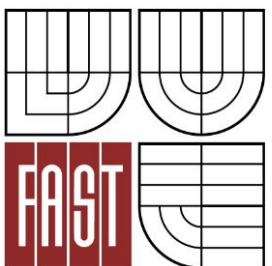


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STAVEBNÍ
ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING
INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

STATICKÁ ANALÝZA PRUŽNĚ PODEPŘENÝCH KONSTRUKCÍ

STATIC ANALYSIS OF FLEXIBLY SUPPORTED ON STRUCTURES

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

JANA ŠNAJDÁRKOVÁ

VEDOUcí PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. ZBYNĚK VLK, Ph.D.

BRNO 2014



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STAVEBNÍ

Studijní program	B3607 Stavební inženýrství
Typ studijního programu	Bakalářský studijní program s prezenční formou studia
Studijní obor	3647R013 Konstrukce a dopravní stavby
Pracoviště	Ústav stavební mechaniky

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student	Jana Šnajdárková
Název	Statická analýza pružně podepřených konstrukcí
Vedoucí bakalářské práce	Ing. Zbyněk Vlk, Ph.D.
Datum zadání bakalářské práce	30. 11. 2013
Datum odevzdání bakalářské práce	30. 5. 2014
V Brně dne 30. 11. 2013	

.....
prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.
Vedoucí ústavu

.....
prof. Ing. Rostislav Drochytka, CSc., MBA
Děkan Fakulty stavební VUT

Podklady a literatura

Kadlčák J., Kytýr J. : Statika stavebních konstrukcí I
Manuály ke statickým programovým systémům

Zásady pro vypracování

Cílem práce je osvojit si zásady modelování konstrukcí, prostudovat možnosti výpočtů a modelování pružného podepření konstrukcí a provést srovnávací statický výpočet vybrané konstrukce. Výpočet bude proveden jak ručně na zjednodušeném modelu tak budou vytvořeny různé modely ve vybraném programovém systému. Výsledky budou následně porovnány.

Předepsané přílohy

.....

Ing. Zbyněk Vlk, Ph.D.

Vedoucí bakalářské práce

Abstrakt

Práce se zaměřuje na porovnání statických výpočtů na různých typech modelů. Ty jsou vypočítány jak ručními výpočty, tak v programu RFEM.

Bez použití softwaru jsou vytvořeny zjednodušené prutové modely na pevných a pružných podporách a na nich jsou vypočítány podporové reakce, posouvající síly a ohybové momenty. Jedna část se zaměřuje na výpočet redukce ohybových momentů k docílení přesnějších výsledků. Pomocí programu jsou vytvořeny jak modely prutové tak prostorové, které jsou složeny z ploch. Dále je vytvořen model s prutem rozděleným a podepřeným tak, aby vznikla redukce ohybových momentů nad podporami. Posledním modelem je nosník se dvěma oddělenými komorami, které jsou vetknuty do desky a definovány jako žebra která s deskou spolupůsobí. Vnitřní síly na všech modelech se následně porovnávají.

Klíčová slova

statický výpočet, statická analýza, RFEM, metoda pětimomentových rovnic, redukce ohybových momentů, pružné podpory, nepoddajné podpory, liniové podpory, plošné podpory, tuhost podpor, vnitřní síly, deformace, normálové napětí

Abstract

This work focuses on comparing the static analysis on the various types of models. It is calculated as manual calculations and in software RFEM.

Without use of the software are created simplified beam model on fixed and flexible supports and to them are calculated support reactions, shear forces and bending moments. One part focuses on the calculation of the reduction of bending moments, to achieve more accurate results. In the program are created models of rod and models of space, which are composed of surfaces. There is also created a model of the split rod to form a reduction of the bending moments over the supports. The last model is a beam with two separate chambers, which are fixed to the plate and defined as ribs which cooperates with the plate. Internal forces on all models is then compared.

Keywords

static calculation, static analysis, RFEM, method of five moments equation, reduction of bending moments, flexible supports, fixed supports, line supports, surface supports, rigidity of supports, internal forces, deformation, normal stress

Bibliografická citace VŠKP

Jana Šnajdárková *Statická analýza pružně podepřených konstrukcí*. Brno, 2014. 60 s.,
Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební
mechaniky. Vedoucí práce Ing. Zbyněk Vlk, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně a že jsem uvedla všechny použité informační zdroje.

V Brně dne: 30. května 2014

.....
podpis autora

Poděkování

Chtěla bych velmi poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce Ing. Zbyňkovi Vlkovi, Ph.D., za cenné rady, velkou ochotu a odbornou pomoc jak při zpracování této práce, tak během předchozí výuky v oborových předmětech.

Dále bych chtěla poděkovat také mým rodičům, kteří mě po celou dobu mého studia velmi podporovali a pomáhali mi.

V Brně dne: 30. května 2014

.....
podpis autora

OBSAH

1	Úvod.....	13
2	Metody řešení.....	14
2.1	Metoda třímomentových rovnic.....	14
2.1.1	Vliv popuštění podpor nosníku	16
2.2	Metoda pětímomentových rovnic	17
2.3	Metoda konečných prvků.....	21
3	Geometrie modelu mostu	24
4	Ruční výpočet.....	25
4.1	Vyjádření soustavy rovnic	25
4.2	Výpočet modelu na pružných podporách.....	27
4.3	Výpočet modelu na nepoddajných podporách	32
4.4	Redukce ohybových momentů.....	34
5	Statický výpočet pomocí softwaru	36
5.1	Prutový model na nepoddajných podporách	36
5.2	Prutový model na pružných podporách	39
5.3	Prutový model s liniovým podepřením.....	41
5.4	Plošný model s plošným podepřením	43
5.5	Plošný model podepřen sloupy	45
5.6	Model s komorovými nosníky spolupůsobícími s deskou	47
6	Porovnání výsledků.....	51
6.1	Prutové modely na nepoddajných podporách	51
6.2	Prutové modely na pružných podporách.....	52
6.3	Prutový model na liniových podporách a redukce ohybových momentů	53
6.4	Plošný model na plošných podporách.....	54
6.5	Plošný model podepřen sloupy	56
6.6	Model s komorovými nosníky se spolupůsobící deskou.....	57
6.7	Porovnání z hlediska dosažených průhybů	58
7	Závěr	59

SEZNAM ILUSTRACÍ

Obr. 2.1: Část spojitého nosníku v původním tvaru.....	14
Obr. 2.2: Základní soustava	14
Obr. 2.3: Deformační úhly od jednotkových momentů působících na levé straně	14
Obr. 2.4: Deformační úhly od jednotkových momentů působících na pravé straně	15
Obr. 2.5: Vyznačení pootočení podporových průřezů od zatížení	15
Obr. 2.6: Pootočení podporových průřezů vlivem popuštění podpor	16
Obr. 2.7: Zobrazení sil na nosníkovém elementu v blízkosti podpory	18
Obr. 2.8: Zobrazení posouvajících sil V_0 od zatížení na prostém nosníku	18
Obr. 2.9: Podporové momenty vyvolávající přírůstek posouvající síly ΔV_x	19
Obr. 2.10: Pole ab spojitého nosníku pro snadný výpočet vnitřních sil.....	21
Obr. 2.11: Model s vyznačenou sítí konečných prvků.....	22
Obr. 3.1: Příčný řez mostem	24
Obr. 4.1: Část modelu pro definování pětimentových rovnic.....	25
Obr. 4.2: Základní soustava s vyčíslením hodnot $[m, kNm^{-1}, kN, kNm]$	29
Obr. 4.3: Průběh posouvajících sil na spojitém nosníku na pružných podporách	30
Obr. 4.4: Průběh ohybových momentů na spojitém nosníku na pružných podporách.....	31
Obr. 4.5: Redukce ohybových momentů nad podporou	34
Obr. 5.1: Průřez prutu dvoukomorového nosníku.....	36
Obr. 5.2: Prutový model mostu na nepoddajných podporách.....	37
Obr. 5.3: Průběh posouvajících sil dle softwaru na spojitém nosníku	38
Obr. 5.4: Průběh ohybových momentů dle softwaru na spojitém nosníku	38
Obr. 5.5: Průběh deformací dle softwaru na spojitém nosníku.....	39
Obr. 5.6: Průběh deformací dle softwaru na spojitém nosníku s pružnými podporami.....	41
Obr. 5.7: Rozdělení prutu kvůli zaoblení ohybových momentů nad podporami.....	42
Obr. 5.8: Detail ohybových momentů při liniovém podepření v místě sloupu	42
Obr. 5.9: Průběh deformací s liniovým podepřením	43
Obr. 5.10: Průřez dvoukomorového nosníku složeného z ploch	43
Obr. 5.11: Zobrazení výřezu pro podepíranou plošku na jednom segmentu mostu.....	44
Obr. 5.12: Průběh deformací na plošném modelu na plošných podporách.....	44
Obr. 5.13: Průběh normálového napětí na horních vláknech – pohled ve směru osy Z	45
Obr. 5.14: Průběh normálového napětí na dolních vláknech – pohled ve směru osy Z	45
Obr. 5.15: Průřez mostu podepřeném sloupy na plošných podporách.....	46

Obr. 5.16: Průběh deformací na plošném modelu podepřeném sloupy	46
Obrázek 5.17: Označení rozměrů pro stanovení spolupůsobící šířky	49
Obrázek 5.18: Vyznačení délek potřebných pro výpočet spolupůsobící šířky	49

SEZNAM TABULEK

Tab. 4.1: Výpis podporových reakcí na základní soustavě a spojitém nosníku s pružnými podporami v kN	30
Tab. 4.2: Hodnoty posouvajících sil na spojitém nosníku na pružných podporách v kN	30
Tab. 4.3: Hodnoty ohybových momentů na spojitém nosníku na pružných podporách v kNm .	31
Tab. 4.4: Výpis podporových reakcí na základní soustavě a spojitém nosníku s nepoddajnými podporami v kN	33
Tab. 4.5: Vnitřní síly na spojitém nosníku na nepoddajných podporách v kN a kNm.	33
Tab. 5.1: Podporové reakce dle softwaru na spojitém nosníku v kN.....	37
Tab. 5.2: Posouvající síly dle softwaru na spojitém nosníku v kN	38
Tab. 5.3: Hodnoty ohybových momentů dle softwaru na spojitém nosníku v kNm.....	39
Tab. 5.4: Hodnoty deformací dle softwaru na spojitém nosníku v mm	39
Tab. 5.5: Podporové reakce dle softwaru na spojitém nosníku na pružných podporách, v kN .	40
Tab. 5.6: Vnitřní síly dle softwaru na spojitém nosníku na pružných podporách v kN a kNm ..	40
Tab. 5.7: Hodnoty deformací dle softwaru na spojitém nosníku s pružnými podporami v mm .	41
Tab. 5.8: Hodnoty vnitřních sil a deformací na nosníku s liniovým podepřením [kN][kNm][mm]	42
Tab. 5.9: Hodnoty deformací na plošném modelu na plošných podporách v mm.....	44
Tab. 5.10: Hodnoty normálového napětí na horních a dolních vláknech v MPa.....	45
Tab. 5.11: Hodnoty deformací a napětí na plošném modelu podepřeném sloupy [mm, MPa]...	47
Tab. 5.12: Hodnoty spolupůsobících šířek komorových nosníků [m]	48
Tab. 5.13: Hodnoty vnitřních sil a deformací na modelu se spolupůsobícími žebry [kN, kNm, mm].....	50
Tab. 6.1: Porovnání vnitřních sil na prutovém nosníku na nepoddajných podporách [kN, kNm]	52
Tab. 6.2: Porovnání vnitřních sil na prutovém nosníku na pružných podporách [kN, kNm]	52
Tab. 6.3: Porovnání redukovaných ohybových momentů nad podporami [kNm]	53

Tab. 6.4: Porovnání vnitřních sil na prutovém nosníku na pružných podporách a s liniovým podepřením [kN, kNm]	53
Tab. 6.5: Hodnoty ohybových momentů na spojitém nosníku na nepoddajných podporách v kNm	55
Tab. 6.6: Porovnání hodnot normálového napětí na horních a dolních vláknech desky na prutovém a plošném modelu v MPa	55
Tab. 6.7: Porovnání hodnot normálového napětí mezi prutovým modelem na nepoddajných podporách a plošným modelem podepřeným sloupy v MPa	56
Tab. 6.8: Porovnání normálových napětí na plošném modelu na plošných podporách a na obdobném modelu podepřeným sloupy	56
Tab. 6.9: Porovnání vnitřních sil na prutovém modelu na nepoddajných podporách a modelu s komorami definovanými jako žebra	57

SEZNAM ZKRATEK

A	průřezová plocha
c	poddajnost podpory
E	modul pružnosti v tahu a tlaku
F	osamělá síla
h	výška
I	moment setrvačnosti rovinného průřezu
l	délka, rozpětí nosníku
M	ohybový moment
o	vnější objemové síly
q	intenzita spojitého příčného zatížení
R	podporová reakce
t	šířka sloupu
V	posouvající síla
u_a	svislý posun v bodě a
u, v, w	pravoúhlé složky posunutí průřezu ve směru os X, Y, Z
w	složka posunutí ve směru osy z, pružné popuštění podpory
α, β	základní deformační úhly prostého nosníku
γ	poměrné smykové posunutí, objemová tíha
ε	poměrné přetvoření
φ	pootočení podporových průřezů
σ	normálové napětí
τ	smykové napětí
Φ_{ab}	pootočení průřezu a plnostěnného nosníku

1 ÚVOD

Zadáním této bakalářské práce je statická analýza pružně podepřených konstrukcí. Ověření problematiky pružného podepření bude provedeno na zjednodušeném modelu, vycházejícího z geometrie reálného dvoukomorového silničního mostu, který se nachází v Brně na Králově poli. Analýza bude spočívat ve srovnání statických výpočtů na různých typech modelů, které se budou lišit jak podepřením, tak celkovou strukturou. Postupovat se bude od nejjednodušších modelů, které se budeme snažit postupně zdokonalovat, až k co nejreálnějšímu řešení.

Nejdříve bude sestaven jednoduchý prutový model, který bude ověřen jak pomocí softwaru RFEM, tak ručním výpočtem - metodou pětimomentových rovnic. Na tomto modelu provedeme výpočet redukce ohybových momentů nad podporami, který porovnáme s modelem na liniových podporách.

Dalším typem modelu bude objekt tvořen čistě plošnými deskami, který bude podepřen v místech sloupů pouze plošnými podporami s danou tuhostí. Obdobný model z deskových ploch poté podepřeme sloupy.

Vymodelován bude i most tvořen deskou, s níž spolupůsobí dva oddělené komorové nosníky. Tento model leží na sloupech tvořených pruty, které jsou pevně bodově podepřeny

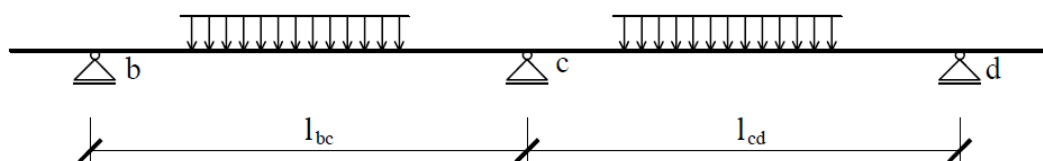
Tato práce by měla objasnit použití pružných podpor v programu RFEM, porovnat výsledky mezi modely u kterých budou použity zjednodušené, nebo naopak reálnější typy podpor a vše porovnat se základními ručními výpočty.

