



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

PLOCHY S KONSTANTNÍ GAUSSOVOU KŘIVOSTÍ

SURFACES WITH CONSTANT GAUSS CURVATURE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Silvie Zemanová

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.

BRNO 2022

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Studentka: **Silvie Zemanová**
Studijní program: Matematické inženýrství
Studijní obor: bez specializace
Vedoucí práce: **prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.**
Akademický rok: 2021/22

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Plochy s konstantní Gaussovou křivostí

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Na základě studia odborné literatury podat přehled ploch s konstantní Gaussovou křivostí. U vybraných ploch podrobněji popsat jejich vlastnosti.

Cíle bakalářské práce:

1. Provést klasifikaci ploch s konstantní Gaussovou křivostí.
2. U některých z výše uvedených ploch podrobněji popsat jejich vlastnosti.
3. Uvést souvislosti vybraných ploch s modely neeuklidovské geometrie.

Seznam doporučené literatury:

PRESSLEY, A. Elementary Differential Geometry. London: Springer Verlag, 2012.

UMEHARA, M., YAMADA, K. Differential Geometry of Curves and Surfaces. London: World Scientific, 2015.

GRAY, A. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces, Studies of Advanced Mathematics.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2021/22

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá popisem ploch s konstantní Gaussovou křivostí a jejím hlavním cílem je provést klasifikaci těchto ploch. První část je věnována klasifikaci rotačních ploch s konstantní Gaussovou křivostí. Následuje popis vybraných ploch s nulovou Gaussovou křivostí, na kterých je ukázáno, že u nich lze dospět ke stejnému tvaru první základní formy. Další část se věnuje klasifikaci všech ploch s nulovou Gaussovou křivostí. Práce je doplněna obrázky vybraných ploch pro lepší představu a snazší porozumění textu.

Abstract

This bachelor thesis deals with description of surfaces with constant Gaussian curvature and its main goal is to classify these surfaces. The first part is devoted to the classification of surfaces of revolution with constant Gaussian curvature. The next part consists of description of selected surfaces with zero Gaussian curvature, on which is shown that the same shape of the first fundamental form can be achieved. The last part deals with the classification of all surfaces with zero Gaussian curvature. For easier understanding of the text, the thesis includes images of selected surfaces.

Klíčová slova

Plochy, Gaussova křivost, Pseudosféra, Traktrix, Rotační plochy, Přímkové plochy

Keywords

Surfaces, Gaussian curvature, Pseudosphere, Tractrix, Surfaces of revolution, Ruled surfaces

ZEMANOVÁ, Silvie. *Plochy s konstantní Gaussovou křivostí*, Brno, 2022. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. Vedoucí práce Miroslav Doupovec.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Plochy s konstantní Gaussovou křivostí* vypracovala samostatně pod vedením prof. RNDr. Miroslava Doupovce, CSc., dr. h. c. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Silvie Zemanová

Chtěla bych poděkovat svému vedoucímu práce prof. RNDr. Miroslavu Doupovcovi, CSc., dr. h. c. za cenné rady a připomínky, vstřícnost při konzultacích a přínosnou spolupráci.

Silvie Zemanová

Obsah

1	Úvod	12
2	Základní pojmy z diferenciální geometrie	13
2.1	Křivky	13
2.2	Plochy	14
2.2.1	Přímkové plochy	19
2.2.2	Rotační plochy	20
2.3	Eliptický integrál druhého druhu	20
3	Klasifikace rotačních ploch s konstantní Gaussovou křivostí	21
3.1	Gaussova křivost rotační plochy	21
3.2	Nulová Gaussova křivost	22
3.3	Kladná Gaussova křivost	23
3.4	Záporná Gaussova křivost	25
4	Příklady ploch s nulovou Gaussovou křivostí	30
4.1	Rovina	30
4.2	Kruhový válec	30
4.3	Kruhový kužel	31
4.4	Shrnutí	32
5	Klasifikace ploch s nulovou Gaussovou křivostí	32
6	Souvislosti s neeuklidovskou geometrií	38
6.1	Hyperbolická geometrie	38
6.2	Eliptická geometrie	38
7	Shrnutí	39

1 Úvod

Abychom určili zakřivení nějaké plochy, musíme zadat směr pohybu po ploše. Například kruhový válec je maximálně zakřivený ve směru tečen k horizontálním kružnicím, zatímco ve směru vertikálních přímek je válec "rovný". Na druhou stranu, rovina nebo sféra jsou ve všech směrech zakřiveny stejně.

V klasické diferenciální geometrii se "zakřivení" plochy vyjadřuje pomocí pojmu normálové křivosti κ_n^a , kde a je tečný vektor k ploše S (přesněji řečeno, $a \in T_X S$ patří do tečného prostoru plochy S v bodě $X \in S$). Extremální hodnoty κ_1 a κ_2 normálové křivosti κ_n^a se pak nazývají hlavní křivosti plochy. V případě našeho kruhového válce o poloměru r jsou hlavní křivosti rovny $\kappa_1 = 0$ (ve směru vertikálních přímek) a $\kappa_2 = \frac{1}{r}$ (ve směru tečen k horizontálním kružnicím).

Ploše S však můžeme v každém jejím bodě $X \in S$ přiřadit Gaussovu křivost K , která na rozdíl od normálové křivosti κ_n^a nezávisí na směru. Gaussova křivost se definuje jako součin $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2$ hlavních křivosti v daném bodě a má v diferenciální geometrii celou řadu pozoruhodných aplikací. Uvedme nyní aspoň některé. Například pokud $K > 0$, tak daným bodem plochy (eliptický bod) neprochází žádná přímka a pokud $K < 0$, tak daným bodem plochy (hyperbolický bod) prochází právě dvě přímky. Přímkové plochy jsou pak charakterizovány vztahem $K \leq 0$, rozvinutelné plochy vztahem $K = 0$ a izometrické plochy mají v odpovídajících si bodech stejnou Gaussovu křivost K . Rovina má ve všech bodech nulovou Gaussovu křivost a sféra má ve všech bodech konstantní kladnou Gaussovu křivost.

Vzhledem k zásadnímu významu Gaussovy křivosti v diferenciální geometrii má tedy smysl zabývat se popisem ploch s konstantní Gaussovou křivostí, což bude předmětem této bakalářské práce. Předložená práce má následující strukturu.

V následující druhé kapitole připomeneme některé pojmy z klasické diferenciální geometrie křivek a ploch, které budeme potřebovat v dalším textu. Většina pojmů a výsledků z druhé kapitoly je převzata ze skript [3]. Výsledek z Věty 2.31 je obsažen v monografii [7] jako cvičení, my jsme jej zde však dokázali jako samostatné tvrzení. Do druhé kapitoly jsme rovněž zařadili podkapitulu 2.3 o eliptických integrálech druhého druhu, které budeme potřebovat v parametrickém vyjádření některých rotačních ploch s konstantní Gaussovou křivostí.

Třetí kapitola je věnována klasifikaci rotačních ploch s konstantní Gaussovou křivostí. Nejdříve odvodíme jednoduchý vztah (3.2) pro Gaussovu křivost rotační plochy, jejíž profil je parametrizován obloukem. Podle Věty 2.31 se při klasifikaci ploch můžeme omezit na případy $K = 0$, $K = 1$ a $K = -1$. Ukážeme, že do parametrického vyjádření některých ploch s konstantní kladnou a konstantní zápornou Gaussovou křivostí podstatným způsobem vstupují eliptické integrály druhého druhu.

Ve čtvrté kapitole uvedeme přehled nejznámějších ploch s nulovou Gaussovou křivostí. Pátá kapitola je pak věnována klasifikaci všech ploch s nulovou Gaussovou křivostí (nikoliv nutně rotačních ploch). Ukážeme, že v případě nulové Gaussovy křivosti se můžeme omezit na přímkové plochy. V šesté kapitole ukážeme některé souvislosti ploch s konstantní Gaussovou křivostí s neeuklidovskou geometrií. V závěrečné sedmé kapitole provedeme shrnutí a uvedeme zde rovněž některé obecné výsledky.

2 Základní pojmy z diferenciální geometrie

Abychom mohli studovat plochy s konstantní Gaussovou křivostí, musíme nejdříve uvést některé základní pojmy a poznatky z diferenciální geometrie křivek a ploch. Většina pojmů a výsledků z této přípravné kapitoly pochází ze skript [3]. Nejdříve definujeme pojem vektorové funkce v , kterou budeme používat k zavedení křivek a ploch.

Definice 2.1. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Zobrazení $v : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazveme vektorovou funkcí na intervalu I .

Vektorovou funkci pak můžeme zapsat ve tvaru $v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t))$, kde reálné funkce $v_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývají složky vektorové funkce v .

Definice 2.2. Vektorová funkce $v : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ má limitu $v_0 \in \mathbb{R}^n$ v bodě $t_0 \in \mathbb{R}$, jestliže $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ takové, že $\forall t$ splňující $|t - t_0| < \delta$, $t \neq t_0$, platí $\|v(t) - v_0\| < \epsilon$. Potom píšeme $v_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} v(t)$.

Definice 2.3. Vektorová funkce $v : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ je v bodě $t_0 \in \mathbb{R}$ spojitá, jestliže $\lim_{t \rightarrow t_0} v(t) = v(t_0)$.

Definice 2.4. Existuje-li $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$, nazveme ji derivací vektorové funkce $v(t)$ v bodě t_0 . Tuto derivaci značíme $\frac{dv(t_0)}{dt}$ nebo $v'(t_0)$. Derivace vyššího řádu pak definujeme obvyklým způsobem iterací.

