_I^4 = \sigma_o \sqrt{\pi \cdot a_4} \cdot F_4 \left(\frac{a}{b} \right) = 300 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0.004} \cdot 1.0523 = 35.41 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}, \quad (5.17)$$

$$K_I^5 = \sigma_o \sqrt{\pi \cdot a_5} \cdot F_5 \left(\frac{a}{b} \right) = 300 \cdot \sqrt{\pi \cdot 0.005} \cdot 1.0804 = 40.62 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}. \quad (5.18)$$

5.2 Výpočet Kienzlerovou hypotézou

Pre výpočet faktorov intenzity napätia Kienzlerovou hypotézou je nutné stanoviť viacero veličín a parametrov. Jednou z nich je korekčný faktor β' , ktorý má pre vyššiu presnosť výpočtu a zvolenú geometriu vzťah:

$$\beta' = 1.319 \left[1 + 2 \left(1 - \frac{a}{b} \right)^{6.65} \right], \quad (5.19)$$

pre rôzne veľkosti trhliny nadobúda hodnotu:

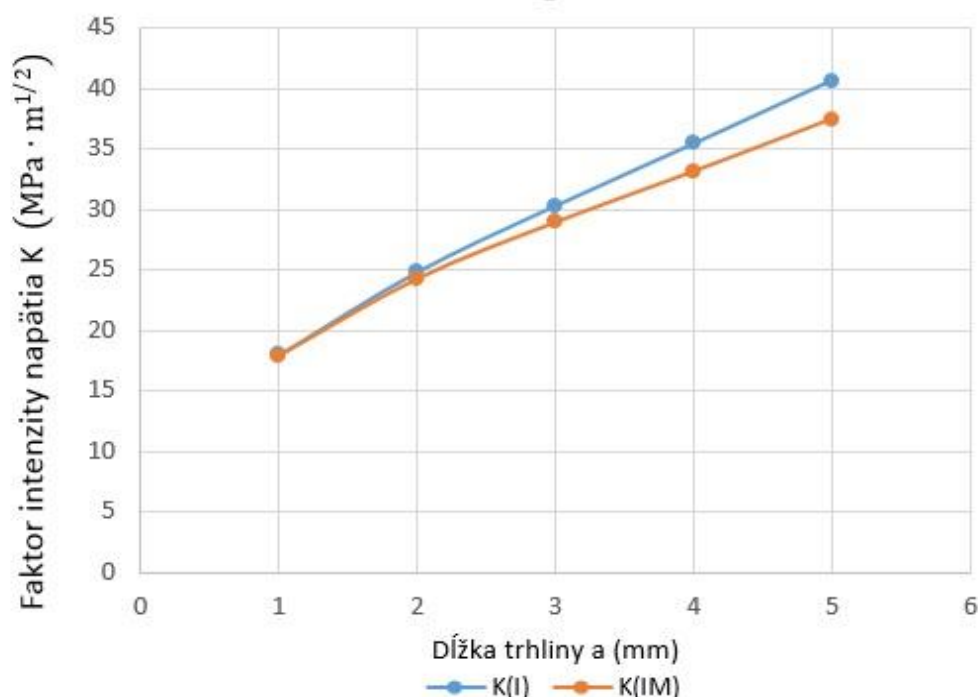
$$\beta'_1 = 1.319 \left[1 + 2 \left(1 - \frac{a_1}{b} \right)^{6.65} \right] = 1.319 \left[1 + 2 \left(1 - \frac{1}{20} \right)^{6.65} \right] = 3.194, \quad (5.20)$$

$$\beta'_2 = 1.319 \left[1 + 2 \left(1 - \frac{a_2}{b} \right)^{6.65} \right] = 1.319 \left[1 + 2 \left(1 - \frac{2}{20} \right)^{6.65} \right] = 2.628, \quad (5.21)$$

$$\beta'_3 = 1.319 \left[1 + 2 \left(1 - \frac{a_3}{b} \right)^{6.65} \right] = 1.319 \left[1 + 2 \left(1 - \frac{3}{20} \right)^{6.65} \right] = 2.214, \quad (5.22)$$

$$\beta'_4 = 1.319 \left[1 + 2 \left(1 - \frac{a_4}{b} \right)^{6.65} \right] = 1.319 \left[1 + 2 \left(1 - \frac{4}{20} \right)^{6.65} \right] = 1.917, \quad (5.23)$$

$$\beta'_5 = 1.319 \left[1 + 2 \left(1 - \frac{a_5}{b} \right)^{6.65} \right] = 1.319 \left[1 + 2 \left(1 - \frac{5}{20} \right)^{6.65} \right] = 1.708. \quad (5.24)$$