2 METODY ŘEŠENÍ

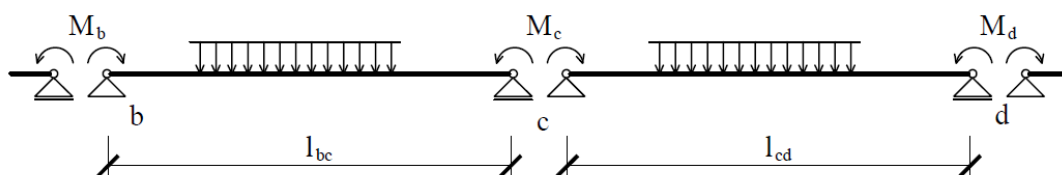
2.1 METODA TŘÍMOMENTOVÝCH ROVNIC

Zjednodušený model mostu byl definován jako spojitý prutový nosník o osmi stejně dlouhých polích. Protože bude proveden ruční výpočet prutu jak s pevnými, tak pružnými podporami, je výhodné použít metodu pětímomentových rovnic, kde jsou definovány poddajnosti podpor c , s tím rozdílem, že u pevného podepření budeme uvažovat hodnotu $c = 0$. Metoda pětímomentových rovnic vychází z metody rovnic třímomentových.

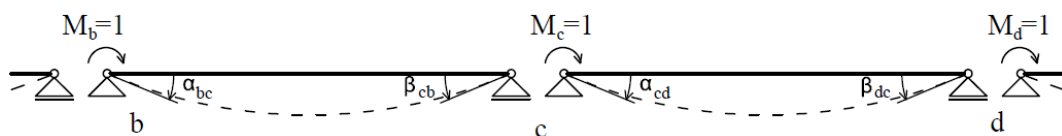
Metoda třímomentových rovnic je metodou silovou a je určena k řešení staticky neurčitých, spojitých nosníků (obr. 2.1).



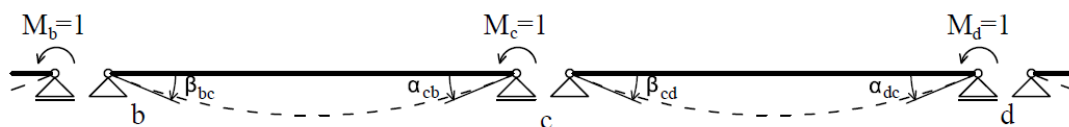
Obr. 2.1: Část spojitého nosníku v původním tvaru



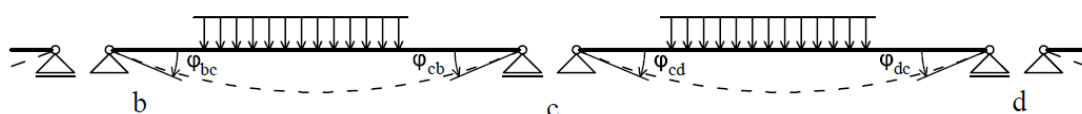
Obr. 2.2: Základní soustava



Obr. 2.3: Deformační úhly od jednotkových momentů působících na levé straně



Obr. 2.4: Deformační úhly od jednotkových momentů působících na pravé straně



Obr. 2.5: Vyznačení pootočení podporových průřezů od zatížení

Neznámými hodnotami jsou zde podporové momenty nad vnitřními podporami, případně ve vetknutí, které vzniknou zavedením staticky určité soustavy. Základní staticky určitá soustava (obr. 2.2) je vytvořena rozložením spojitého nosníku na samostatné prosté nosníky. Pro tvorbu třímomentové rovnice je dále potřeba stanovit deformační podmínky. Ty vycházejí z úhlů, které svírá tečna ohybové čáry spojitého nosníku s nosníkem v místě podpory na levou i pravou stranu. Ohybovou čarou je rovinná křivka, kopírující přetvořenou osu nosníku po deformaci. Při jakémkoli zatížení je vždy spojitá. Definujeme tedy deformační podmínky tak, aby u každé vnitřní podpory spojitého nosníku platilo (zde pro případ podpory v bodě c) :

$$\phi_{cb} = -\phi_{cd} \quad (2.1)$$

$$\phi_{cb} = M_b \beta_{cb} + M_c \alpha_{cb} + \phi_{cb} \quad (2.2)$$

$$\phi_{cd} = M_c \alpha_{cd} + M_d \beta_{cd} + \phi_{cd} \quad (2.3)$$

Ohybové momenty jsou zde násobeny deformačními úhly α a β vyvolanými jednostranným zatížením od jednotkových momentů (obr. 2.3), (obr. 2.4). Úhel ϕ (obr. 2.5) značí pootočení podporových průřezů způsobené zadaným zatížením. Hodnoty ϕ jsou definovány v tabulkách, dle použitého zatížení.

První indexy u těchto deformačních úhlů udávají konec pole, jehož pootočení hledáme, druhé indexy opačný konec vyšetřovaného pole. Kladné pootočení se uvažuje, prohýbá-li se nosník v blízkosti podpory směrem dolů. Po dosazení vztahů (2.2) a (2.3) do deformační podmínky (2.1) získáme třímomentovou rovnici spojitého nosníku pro podporu c:

$$M_b\beta_{cb} + M_c(\alpha_{cb}\alpha_{cd}) + M_d\beta_{cd} + \varphi_{cb} + \varphi_{cd} = 0 \quad (2.4)$$

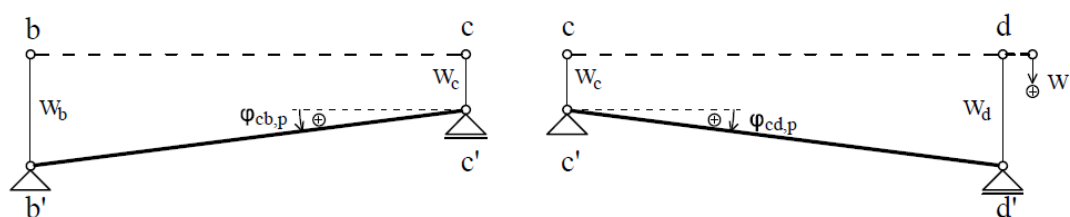
Pro každou vnitřní podporu tedy vzniká rovnice o třech neznámých, v případě podpory c jsou to ohybové momenty M_b , M_c , M_d .^{[1][2]}

2.1.1 VLIV POPUŠTĚNÍ PODPOR NOSNÍKU

Pro tvorbu pětímomentové rovnice bude třeba dále definovat popuštění podpor nosníku. Posun podpor se uvažuje ve svislém směru o hodnotu w . Na nosníku tedy vznikne další pootočení φ_p . Za předpokladu malých popuštění jsou definovány vztahy:

$$\varphi_{cb,p} \approx tg\varphi_{cb,p} = \frac{w_b - w_c}{l_{bc}} \quad (2.5)$$

$$\varphi_{cd,p} \approx tg\varphi_{cd,p} = \frac{w_d - w_c}{l_{cd}} \quad (2.6)$$



Obr. 2.6: Pootočení podporových průřezů vlivem popuštění podpor

2.2 METODA PĚTIMOMENTOVÝCH ROVNIC

Metoda pětímomentových rovnic je při statickém výpočtu spojitého nosníku nutná teprve ve chvíli, kdy je použito pružné podepření. Základním krokem je propojení předchozích vztahů (2.4). (2.5) a (2.6), kdy vznikne třímomentová rovnice pro podporu c s vlivem poklesu podpor:

$$M_b\beta_{cb} + M_c(\alpha_{cb} + \alpha_{cd}) + M_d\beta_{cd} + \varphi_{cb} + \varphi_{cd} + \frac{w_b - w_c}{l_{bc}} + \frac{w_d - w_c}{l_{cd}} = 0 \quad (2.7)$$

Do této rovnice (2.7) bude potřeba dosadit vztahy pro pružné popuštění w_b , w_c , w_d , vyjádřené následujícími vztahy:

$$w_b = c_b R_b \qquad w_c = c_c R_c \qquad w_d = c_d R_d \quad (2.8)$$

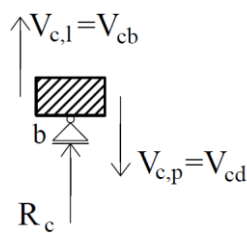
c_b , c_c , c_d jsou poddajnosti podpor b , c a d . Vyjadřují stlačení od svislých sil $F_b = 1$, $F_c = 1$, $F_d = 1$. Ve výpočtu jsou zadávány jako vlastnosti pružných podpor. Tyto vlastnosti podpora přebírá z geometrie sloupu, který nahrazuje.

$$c = \frac{Fh}{EA} = \frac{h}{EA} \quad (2.9)$$

Vztah (2.9) závisí na výšce sloupu (svislého kyvného prutu) h , jeho průřezové ploše A a modulu pružnosti E . Poddajnost podpor bude v části ručního výpočtu dosazována v jednotce m kN^{-1} , software RFEM vyžaduje zadání této hodnoty v MNm^{-1} . V případě nestlačitelné podpory je vztah (2.9) roven nule. Pro případ podpor b , c a d budou vzorce vypadat takto:

$$c_b = \frac{h_b}{E_b A_b} \qquad c_c = \frac{h_c}{E_c A_c} \qquad c_d = \frac{h_d}{E_d A_d} \quad (2.10)$$

Vztah pro poddajnost podpory tedy je vyřešen. Dále je potřeba pro dosazení do rovnice pro pružné popuštění (2.8) určit velikosti reakcí. Podporové reakce spojitého nosníku lze určit z rovnováhy svislých sil působících na nosníkový element v blízkosti podpory, v tomto případě podpory c (2.11, obr. 2.7).



Obr. 2.7: Zobrazení sil na nosníkovém elementu v blízkosti podpory

$$\sum F_{iz} = -R_c - V_{c,l} + V_{c,p} = 0$$

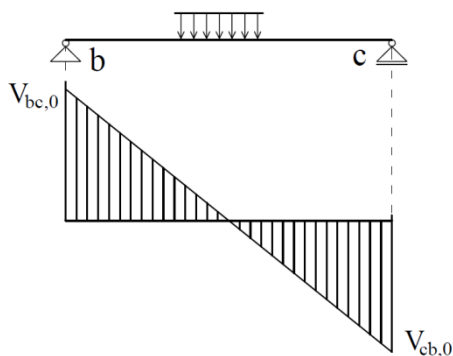
$$R_c = -V_{c,l} + V_{c,p} = -V_{cb} + V_{cd} \quad (2.11)$$

Ze vztahu (2.11) vyplývá, že reakce spojitého nosníku lze vypočítat jako součet posouvajících sil v místech podpory zleva a zprava. Reakce R_b a R_d tedy budou vypadat takto:

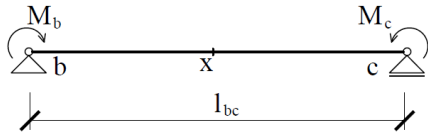
$$R_b = -V_{ba} + V_{bc} \quad R_d = -V_{dc} + V_{de} \quad (2.12)$$

Dalšími neznámými veličinami, které je potřeba odvodit jsou posouvající síly V . K tomu lze využít princip superpozice. V libovolném bodě můžeme sečíst posouvající sílu $V_{x,0}$ od zatížení na základní soustavě (obr. 2.8), s přírůstkem posouvající síly vyvolaným podporovými ohybovým momenty ΔV_x (obr 2.9), (2.13). Všechny tyto veličiny připadající k řešení polí spojitého nosníku odděleně, tedy na základní soustavě, jsou označeny indexem 0.

$$V_x = V_{x,0} + \Delta V_x \quad (2.13)$$



Obr. 2.8: Zobrazení posouvajících sil V_0 od zatížení na prostém nosníku



Obr. 2.9: Podporové momenty vyvolávající přírůstek posouvající síly ΔV_x

$$\begin{aligned}
 V_{ba} &= V_{ba,0} + \frac{M_b - M_a}{l_{ab}} & V_{bc} &= V_{bc,0} + \frac{M_c - M_b}{l_{bc}} \\
 V_{cb} &= V_{cb,0} + \frac{M_c - M_b}{l_{bc}} & V_{cd} &= V_{cd,0} + \frac{M_d - M_c}{l_{cd}} \\
 V_{dc} &= R_{dc,0} + \frac{M_d - M_c}{l_{cd}} & V_{de} &= R_{de,0} + \frac{M_e - M_d}{l_{de}}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

V tuto chvíli lze tyto vztahy dosadit do vzorců pro reakce v podporách spojitého nosníku:

$$\begin{aligned}
 R_b &= -V_{ba} + V_{bc} = -\left(V_{ba,0} + \frac{M_b - M_a}{l_{ab}}\right) + V_{bc,0} + \frac{M_c - M_b}{l_{bc}} \\
 R_c &= -V_{cb} + V_{cd} = -\left(V_{cb,0} + \frac{M_c - M_b}{l_{bc}}\right) + V_{cd,0} + \frac{M_d - M_c}{l_{cd}} \\
 R_d &= -V_{dc} + V_{de} = -\left(V_{dc,0} + \frac{M_d - M_c}{l_{cd}}\right) + V_{de,0} + \frac{M_e - M_d}{l_{de}}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Jelikož známe velikosti podporových reakcí na prostých nosnících, je dobré tímto způsobem rovnice zjednodušit. Výpočet podporových reakcí z posouvajících sil funguje na prostých nosnících obdobně jako na spojitém nosníku (2.11), (2.12).

$$\begin{aligned}
 R_{b,0} &= -V_{ba,0} + V_{bc,0} \\
 R_{c,0} &= -V_{cb,0} + V_{cd,0} \\
 R_{d,0} &= -V_{dc,0} + V_{de,0}
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Výsledný tvar podporových reakcí spojitého nosníku po dosazení vztahů (2.16) do vzorců pro reakce spojitého nosníku (2.15) vypadá tedy takto:

$$\begin{aligned}
 R_b &= R_{b,0} + \frac{M_a - M_b}{l_{ab}} + \frac{M_c - M_b}{l_{bc}} \\
 R_c &= R_{c,0} + \frac{M_b - M_c}{l_{bc}} + \frac{M_d - M_c}{l_{cd}} \\
 R_d &= R_{d,0} + \frac{M_c - M_d}{l_{cd}} + \frac{M_e - M_d}{l_{de}}
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

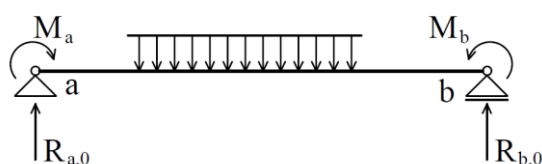
V tuto chvíli jsou vyjádřeny známé hodnoty (2.10), (2.17), potřebné pro dosazení do vzorců pružného popuštění podpor w .