Bez důkazu uvádíme následující tvrzení o spojitosti a derivaci vektorové funkce.

Věta 2.5. Vektorová funkce $v : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ je v bodě $t_0 \in I$ spojitá, jestliže všechny její složky jsou spojitě v bodě t_0 . Vektorová funkce v má v bodě $t_0 \in I$ derivaci, jestliže všechny její složky v_i mají derivaci v bodě t_0 .

2.1 Křivky

Definice 2.6. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Zobrazení $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazveme pohyb v $\mathbb{R}^n$.

Definice 2.7. Pohyb $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazveme regulární, jestliže $\forall t \in I$ platí $\frac{df(t)}{dt} \neq \vec{0}$ (vpravo je označení nulového vektoru).

Definice 2.8. Pohyb $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazveme jednoduchý, jestliže zobrazení f je injektivní, tj. $\forall t_1, t_2 \in I, t_1 \neq t_2$ platí $f(t_1) \neq f(t_2)$.

Definice 2.9. Jednoduchou křivkou třídy C^r nazveme množinu $C \subset \mathbb{R}^n$ takovou, že existuje jednoduchý a regulární pohyb $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ třídy C^r , jehož obrazem je množina C , tj. $f(I) = C$. Zobrazení $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ se pak nazývá parametrizace křivky C .

Regularita pohybu znamená, že v každém bodě máme nenulovou derivaci vektorové funkce f , tedy nenulovou rychlost pohybu. V každém bodě $t \in I$ tedy existuje nenulový tečný vektor křivky $f'(t)$. Jednoduchost pohybu zajistí, že křivka sama sebe neprotíná. Označením křivka třídy C^r , resp. funkce třídy C^r , máme na mysli křivku, jejíž parametrizace má spojitě všechny derivace až do řádu r včetně.

Definice 2.10. Křivkou třídy C^r nazveme množinu $C \subset \mathbb{R}^n$, takovou že $\forall X \in C$ existuje okolí $o(X)$ bodu X tak, že průnik $C \cap o(X)$ je jednoduchá křivka třídy C^r . Parametrizace těchto průniků $C \cap o(X)$ se pak nazývají lokální parametrizace křivky C .

V dalším textu zavedeme jisté zjednodušení. Podle vzorce známého z analýzy se délka křivky mezi body $X = f(t_1)$ a $Y = f(t_2)$ spočítá pomocí vzorce

$$\int_{t_1}^{t_2} \|f'(\tau)\| d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{df_1(\tau)}{d\tau}\right)^2 + \dots + \left(\frac{df_n(\tau)}{d\tau}\right)^2} d\tau.$$

Definice 2.11. Parametrizace $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ se nazývá přirozená, jestliže $\forall s \in I$ platí $\|f'(s)\| = 1$, tedy tečný vektor je v každém bodě jednotkový. V tomto případě parametr značíme písmenem s a nazýváme ho přirozený parametr nebo také oblouk.

Délka oblouku křivky mezi body $X = f(s_1)$ a $Y = f(s_2)$ se potom rovná

$$\int_{s_1}^{s_2} \|f'(\tau)\| d\tau = s_2 - s_1.$$

V dalším textu budeme mít při použití parametru s na mysli přirozenou parametrizaci křivky.

Pro definici křivosti křivky C budeme potřebovat pojem styku křivek.

Definice 2.12. Křivky C_1, C_2 mají ve společném bodě X styk řádu k , jestliže existují takové jejich lokální parametrizace $f_1(s), f_2(s)$, $f_1(s_0) = f_2(s_0) = X$, že se rovnají jejich derivace v bodě s_0 až do řádu k , tj. $\forall i = 1, \dots, k$ platí $\frac{d^i f_1(s_0)}{ds^i} = \frac{d^i f_2(s_0)}{ds^i}$.

Mají-li dvě křivky ve společném bodě X styk 1. řádu, znamená to, že mají v daném bodě společnou tečnu. Má-li křivka se svojí tečnou v bodě X styk 2. řádu, daný bod nazýváme inflexní, např. každý bod přímky je inflexní. V každém neinflexním bodě křivky C pak existuje jediná kružnice, která má styk 2. řádu s křivkou C a tato kružnice se nazývá oskulační.

Definice 2.13. Křivostí křivky C rozumíme převrácenou hodnotu poloměru oskulační kružnice v jejím neinflexním bodě, v případě inflexního bodu je křivost rovna nule. Křivost v bodě s_0 značíme $\kappa(s_0)$.

V neinflexním bodě $X = f(s_0)$ platí pro křivost vztah $\kappa(s_0) = \left\| \frac{d^2 f(s_0)}{ds^2} \right\|$, přičemž vektor $\frac{d^2 f(s_0)}{ds^2}$, jehož velikost nám dává křivost, se nazývá vektor křivosti.

2.2 Plochy

K definici plochy je potřeba dvou parametrů, takže k jejímu zavedení budeme potřebovat vektorovou funkci dvou proměnných. Jedná se o zobrazení $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, kde $D \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina. Limitu, spojitost a derivaci vektorové funkce dvou proměnných bychom zavedli analogicky jako u vektorové funkce jedné proměnné, nebudeme je zde tedy uvádět.

Definice 2.14. Jednoduchou plochou třídy C^r nazveme množinu $S \subset \mathbb{R}^3$ takovou, že existuje otevřená množina $D \subset \mathbb{R}^2$ a injektivní zobrazení $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ třídy C^r , jehož obrazem je množina S , tj. $f(D) = S$ a v každém bodě $(u, v) \in D$ jsou vektory f'_u a f'_v lineárně nezávislé. Zobrazení $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ nazýváme parametrizace plochy S .

Množina D se nazývá oblast parametrů. Stejně jako u jednoduché křivky požadujeme u jednoduché plochy injektivnost zobrazení f , což zajistí, aby plocha sama sebe neprotínala. Požadavek lineární nezávislosti vektorů f'_u a f'_v na celé množině D je ekvivalentní s požadavkem $f'_u \times f'_v \neq \vec{0}$. Zaručí nám existenci tečné roviny plochy S v každém bodě $(u, v) \in D$. Tečná rovina plochy S v bodě X je určena bodem $X \in S$ a vektory f'_u a f'_v a značí se $\tau_X S$. Jedná se o euklidovský prostor. Můžeme také pracovat s jeho zaměřením $T_X S := \{\vec{AB}; A, B \in \tau_X S\}$, tento vektorový prostor se nazývá tečný prostor plochy S v bodě X .

Definice 2.15. Plochou třídy C^r nazveme množinu $S \subset \mathbb{R}^3$ takovou, že $\forall X \in S$ existuje okolí $o(X)$ bodu X tak, že $S \cap o(X)$ je jednoduchá plocha třídy C^r . Parametrizace průniků $S \cap o(X)$ se pak nazývají lokální parametrizace plochy S .

Lokálně můžeme každou plochu vyjádřit třemi způsoby:

- (i) parametricky: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D\}$
- (ii) implicitně: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; F(x, y, z) = 0\}$
- (iii) explicitně: $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = f(x, y), (\text{resp. } x = f(y, z) \text{ nebo } y = f(x, z))\}$

Podobně jako styk křivek nyní zavedeme také styk křivky s plochou a styk dvou ploch.

Definice 2.16. Křivka C a plocha S mají ve společném bodě X styk řádu k , jestliže lze na ploše S najít křivku $\bar{C}$ procházející společným bodem X takovou, že křivka C má s křivkou $\bar{C}$ v tomto bodě styk řádu k .

Definice 2.17. Plocha S_1 a plocha S_2 mají ve společném bodě X styk řádu k , jestliže každá křivka na ploše S_2 procházející bodem X má v tomto bodě styk řádu k s plochou S_1 .

Mají-li dvě plochy S_1 a S_2 ve společném bodě X styk 1. řádu, znamená to, že mají v daném bodě společnou tečnou rovinu, tedy $\tau_X S_1 = \tau_X S_2$. Říkáme, že plochy S_1 a S_2 se dotýkají.