Obrázok 11 : Graf závislosti faktoru intenzity napätia na dĺžke trhliny

Ďalšou veličinou, ktorú treba stanoviť je kvadratický moment porušeného prierezu, ktorý je daný vzťahom:

$$I^c = I \left(1 - \frac{a}{b}\right)^3, \quad (5.25)$$

dosadením hodnôt veľkostí trhlín majú veľkosti:

$$I_1^c = I \left(1 - \frac{a_1}{b}\right)^3 = 6666.67 \cdot \left(1 - \frac{1}{20}\right)^3 = 5715.83 \text{ mm}^4 \quad (5.26)$$

$$I_2^c = I \left(1 - \frac{a_2}{b}\right)^3 = 6666.67 \cdot \left(1 - \frac{2}{20}\right)^3 = 4860.01 \text{ mm}^4, \quad (5.27)$$

$$I_3^c = I \left(1 - \frac{a_3}{b}\right)^3 = 6666.67 \cdot \left(1 - \frac{3}{20}\right)^3 = 4094.17 \text{ mm}^4, \quad (5.28)$$

$$I_4^c = I \left(1 - \frac{a_4}{b}\right)^3 = 6666.67 \cdot \left(1 - \frac{4}{20}\right)^3 = 3413.33 \text{ mm}^4, \quad (5.29)$$

$$I_5^c = I \left(1 - \frac{a_5}{b}\right)^3 = 6666.67 \cdot \left(1 - \frac{5}{20}\right)^3 = 2812.50 \text{ mm}^4. \quad (5.30)$$

Dosadením rovnice (4.2) do rovnice (4.9) za využitia vzťahu (3.26) je vzťah pre faktor intenzity napätia daný nasledovne:

$$\frac{K_I^2}{E} = \frac{1}{t} 2\beta \frac{M^2}{2E} \left(\frac{1}{I^c} - \frac{1}{I}\right). \quad (5.31)$$

kde po dosadení rovnice (4.14) je vyjadrený vzťah pre faktor intenzity napätia vypočítaný Kienzlerovou hypotézou ako:

$$K_{IM} = M \sqrt{\frac{\beta}{t} \left(\frac{1}{I^c} - \frac{1}{I}\right)}. \quad (5.32)$$

Za využití vztahu (5.25) sú hodnoty pre faktory intenzity napätia pre rôzne veľkosti trhliny dane ako:

$$K^1_{I_M} = M \sqrt{\frac{\beta_1}{t} \left(\frac{1}{I_1^c} - \frac{1}{l} \right)} = 200 \sqrt{\frac{3.194}{0.01} \left(\frac{1}{5.72 \cdot 10^{-9}} - \frac{1}{6.67 \cdot 10^{-9}} \right)} = 17.88 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}, (5.33)$$

$$K^2_{I_M} = M \sqrt{\frac{\beta_2}{t} \left(\frac{1}{I_2^c} - \frac{1}{l} \right)} = 200 \sqrt{\frac{2.628}{0.01} \left(\frac{1}{4.86 \cdot 10^{-9}} - \frac{1}{6.67 \cdot 10^{-9}} \right)} = 24.23 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}, (5.34)$$

$$K^3_{I_M} = M \sqrt{\frac{\beta_3}{t} \left(\frac{1}{I_3^c} - \frac{1}{l} \right)} = 200 \sqrt{\frac{2.214}{0.01} \left(\frac{1}{4.10 \cdot 10^{-9}} - \frac{1}{6.67 \cdot 10^{-9}} \right)} = 28.90 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}, (5.35)$$

$$K^4_{I_M} = M \sqrt{\frac{\beta_4}{t} \left(\frac{1}{I_4^c} - \frac{1}{l} \right)} = 200 \sqrt{\frac{1.917}{0.01} \left(\frac{1}{3.43 \cdot 10^{-9}} - \frac{1}{6.67 \cdot 10^{-9}} \right)} = 33.12 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}, (5.36)$$

$$K^5_{I_M} = M \sqrt{\frac{\beta_5}{t} \left(\frac{1}{I_5^c} - \frac{1}{l} \right)} = 200 \sqrt{\frac{1.708}{0.01} \left(\frac{1}{2.81 \cdot 10^{-9}} - \frac{1}{6.67 \cdot 10^{-9}} \right)} = 37.46 \text{ MPa} \cdot \text{m}^{1/2}. (5.37)$$

Numerické porovnanie oboch koncepcií je znázornené na obrázku (11). Z grafu jasne vyplýva zhoda oboch prístupov. Aj keď sa s rastúcou dĺžkou trhliny súčinitele faktoru intenzity napätia rozchádzajú, ich rozdiel neprekročí hodnotu 8% pri dĺžke trhliny 5mm. Túto chybu je však nutné relativizovať, vzhľadom k tomu, že ide o relatívne dlhú trhlínu vzhľadom k výške priečného prierezu. V tomto prípade sa dá očakávať, že hodnoty súčiniteľov intenzity napätia v oboch prípadoch sú dosť skreslené silnými predpokladmi kladenými na platnosť teórie lineárnej lomovej mechaniky.