$$\begin{aligned}
 w_b &= \frac{h_b}{E_b A_b} \left(R_{b,0} + \frac{M_a - M_b}{l_{ab}} + \frac{M_c - M_b}{l_{bc}} \right) \\
 w_c &= \frac{h_c}{E_c A_c} \left(R_{c,0} + \frac{M_b - M_c}{l_{bc}} + \frac{M_d - M_c}{l_{cd}} \right) \\
 w_d &= \frac{h_d}{E_d A_d} \left(R_{d,0} + \frac{M_c - M_d}{l_{cd}} + \frac{M_e - M_d}{l_{de}} \right)
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Dosazením do třímomentové rovnice (2.7) a následné úpravě, vznikne pětímomentová rovnice pro podporu c spojitého nosníku na pružných podporách:

$$\begin{aligned}
 &M_a \frac{c_b}{l_{ab} l_{bc}} + \\
 &+ M_b \left(\beta_{cb} - \frac{l_{ab} + l_{bc}}{l_{ab} l_{bc}^2} c_b - \frac{l_{bc} + l_{cd}}{l_{bc}^2 l_{cd}} c_c \right) + \\
 &+ M_c \left[\alpha_{cb} + \alpha_{cd} + \frac{c_b}{l_{bc}^2} + \frac{(l_{bc} + l_{cd})^2}{l_{bc}^2 l_{cd}^2} c_c + \frac{c_d}{l_{cd}^2} \right] + \\
 &+ M_d \left(\beta_{cd} - \frac{l_{bc} + l_{cd}}{l_{bc} l_{cd}^2} c_c - \frac{l_{cd} + l_{de}}{l_{cd}^2 l_{de}} c_d \right) + \\
 &+ M_e \frac{c_d}{l_{cd} l_{de}} + \\
 &+ \varphi_{cb} + \varphi_{cd} + \frac{c_b}{l_{bc}} R_{b,0} - c_c \frac{l_{bc} + l_{cd}}{l_{bc} l_{cd}} R_{c,0} + \frac{c_d}{l_{cd}} R_{d,0} = 0
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

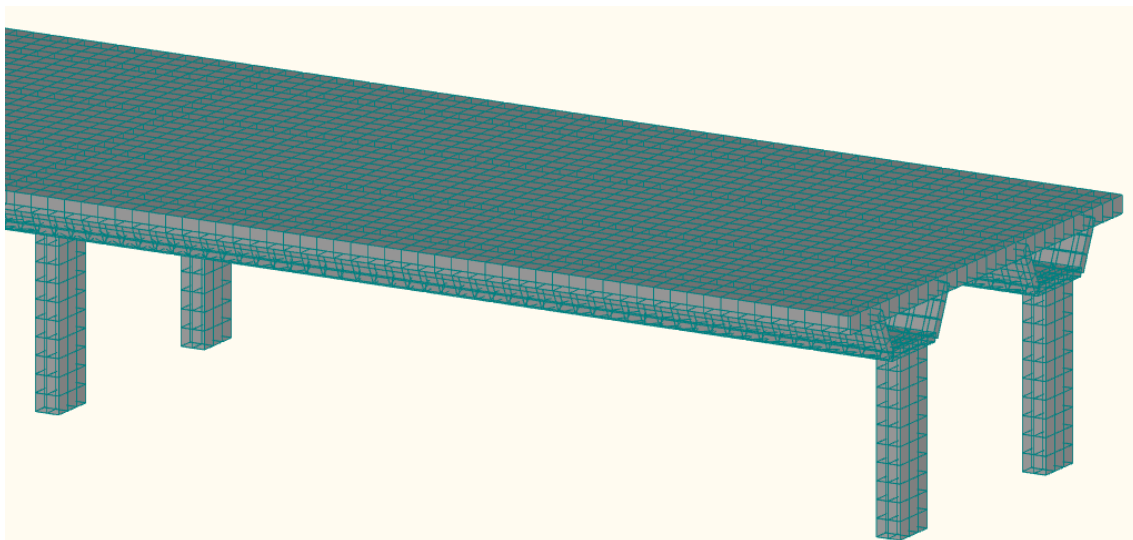
Tuto rovnici je potřeba vyjádřit pro všechny vnitřní podpory spojitého nosníku. Poblíž okraje budou rovnice jednodušší, protože některé členy odpadnou. Hodnoty ohybových momentů v krajních podporách uvažujeme rovno nule. Po dosazení známých veličin a vyřešení rovnic budou vyčísleny hodnoty zbylých staticky neurčitých podporových momentů. Zde už lze jednoduše vyřešit vnitřní síly, stále na soustavě prostých nosníků zatížených původním zatížením, ale navíc i s koncovými podporovými momenty (obr 2.10).^[2]



Obr. 2.10: Pole ab spojitého nosníku pro snadný výpočet vnitřních sil

2.3 METODA KONEČNÝCH PRVKŮ

Modely jsou kromě ručního výpočtu realizovány také v programu RFEM, pomocí kterého jsou konstrukce jak zadávány, tak je zde proveden statický výpočet. Program pracuje na principu metody konečných prvků. MKP je numerická metoda sloužící, v našem případě, k simulaci průběhů napětí a deformací na vytvořeném fyzikálním modelu. Vychází z Lagrangeova principu, který říká, že těleso je v rovnováze, je-li celková potenciální energie deformace soustavy minimální. Principem je diskretizace spojitého kontinua do určitého počtu konečných prvků (obr 2.11), tvořených z uzlových bodů.



Obr. 2.11: Model s vyznačenou sítí konečných prvků

Pro každý z těchto bodů získáme 15 neznámých funkcí. Jedná se o:

tři posuvy $u, v, w,$

šest přetvoření $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_x, \gamma_y, \gamma_z,$

šest napětí $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z.$

Tyto funkce jsou navzájem propojeny systémem obecných rovnic pružnosti, které musí být splněny uvnitř každé řešené oblasti. Jedná se o rovnice rovnováhy, rovnice fyzikální a geometrické. Na hranici řešené oblasti musí být splněny předepsané okrajové podmínky.

Rovnice rovnováhy vyjadřují rovnováhu vnitřního prvku. Na ten ,kromě napětí, působí také vnější objemové síly, například gravitační. Ty jsou zde značeny jako: $o_x, o_y, o_z.$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + o_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + o_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + o_z = 0 \quad (2.20)$$

Geometrické rovnice popisují vazbu mezi složkami posuvů a přetvoření. Pro malé deformace jsou rovnice vyjádřeny takto:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \gamma &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & \gamma &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}\quad (2.21)$$

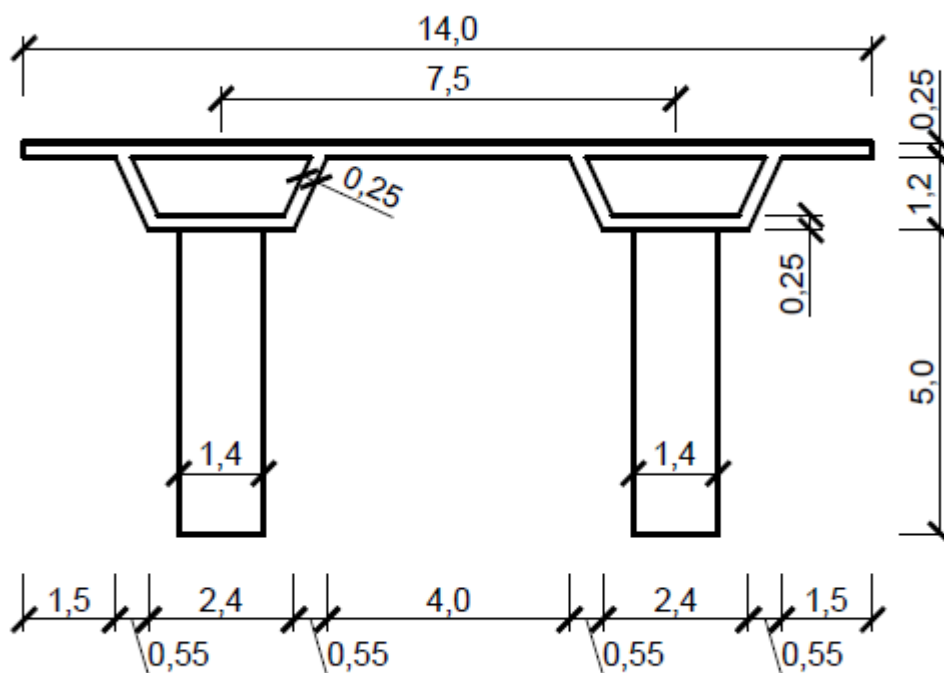
Posledním typem rovnic jsou rovnice fyzikální, neboli konstitutivní. Vyjadřují vztah mezi deformací a napjatostí. Pro materiál splňující Hookův zákon jsou definovány tyto jednoduché fyzikální rovnice:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} = \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} = \tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} = \tau_{zx}\end{aligned}\quad (2.22)$$

Celkem tedy vzniká patnáct rovnic o patnácti neznámých, které program definuje pro každý uzel. Čím více těchto uzlů necháme na konstrukci vytvořit, tím jsou výsledky přesnější. Na druhou stranu je ale výpočet velkého množství rovnic, v závislosti na kvalitě hardwaru, velmi časově náročný. Je tedy potřeba pečlivě promyslet, jakou velikost konečného prvku zvolit, aby byl výpočet efektivní. ^{[3][4]}

3 GEOMETRIE MODELU MOSTU

Zjednodušená geometrie modelu vychází ze silničního mostu na ulici Sportovní v Brně, který byl postaven roku 1988. Na mostě s evidenčním číslem 43-002 se nachází místní komunikace I/43. Každý jízdní pruh této silnice leží na samostatném mostě, ty jsou spojeny dodatečně podélnou monolitickou spárkou šířky 1 m. Pro tuto práci bude uvažován jen jeden most. Most má osm polí po 25 m, celkem je tedy délky 200 m. Nosnou konstrukci tvoří dvojice komorových segmentových nosníků v osové vzdálenosti 7,5 m. Sloupy podepírající střed každé komory budou 5 m vysoké, s průřezem 0,7 m x 1,4 m. Jako materiál je použit beton C35/45. ^[5]

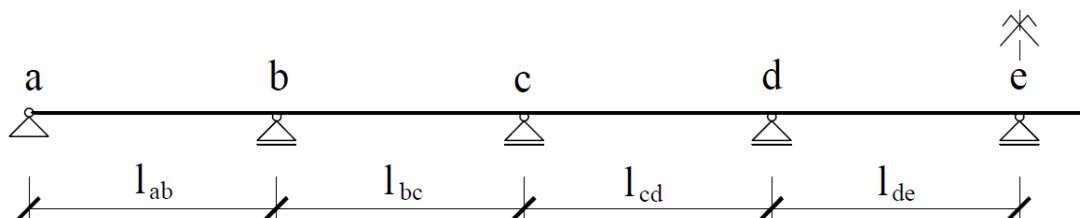


Obr. 3.1: Příčný řez mostem

4 RUČNÍ VÝPOČET

4.1 VYJÁDŘENÍ SOUSTAVY ROVNIC

Při ručním výpočtu bude využito faktu, že je model symetrický. Stačí tedy vytvořit pětimomentové rovnice pro vnitřní podpory na polovině spojitého nosníku (obr. 4.1). Po dosazení hodnot a využitím toho, že ohybový moment v bodě *a* bude roven nule, vzniknou pouze čtyři rovnice o čtyřech neznámých. Postup navazuje na kapitolu 2.2., vztah (2.19).



Obr. 4.1: Část modelu pro definování pětimomentových rovnic

Soustava pětimomentových rovnic pro tento nosník bude vypadat takto:

pro podporu *b* a tedy i podporu *h*:

$$\begin{aligned}
 & M_b \left[\alpha_{ba} + \alpha_{bc} + \frac{(l_{ab} + l_{bc})^2}{l_{ab}^2 l_{bc}^2} c_b + \frac{c_c}{l_{bc}^2} \right] + \\
 & + M_c \left(\beta_{bc} - \frac{l_{ab} + l_{bc}}{l_{ab} l_{bc}^2} c_b - \frac{l_{bc} + l_{cd}}{l_{bc}^2 l_{cd}} c_c \right) + \\
 & + M_d \frac{c_c}{l_{bc} l_{cd}} + \varphi_{ba} + \varphi_{bc} - c_b \frac{l_{ab} + l_{bc}}{l_{ab} l_{bc}} R_{b,0} + \frac{c_c}{l_{bc}} R_{c,0} = 0
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

pro podpory c a g :

$$\begin{aligned}
& M_b \left(\beta_{cb} - \frac{l_{ab}+l_{bc}}{l_{ab}l_{bc}^2} c_b - \frac{l_{bc}+l_{cd}}{l_{bc}^2 l_{cd}} c_c \right) + \\
& + M_c \left[\alpha_{cb} + \alpha_{cd} + \frac{c_b}{l_{bc}^2} + \frac{(l_{bc}+l_{cd})^2}{l_{bc}^2 l_{cd}^2} c_c + \frac{c_d}{l_{cd}^2} \right] + \\
& + M_d \left(\beta_{cd} - \frac{l_{bc}+l_{cd}}{l_{bc}l_{cd}^2} c_c - \frac{l_{cd}+l_{de}}{l_{cd}^2 l_{de}} c_d \right) + \\
& + M_e \frac{c_d}{l_{cd}l_{de}} + \varphi_{cb} + \varphi_{cd} + \frac{c_b}{l_{bc}} R_{b,0} - c_c \frac{l_{bc}+l_{cd}}{l_{bc}l_{cd}} R_{c,0} + \frac{c_d}{l_{cd}} R_{d,0} = 0
\end{aligned} \tag{4.2}$$

pro podpory d a f :

$$\begin{aligned}
& M_b \frac{c_c}{l_{bc}l_{cd}} + \\
& + M_c \left(\beta_{dc} - \frac{l_{bc}+l_{cd}}{l_{bc}l_{cd}^2} c_c - \frac{l_{cd}+l_{de}}{l_{cd}^2 l_{de}} c_d \right) + \\
& + M_d \left[\alpha_{dc} + \alpha_{de} + \frac{c_c}{l_{cd}^2} + \frac{(l_{cd}+l_{de})^2}{l_{cd}^2 l_{de}^2} c_d + \frac{c_e}{l_{de}^2} \right] + \\
& + M_e \left(\beta_{de} - \frac{l_{cd}+l_{de}}{l_{cd}l_{de}^2} c_d - \frac{l_{de}+l_{ed}}{l_{de}^2 l_{ed}} c_e \right) + \\
& + M_d \frac{c_e}{l_{de}l_{ed}} + \varphi_{dc} + \varphi_{de} + \frac{c_c}{l_{cd}} R_{c,0} - c_d \frac{l_{cd}+l_{de}}{l_{cd}l_{de}} R_{d,0} + \frac{c_e}{l_{de}} R_{e,0} = 0
\end{aligned} \tag{4.3}$$

pro podporu e :

$$\begin{aligned}
& M_c \frac{c_d}{l_{cd}l_{de}} + \\
& + M_d \left(\beta_{ed} - \frac{l_{cd}+l_{de}}{l_{cd}l_{de}^2} c_d - \frac{l_{de}+l_{ed}}{l_{de}^2 l_{ed}} c_e \right) + \\
& + M_e \left[\alpha_{ed} + \alpha_{ed} + \frac{c_d}{l_{de}^2} + \frac{(l_{de}+l_{ed})^2}{l_{de}^2 l_{ed}^2} c_e + \frac{c_d}{l_{cd}^2} \right] + \\
& + M_d \left(\beta_{ed} - \frac{l_{de}+l_{ed}}{l_{de}l_{ed}^2} c_e - \frac{l_{ed}+l_{dc}}{l_{ed}^2 l_{dc}} c_d \right) + \\
& + M_c \frac{c_d}{l_{ed}l_{de}} + \varphi_{ed} + \varphi_{ed} + \frac{c_d}{l_{de}} R_{d,0} - c_e \frac{l_{de}+l_{ed}}{l_{de}l_{ed}} R_{e,0} + \frac{c_d}{l_{ed}} R_{d,0} = 0
\end{aligned} \tag{4.4}$$