Věta 2.18. Plocha S_1 a plocha S_2 mají ve společném bodě X styk řádu k právě tehdy, když existují lokální parametrizace těchto ploch $f_1(u, v)$ a $f_2(u, v)$ splňující $f_1(u_0, v_0) = X = f_2(u_0, v_0)$ takové, že $\forall i = 0, \dots, k$, kde $i_1 + i_2 = i$ platí

$$\frac{\partial^i f_1(u_0, v_0)}{\partial u^{i_1} \partial v^{i_2}} = \frac{\partial^i f_2(u_0, v_0)}{\partial u^{i_1} \partial v^{i_2}}.$$

Dále budeme potřebovat pojem první a druhé základní formy plochy. V obou případech se bude jednat o kvadratické formy, tedy zobrazení g z vektorového prostoru $V = T_X S$ do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$ ($g : V \rightarrow \mathbb{R}$) takové, že k němu existuje symetrická bilineární forma f taková, že $\forall v \in V$ platí $g(v) = f(v, v)$. Bilineární forma je zobrazení $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ lineární vzhledem k oběma vektorovým argumentům. Uvažujme nyní jednoduchou plochu S s parametrizací $f(u, v)$. Její tečná rovina $\tau_X S$ v bodě X je určena vektory f'_u a f'_v v daném bodě. Libovolný vektor a z tečného prostoru $T_X S$ tak můžeme zapsat jako lineární kombinaci tečných vektorů $a = a^1 f'_u + a^2 f'_v$, kde $a^1, a^2 \in \mathbb{R}$ jsou koeficienty. Nyní vyjádříme skalární součin dvou vektorů $a, b \in T_X S$ ve tvaru

$$a \cdot b = (a^1 f'_u + a^2 f'_v) \cdot (b^1 f'_u + b^2 f'_v) = a^1 b^1 (f'_u \cdot f'_u) + (a^1 b^2 + a^2 b^1) (f'_u \cdot f'_v) + a^2 b^2 (f'_v \cdot f'_v).$$

Skalární součiny vektorů f'_u a f'_v označíme následovně:

$$f'_u \cdot f'_u = g_{11}, \quad f'_u \cdot f'_v = g_{12} = g_{21}, \quad f'_v \cdot f'_v = g_{22}.$$

Získali jsme symetrickou bilineární formu f na $T_X S$ s koeficienty g_{ij} :

$$f(a, b) = a \cdot b = a^1 b^1 g_{11} + (a^1 b^2 + a^2 b^1) g_{12} + a^2 b^2 g_{22} = a^i b^j g_{ij}.$$

(V posledním vzorci používáme obvyklou Einsteinovu sumační konvenci). Existuje tedy kvadratická forma φ_1 taková, že $\forall a \in T_X S$ platí $\varphi_1(a) = f(a, a) = a \cdot a$,

$$\varphi_1(a) = a \cdot a = \|a\|^2 = g_{11}(a^1)^2 + 2g_{12}a^1 a^2 + g_{22}(a^2)^2.$$

Definice 2.19. Uvedená kvadratická forma, kterou značíme symbolem φ_1 , se nazývá první základní forma plochy S . Symboly g_{ij} , kterými jsme označili skalární součiny tečných vektorů f'_u a f'_v , se nazývají koeficienty první základní formy.

Koeficienty první základní formy jsou funkcemi proměnných u, v . Přeznačíme-li vektor $a \in T_X S$ následujícím způsobem $a = (a^1, a^2) = (du, dv)$, tak první základní formu plochy můžeme zapsat ve tvaru

$$\varphi_1 = g_{11}(du)^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}(dv)^2.$$

Plocha S však nemusí být vždy zadána pouze parametricky, proto uvedeme ještě vztahy pro výpočet koeficientů první základní formy pro implicitní a explicitní vyjádření. Pokud je plocha S zadána implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$, pak pro koeficienty g_{ij} platí vztahy

$$g_{11} = 1 + \left(\frac{F'_x}{F'_z}\right)^2 \quad g_{12} = g_{21} = \frac{F'_x F'_y}{(F'_z)^2}, \quad g_{22} = 1 + \left(\frac{F'_y}{F'_z}\right)^2.$$

Pokud je plocha S zadána explicitně rovnicí $z = f(x, y)$, pak pro koeficienty g_{ij} platí vztahy

$$g_{11} = 1 + (f'_x)^2 \quad g_{12} = g_{21} = f'_x \cdot f'_y, \quad g_{22} = 1 + (f'_y)^2.$$

Uvažujme nyní plochu S s parametrizací $f(u, v)$ a křivku C na ploše S , jejíž rovnice v oblasti parametrů D jsou $u = u(s), v = v(s)$. Křivka C je tedy v prostoru dána parametrizací $\gamma(s) = f(u(s), v(s))$. V každém bodě X plochy S lze určit jednotkový vektor normály

$$n_X = \frac{f'_u \times f'_v}{\|f'_u \times f'_v\|},$$

orientace tohoto vektoru nám určuje orientaci plochy. Pokud by při spojitým pohybu po uzavřené křivce na ploše S přešel vektor normály v opačný směr, plochu nazveme neorientovatelnou. Výše jsme uvedli vzorec pro křivost křivky zadané přirozenou parametrizací, který můžeme nyní aplikovat na křivku C ležící na ploše S . Potom platí $\kappa(s) = \left\| \frac{d^2 \gamma(s)}{ds^2} \right\|$.

Definice 2.20. Pro křivku C na ploše S definujeme normálovou křivost κ_n v bodě X jako kolmý průmět vektoru křivosti do směru normálového vektoru n , tj. $\kappa_n = n \cdot \frac{d^2 \gamma(s)}{ds^2}$.

Protože normálová křivost křivky C na ploše S v bodě X závisí pouze na tečném vektoru křivky v daném bodě (nikoliv na křivce samotné), můžeme mluvit o normálové křivosti pro daný tečný směr na ploše S .

Definice 2.21. Pro jednotkový tečný vektor $a \in T_X S, a = \frac{d\gamma(s)}{ds}$ definujeme normálovou křivost plochy S ve směru vektoru a vztahem $\kappa_n^a = n \cdot \frac{d^2 \gamma(s)}{ds^2}$ (jedná se o skalární součin uvedených vektorů).

Nyní použijeme symboly h_{ij} pro označení následujících skalárních součinů

$$h_{11} = n \cdot f''_{uu}, \quad h_{12} = h_{21} = n \cdot f''_{uv}, \quad h_{22} = n \cdot f''_{vv}.$$

Zobrazení $\varphi_2(a) = a^i a^j h_{ij}$ je kvadratickou formou na tečném prostoru $T_X S$. Nyní budeme opět vektor $a \in T_X S$ značit ve tvaru $a = (du, dv)$.

Definice 2.22. Kvadratická forma $\varphi_2 = h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2$ se nazývá druhá základní forma plochy S . Symbolům h_{ij} říkáme koeficienty druhé základní formy.

Druhá základní forma plochy S přiřazuje každému jednotkovému tečnému vektoru $a = (du, dv)$ normálovou křivost ve směru tohoto vektoru, tedy $\varphi_2(a) = \kappa_n^a$. Pro libovolný (ne nutně jednotkový) vektor $a \in T_X S$ platí

$$\kappa_n^a = \frac{\varphi_2(a)}{\varphi_1(a)}.$$

Význam normálové křivosti κ_n^a je v tom, že vyjadřuje zakřivení (ohýbání) plochy ve směru vektoru $a \in T_X S$. Dále uvedeme vztahy pro výpočet koeficientů druhé základní formy z různých vyjádření plochy S . Pokud je plocha S zadána parametricky, tedy $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D\}$, pak pro koeficienty h_{ij} platí vztahy

$$h_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}} \begin{vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \\ x''_{ij} & y''_{ij} & z''_{ij} \end{vmatrix}$$

kde indexy i a j u druhých derivací funkcí x, y, z značí proměnné u a v , tj. $x''_{ij} = x''_{vu}$. Pokud je plocha S zadána implicitně rovnicí $F(x, y, z) = 0$, pak pro koeficienty h_{ij} platí vztahy

$$h_{11} = \frac{F'_x F''_{zx} - F''_{xx} F'_z}{R}, \quad h_{12} = h_{21} = \frac{F'_x F''_{zy} - F''_{xy} F'_z}{R}, \quad h_{22} = \frac{F'_y F''_{zy} - F''_{yy} F'_z}{R},$$

kde $R = |F'_z|(F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z)$.

Pokud je plocha S zadána explicitně rovnicí $z = f(x, y)$, pak pro koeficienty h_{ij} platí vztahy

$$h_{11} = \frac{f''_{xx}}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}}, \quad h_{12} = h_{21} = \frac{f''_{xy}}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}}, \quad h_{22} = \frac{f''_{yy}}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}}.$$

Nyní se budeme věnovat typům bodů na ploše. Všechny body můžeme rozdělit do čtyř tříd podle počtu asymptotických směrů v daném bodě.

Definice 2.23. Asymptotickým směrem plochy S v bodě X rozumíme směr daný vektorem $a \in T_X S$, pro který platí $\kappa_n^a = 0$.

Směr daný nenulovým vektorem $a \in T_X S, a = (du, dv)$ je asymptotický právě tehdy, když pro něj platí

$$\varphi_2(a) = h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2 = 0.$$

Vydělíme-li tuto rovnici členem dv^2 a označíme-li $\frac{du}{dv} = \varrho$, získáme kvadratickou rovnici

$$h_{11}\varrho^2 + 2h_{12}\varrho + h_{22} = 0,$$

jejíž diskriminant D je roven záporně vzatému determinantu koeficientů druhé základní formy, tj. $D = -\det(h_{ij}) = h_{12}^2 - h_{11}h_{22}$. V případě záporného determinantu je diskriminant kladný, a tak rovnice v daném bodě dává dva asymptotické směry. V případě nulového determinantu existuje pouze jeden asymptotický směr a v případě kladného determinantu neexistuje žádný asymptotický směr.

Definice 2.24. Planárním bodem rozumíme bod $X \in S$, ve kterém má plocha S a její tečná rovina styk 2. řádu.

V planárním bodě je normálová křivost v libovolném tečném směru rovna nule. Také všechny koeficienty druhé základní formy jsou v planárním bodě nulové a $\forall a \in T_X S$ platí $\varphi_2(a) = 0$, tedy všechny směry jsou zde asymptotické.

Definice 2.25. Neplanární bod $X \in S$ nazveme eliptický, jestliže je v tomto bodě $\det(h_{ij}) > 0$. Neplanární bod $X \in S$ nazveme parabolický, jestliže je v tomto bodě $\det(h_{ij}) = 0$. Neplanární bod $X \in S$ nazveme hyperbolický, jestliže je v tomto bodě $\det(h_{ij}) < 0$.