6. Závěr

Jedným z cieľov tejto práce bol prehľad v možnostiach riešení stanovenia chovania trhliny. Boli zohľadnené kritéria charakterizujúce chovanie trhliny v lineárne-elastickej lomovej mechanike či už z hľadiska energetickej globálnej bilancie na telese alebo stanovenia lokálnej napätosti v blízkom okolí čela trhliny. Chovanie trhlín bolo vystihnuté hnacou silou trhliny alebo faktorom intenzity napätia.

Hlavným zámerom bolo však porovnanie K-koncepcie a teórie, ktorú zaviedli Kienzler a Hermann. V oboch prípadoch bolo modelové teleso zaťažené ohybovým momentom a teda normálovým napätím, ktoré zaťažilo trhlinu módom *I*. Prvou menovanou metódou boli vypočítané faktory intenzity napätia *K* za pomoci nekonečného rozvoja a tvarovou funkciou závislou na geometrii telesa a veľkosti trhliny. Kienzlerovou hypotézou boli naopak stanovené tieto faktory za pomoci zaťažujúcich účinkov na teleso a korekčného faktoru závislého na geometrii a veľkosti trhliny.

Výsledky ukázali, že hodnoty faktoru intenzity napätia vychádzajú pre obe metódy približne rovnako, čím sa dokázalo možné využitie teórie zavedenej Kienzlerom a Herrmannom v praxi pri menších početných úkonoch. Chyba medzi oboma výsledkami bola zobrazená na grafe závislosti faktoru intenzity napätia na dĺžke trhliny pre obe koncepcie. Na tomto grafe je vidno, že sa chyba medzi týmito teóriami znižuje pri znižovaní dĺžky trhliny. Chyba ktorá bola dosiahnutá pri veľkosti trhliny 1mm nepresiahla 0.5% pričom maximálna chyba pri veľkosti trhliny 5mm bola 7.8%, čo je prípustná chyba v inžinierskych výpočtoch. Dosiahnutím tak malej chyby bolo zapríčinené využitím výpočtu korekčného faktoru, ktorý dal Kienzlerovej hypotéze vyššiu presnosť.

Literatúra

- [1] CHIN-THE SUN; Z.-H. JIN. *Fracture Mechanics*. Cambridge, Massachusetts, United States, 2012. s. 311. ISBN 0-123-85001-0
- [2] ONDRÁČEK, Emanuel; VRBKA, Jan; JANÍČEK, Přemysl; a BURŠA Jiří. *Mechanika těles: Pružnost a Pevnost II*. 4. přeprac. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM s.r.o., 2006, 260 s. ISBN 80-214-3260-8
- [3] ANDERSON. T. L. *Fracture mechanics: Fundamentals and applications*. 2nd ed. Boca Raton (Florida): CRC Press, 1995. ISBN 0-8493-4260-0
- [4] *Základy lomové mechaniky* 2001, [online], [cit. 2017-05-20]. Dostupné na WWW: <http://ime.fme.vutbr.cz/images/umvi/vyuka/mezni_stavy/podklady/06%20-%20Lomova%20mechanika.pdf>
- [5] LI, Young; FANTUZZI, Nicholas and TORNABENE Francesco. On mixed mode crack initiation and direction in shafts: Strain energy density factor and maximum tangential stress criteria. *Engineering Fracture Mechanics*, 2013, č. 109, s. 273-289. ISSN 0013-7944
- [6] GRIFFITH, A.A. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philos T Roy Soc A*, č. 221, 1921, s. 163-198.
- [7] SIH, G. C. Some basic problems in fracture mechanics and new concepts. *Engineering Fracture Mechanics*. 1973, č. 5, s. 365-377
- [8] RICE, J. R. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks. *Journal of Applied Mechanics*. 1968. č. 35. s. 379-386.
- [9] *Základy lomové mechaniky* 2012, [online], [cit. 2017-05-20]. Dostupné na WWW: <<http://hutar.wz.cz/lomovka/08.pdf>>