V tomto případě lze ale zohlednit že délky $l_{ab} = l_{ba} = l_{bc} = l_{cd} = \dots = l$. V závislosti na tom, jsou úhly $\alpha_{ab} = \alpha_{ba} = \alpha_{bc} = \alpha_{cd} = \dots = \alpha$. Obdobně tomu bude i u úhlů β a φ i u poddajnosti podpor, kdy $c_a = c_b = c_d = \dots = c$. Pro podporové reakce základní soustavy bude platit:

$$R_{a,0} = -V_{ba,0} + V_{bc,0} = -\left(-\frac{1}{2}ql\right) + \frac{1}{2}ql = ql = R_{b,0} = R_{c,0} = \dots = R_0 \quad (4.5)$$

Pětimomentové rovnice soustavy lze tedy značně zjednodušit a to na tento tvar:

pro podpory b a h , ze vztahu (4.1):

$$M_b \left(2\alpha + \frac{4l^2c}{l^4} + \frac{c}{l^2}\right) + M_c \left(\beta - \frac{4c}{l^2}\right) + M_d \frac{c}{l^2} + 2\varphi - \frac{3cR_0}{l} = 0 \quad (4.6)$$

pro podpory c a g , ze vztahu (4.2):

$$M_b \left(\beta - \frac{4c}{l^2}\right) + M_c \left(2\alpha + \frac{4l^2c}{l^4} + \frac{2c}{l^2}\right) + M_d \left(\beta - \frac{4c}{l^2}\right) + M_e \frac{c}{l^2} + 2\varphi = 0 \quad (4.7)$$

pro podpory d a f , ze vztahu (4.3):

$$M_b \frac{c}{l^2} + M_c \left(\beta - \frac{4c}{l^2}\right) + M_d \left(2\alpha + \frac{4l^2c}{l^4} + \frac{2c}{l^2}\right) + M_e \left(\beta - \frac{4c}{l^2}\right) + M_f \frac{c}{l^2} + 2\varphi = 0 \quad (4.8)$$

pro podporu e , ze vztahu (4.4):

$$2M_c \frac{c}{l^2} + 2M_d \left(\beta - \frac{4c}{l^2}\right) + M_e \left(2\alpha + \frac{4l^2c}{l^4} + \frac{2c}{l^2}\right) + 2\varphi = 0 \quad (4.9)$$

4.2 VÝPOČET MODELU NA PRUŽNÝCH PODPORÁCH

Pro statický výpočet modelu na nepoddajných podporách je potřeba znát ještě několik údajů. Za zatížení q bude uvažována pouze vlastní tíha komorového nosníku. Zbylé charakteristiky jsou známy z geometrie a použitého materiálu. Při výpočtu pružnostní konstanty c je třeba myslet na to, že je počítána pouze pro jeden sloup. V tomto zjednodušeném případě prut místo dvou sloupů podepírá pouze jedna podpora. Plochu sloupu je tedy nutné vynásobit dvěma.

$$q = A\gamma = 5,8 \cdot 25,0 = 145 \text{ kNm}^{-1}$$

$$I = 1,5 \text{ m}^4$$

$$l = 25 \text{ m}$$

$$\alpha = \frac{l}{3EI} = \frac{25}{3 \cdot 3,35 \cdot 10^7 \cdot 1,5} = 1,658 \cdot 10^{-7}$$

$$\beta = \frac{l}{6EI} = \frac{25}{6 \cdot 3,35 \cdot 10^7 \cdot 1,5} = 8,292 \cdot 10^{-8}$$

$$\varphi = \frac{ql^3}{24EI} = \frac{145 \cdot 25^3}{24 \cdot 3,35 \cdot 10^7 \cdot 1,5} = 1,879 \cdot 10^{-3}$$

$$R_0 = ql = 145 \cdot 25 = 3625,0 \text{ kN}$$

$$c = \frac{h}{EA} = \frac{5}{33,5 \cdot 10^6 \cdot 2(1,4 \cdot 0,7)} = 7,615 \cdot 10^{-8} \text{ m kN}^{-1}$$

Po dosazení získáme potřebné čtyři rovnice o čtyřech neznámých, postupně pro podpory b až e :

$$3,32 \cdot 10^{-7} M_b + 8,25 \cdot 10^{-8} M_c + 1,22 \cdot 10^{-10} M_d = -3,45 \cdot 10^{-3}$$

$$8,25 \cdot 10^{-8} M_b + 3,33 \cdot 10^{-7} M_c + 8,25 \cdot 10^{-8} M_d + 1,22 \cdot 10^{-10} M_e = -3,76 \cdot 10^{-3}$$

$$1,22 \cdot 10^{-10} M_b + 8,24 \cdot 10^{-8} M_c + 3,33 \cdot 10^{-7} M_d + 8,24 \cdot 10^{-8} M_e = -3,76 \cdot 10^{-3}$$

$$2,44 \cdot 10^{-10} M_c + 1,65 \cdot 10^{-7} M_d + 3,33 \cdot 10^{-7} M_e = -3,76 \cdot 10^{-3}$$

Řešení těchto rovnic se provede pomocí programu Microsoft Excel. Zde se násobky neznámých podporových momentů zadají do matice 4×4 . K této matici se vytvoří matice inverzní, která se vynásobí s druhou stranou rovnice. Takto získáme čtyři neznámé hodnoty podporových momentů.

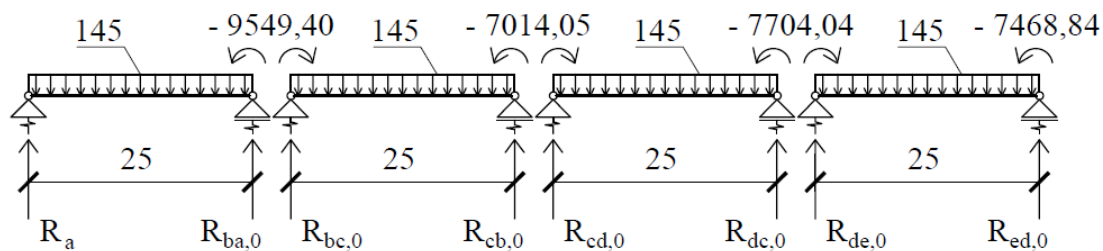
$$M_a = M_i = 0;$$

$$M_b = M_h = -9549,40 \text{ kNm}$$

$$M_c = M_g = -7014,05 \text{ kNm}$$

$$M_d = M_f = -7704,04 \text{ kNm}$$

$$M_e = -7468,84 \text{ kNm}$$



Obr. 4.2: Základní soustava s vyčíslením hodnot [m, kNm⁻¹, kN, kNm]

Dle momentové podmínky a rovnováhy sil určíme reakce R_a až R_e .

$$\sum M_{b1} = l_{ab}R_a - \frac{l_{ab}}{2}ql - M_b = 25R_a - 12,5 \cdot 145 \cdot 25 - (-9549,4) = 0$$

$$\underline{R_a = 1430,52 \text{ kN}}$$

$$\sum F_y = -R_a - R_{ba,0} + ql = -1430,52 - R_{ba,0} + 145 \cdot 25 = 0$$

$$R_{ba,0} = 2194,48 \text{ kN}$$

$$\sum M_{c1} = l_{bc}R_{bc,0} + M_b - \frac{l_{bc}}{2}ql - M_c =$$

$$= 25R_{bc,0} - 9549,4 - 12,5 \cdot 145 \cdot 25 + 7014,05 = 0$$

$$R_{bc,0} = 1913,91 \text{ kN}$$

$$R_b = R_{ba,0} + R_{bc,0} = 2194,48 + 1913,91$$

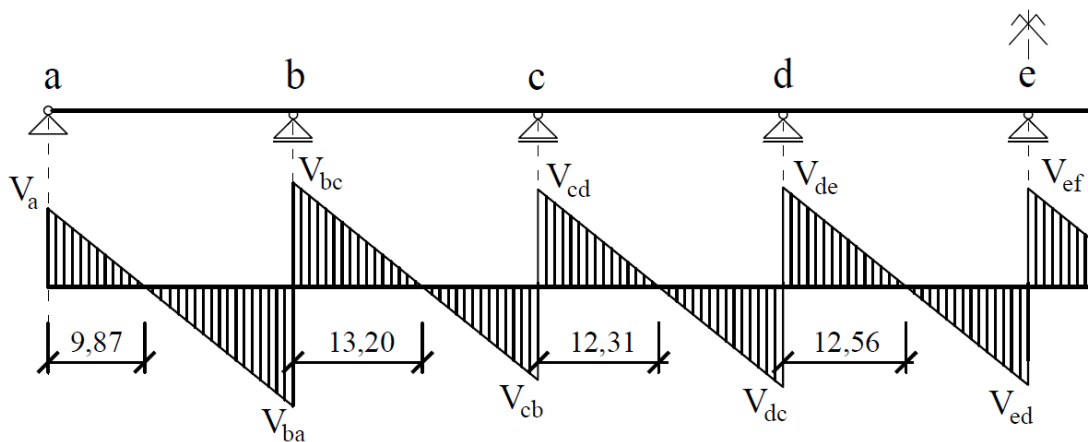
$$\underline{R_b = 4108,39 \text{ kN}}$$

Při pokračování stejným způsobem získáme zbylé podporové reakce.

Tab. 4.1: Výpis podporových reakcí na základní soustavě a spojitém nosníku s pružnými podporami v kN

Rab = 1430,52	Ra = 1430,52
Rba = 2194,48	Rb = 4108,39
Rbc = 1913,91	
Rcb = 1711,09	Rc = 3495,99
Rcd = 1784,90	
Rdc = 1840,10	Rd = 3662,01
Rde = 1821,91	
Red = 1803,09	Re = 3606,18
Ref = 1803,09	

Pomocí podporových reakcí lze jednoduše vykreslit průběhy posouvajících sil.



Obr. 4.3: Průběh posouvajících sil na spojitém nosníku na pružných podporách

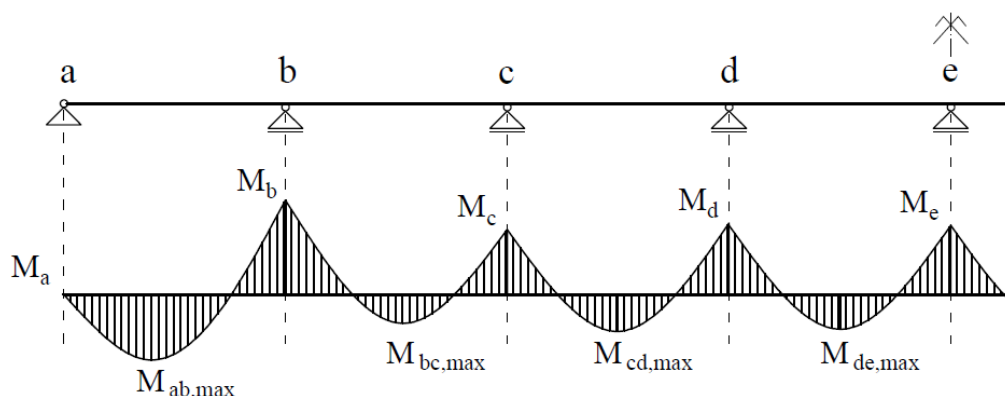
Tab. 4.2: Hodnoty posouvajících sil na spojitém nosníku na pružných podporách v kN

V _a	1430,52
V _{ba}	-2194,48
V _{bc}	1913,91
V _{cb}	-1711,09
V _{cd}	1784,91
V _{dc}	-1840,1
V _{de}	1821,91
V _{ed}	-1803,09
V _{ef}	1803,09

Zbývající vnitřní síly, které budou potřeba zjistit pro porovnání modelů, jsou ohybové momenty. Hodnoty ohybových momentů nad podporami známe už z řešení pětimomentové rovnice.

Pro dostatečně přesné vykreslení stačí vypočítat hodnoty v místech, kde dosahují maxima. Maximální ohybový moment vzniká v místě nulové posouvající síly. Tyto místa jsou určeny v předchozím obrázku (Obr. 4.3) jako podíl V_{max}/q pro každé pole. Výpočet bude tak jako v předchozích případech prováděn na soustavě prostých nosníků. Pro příklad je zde uveden výpočet na poli ab, tedy v místě $x = 9,87$ m od podpory a.

$$M_{ab,max} = x \cdot R_a - \frac{x^2 q}{2} = 9,87 \cdot 1430,52 - \frac{9,87^2 \cdot 145}{2} = 7056,51 \text{ kNm}$$



Obr. 4.4: Průběh ohybových momentů na spojitém nosníku na pružných podporách

Tab. 4.3: Hodnoty ohybových momentů na spojitém nosníku na pružných podporách v kNm

M_a	0
$M_{ab,max}$	7056,51
M_b	-9549,40
$M_{bc,max}$	3081,81
M_c	-7014,05
$M_{cd,max}$	3971,70
M_d	-7704,04
$M_{de,max}$	3742,01
M_e	-7468,84

Tyto hodnoty budou dále zpracovány při porovnání s ostatními modely.

4.3 VÝPOČET MODELU NA NEPODDAJNÝCH PODPORÁCH

Pro lepší porovnání ručního výpočtu s výpočtem pomocí softwaru je výhodné ručně vypočítat alespoň dvě různé varianty. Proto je zde navíc výpočet stejného prutového modelu s tím rozdílem, že jsou místo pružných podpor uvažovány podpory pevné. Výpočet probíhá prakticky stejně jako v kapitole 4.2, pouze pružnostní konstanta c se uvažuje rovno nule. Vzniknou tedy také čtyři rovnice o čtyřech neznámých.

$$3,32 \cdot 10^{-7} M_b + 8,29 \cdot 10^{-8} M_c = -3,76 \cdot 10^{-3}$$

$$8,29 \cdot 10^{-8} M_b + 3,32 \cdot 10^{-7} M_c + 8,29 \cdot 10^{-8} M_d = -3,76 \cdot 10^{-3}$$

$$8,29 \cdot 10^{-8} M_c + 3,32 \cdot 10^{-7} M_d + 8,29 \cdot 10^{-8} M_e = -3,76 \cdot 10^{-3}$$

$$1,66 \cdot 10^{-7} M_d + 3,32 \cdot 10^{-7} M_e = -3,76 \cdot 10^{-3}$$

Výsledek soustavy rovnic vyjádřen pomocí softwaru Microsoft Excel:

$$M_a = M_i = 0;$$

$$M_b = M_h = -9580,19 \text{ kNm}$$

$$M_c = M_g = -7009,27 \text{ kNm}$$

$$M_d = M_f = -7710,30 \text{ kNm}$$

$$M_e = -7477,78 \text{ kNm}$$

Tab. 4.4: Výpis podporových reakcí na základní soustavě a spojitém nosníku s nepoddajnými podporami v kN

$R_{ab} = 1429,29$	$R_a = 1429,29$
$R_{ba} = 2195,71$ $R_{bc} = 1915,34$	$R_b = 4111,05$
$R_{cb} = 1709,66$ $R_{cd} = 1784,46$	$R_c = 3494,12$
$R_{dc} = 1840,54$ $R_{de} = 1821,80$	$R_d = 3662,34$
$R_{ed} = 1803,20$ $R_{ef} = 1803,20$	$R_e = 3606,40$

Podporové reakce na nosníku s nepoddajnými podporami (tab. 4.4), ukazují minimální odchylky oproti hodnotám na nosníku s poddajnými podporami (tab. 4.1), mají pouze lehce nižší hodnotu. Vykreslení vnitřních sil je téměř shodné s předchozím případem (obr. 4.3), (obr. 4.4), je tedy zbytečné tyto výsledky znovu vykreslovat. Přesné hodnoty jsou uvedeny v tabulce.