Z toho vyplývá, že v eliptickém bodě neexistují žádné asymptotické směry, v parabolickém bodě máme jeden takový směr a hyperbolickém bodě dva asymptotické směry.

Definice 2.26. Sférickým bodem rozumíme bod $X \in S$, jestliže existuje sféra, která má s plochou S v daném bodě styk 2. řádu.

Sférický bod je pak speciálním typem eliptického bodu, v němž je normálová křivost ve všech tečných směrech stejná. Ve sféricém bodě $X = f(u_0, v_0)$ je druhá základní forma $\varphi_2(u_0, v_0)$ konstantním násobkem první základní formy $\varphi_1(u_0, v_0)$.

Definice 2.27. Směry $a \in T_X S$ v nesféricém bodě $X \in S$, ve kterých nabývá normálová křivost κ_n^a své extrémní hodnoty, nazýváme hlavní směry a odpovídajícím křivostem říkáme hlavní křivosti, značíme je κ_1, κ_2 .

Definice 2.28. Gaussovou křivostí plochy S v nesféricém bodě $X \in S$ rozumíme součin hlavních křivosti, značíme $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2$. Střední křivostí plochy S v bodě X rozumíme průměr hlavních křivosti a značíme $H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$.

Hodnoty Gaussovy a střední křivosti lze vypočítat z koeficientů první a druhé základní formy plochy S pomocí vztahů

$$K = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})}, \quad H = \frac{g_{11}h_{22} - 2g_{12}h_{12} + g_{22}h_{11}}{2\det(g_{ij})}.$$

Protože platí $\det(g_{ij}) > 0$, Gaussova křivost přejímá znaménko $\det(h_{ij})$. V eliptickém bodě je tedy Gaussova křivost kladná, což znamená, že hlavní křivosti zde mají stejná znaménka. V hyperbolickém bodě je Gaussova křivost záporná, tedy jedna hlavní křivost je záporná a druhá kladná. V parabolickém bodě je Gaussova křivost rovna nule, a tak jedna z hlavních křivosti musí být nulová. V planárním bodě pokládáme Gaussovu křivost rovnu nule.

Ačkoli se zde nebudeme dopodrobna věnovat všem různým zobrazením mezi plochami, uveďme nyní definici izometrického zobrazení mezi plochami S_1 a S_2 .

Definice 2.29. Bijektivní zobrazení $g : S_1 \rightarrow S_2$ třídy C^r , které zachovává délky odpovídajících si křivek, nazýváme izometrickým zobrazením.

Izometrické zobrazení zachovává nejen délky odpovídajících si křivek, ale také úhly, které tyto křivky svírají, a obsahy, které vymezují. Podstatnou vlastností izometrických ploch je to, že v odpovídajících si bodech mají stejný tvar první základní formy, a dokonce také stejnou Gaussovu křivost. Bez důkazu uvedeme ještě Gaussovu větu, která je jedním z hlavních výsledků klasické diferenciální geometrie a značí existenci určitých vztahů mezi koeficienty první a druhé základní formy, a zároveň nám potvrzuje výše zmíněnou vlastnost izometrických ploch. Do češtiny se její název překládá jako znamenitá věta.

Věta 2.30 (Theorema egregium). *Gaussova křivost K plochy S je úplně určena koeficienty první základní formy g_{ij} a jejich prvními a druhými parciálními derivacemi.*

Nyní dokážeme větu, kterou využijeme při samotné klasifikaci ploch s konstantní Gaussovou křivostí.

Věta 2.31. *Nechť $f(u, v)$ je parametrizace plochy S a nechť $\bar{S}$ je plocha s parametrizací $\bar{f}(u, v) = c \cdot f(u, v)$, kde $c \in \mathbb{R}$. Je-li K Gaussova křivost plochy S , tak Gaussova křivost $\bar{K}$ plochy $\bar{S}$ je*

$$\bar{K} = \frac{1}{c^2} \cdot K.$$

Důkaz. Ze vztahů pro výpočet koeficientů 1. základní formy přímo odvodíme, že platí $\bar{g}_{ij} = c^2 \cdot g_{ij}$. Dále plochy S a $\bar{S}$ mají společný vektor normály a ze vztahů pro výpočet koeficientů 2. základní formy pak plyne $\bar{h}_{ij} = c \cdot h_{ij}$. Pak platí

$$\bar{K} = \frac{\det(\bar{h}_{ij})}{\det(\bar{g}_{ij})} = \frac{c^2 \det(h_{ij})}{c^4 \det(g_{ij})} = \frac{1}{c^2} \cdot K.$$

□

U ploch s konstantní Gaussovou křivostí se tedy můžeme bez újmy na obecnosti omezit na případy $K = 0$, $K = 1$ a $K = -1$.

2.2.1 Přímkové plochy

V této kapitole se budeme věnovat přímkovým plochám. Tyto plochy jsou pro nás důležité, protože jsou pro ně charakteristické určité vlastnosti, které uplatníme při jejich popisu z hlediska Gaussovy křivosti. K definici přímkové plochy nejdříve zavedeme jednoparametrickou soustavu přímek.

Definice 2.32. Zobrazení $p : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, které každému $t \in (a, b)$ přiřadí přímku $p(t)$, nazýváme jednoparametrickou soustavou přímek, přímka $p(t)$ se nazývá tvořící přímkou této soustavy.

Parametrizaci jednoparametrické soustavy přímek lze provést takto:

$$f(t, v) = g(t) + vh(t), \tag{2.1}$$

kde $g(t)$ je nějaký bod tvořící přímky $p(t)$ a $h(t)$ je její nenulový směrový vektor. Každá jednoparametrická soustava přímek ovšem netvoří plochu. K tomu je zapotřebí, aby vektory $f'_t = g'(t) + vh'(t)$ a $f'_v = h(t)$ byly ve všech bodech lineárně nezávislé. Také předpokládáme, že zobrazení $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$, a tedy i $f : (a, b) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ jsou třídy C^r .

Definice 2.33. Plocha $S \subset \mathbb{R}^3$, která je částí jednoparametrické soustavy přímek, se nazývá přímková plocha.

Tedy (2.1) je parametrické vyjádření přímkové plochy. Vidíme, že zobrazení $g(t)$ je parametrizací prostorové křivky, tato křivka se nazývá řídící křivka přímkové plochy. Podél této křivky se pohybuje tvořící přímka určená vektorem $h(t)$. Z definice přímkové plochy vyplývá, že každým jejím bodem prochází alespoň jedna přímka ležící na této ploše, a že v každém bodě existuje alespoň jeden asymptotický směr. Na přímkové ploše tedy nenajdeme žádné eliptické body (protože v eliptických bodech neexistují žádné asymptotické směry).

Přímkové plochy můžeme rozdělit do dvou kategorií, a to na rozvinutelné a zborcené. Věnujme se nyní plochám rozvinutelným.

Definice 2.34. Jestliže je podél každé tvořící přímky přímkové plochy S tečná rovina ve všech bodech stejná, plocha se nazývá rozvinutelná.

Pro přímkovou plochu s výše uvedenou parametrizací (2.1) platí, že plocha je rozvinutelná právě tehdy, když

$$[g'(t), h(t), h'(t)] = 0.$$

Uvedený smíšený součin je nulový, pokud jsou vektory $g'(t)$, $h(t)$ a $h'(t)$ lineárně závislé, tj. pokud leží v jedné rovině. Významnou vlastností rozvinutelné přímkové plochy je, že její Gaussova křivost je nulová, tj. $K = 0$. Druhou kategorií přímkových ploch jsou plochy zborcené, u kterých se tečná rovina podél tvořící přímky může měnit.

2.2.2 Rotační plochy

Rotační plocha vznikne rotací rovinné křivky (které říkáme profil), kolem přímky ležící v rovině této křivky, tj. osy rotace. Uvažujme kartézský souřadný systém x - y - z . Bez újmy na obecnosti lze za osu rotace vzít osu z a profil definovat v rovině xz . Parametrizaci profilu pak zapíšeme takto: $\gamma(v) = (\gamma_1(v), 0, \gamma_3(v))$, přičemž uvažujeme přirozenou parametrizaci a požadujeme, aby profil neprotínal osu z . Rotací profilu kolem osy z získáme rotační plochu, jejíž parametrické vyjádření je $f(u, v) = (\gamma_1(v) \cos u, \gamma_1(v) \sin u, \gamma_3(v))$. Dále požadujeme lineární nezávislost vektorů $f'_u = (-\gamma_1 \sin u, \gamma_1 \cos u, 0)$ a $f'_v = (\gamma'_1 \cos u, \gamma'_1 \sin u, \gamma'_3)$, která je ekvivalentní s nenulovostí jejich vektorového součinu

$$f'_u \times f'_v = (-\gamma_1 \sin u, \gamma_1 \cos u, 0) \times (\gamma'_1 \cos u, \gamma'_1 \sin u, \gamma'_3) = (\gamma_1 \gamma'_3 \cos u, -\gamma_1 \gamma'_3 \sin u, \gamma_1 \gamma'_1) \neq \vec{0}.$$

Podmínka je splněna, jestliže v žádném bodě nejsou γ'_1 a γ'_3 současně nulové, což je ekvivalentní požadavku regularity křivky γ .

2.3 Eliptický integrál druhého druhu

Při klasifikaci rotačních ploch s konstantní Gaussovou křivostí budeme potřebovat pojem eliptického integrálu druhého druhu. Poznamenejme, že se jedná o vyšší transcendentní funkce, které obecně nelze vyjádřit pomocí konečného počtu operací s elementárními funkcemi.