Zoznam použitých skratiek a symbolov

SEDF		minimálna merná energia napätosti
A	$[m^2]$	plocha trhliny
A^*	$[m^2]$	plocha kruhového prierezu
A^c	$[m^2]$	plocha porušeného kruhového prierezu
A_K	$[-]$	člen Williamsovho nekonečného rozvoja
E	$[Pa]$	Youngov modul pružnosti pre rovinnú napätosť
E'	$[Pa]$	Youngov modul pružnosti pre rovinnú deformáciu
F	$[-]$	Airyho funkcia
F^*	$[J]$	práca vonkajších síl
$F\left(\frac{a}{b}\right)$	$[-]$	tvarová funkcia
$F_{N,M}(\eta)$	$[-]$	geometrická funkcia hĺbky trhliny v ťahu a ohybe
G	$[J \cdot m^{-2}]$	hnacia sila trhliny
G_C	$[J \cdot m^{-2}]$	húževnatosť materiálu
I	$[m^4]$	kvadratický moment prierezu
I^c	$[m^4]$	kvadratický moment porušeného prierezu
J	$[N \cdot m^{-1}]$	J-integrál
$K_{I,II,III}$	$[Pa \cdot m^{1/2}]$	faktor intenzity napätia
K_{IC}	$[Pa \cdot m^{1/2}]$	lomová húževnatosť
M	$[N \cdot m]$	zaťažovací ohybový moment
M_C	$[N \cdot m]$	kritický ohybový moment
N	$[N]$	zaťažovacia ťahová sila
N_C	$[N]$	kritická ťahová sila
P	$[N]$	vonkajšie silové zaťaženie
R_e	$[Pa]$	medza klzu
S	$[J \cdot m^{-3}]$	faktor mernej energie napätosti
S_c	$[J \cdot m^{-3}]$	kritická hodnota faktoru mernej energie napätosti
T_i	$[Pa]$	zložka vektoru napätia
U^*	$[J]$	deformačná energia
W	$[J]$	celková energia v systéme
W_{el}	$[J]$	elastická energia akumulovaná v systéme
W_S	$[J]$	práca spojená s vytvorením nových povrchov

a	$[m]$	délka trhliny
a_{ij}	$[-]$	doplňková funkcia
b	$[m]$	výška tělesa
e	$[m]$	excentricita neutrální osi
f_{ij}	$[-]$	funkcia pre normálové napätie pre rôzne typy záťažových módov
g_{ij}	$[-]$	funkcia pre smykové napätie pre rôzne typy záťažových módov
l	$[m]$	délka tělesa
r	$[m]$	polární souřadnice, vzdálenost od čela trhliny
r_p	$[m]$	polomer plastickej oblasti odhadnutej z elastického riešenia
r_y	$[m]$	polomer plastickej oblasti
u_{ij}	$[m]$	zložky vektoru posuvov v okolí čela trhliny
w	$[J \cdot m^{-3}]$	hustota deformačnej energie
z	$[m]$	vzdálenost okrajových vlákien od neutrální osi
Γ	$[-]$	integrační cesta
Δ	$[m]$	deformačné zaťaženie tělesa s trhlinou
Π	$[J]$	potenciální energia tělesa s trhlinou
β	$[-]$	faktor sklonu (slope factor)
β'	$[-]$	korekčný faktor závislí na geometrii tělesa (correction of slope factor)
ε_{ij}	$[-]$	zložka tenzoru deformácie
η	$[-]$	bezrozměrná hloubka tělesa
μ	$[-]$	Poissonova konstanta
σ_{ij}	$[Pa]$	zložky tenzoru napětia
σ_o	$[Pa]$	ohybové napätie
ν	$[Pa]$	modul v strihu
φ	$[rad]$	polární uhlová souřadnice okolo čela trhliny

Zoznam obrázkov a tabuliek

Obrázok 1 : Poškodená loď Liberty na následky krehkého lomu.....	9
Obrázok 2 : Módy lokálneho zaťaženia v oblasti trhliny	11
Obrázok 3: Súradnicový systém s počiatkom v čele trhliny.....	12
Obrázok 4 : Veľkosť plastickej zóny v okolí čela trhliny.....	15
Obrázok 5 : Vzťahy funkcie F pre rôzne typy zaťaženia geometrie telesa.....	16
Obrázok 6 : Graf nelineárneho uvoľňovania energie v telese s trhlinou	19
Obrázok 7 : Integračná cesta v okolí čela trhliny	20
Obrázok 8 : Zóny uvoľňovania energie pri predĺžení a rozšírení trhliny	21
Obrázok 9 : Porušený kruhový priečny prierez	21
Obrázok 10 : Prút zaťažený ohybovým momentom	25
Obrázok 11 : Graf závislosti faktoru intenzity napätia na dĺžke trhliny	Chyba! Záložka nie je definovaná.
Tabuľka 1 : Tabuľka funkcií pre normálové a smykové napätia	14