Tab. 4.5: Vnitřní síly na spojitém nosníku na nepoddajných podporách v kN a kNm.

V_a	1429,29	M_a	0
V_{ba}	-2195,71	$M_{ab,max}$	7044,38
V_{bc}	1915,34	M_b	-9580,19
V_{cb}	-1709,66	$M_{bc,max}$	3069,90
V_{cd}	1784,46	M_c	-7009,27
V_{dc}	-1840,54	$M_{cd,max}$	3971,07
V_{de}	1821,80	M_d	-7710,29
V_{ed}	-1803,20	$M_{de,max}$	3734,38
V_{ef}	1803,20	M_e	-7477,78

4.4 REDUKCE OHYBOVÝCH MOMENTŮ

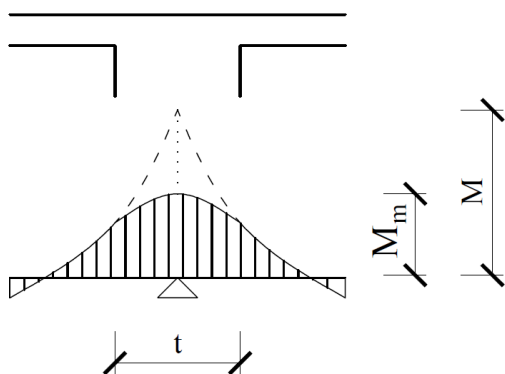
Redukce momentů nad podporami slouží k odstranění nežádáných špiček ohybových momentů v místech podpor. Tyto špičky vznikají proto, že bodová podpora nemá danou úložnou plochu a nosník podepírá pouze v jednom bodě. Tento případ se ale v reálu běžně nevyskytuje, proto je vhodné tyto extrémní hodnoty tzv. vyhladit. Vzorec pro početní řešení (4.10) se zvolí dle způsobu spojení prvku s podporou. V tomto případě bude podepření uvažováno jako prosté.

$$\Delta M_{Ed} = \frac{F_{Ed} \cdot t}{8} \quad (4.10)$$

F_{Ed} vyjadřuje reakci v místě podpory, proto $F_{Ed} = R$. Jako t je označena šířka skutečné podpory, tedy sloupu. Tento výraz umožní zjistit rozdíl mezi původním ohybovým momentem a momentem redukováným.^{[6][7]}

Finální redukováný moment M_m tedy získáme jako:

$$M_m = M - \Delta M_{Ed} \quad (4.11)$$



Obr. 4.5: Redukce ohybových momentů nad podporou

Při výpočtu se bude vycházet z hodnot na nepoddajně podepřeném nosníku. Využijí se hodnoty reakcí z tabulky 4.4. a ohybových momentů z tab. 4.5. Šířka všech sloupů ve směru osy X je 0,7 m.

Výpočet tedy bude vypadat takto:

$$M_{m,b} = M_b - \Delta M_{Ed,b} = M_b - \frac{R_b \cdot t}{8} = 9580,19 - \frac{4111,05 \cdot 0,7}{8} = 9220,47 \text{ kNm}$$

$$M_{m,c} = M_c - \frac{R_c \cdot t}{8} = 7009,27 - \frac{3494,12 \cdot 0,7}{8} = 6703,53 \text{ kNm}$$

$$M_{m,d} = M_d - \frac{R_d \cdot t}{8} = 7710,29 - \frac{3662,34 \cdot 0,7}{8} = 7389,84 \text{ kNm}$$

$$M_{m,e} = M_e - \frac{R_e \cdot t}{8} = 7477,78 - \frac{3606,40 \cdot 0,7}{8} = 7162,22 \text{ kNm}$$

5 STATICKÝ VÝPOČET POMOCÍ SOFTWARE

Statický výpočet pomocí softwaru bude vypracován ve studentské verzi programu od firmy Dlubal, RFEM 5.02.^[8] Program je určen pro 3D analýzu metodou konečných prvků. Jak již bylo uvedeno v kapitole 3, materiál konstrukce je beton C35/45. Tato charakteristika bude zadávána u všech použitých částí konstrukce.

V textové části práce bude vykreslena vždy jen symetrická polovina nosníku, vždy se bude jednat o podpory a, b, c, d, e (postupně z leva). Hodnota ohybového momentu, například na poli mezi podporami a a b , bude označena jako M_{ab} . Porovnávány budou hodnoty maximální, nejedná se proto o moment v polovině pole, ale o jeho maximální dosaženou hodnotu na poli ab .

Podélná osa nosníku vždy povede ve směru osy X. Osa Z bude svislá.

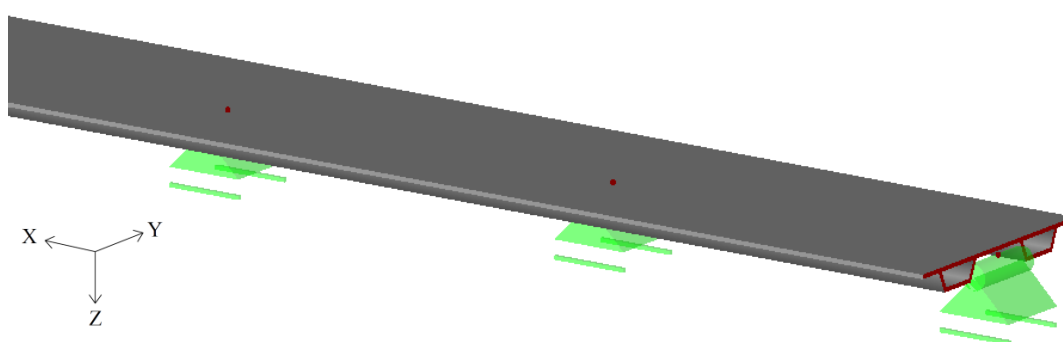
5.1 PRUTOVÝ MODEL NA NEPODDAJNÝCH PODPORÁCH

Prvním krokem při tvorbě prutového modelu je definice průřezu prutu. Základními charakteristikami prutu je volba materiálu a tvaru průřezu. Program RFEM neumožňuje tvorbu průřezů, které nejsou definovány v databázi, je tedy třeba vyřešit tento problém pomocí jiného softwaru. Pro tento případ je ideální program Shape massive, verze 6.52, také od firmy Dlubal. Protože se jedná o stejnou firmu, lze lehce přidat nový průřez do původní databáze programu RFEM. Průřez prutového modelu je třeba namodelovat co nejblíže skutečnosti. Bude se jednat o dvoukomorový nosník s geometrií dle kapitoly 3 (obr. 3.1), zatím ale bez sloupů. Prut bude v modelu definován jako nosník z osmi prutů po 25 m, celkem tedy bude mít 200 m.



Obr. 5.1: Průřez prutu dvoukomorového nosníku

Dalším krokem je nadefinování podpor v místech sloupů. Protože je prut zadáván pouze v jedné rovině, dva sloupy, které jsou v příčném směru vedle sebe, budou nahrazeny jednou podporou. Nosník, který má ve skutečnosti osmnáct sloupů, bude tedy podepřen devíti podporami. Jedna krajní podpora bude pevná, zbylé posuvné. Pevná podpora nemá možnost posuvů v žádném směru, může zde vzniknout pouze pootočení kolem osy Y. Posuvné podpory se mohou kromě pootočení kolem osy Y posouvat v rovině osy X.



Obr. 5.2: Prutový model mostu na nepoddajných podporách

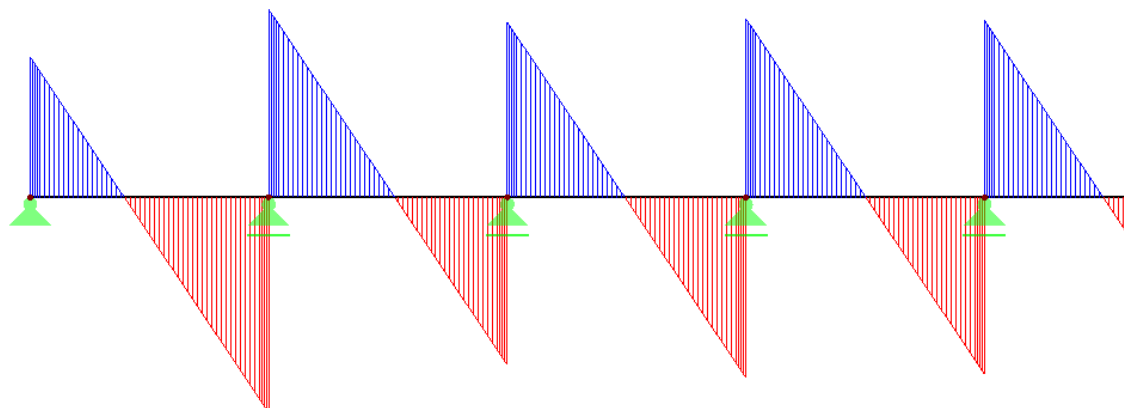
V další fázi je potřeba zadat zatížení nosníku. V ručních výpočtech se uvažovalo pouze s vlastní tíhou, pro účely porovnání je tedy také třeba uvažovat jen toto zatížení. V tomto případě ale program dokáže, při zachování geometrie a materiálu, vypočítat vlastní tíhu sám. Následně bude proveden výpočet a vyjmuty výsledky.

Podporové reakce nosníku zjištěné softwarovým výpočtem jsou vypsány v tabulce:

Tab. 5.1: Podporové reakce dle softwaru na spojitém nosníku v kN

R _a	1430,00
R _b	4112,40
R _c	3495,60
R _d	3663,80
R _e	3607,80

Průběh a hodnoty posouvajících sil jsou vyznačeny na obr. 5.3 a v tabulce 5.2.

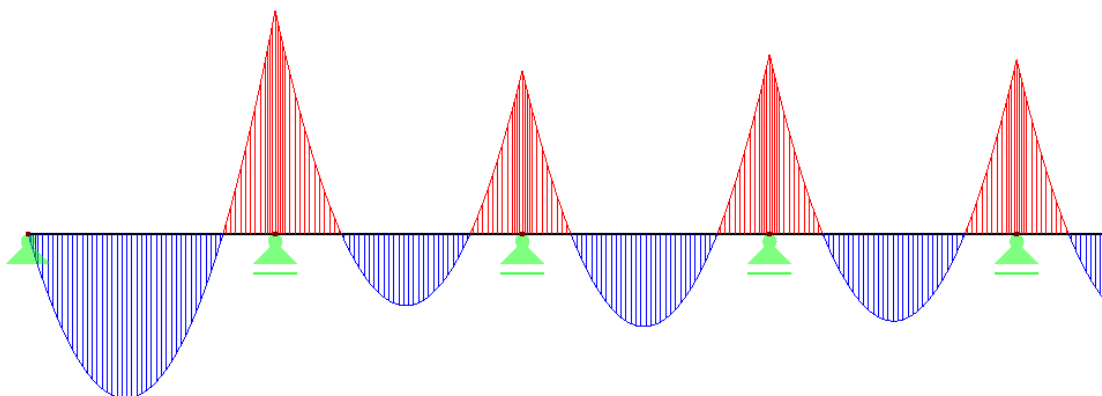


Obr. 5.3: Průběh posouvajících sil dle softwaru na spojitém nosníku

Tab. 5.2: Posouvající síly dle softwaru na spojitém nosníku v kN

V_a	1430,00
V_{ba}	-2196,40
V_{bc}	1916,00
V_{cb}	-1710,40
V_{cd}	1785,20
V_{dc}	-1841,30
V_{de}	1822,60
V_{ed}	-1803,90
V_{ef}	1803,90

Průběh a hodnoty ohybových momentů jsou vyznačeny na obr. 5.4 a v tabulce 5.3.

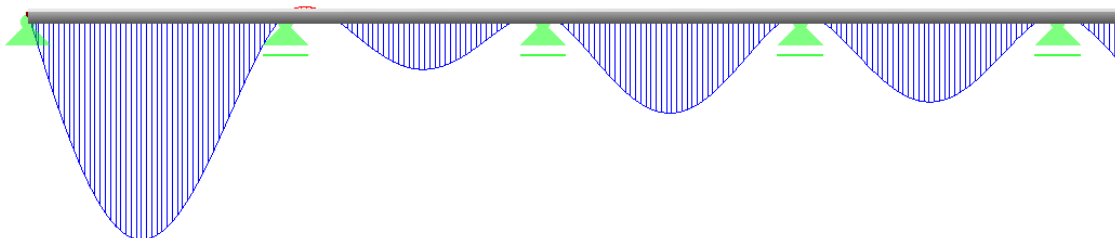


Obr. 5.4: Průběh ohybových momentů dle softwaru na spojitém nosníku

Tab. 5.3: Hodnoty ohybových momentů dle softwaru na spojitém nosníku v kNm

M_a	0
$M_{ab,max}$	7047,40
M_b	-9580,00
$M_{bc,max}$	3070,90
M_c	-7010,00
$M_{cd,max}$	3972,20
M_d	-7710,80
$M_{de,max}$	3738,60
M_e	-7477,20

Pro pozdější porovnání s modely, u kterých nelze jednoduše určit moment kolem osy Y, vyčíslíme z modelu průběhy a hodnoty deformací ve směru osy Z.



Obr. 5.5: Průběh deformací dle softwaru na spojitém nosníku

Tab. 5.4: Hodnoty deformací dle softwaru na spojitém nosníku v mm

U_{ab}	7,3
U_{bc}	1,8
U_{cd}	3,2
U_{de}	2,8

5.2 PRUTOVÝ MODEL NA PRUŽNÝCH PODPORÁCH

Kroky při tvorbě tohoto modelu se téměř shodují s modelem předchozím. Jedinou změnou je volba jiného typu podepření. Pružnostní konstanta c , která se zadává při definici podpory, vychází z geometrie a materiálu sloupů. Model s tímto typem podpory by tedy měl lépe vystihnout vlastnosti reálné konstrukce.