Definice 2.35. Eliptický integrál druhého druhu je definován vztahem

$$E(u, a) = \int_0^u \sqrt{1 - a \sin^2 t} dt. \quad (2.2)$$

Je zřejmé, že platí $E(u, 1) = \sin u$, takže $E(u, a)$ lze považovat za jisté zobecnění funkce sinus. Použitím identity $\sinh ix = i \sin x$ lze dále ukázat

$$-iE(iu, -a) = \int_0^u \sqrt{1 - a \sinh^2 t} dt.$$

Připomeňme, že hyperbolický sinus a hyperbolický kosinus jsou definovány vztahy

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

3 Klasifikace rotačních ploch s konstantní Gaussovou křivostí

3.1 Gaussova křivost rotační plochy

Pro klasifikaci rotačních ploch s konstantní Gaussovou křivostí vyjdeme z parametrického vyjádření rotační plochy. Uvažujme parametrizaci plochy

$$f(u, v) = (\gamma_1(v) \cos u, \gamma_1(v) \sin u, \gamma_3(v)), \quad (3.1)$$

která vznikla rotací tvořící křivky (profilu)

$$\gamma(v) = (\gamma_1(v), 0, \gamma_3(v))$$

ležící v rovině xz , přičemž uvažujeme přirozenou parametrizaci této křivky. Z toho plyne, že ve všech bodech takové křivky platí: $\|\gamma'(v)\| = \gamma_1'^2 + \gamma_3'^2 = 1$. Víme, že pro Gaussovou křivost plochy obecně platí: $K = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})}$. Určíme tedy koeficienty první a druhé základní formy rotační plochy (s výše uvedenou parametrizací), dosadíme do vztahu pro Gaussovou křivost a pokusíme se ho zjednodušit. K tomu budeme potřebovat první a druhé parciální derivace parametrizace f a jednotkový normálový vektor n .

$$\begin{aligned} f'_u &= (-\gamma_1 \sin u, \gamma_1 \cos u, 0), \quad f'_v = (\gamma_1' \cos u, \gamma_1' \sin u, \gamma_3'), \\ f''_{uu} &= (-\gamma_1 \cos u, -\gamma_1 \sin u, 0), \quad f''_{uv} = (-\gamma_1' \sin u, \gamma_1' \cos u, 0), \quad f''_{vv} = (\gamma_1'' \cos u, \gamma_1'' \sin u, \gamma_3''), \\ n &= \frac{f'_u \times f'_v}{\|f'_u \times f'_v\|} = \frac{(\gamma_1 \gamma_3' \cos u, \gamma_1 \gamma_3' \sin u, -\gamma_1 \gamma_1')}{\sqrt{\gamma_1^2 (\gamma_3'^2 + \gamma_1'^2)}} = \frac{(\gamma_1 \gamma_3' \cos u, \gamma_1 \gamma_3' \sin u, -\gamma_1 \gamma_1')}{\gamma_1} = \\ &= (\gamma_3' \cos u, \gamma_3' \sin u, -\gamma_1'). \end{aligned}$$

Nyní určíme koeficienty g_{ij} první základní formy:

$$\begin{aligned} g_{11} &= f'_u \cdot f'_u = (-\gamma_1 \sin u, \gamma_1 \cos u, 0) \cdot (-\gamma_1 \sin u, \gamma_1 \cos u, 0) = \gamma_1^2, \\ g_{12} &= f'_u \cdot f'_v = (-\gamma_1 \sin u, \gamma_1 \cos u, 0) \cdot (\gamma_1' \cos u, \gamma_1' \sin u, \gamma_3') = 0, \\ g_{22} &= f'_v \cdot f'_v = (\gamma_1' \cos u, \gamma_1' \sin u, \gamma_3') \cdot (\gamma_1' \cos u, \gamma_1' \sin u, \gamma_3') = \gamma_1'^2 + \gamma_3'^2 = 1. \end{aligned}$$

Dále určíme koeficienty h_{ij} druhé základní formy:

$$\begin{aligned} h_{11} &= n \cdot f''_{uu} = (\gamma_3' \cos u, \gamma_3' \sin u, -\gamma_1') \cdot (-\gamma_1 \cos u, -\gamma_1 \sin u, 0) = -\gamma_1 \gamma_3', \\ h_{12} &= n \cdot f''_{uv} = (\gamma_3' \cos u, \gamma_3' \sin u, -\gamma_1') \cdot (-\gamma_1' \sin u, \gamma_1' \cos u, 0) = 0, \\ h_{22} &= n \cdot f''_{vv} = (\gamma_3' \cos u, \gamma_3' \sin u, -\gamma_1') \cdot (\gamma_1'' \cos u, \gamma_1'' \sin u, \gamma_3'') = \gamma_3' \gamma_1'' - \gamma_1' \gamma_3''. \end{aligned}$$

Koeficienty dosadíme do vzorce pro Gaussovou křivost a upravíme. Díky přirozené parametrizaci platí rovnost $\gamma_1'^2(v) + \gamma_3'^2(v) = 1$. Když tuto rovnici zderivujeme podle proměnné v , získáme další rovnost $\gamma_1' \gamma_1'' + \gamma_3' \gamma_3'' = 0$, kterou využijeme v následujících úpravách:

$$K = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})} = \frac{-\gamma_1 \gamma_3' (\gamma_3' \gamma_1'' - \gamma_1' \gamma_3'')}{\gamma_1^2} = \frac{-\gamma_1 \gamma_3'^2 \gamma_1'' - \gamma_1 \gamma_1'^2 \gamma_3''}{\gamma_1^2} = -\frac{\gamma_1 \gamma_1'' (\gamma_1'^2 + \gamma_3'^2)}{\gamma_1^2} = -\frac{\gamma_1''}{\gamma_1}.$$

Výpočet Gaussovy křivosti rotační plochy (jejíž profil je parametrizován obloukem) se nám tak zjednodušil na tvar

$$K = -\frac{\gamma_1''}{\gamma_1}, \quad (3.2)$$

který budeme dále využívat.

3.2 Nulová Gaussova křivost

První případ, kterým se budeme zabývat, je nulová Gaussova křivost ve všech bodech plochy. Položme tedy $K = -\frac{\gamma_1''}{\gamma_1} = 0$, což dává $\gamma_1'' = 0$. Tuto rovnici dvakrát zintegrujeme a získáme tak vyjádření

$$\gamma_1'(v) = a, \quad \gamma_1(v) = av + b,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty. Protože uvažujeme přirozenou parametrizaci tvořící křivky, můžeme ze vztahu $\gamma_1'^2 + \gamma_3'^2 = 1$ vyjádřit γ_3' ve tvaru $\gamma_3'(v) = \pm\sqrt{1-a^2}$. Odtud integrací dostaneme

$$\gamma_3(v) = \pm\sqrt{1-a^2} v + c,$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je další konstanta. Aby byl výraz pod odmocninou větší nebo roven nule, musí platit $|a| \leq 1$. Bez újmy na obecnosti můžeme vybrat znaménko $+$, protože kladné znaménko ze záporného bychom získali rotací o 180° . Analogicky, konstantu c můžeme položit rovnu nule (toho lze docílit posunutím podél osy z). Odvodili jsme tak následující parametrizaci rotační plochy s nulovou Gaussovou křivostí

$$f(u, v) = ((av + b) \cos u, (av + b) \sin u, \sqrt{1-a^2} v), \quad (3.3)$$

kde $a, b \in \mathbb{R}, |a| \leq 1$. Pokud zde položíme $a = 0$, získáme parametrizaci kruhového válce

$$f(u, v) = (b \cos u, b \sin u, v).$$

Dále je-li $a = \pm 1$, tj. $|a| = 1$, obdržíme parametrizaci roviny xy

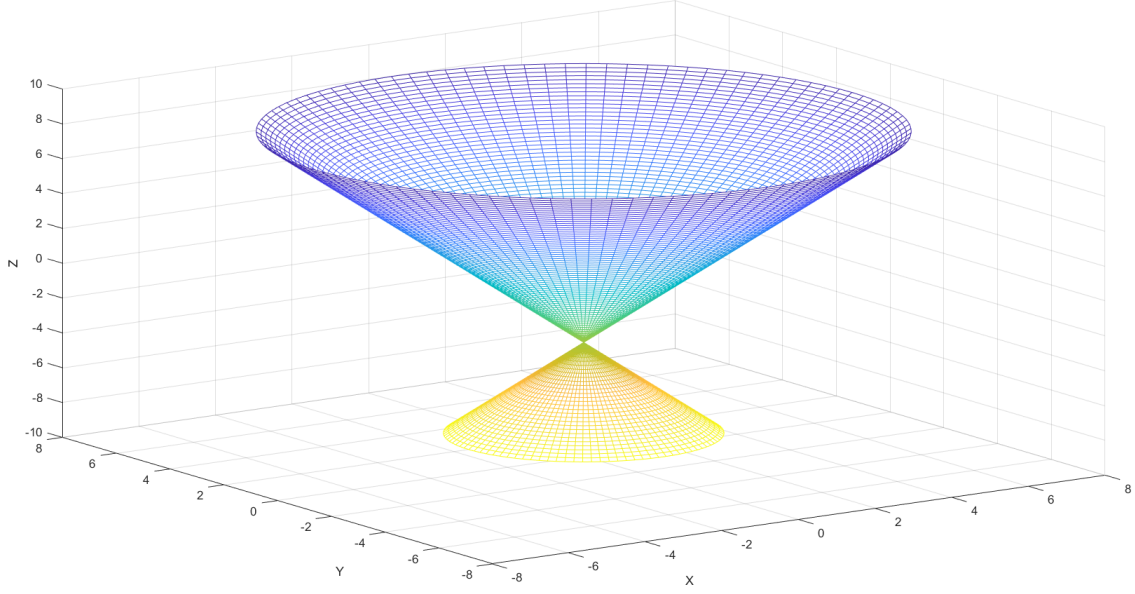
$$f(u, v) = ((\pm v + b) \cos u, (\pm v + b) \sin u, 0).$$