Při zadávání podpory, která byla v předchozím modelu definovaná jako pevná (neposuvná), zde bude povolen posun ve směru osy Z. Není však neomezený, je potřeba zadat hodnotu tuhosti podpory, kterou vyjadřuje už zmiňovaná pružnostní konstanta c . Tato veličina byla vypočítána v kapitole 4.2, jako $c = 7,615 \cdot 10^{-8} \text{ mkN}^{-1}$. Program RFEM vyžaduje zadání tuhosti v MN/m^{-1} , proto $c = 13132,0 \text{ MNm}^{-1}$. Pootočení je stejně jako v předešlém případě povoleno pouze kolem osy Y.

U zbylých podpor vše probíhá obdobně, kromě posunu ve svislém směru je zde povolen i posun ve směru osy X a to s nulovou tuhostí.

Velikosti podporových reakcí jsou uvedeny v tabulce.

Tab. 5.5: Podporové reakce dle softwaru na spojitém nosníku na pružných podporách, v kN

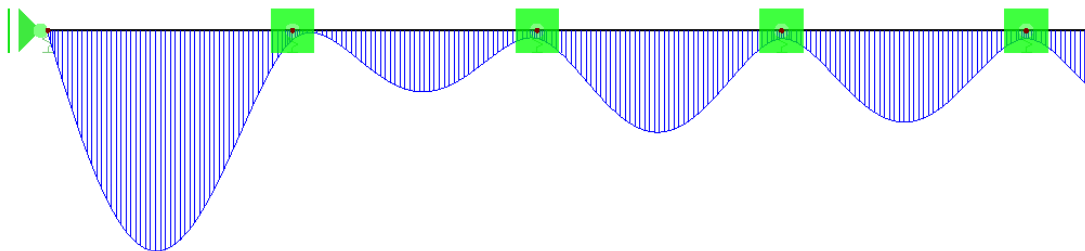
R _a	1431,40
R _b	4108,90
R _c	3498,80
R _d	3662,30
R _e	3608,80

Průběhy posouvajících sil a ohybových momentů jsou na pohled totožné, zde je proto pouze výpis hodnot.

Tab. 5.6: Vnitřní síly dle softwaru na spojitém nosníku na pružných podporách v kN a kNm

V _a	1431,40	M _a	0
V _{ba}	-2195,00	M _{ab,max}	7061,40
V _{bc}	1913,90	M _b	-9544,80
V _{cb}	-1712,50	M _{bc,max}	3078,50
V _{cd}	1786,20	M _c	-7027,90
V _{dc}	-1840,20	M _{cd,max}	3967,10
V _{de}	1822,10	M _d	-7703,10
V _{ed}	-1804,40	M _{de,max}	3740,00
V _{ef}	1804,40	M _e	-7482,10

Průběh deformací se kvůli změně podepření změní o něco více (obr. 5.6).



Obr. 5.6: Průběh deformací dle softwaru na spojitém nosníku s pružnými podporami

Tab. 5.7: Hodnoty deformací dle softwaru na spojitém nosníku s pružnými podporami v mm

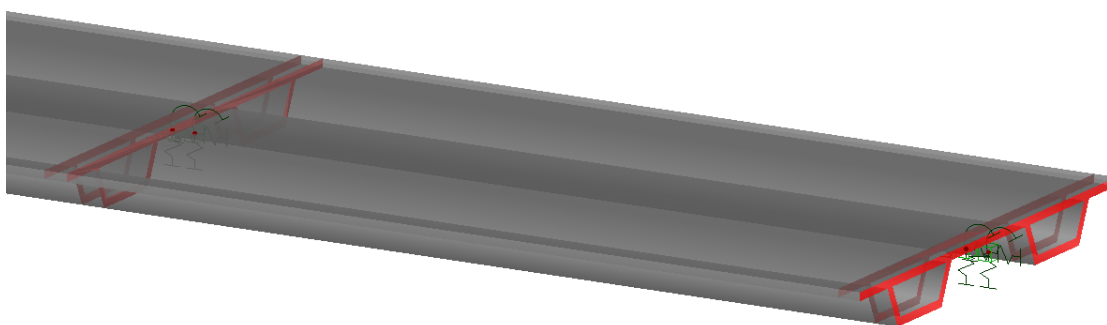
U _{ab}	7,5
U _{bc}	2,1
U _{cd}	3,5
U _{de}	3,1

5.3 PRUTOVÝ MODEL S LINIOVÝM PODEPŘENÍM

Další model je opět prutový, je zde ale provedeno zaoblení momentů nad podporami. Toho bude v modelu dosaženo rozdělením prutu na více částí. Část prutu nad podporou bude oddělena od prutu v polích (obr. 5.7).

Těmto částem bude ve vlastnostech přiřazeno podloží prutu. Zadávaná vlastnost podloží je opět tuhost, tentokrát však v MNm^{-2} . Stačí tedy poddajnost podpor c , vypočítanou v kapitole 5.2 v MNm^{-1} , vydělit šířkou sloupu.

$$\frac{13132 \text{ MNm}^{-1}}{0,7} = 18760 \text{ MNm}^{-2}$$



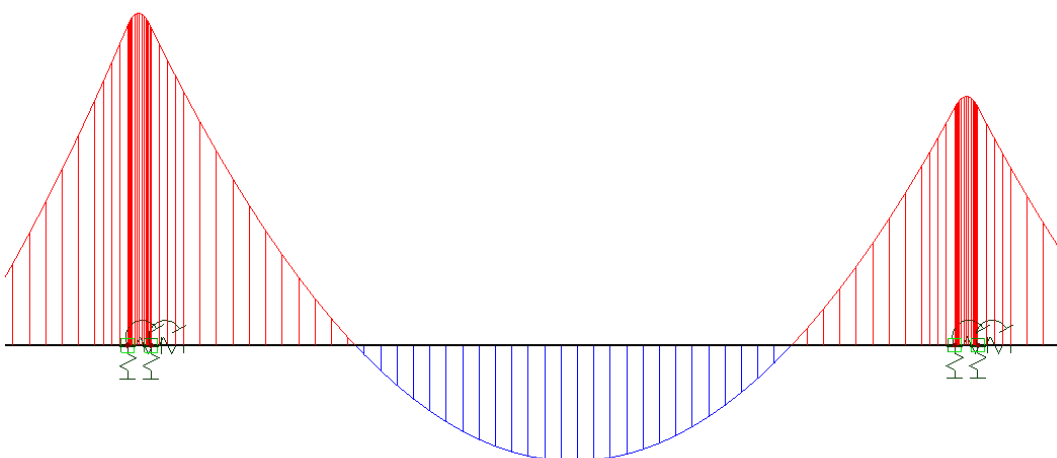
Obr. 5.7: Rozdělení prutu kvůli zaoblení ohybových momentů nad podporami

Zatížení je opět uvažováno pouze od vlastní tíhy. Hodnoty a průběhy některých výsledků jsou uvedeny dále:

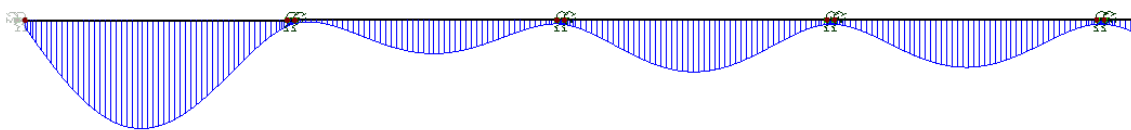
Tab. 5.8: Hodnoty vnitřních sil a deformací na nosníku s liniovým podepřením
[kN][kNm][mm]

V_a	1405,30	M_a	0	U_{ab}	7,1
V_{ba}	-2119,60	$M_{ab,max}$	6759,90	U_{bc}	2,2
V_{bc}	1853,20	M_b	-9049,40	U_{cd}	3,4
V_{cb}	-1671,70	$M_{bc,max}$	3156,30	U_{de}	3,1
V_{cd}	1739,00	M_c	-6779,90		
V_{dc}	-1785,90	$M_{cd,max}$	3937,50		
V_{de}	1769,80	M_d	-7365,50		
V_{ed}	-1755,10	$M_{de,max}$	3740,80		
V_{ef}	1755,10	M_e	-7181,90		

Tvar průběhů ohybových momentů je obdobný, jako u předešlých spojitých nosníků. Zaoblení je lépe viditelné ve větším detailu.



Obr. 5.8: Detail ohybových momentů při liniovém podepření v místě sloupu



Obr. 5.9: Průběh deformací na nosníku s liniovým podepřením

5.4 PLOŠNÝ MODEL S PLOŠNÝM PODEPŘENÍM

Od modelů tvořených z prutů se dostáváme k vícerozměrným úlohám. Další model mostu má stále sloupky nahrazeny určitým typem podpory, zbylá část se ale nebude modelovat jako prut. Namísto toho bude tvořena z různě nakloněných ploch tloušťky 250 mm. Tyto plochy budou definovány jako rovinné se standartní tuhostí. V místech sloupů budou vyříznuty otvory, do kterých se následně vloží nové plochy stejných rozměrů i vlastností. Takto vytvořené části, jejichž plocha se shoduje s úložnou plochou sloupů, mohou být celé uloženy na plošnou podporu. Po následném zadání tuhosti podpor opět vypočítané z vlastností sloupů, se docílí co největší podobnosti s modelem, který je uložen na sloupech.

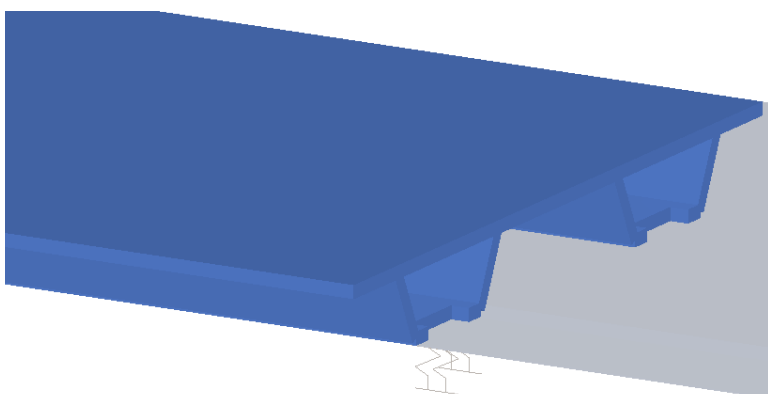


Obr. 5.10: Průřez dvoukomorového nosníku složeného z ploch

Tuhost plošné podpory se zadává v MNm^{-3} , dá se tedy opět vypočítat z hodnoty poddajnosti bodových podpor. Protože jsou jednotlivá pole namodelovány jako segmenty, vyřeže se na okraji každého segmentu otvor poloviční šířky podpory v podélném směru (obr 5.11). V místě dotyku segmentů se tedy vytvoří otvor o ploše průřezu sloupů. Program RFEM neumožňuje takto rozdělený otvor propojit jednou novou plochou, musí tedy být vytvořeny dvě poloviční plochy vedle sebe.

Tímto řešením dochází ke stejnému výsledku jako při použití jedné spojitě plochy. Jediné na co je třeba si dát pozor, je zadání tuhosti plošné podpory, protože musí být vypočítána na tuto poloviční plochu. Výpočet tedy bude vypadat takto:

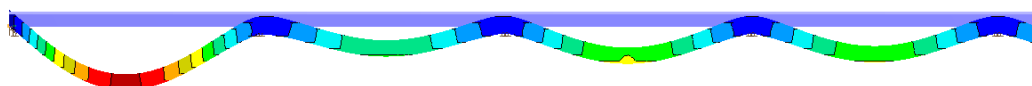
$$\frac{13132 \text{ MNm}^{-1}}{0,35 \cdot 1,4} = 26800 \text{ MNm}^{-3}$$



Obr. 5.11: Zobrazení výřezu pro podepíranou plochu na jednom segmentu mostu

Protože materiál i rozměry se shodují s prutovým průřezem, lze ponechat zatížení od vlastní tíhy.

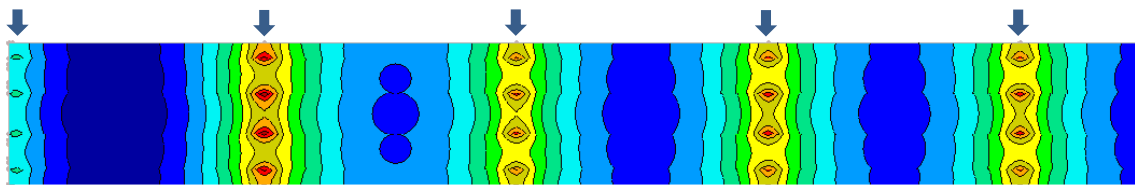
Pro porovnání těchto typů modelu s ostatními se bude využívat svislý průhyb a také napětí vznikající na horních a dolních vláknech horní desky.



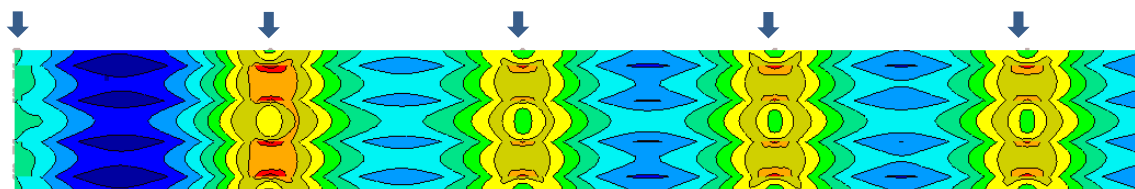
Obr. 5.12: Průběh deformací na plošném modelu na plošných podporách

Tab. 5.9: Hodnoty deformací na plošném modelu na plošných podporách v mm

U _{ab}	7,8
U _{bc}	3,9
U _{cd}	4,7
U _{de}	4,5



Obr. 5.13: Průběh normálového napětí na horních vláknech – pohled ve směru osy Z



Obr. 5.14: Průběh normálového napětí na dolních vláknech – pohled ve směru osy Z

Místa podpor jsou označeny šipkami.

Tab. 5.10: Hodnoty normálového napětí na horních a dolních vláknech v MPa

$\sigma_{ab,h}$	-2,14	$\sigma_{ab,d}$	-1,20
$\sigma_{b,h}$	4,34	$\sigma_{b,d}$	1,58
$\sigma_{bc,h}$	-1,08	$\sigma_{bc,d}$	-0,64
$\sigma_{c,h}$	3,54	$\sigma_{c,d}$	1,24
$\sigma_{cd,h}$	-1,28	$\sigma_{cd,d}$	-0,75
$\sigma_{d,h}$	3,72	$\sigma_{d,d}$	1,31
$\sigma_{de,h}$	-1,24	$\sigma_{de,d}$	-0,72
$\sigma_{e,h}$	3,67	$\sigma_{e,d}$	1,29

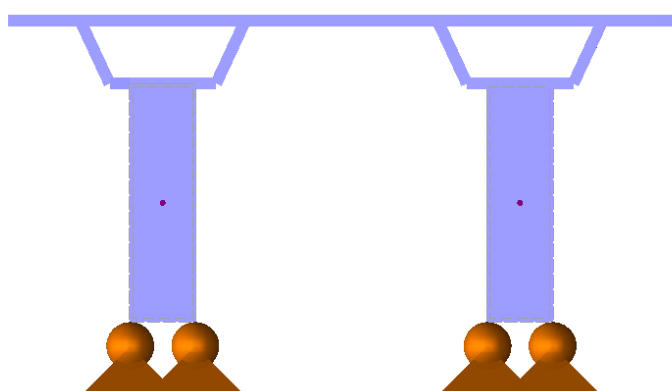
5.5 PLOŠNÝ MODEL PODEPŘEN SLOUPY

Tento model navazuje na model předešlý, rozdíl je pouze ve změně podepření. Místo plošných podpor, které po nastavení tuhosti nahrazují sloupy, jsou zde sloupy vloženy přímo a jsou definovány jako tělesa.

Prvním krokem je namodelovat stěny budoucího sloupu. Místo zadávání tloušťky se plocha definuje jako nulová. Pak už zbývá jen použít funkci pro tvorbu tělesa a vybrat obrysové plochy.

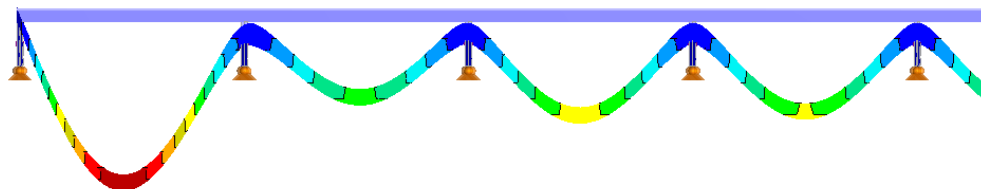
U těchto podpor se vyskytl podobný problém jako u podpor v předešlém případě, kdy nebylo možné vytvořit jednu plochu zaplňující dva sousední otvory. V místě každého sloupu bylo tedy třeba vytvořit dva, které na sebe těsně navazují.

Podpory budou umístěny až na spodní plochy sloupů. Budou zvoleny podpory plošné, bez dovolených posunů ve všech směrech. Tuhost zadávána nebude, protože tyto podpory už nenahrazují žádné těleso.



Obr. 5.15: Průřez mostu podepřeném sloupy na plošných podporách

Z výsledků nás zde opět zajímají hodnoty průhybů ve svislém směru a napětí na horních a dolních vláknech horní desky dvoukomorového nosníku.



Obr. 5.16: Průběh deformací na plošném modelu podepřeném sloupy

Tab. 5.11: Hodnoty deformací a napětí na plošném modelu podepřeném sloupy [mm, MPa]

U_{ab}	7,5	$\sigma_{ab,h}$	-2,13	$\sigma_{ab,d}$	-1,22
U_{bc}	3,8	$\sigma_{b,h}$	4,15	$\sigma_{b,d}$	1,52
U_{cd}	4,6	$\sigma_{bc,h}$	-1,12	$\sigma_{bc,d}$	-0,68
U_{de}	4,5	$\sigma_{c,h}$	3,42	$\sigma_{c,d}$	1,17
		$\sigma_{cd,h}$	-1,31	$\sigma_{cd,d}$	-0,78
		$\sigma_{d,h}$	3,59	$\sigma_{d,d}$	1,27
		$\sigma_{de,h}$	-1,27	$\sigma_{de,d}$	-0,76
		$\sigma_{e,h}$	3,54	$\sigma_{e,d}$	1,22

Vykreslené hodnoty napětí na horních a dolních vláknech se výrazně podobají předchozímu modelu, proto jsou zde uvedeny pouze hodnoty.

5.6 MODEL S KOMOROVÝMI NOSNÍKY SPOLUPŮSOBÍCÍMI S DESKOU

Poslední model je založen na odlišném principu než předešlé. Dvoukomorový nosník bude tvořit deska o tloušťce 500 mm a dva pruty komorového průřezu. Ty budou definovány jako žebra, která s deskou spolupůsobí.

Postup práce začíná namodelováním desky přes celou plochu mostu, tedy délky 200 m a šířky 14 m. V místech, kde se bude svislá osa symetrie žebra dotýkat desky, se vytvoří linie, kterou lze v nastavení do plochy integrovat. Dalším krokem je vytvoření prutu. Obvyčejný jednokomorový průřez je již definován v knihovně programu, stačí tedy navolit žádané rozměry a materiál. Typ nosníku bude nastaven jako žebro. Tím se nám otevře nabídka dalších možností. Můžeme zde nastavit excentricitu bodu, kterým bude průřez zachycen na připravenou linii. V našem případě to bude 509,7 mm v kladném směru osy Z. Tato hodnota značí vzdálenost těžiště od horního povrchu desky.

Dalším nastavením žebra je spolupůsobící šířka. Spolupůsobící šířku žeber je třeba vypočítat několikrát pro různé části nosníku. V podélném směru jsou stanoveny různé hodnoty pro krajní a vnitřní pole a místa nosníku nad podporou. V příčném směru bude třeba vypočítat zvlášť šířky pro vnitřní a vnější strany komor. Jelikož je model symetrický nejen podle osy Y, ale i podle osy X, bude vnější roznášecí šířka u levé komory na levé straně a u pravé napravo. Vnější strana bude označena indexem e , vnitřní indexem i . U každé vypočítané šířky musí být ověřena podmínky: $b_{eff} \leq 0,2 \cdot l_0$ a $b_{eff} \leq b$.^[7]

Krajní pole: $l_{0,a} = 0,85 \cdot l = 0,85 \cdot 25 = 21,25 \text{ m}$

$$b_e = 3,25 \text{ m}$$

$$b_{eff,e} = 0,2 \cdot b_e + 0,1 \cdot l_0 = 0,2 \cdot 3,25 + 0,1 \cdot 21,25 = 2,775 \text{ m}$$

$$\text{Podmínky: } 2,775 \leq 0,2 \cdot l_0 = 4,25 \quad \checkmark$$

$$2,775 \leq 3,25 \quad \checkmark$$

$$b_i = 3,75 \text{ m}$$

$$b_{eff,e} = 0,2 \cdot b_e + 0,1 \cdot l_0 = 0,2 \cdot 3,75 + 0,1 \cdot 21,25 = 2,875 \text{ m}$$

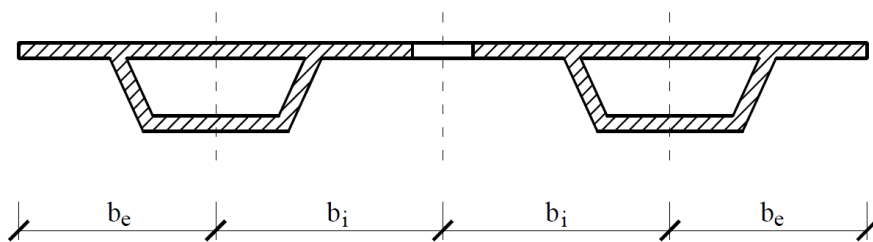
$$\text{Podmínky: } 2,875 \leq 0,2 \cdot l_0 = 4,25 \quad \checkmark$$

$$2,775 \leq 3,75 \quad \checkmark$$

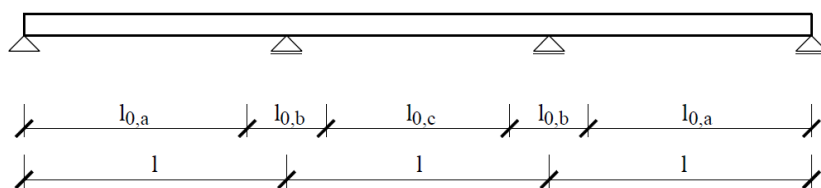
Spolupůsobící šířky pro vnitřní pole a místa nad podporou se vypočítají obdobně, jedinými rozdíly jsou hodnoty l_0 . Pro část nad podporou $l_{0,b} = 0,15 \cdot 2 \cdot l = 7,5 \text{ m}$, pro vnitřní pole $l_{0,c} = 0,7 \cdot l = 17,5 \text{ m}$. Výsledné hodnoty jsou vypsány v tabulce 5.12, dosazované hodnoty jsou vyznačeny na obrázcích 5.17 a 5.18.

Tab. 5.12: Hodnoty spolupůsobících šířek komorových nosníků [m]

	vnější	vnitřní
krajní pole	2,775	2,875
vnitřní pole	2,400	2,500
nad podporou	1,400	1,500



Obrázek 5.17: Označení rozměrů pro stanovení spolupůsobící šířky

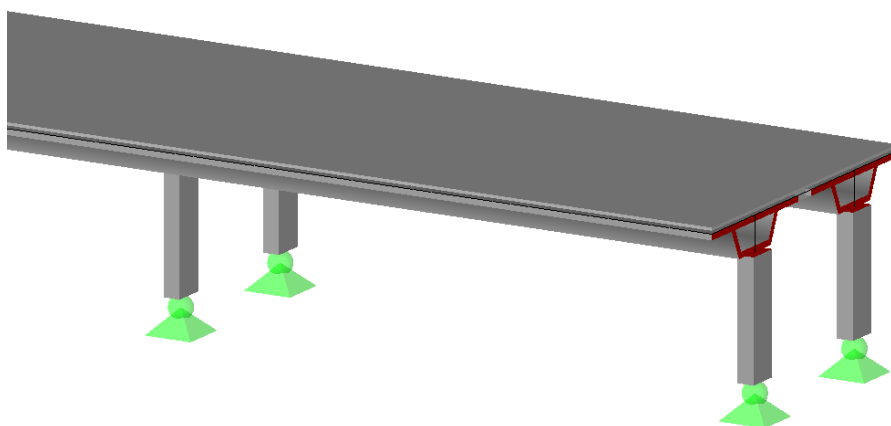


Obrázek 5.18: Vyznačení délek potřebných pro výpočet spolupůsobící šířky

V tuto chvíli lze nosníky zadat do modelu. Uchycujeme je na předem připravené linie po délkách l_0 .

Sloupy budou zadávány jako pruty obdélníkového průřezu délky 5 m ve směru osy Z. Odsazení od sousedních prutů bude nastaveno jako axiální. Propojení sloupů s deskou se provede manuálně přetažením bodu na horní ploše sloupu do střednice desky.

Jediné podepření, které lze uplatnit u takto orientovaného prutu, je podepření bodové. Podpory budou mít zabráněno posunům, pootočení bude možné kolem osy X i Y. Zatížení je opět pouze od vlastní tíhy.



Obr. 5.19: Model s komorovými nosníky spolupůsobícími s deskou

Po vyčíslení výsledků byly zjištěny tyto hodnoty:

Tab. 5.13: Hodnoty vnitřních sil a deformací na modelu se spolupůsobícími žebry [kN, kNm, mm]

V_a	1566,48
V_{ba}	-2133,74
V_{bc}	1861,73
V_{cb}	-1726,80
V_{cd}	1779,39
V_{dc}	-1809,14
V_{de}	1797,88
V_{ed}	-1790,62
V_{ef}	1790,62

M_a	0
$M_{ab,max}$	6598,96
M_b	-8844,18
$M_{bc,max}$	3342,34
M_c	-7029,22
$M_{cd,max}$	3916,51
M_d	-7372,64
$M_{de,max}$	3794,19
M_e	-7270,98

U_{ab}	10,8
U_{bc}	5,1
U_{cd}	6,3
U_{de}	6,0

6 POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ

6.1 PRUTOVÉ MODELY NA NEPODDAJNÝCH PODPORÁCH

U tohoto typu modelu byl statický výpočet proveden dvakrát. Ručně metodou pětimomentových rovnic a pomocí softwaru RFEM. Výsledky těchto dvou modelů se téměř shodují. Pro lepší orientaci při porovnávání, bude zvolena metoda zjišťování průměrných odchylek vyjádřených v procentech. Pro příklad uvedeme výpočet odchylky v posouvajících sil v bodě a . Prvním krokem je získat průměrnou hodnotu.

$$V_{a,\emptyset} = \frac{1429,29 + 1430,00}{2} = 1429,65$$

Dále by se měla tato hodnota postupně odečítat od původních hodnot a opět zprůměrovat. V případě, kde jsou porovnávány pouze dvě hodnoty, postačí odečíst výslednou hodnotu od vyšší posouvající síly. Tuto hodnotu si označíme jako l .

$$l = 1430,00 - 1429,65 = 0,35$$

Hodnota odchylky v místě a se vypočítá jako

$$\frac{l}{\emptyset_{Va}} \cdot 100 = \frac{0,35}{1429,65} \cdot 100 = 0,02 \%$$

Tímto způsobem se vypočítají hodnoty odchylek v místech maximálních hodnot na nosníku. Výsledky nakonec zprůměrujeme a získáme jednu procentuální hodnotu pro dva porovnávané nosníky.

Tab. 6.1: Porovnání vnitřních sil na prutovém nosníku na nepoddajných podporách [kN, kNm]

	ruční výpočet	RFEM
V _a	1429,29	1430,00
V _{ba}	-2195,71	-2196,40
V _{bc}	1915,34	1916,00
V _{cb}	-1709,66	-1710,40
V _{cd}	1784,46	1785,20
V _{dc}	-1840,54	-1841,30
V _{de}	1821,80	1822,60
V _{ed}	-1803,20	-1803,90
V _{ef}	1803,20	1803,90

	ruční výpočet	RFEM
M _a	0	0
M _{ab,max}	7044,38	7047,40
M _b	-9580,19	-9580,00
M _{bc,max}	3069,90	3070,90
M _c	-7009,27	-7010,00
M _{cd,max}	3971,07	3972,20
M _d	-7710,29	-7710,80
M _{de,max}	3734,38	3738,60
M _e	-7477,78	-7477,20

U jednoduchých prutových modelů budou porovnávány hodnoty posouvajících sil a ohybových momentů. Průměrná odchylka posouvajících sil je zde 0,020% a ohybových momentů 0,015%.

6.2 PRUTOVÉ MODELY NA PRUŽNÝCH PODPORÁCH

Rozdíl ručního výpočtu a výpočtu v programu bude porovnán stejným způsobem.

Tab. 6.2: Porovnání vnitřních sil prutového nosníku na pružných podporách [kN, kNm]

	ruční výpočet	RFEM
V _a	1430,52	1431,40
V _{ba}	-2194,48	-2195,00
V _{bc}	1913,91	1913,90
V _{cb}	-1711,09	-1712,50
V _{cd}	1784,91	1786,20
V _{dc}	-1840,1	-1840,20
V _{de}	1821,91	1822,10
V _{ed}	-1803,09	-1804,40
V _{ef}	1803,09	1804,40

	ruční výpočet	RFEM
M _a	0	0
M _{ab,max}	7056,51	7061,40
M _b	-9549,40	-9544,80
M _{bc,max}	3081,81	3078,50
M _c	-7014,05	-7027,90
M _{cd,max}	3971,70	3967,10
M _d	-7704,04	-7703,10
M _{de,max}	3742,01	3740,00
M _e	-7468,84	-7482,10

Odchylka posouvajících sil je 0,022% a ohybových momentů 0,049%. Z těchto výsledků vyplývá, že ruční výpočet prutu s pružnými podporami zřejmě není tak spolehlivý jako při obyčejném výpočtu spojitého nosníku. I přesto jsou ale hodnoty velmi přesné.