Nakonec pokud $0 < |a| < 1$, získáme z rovnice (3.3) parametrizaci kruhového kužele. O tom se snadno přesvědčíme transformací $\tilde{v} = av + b$, která převede (3.3) na parametrizaci kruhového kužele

$$f(u, \tilde{v}) = (\tilde{v} \cos u, \tilde{v} \sin u, \frac{\tilde{v} - b}{a} \sqrt{1-a^2}).$$

Čím více se hodnota $|a|$ bude blížit k 0, tím bude vrcholový úhel kuželové plochy ostřejší, např. pro $a = \frac{1}{2}$ máme následující předpis.

$$f(u, v) = \left(\left(\frac{1}{2}v + b \right) \cos u, \left(\frac{1}{2}v + b \right) \sin u, \sqrt{\frac{3}{4}} v \right) \quad (3.4)$$



Obrázek 1: Kruhový kužel s parametrizací (3.4).

3.3 Kladná Gaussova křivost

Nyní přistoupíme k druhému případu, kdy je Gaussova křivost ve všech bodech plochy kladná a konstantní. Podle Věty 2.31 se můžeme omezit na případ $K = 1$. S využitím vztahu (3.2) pro Gaussovu křivost rotační plochy dostaneme diferenciální rovnici $K = -\frac{\gamma_1''}{\gamma_1} = 1$, což lze zapsat ve tvaru

$$\gamma_1'' + \gamma_1 = 0.$$

Tato obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu má obecné řešení

$$\gamma_1(v) = a \cos(v + b),$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou konstanty. Zde můžeme položit $b = 0$, čehož dosáhneme reparametrizací $u^* = u, v^* = v + b$. Odvodili jsme tedy

$$\gamma_1(v) = a \cos v.$$

Díky přirozené parametrizaci rotující křivky $\gamma(v) = (\gamma_1(v), 0, \gamma_3(v))$ lze ze vztahu $\gamma_1'^2 + \gamma_3'^2 = 1$ vyjádřit γ_3' ve tvaru

$$\gamma_3'(v) = \pm \sqrt{1 - \gamma_1'^2} = \pm \sqrt{1 - a^2 \sin^2 v}, \quad (3.5)$$

což dává

$$\gamma_3(v) = \int_0^v \sqrt{1 - a^2 \sin^2 t} dt = E(v, a^2), \quad (3.6)$$

kde E značí eliptický integrál druhého druhu z kapitoly 2.35. Dokázali jsme tedy následující větu

Věta 3.1. *Nechť S je rotační plocha s konstantní Gaussovou křivostí $K = 1$. Pak S je částí plochy s parametrizací (3.1), kde*

$$\gamma_1(v) = a \cos v, \quad \gamma_3(v) = \int_0^v \sqrt{1 - a^2 \sin^2 t} dt = E(v, a^2) \quad (3.7)$$

pro $a \in \mathbb{R}$.

Poznamenejme, že výše uvedená věta byla v mírně modifikovaném tvaru dokázána v monografii [4].

Poznámka 3.1. Primitivní funkce při výpočtu (3.7) existuje ve tvaru elementární funkce pouze v případě, že $a = 0$ nebo $a = \pm 1$. Pro $a = 0$ dostáváme $f(u, v) = (0, 0, v)$, což ovšem není vyjádření žádné plochy. Pro $a = 1$ dostáváme parametrické vyjádření sféry o poloměru r

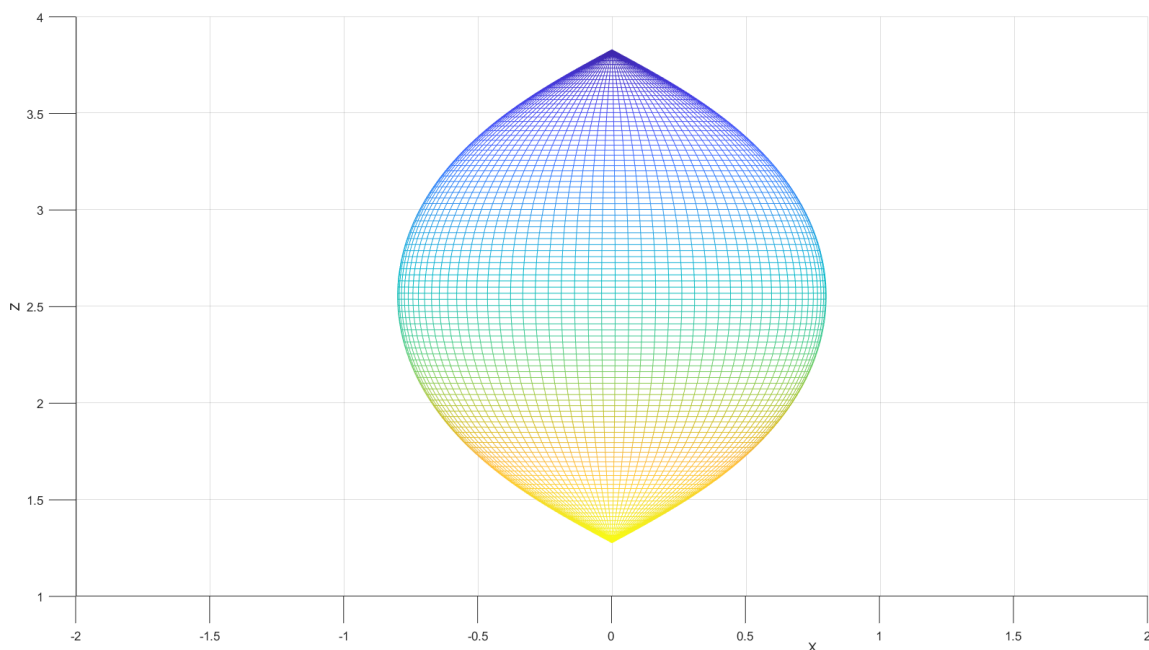
$$f(u, v) = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v).$$

Pro $a = -1$ bychom dostali stejnou sféru, jen otočenou o 180° kolem osy z .

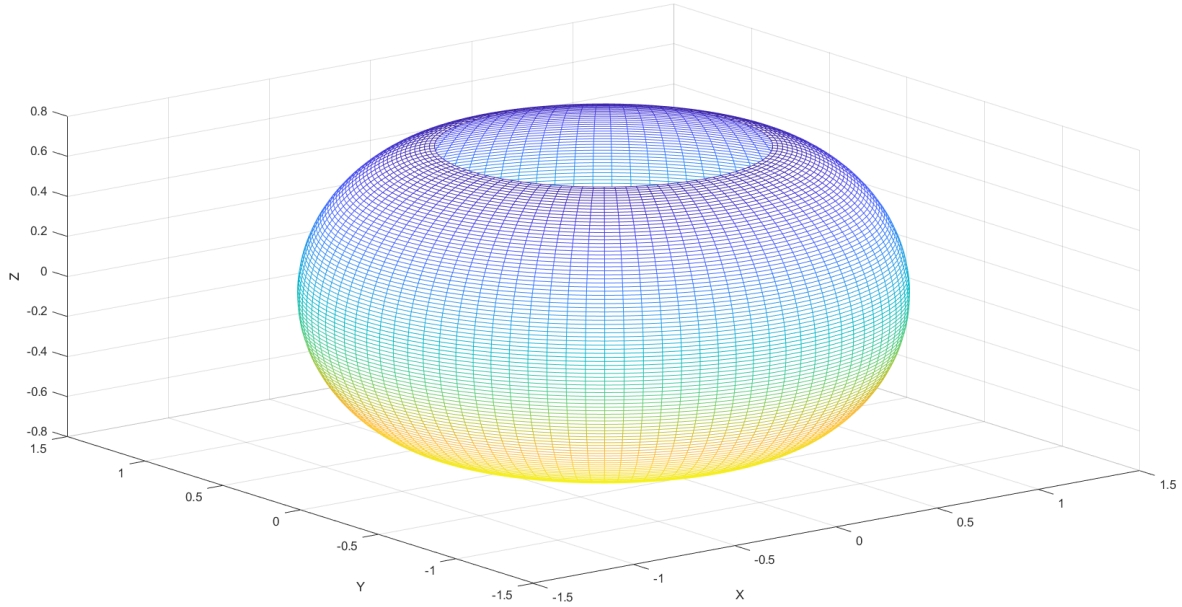
Poznámka 3.2. I když je eliptický integrál $E(v, a^2)$ pro $a < 1$ a $a > 1$ vyšší transcendentní funkce, tak příslušné funkce (3.7) a jim odpovídající rotační plochy samozřejmě existují. Existuje tedy nekonečně mnoho rotačních ploch s konstantní Gaussovou křivostí $K = 1$ pro různé hodnoty $a \in \mathbb{R}$, přičemž do výpočtu parametrického vyjádření (3.7) rotující křivky vstupuje pro $a \neq \pm 1$ eliptický integrál druhého druhu. Připomeňme v této souvislosti, že výpočet eliptických integrálů a řady dalších vyšších funkcí je standardní součástí různých matematických softwarů.