6.3 PRUTOVÝ MODEL NA LINIOVÝCH PODPORÁCH A REDUKCE OHYBOVÝCH MOMENTŮ

Tyto dva případy jsou poslední pro přímé porovnání stejného typu modelů vypočítaných jak ručním, tak softwarovým výpočtem. Porovnávat se budou pouze hodnoty redukovaných momentů.

Tab. 6.3: Porovnání redukovaných ohybových momentů nad podporami [kNm]

	ruční výpočet	RFEM
$M_{m,b}$	-9220,47	-9049,40
$M_{m,c}$	-6703,53	-6779,90
$M_{m,d}$	-7389,84	-7365,50
$M_{m,e}$	-7162,22	-7181,90

Odchylka těchto momentů vychází na 0,45 %, což je už horší výsledek než u dvou předešlých srovnání. Pro lepší představu porovnáme ještě dva modely vytvořené softwarem a to model na liniových podporách a prutový model na pružných podporách.

Tab. 6.4: Porovnání vnitřních sil na prutovém nosníku na pružných podporách a s liniovým podepřením [kN, kNm]

	liniové podpory	pružné podpory		liniové podpory	pružné podpory
V_a	1405,30	1431,40	M_a	0	0
V_{ba}	-2119,60	-2195,00	$M_{ab,max}$	6759,90	7061,40
V_{bc}	1853,20	1913,90	M_b	-9049,40	-9544,80
V_{cb}	-1671,70	-1712,50	$M_{bc,max}$	3156,30	3078,50
V_{cd}	1739,00	1786,20	M_c	-6779,90	-7027,90
V_{dc}	-1785,90	-1840,20	$M_{cd,max}$	3937,50	3967,10
V_{de}	1769,80	1822,10	M_d	-7365,50	-7703,10
V_{ed}	-1755,10	-1804,40	$M_{de,max}$	3740,80	3740,00
V_{ef}	1755,10	1804,40	M_e	-7181,90	-7482,10

Odchyłky těchto hodnot jsou 1,39 % u posouvajících sil a 1,57 % u ohybových momentů. Tyto hodnoty jsou horší než předešlé, je tedy zřejmé, že hodnoty na nosníku s liniovým podepřením a hodnoty dle vzorců (4.10), (4.11) velmi dobře aproximují. Tento způsob je tedy přesnější než pouhé nastavení tuhosti podpor.

6.4 PLOŠNÝ MODEL NA PLOŠNÝCH PODPORÁCH

Další porovnání bude provedeno mezi plošným modelem na plošných podporách a prutovým modelem na pevných podporách. K tomuto základnímu modelu budou pro názornost vztaženy i následující porovnání.

Aby bylo možné porovnat zjištěné napětí na deskách s ohybovými momenty na prutech, je třeba provést jednoduchý výpočet dle vzorce:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z \quad (6.1)$$

Dle vzorce (6.1) se vypočítají napětí nad podporou i v poli a to jak na horní, tak i na dolní ploše desky. Je zde řeč o vodorovné desce, která tvoří horní část komor.

Veličiny potřebné pro výpočet jsou:

$$I_y = 1,5 \, m^4$$

$$z_h = -0,495 \, m$$

$$z_d = -0,245 \, m$$

Moment setrvačnosti i vzdálenosti těžiště od horního a dolního povrchu desky je možné zjistit například z programu Shape massive, ve kterém byly vytvořeny dvoukomorové průřezy prutu.

Ohybové momenty dosazované do rovnice (6.1) budou dosazovány dle ručně vypočtených hodnot prutového nosníku na nepoddajných podporách. Jejich souhrn pro připomenutí je v následující tabulce, zároveň s několika vypočítanými hodnotami napětí.

Tab. 6.5: Hodnoty ohybových momentů na spojitém nosníku na nepoddajných podporách v kNm

M_a	0	$\sigma_{x,h,ab} = \frac{7044,38 \cdot 10^3}{1,5} \cdot (-0,495) = -2,32 \text{ MPa}$
$M_{ab,max}$	7044,38	
M_b	-9580,19	$\sigma_{x,h,b} = \frac{-9580,19 \cdot 10^3}{1,5} \cdot (-0,495) = 3,16 \text{ MPa}$
$M_{bc,max}$	3069,90	
M_c	-7009,27	$\sigma_{x,d,ab} = \frac{7044,38 \cdot 10^3}{1,5} \cdot (-0,245) = -1,15 \text{ MPa}$
$M_{cd,max}$	3971,07	
M_d	-7710,29	
$M_{de,max}$	3734,38	
M_e	-7477,78	

Tab. 6.6: Porovnání hodnot normálového napětí na horních a dolních vláknech desky na prutovém a plošném modelu v MPa

	prutový model	plošný model		prutový model	plošný model
$\sigma_{x,h,ab}$	-2,32	-2,14	$\sigma_{x,d,ab}$	-1,15	-1,20
$\sigma_{x,h,b}$	3,16	4,34	$\sigma_{x,d,b}$	1,56	1,58
$\sigma_{x,h,bc}$	-1,01	-1,08	$\sigma_{x,d,bc}$	-0,50	-0,64
$\sigma_{x,h,c}$	2,31	3,54	$\sigma_{x,d,c}$	1,14	1,24
$\sigma_{x,h,cd}$	-1,31	-1,28	$\sigma_{x,d,cd}$	-0,65	-0,75
$\sigma_{x,h,d}$	2,54	3,72	$\sigma_{x,d,d}$	1,26	1,31
$\sigma_{x,h,de}$	-1,23	-1,24	$\sigma_{x,d,de}$	-0,61	-0,72
$\sigma_{x,h,e}$	2,47	3,67	$\sigma_{x,d,e}$	1,22	1,29

Průměrná odchylka hodnot na horních vláknech je dost vysoká, dosahuje hodnoty 10,51 %. Na dolních vláknech je odchylka 4,92 %. Tyto hodnoty byly očekávané, z důvodu porovnávání odlišných typů modelů. Důležité je, že hodnoty se opravdu na první pohled podobají a v některých částech nosníku se téměř shodují.

6.5 PLOŠNÝ MODEL PODEPŘEN SLOUPY

Tento případ porovnáme stejným způsobem jako předchozí, se základním prutovým modelem. Hodnoty momentu setrvačnosti i polohy těžiště zůstávají stejné. Napětí se totiž počítá pouze na komorovém průřezu, sloupy zde nahrazují funkci podpor.

Tab. 6.7: Porovnání hodnot normálového napětí mezi prutovým modelem na nepoddajných podporách a plošným modelem podepřeným sloupy v MPa

	prutový model	plošný model		prutový model	plošný model
$\sigma_{x,h,ab}$	-2,32	-2,13	$\sigma_{x,d,ab}$	-1,15	-1,22
$\sigma_{x,h,b}$	3,16	4,15	$\sigma_{x,d,b}$	1,56	1,52
$\sigma_{x,h,bc}$	-1,01	-1,12	$\sigma_{x,d,bc}$	-0,50	-0,68
$\sigma_{x,h,c}$	2,31	3,42	$\sigma_{x,d,c}$	1,14	1,17
$\sigma_{x,h,cd}$	-1,31	-1,31	$\sigma_{x,d,cd}$	-0,65	-0,78
$\sigma_{x,h,d}$	2,54	3,59	$\sigma_{x,d,d}$	1,26	1,27
$\sigma_{x,h,de}$	-1,23	-1,27	$\sigma_{x,d,de}$	-0,61	-0,76
$\sigma_{x,h,e}$	2,47	3,54	$\sigma_{x,d,e}$	1,22	1,22

Odchyłky hodnot na horních i dolních vláknech jsou obdobné jako v případě modelu na plošných podporách a to 9,86 % a 5,16 %. Proto zjistíme, jak velké rozdíly jsou mezi plošným modelem na plošných podporách a modelem uloženým na sloupech.

Tab. 6.8: Porovnání normálových napětí na plošném modelu na plošných podporách a na obdobném modelu podepřeným sloupy

	plošné podpory	sloupy		plošné podpory	sloupy
$\sigma_{x,h,ab}$	-2,14	-2,13	$\sigma_{x,d,ab}$	-1,20	-1,22
$\sigma_{x,h,b}$	4,34	4,15	$\sigma_{x,d,b}$	1,58	1,52
$\sigma_{x,h,bc}$	-1,08	-1,12	$\sigma_{x,d,bc}$	-0,64	-0,68
$\sigma_{x,h,c}$	3,54	3,42	$\sigma_{x,d,c}$	1,24	1,17
$\sigma_{x,h,cd}$	-1,28	-1,31	$\sigma_{x,d,cd}$	-0,75	-0,78
$\sigma_{x,h,d}$	3,72	3,59	$\sigma_{x,d,d}$	1,31	1,27
$\sigma_{x,h,de}$	-1,24	-1,27	$\sigma_{x,d,de}$	-0,72	-0,76
$\sigma_{x,h,e}$	3,67	3,54	$\sigma_{x,d,e}$	1,29	1,22

Procentuální hodnota odchylek je 1,49 % pro horní a 2,21 % pro dolní vlákna desky. Je tedy zřejmé, že rozdíl mezi uložením na sloupy a plošným podepřením změní napjatost desky a to i přes to, že plošným podporám byla zadána tuhost odpovídající právě těmto sloupům.

6.6 MODEL S KOMOROVÝMI NOSNÍKY SE SPOLUPŮSOBÍCÍ DESKOU

Porovnání tohoto modelu s ostatními je velmi zajímavé, jedná se totiž o model, který je založen na odlišném principu než všechny ostatní. Srovnáme opět výsledky vnitřních sil se základním modelem na nepoddajných podporách.

Tab. 6.9: Porovnání vnitřních sil na prutovém modelu na nepoddajných podporách a modelu s komorami definovanými jako žebra

	prutový model	spolupůsobící žebra		prutový model	spolupůsobící žebra
V_a	1429,29	1566,48	M_a	0	0
V_{ba}	-2195,71	-2133,74	$M_{ab,max}$	7044,38	6598,96
V_{bc}	1915,34	1861,73	M_b	-9580,19	-8844,18
V_{cb}	-1709,66	-1726,80	$M_{bc,max}$	3069,90	3342,34
V_{cd}	1784,46	1779,39	M_c	-7009,27	-7029,22
V_{dc}	-1840,54	-1809,14	$M_{cd,max}$	3971,07	3916,51
V_{de}	1821,80	1797,88	M_d	-7710,29	-7372,64
V_{ed}	-1803,20	-1790,62	$M_{de,max}$	3734,38	3794,19
V_{ef}	1803,20	1790,62	M_e	-7477,78	-7270,98

Hodnota průměrné odchylky je zde pouze 1,14 % u posouvajících sil a 2,10 % u ohybových momentů. To je velmi dobrý výsledek s přihlédnutím k tomu, že tento model byl původně zamýšlen jako pokusný a nebyly zde očekávány příliš přesné výsledky.

6.7 POROVNÁNÍ Z HLEDISKA DOSAŽENÝCH PRŮHYBŮ

	01	02	03	04	05	06
U _{ab}	7,3	7,5	7,1	7,8	7,5	10,8
U _{bc}	1,8	2,1	2,2	3,9	3,8	5,1
U _{cd}	3,2	3,5	3,4	4,7	4,6	6,3
U _{de}	2,8	3,1	3,1	4,5	4,5	6,0

01 – prutový model na nepoddajných podporách

02 – prutový model na pružných podporách

03 – prutový model s liniovým podepřením

04 – plošný model s plošným podepřením

05 – plošný model podepřen sloupy

06 – model s oddělenými komorovými nosníky spolupůsobící s horní deskou

Pomocí stanovení deformace ve směru osy Z, tedy průhybu, lze porovnat všechny modely, které byly v softwaru vytvořeny. Není třeba žádných přepočtů a rozdíly vidíme okamžitě. Z hodnot vyplývá, že dle průhybu je model s nosníky definovanými jako žebra (06), nejméně shodný s ostatními. To je způsobeno odlišným způsobem tvorby tohoto modelu. Ostatní modely mají průhyby velmi podobné. Například hodnota maximálního průhybu u prutového modelu na pružných podporách a plošného modelu na sloupech, který by měl být nejvíce podobný reálnému řešení, jsou stejné, což je velmi dobrý výsledek.

7 ZÁVĚR

Cílem práce, kromě osvojení si práce v programu a nastudování různých možností řešení, bylo porovnání různých typů modelů. Po zhodnocení dosažených výsledků byly zjištěny následující informace. Výsledky na prutovém modelu metodou pětimomentových rovnic se shodovaly s výsledky statického výpočtu v programu RFEM. Tato metoda je tedy velmi spolehlivá. Redukce ohybových momentů pomocí vzorce prokázala podobnost s hodnotami získanými programem a pomohla tak k reálnějšímu výpočtu vnitřních sil. U modelů vytvořených z ploch bylo zjištěno, že je zde viditelný rozdíl mezi umístěním sloupů a podpor, které tyto sloupy mají nahrazovat, i přes to, že zadaná tuhost odpovídá jeho geometrii. V rámci maximálního průhybu se model na sloupech nejlépe shodoval se zjednodušeným modelem prutovým.

Po přihlédnutí k použitým zjednodušením a zpřesněním výpočtů a z dosažených výsledků vychází, že nejpřesnějšími modely by měly být právě plošný model na sloupech a prutový model na pružných podporách, jako jeho zjednodušený případ.

Tato práce by pro zpřesnění výsledků mohla být dále rozšířena o statické porovnání při různých typech zatížení, například od dopravy. Další možností zpřesnění výsledků, by mohla být úprava sítě konečných prvků.

Literatura

- [1] PETŘÍČKOVÁ, Monika. SN spojitý nosník: Sestavení třímomentové rovnice. *Stavební provoz* [online]. [cit. 2014-04-21]. Dostupné z: http://www.stavebni-provoz.moxo.cz/doc/stavebni_mechanika/12_cviceni_na_sn_nosnik_materialy_pro_sestaveni_rovnice.pdf
- [2] KADLČÁK, Jaroslav a Jiří KYTÝR. *Statika stavebních konstrukcí*. Třetí dotisk druhého vyd. V Brně: VUTIUM, 2009, 431 s. ISBN 978-80-214-3428-8.
- [3] VRBKA, Martin a Michal VAVERKA. Metoda konečných prvků. FSI VUT V BRNĚ. *Ústav konstruování: FSI VUT v Brně* [online]. [cit. 2014-04-21]. Dostupné z: http://old.uk.fme.vutbr.cz/kestazeni/MKP/prednaska1_mkp.pdf
- [4] Metoda konečných prvků. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2014-05-17]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Metoda_konecných_prvků
- [5] VARS BRNO A.S. *Systém hospodaření s mosty: (BMS)* [online]. 2001 [cit. 2014-04-21]. Dostupné z: <http://bms.vars.cz/>
- [6] ČÍRTEK, Ladislav. *Prvky betonových konstrukcí: Modul CM5, Navrhování jednoduchých prvků*. Brno: VUT, 2005.
- [7] ČSN EN 1992-1-1. *Eurokód 2: Navrhování betonových konstrukcí: Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby*. Praha: Český normalizační institut, 2006.
- [8] *Program RFEM 5 Prostorové konstrukce metodou konečných prvků: Popis programu*. Praha: Dlubal software s.r.o., 2012.