Poznámka 3.3. (3.5) je definováno pouze tehdy, pokud je výraz $(1 - a^2 \sin^2 v)$ pod odmocninou nezáporný. To dává následující případy (viz rovněž monografie [4], [7]):

- (a) Pro $a < 1$ je $(1 - a^2 \sin^2 v) > 0$ vždycky, takže $\gamma_3(v)$ je definována pro všechna $v \in \mathbb{R}$. Příslušné rotační plochy pak mají tvar připomínající ragbyový míč se špicemi v ose rotace.
- (b) Pro $a = 1$ (triviální případ) je rotující křivkou půlkružnice, která je definována pro $-\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$. Příslušná rotační plocha je pak sféra.
- (c) Pro $a > 1$ je $(1 - a^2 \sin^2 v) > 0$ právě když $v \in \langle -\arcsin(\frac{1}{a}), \arcsin(\frac{1}{a}) \rangle$. Příslušné rotační plochy pak mají tvar otevřené plochy s okrajem (připomínající barel), která neprotíná osu rotace.



Obrázek 2: Příklad (a) z poznámky 3.3, kde $a = 0,8$.



Obrázek 3: Příklad (c) z poznámky 3.3, kde $a = 1, 2$.

3.4 Záporná Gaussova křivost

Nyní se zaměříme na případ, kdy je Gaussova křivost ve všech bodech plochy záporná a konstantní, přičemž se omezíme na $K = -1$. To můžeme udělat podle Věty 2.31 bez újmy na obecnosti. Dosazením hodnoty $K = -1$ do vzorce $K = -\frac{\gamma_1''}{\gamma_1}$ dostaneme

$$\gamma_1'' - \gamma_1 = 0.$$

Tato diferenciální rovnice má obecné řešení

$$\gamma_1(v) = ae^v + be^{-v},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou konstanty. Ze vztahu $\gamma_1'^2 + \gamma_3'^2 = 1$ lze opět vyjádřit γ_3' ve tvaru

$$\gamma_3'(v) = \pm \sqrt{1 - \gamma_1'^2} = \pm \sqrt{1 - (ae^v - be^{-v})^2}. \quad (3.8)$$

Podobně jako v případě kladné Gaussovy křivosti, primitivní funkci obecně nelze vyjádřit ve tvaru elementární funkce pro libovolnou volbu konstant a, b . Je to možné pouze v případě, že $a = 0$ nebo $b = 0$.

Příklad č. 1 Předpokládejme nejdříve, že $a = 0$ nebo $b = 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme pracovat pouze s variantou $b = 0$, protože reparametrizací $v \mapsto -v$ bychom přešli na případ $a = 0$. Dále aplikací reparametrizace $v \mapsto v + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta, se můžeme omezit na případ $a = 1$. Potom

$$\gamma_1(v) = e^v$$

a (3.8) má pro $a = 1$ a $b = 0$ tvar

$$\gamma_3'(v) = \sqrt{1 - e^{2v}}.$$

Aby byl výraz pod odmocninou větší nebo roven nule, musí platit $v \leq 0$. K výpočtu integrálu $\int \sqrt{1 - e^{2v}} dv$ použijeme substituci $e^v = \cos \theta$. Potom $dv = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta$ a

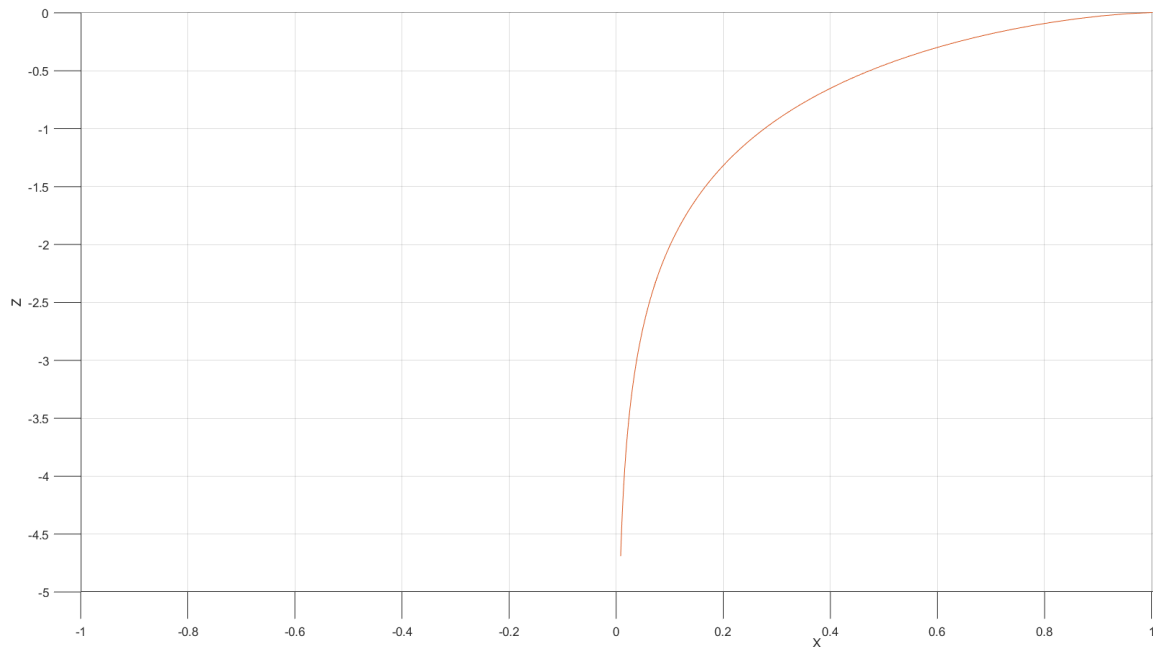
$$\int \sqrt{1 - e^{2v}} dv = \int -\sqrt{1 - \cos^2 \theta} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} d\theta = - \int \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} d\theta = \sin \theta - \ln(\sec \theta + \tan \theta).$$

Po zpětné substituci má γ_3 až na přidání konstanty tvar

$$\gamma_3(v) = \sqrt{1 - e^{2v}} - \ln(e^{-v} + \sqrt{e^{-2v} - 1}).$$

Integrační konstantu můžeme položit rovnu nule, čehož lze docílit posunutím podél osy z . Získali jsme tak parametrické vyjádření profilu (rotující křivky)

$$\gamma(v) = (\gamma_1(v), 0, \gamma_3(v)) = (x, y, z) = (e^v, 0, \sqrt{1 - e^{2v}} - \ln(e^{-v} + \sqrt{e^{-2v} - 1})). \quad (3.9)$$



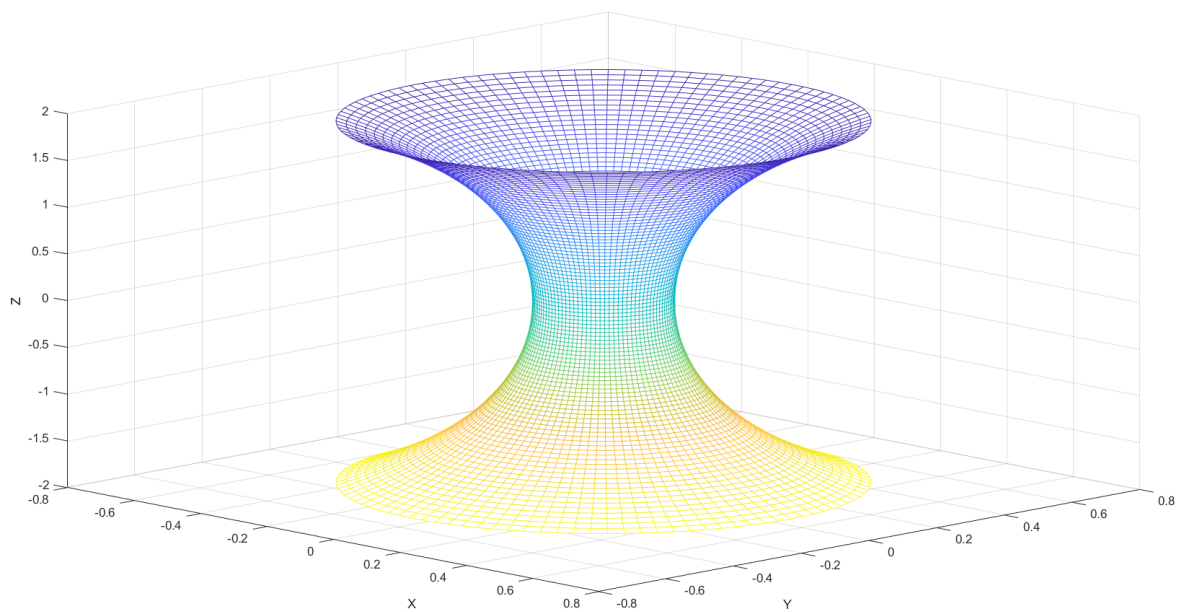
Obrázek 4: Profil (3.9), tj. křivka traktrix.

Případ č. 2 Předpokládejme nyní, že $a \cdot b > 0$. Protože $\gamma_1 > 0$, tak obě konstanty a, b musí být kladné. Transformací souřadnic $v \mapsto v + \frac{1}{2} \ln \frac{b}{a}$ převedeme $\gamma_1(v) = ae^v + be^{-v}$ na tvar $\gamma_1(v) = \sqrt{ab}(e^v + e^{-v})$. Pokud zde položíme $c = 2\sqrt{ab}$, tak má γ_1 vyjádření

$$\gamma_1(v) = c \cdot \cosh v.$$

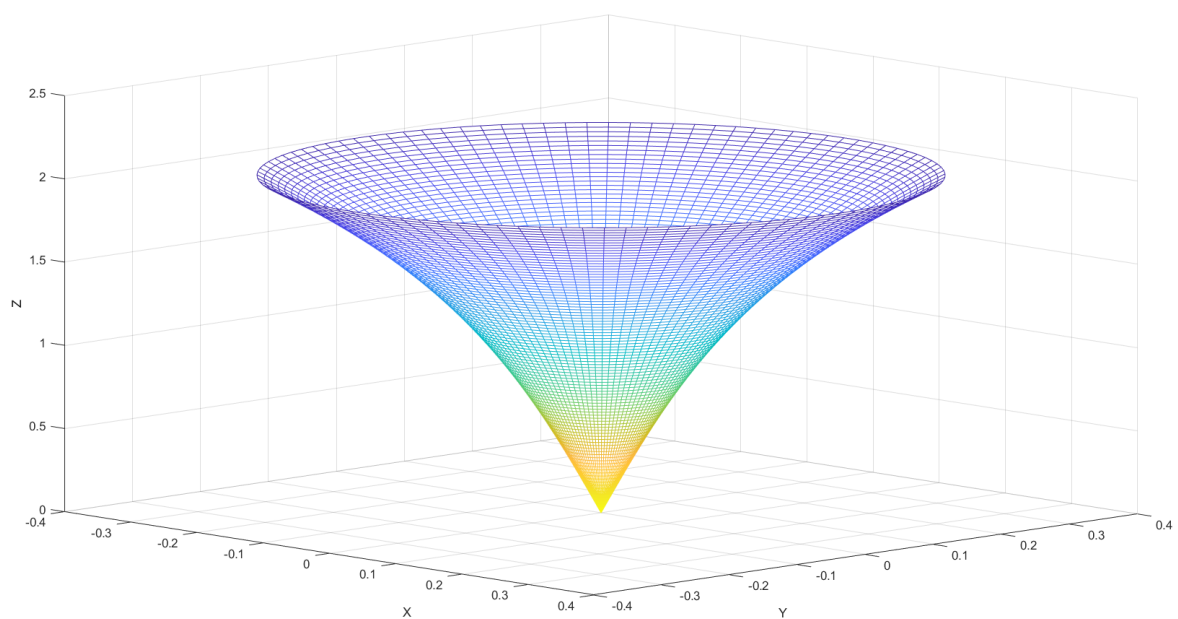
Ze vzorce (3.8) pak plyne $\gamma_3(v) = \int_0^v \sqrt{1 - c^2 \sinh^2 t} dt$. Pro výpočet posledního integrálu (který je obecně vyšší transcendentní funkcí) pak můžeme využít eliptického integrálu druhého druhu z kapitoly 2.3. Odvodili jsme tak parametrické vyjádření profilu ve tvaru

$$\gamma_1(v) = c \cdot \cosh v, \quad \gamma_3(v) = \int_0^v \sqrt{1 - c^2 \sinh^2 t} dt = -iE(iv, -c^2), \quad c > 0.$$



Obrázek 5: Plocha s profilem (3.11).

Případ č. 3 Ve zbývajícím případě $a \cdot b < 0$ analogicky odvodíme poslední vzorec Věty 3.2.



Obrázek 6: Plocha s profilem (3.12).

Celkem jsme tedy odvodili následující větu, která je rovněž dokázaná v monografii [4] (viz také [7]).

Věta 3.2. *Nechť S je rotační plocha s konstantní Gaussovou křivostí $K = -1$. Pak S je částí plochy s parametrizací (3.1), kde profil (rotující křivka) $\gamma(v) = (\gamma_1(v), 0, \gamma_3(v))$ má jeden ze tří následujících tvarů:*

$$\gamma_1(v) = e^v, \quad \gamma_3(v) = \sqrt{1 - e^{2v}} - \ln(e^{-v} + \sqrt{e^{-2v} - 1}), \quad (3.10)$$

$$\gamma_1(v) = c \cdot \cosh v, \quad \gamma_3(v) = \int_0^v \sqrt{1 - c^2 \sinh^2 t} dt = -iE(iv, -c^2), \quad c > 0, \quad (3.11)$$

$$\gamma_1(v) = c \cdot \sinh v, \quad \gamma_3(v) = \int_0^v \sqrt{1 - c^2 \cosh^2 t} dt = -i\sqrt{1 - c^2}E(iv, \frac{c^2}{1 - c^2}), \quad 0 < c < 1. \quad (3.12)$$

Příklad 3.3 (Pseudosféra). Věnujme se nyní podrobněji rotační ploše s profilem (3.10) z předchozí věty. Uvedme nejdříve explicitní rovnici křivky (3.9) vyjádřením proměnné z ve tvaru

$$x = e^v, \quad z = \sqrt{1 - x^2} - \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right).$$

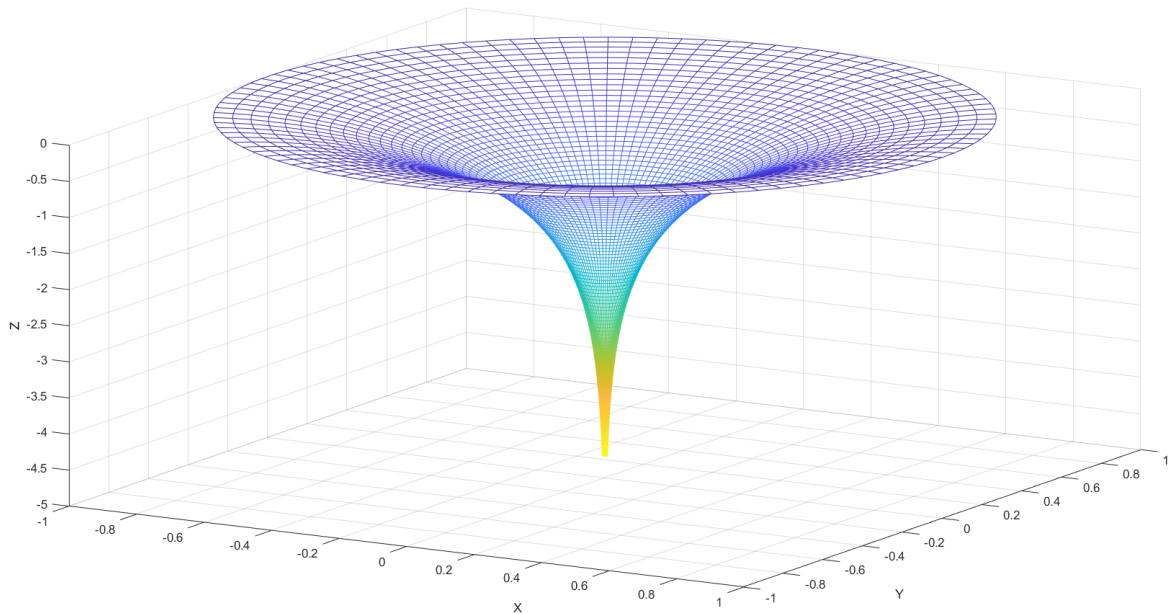
Protože $\cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}\right)$, vyjádření z lze upravit na tvar

$$z = \sqrt{1 - x^2} - \cosh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Křivka definovaná tímto vztahem se nazývá traktrix a její rotací kolem osy z získáme plochu zvanou pseudosféra, která má konstantní Gaussovou křivost $K = -1$. Parametrické rovnice pseudosféry jsou pak

$$f(u, v) = (e^v \cos u, e^v \sin u, \sqrt{1 - e^{2v}} - \cosh(e^{-v})).$$

Pseudosféra se někdy též nazývá traktroid.



Obrázek 7: Plocha s profilem (3.10), tj. pseudosféra.

Poznámka 3.4. Podle Věty 3.2 existuje nekonečně mnoho rotačních ploch s konstantní Gaussovou křivostí $K = -1$, přičemž do výpočtu parametrického vyjádření rotující křivky vstupuje v případech (3.11) a (3.12) eliptický integrál druhého druhu. První případ (3.10) dává pseudo-sféru. Rotační plochy s profilem (3.11) připomínají jednodílný hyperboloid a rotační plochy s profilem (3.12) připomínají kužel.

Poznámka 3.5 (Některé vlastnosti traktrix). Při odvození parametrizace (3.9) traktrix jsme uvedli, že musí platit $v \leq 0$. Když se podíváme na souřadnici x tvořící křivky traktrix, vidíme, že pokud $v \leq 0$, pak $x = e^v \leq 1$. Souřadnice x je tedy omezená na interval $(0, 1]$. Křivka traktrix má jednu zajímavou geometrickou vlastnost. Když v libovolném jejím bodě T sestrojíme tečnu a průsečík této tečny s osou z označíme P , pak vzdálenost těchto dvou bodů je rovna jedné. Ukažme si to. Nechť bod T má souřadnice $T = (x_0, z_0)$. Protože $\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, rovnice tečny v bodě T má rovnici

$$z = z_0 + \frac{\sqrt{1-x_0^2}}{x_0}(x-x_0).$$

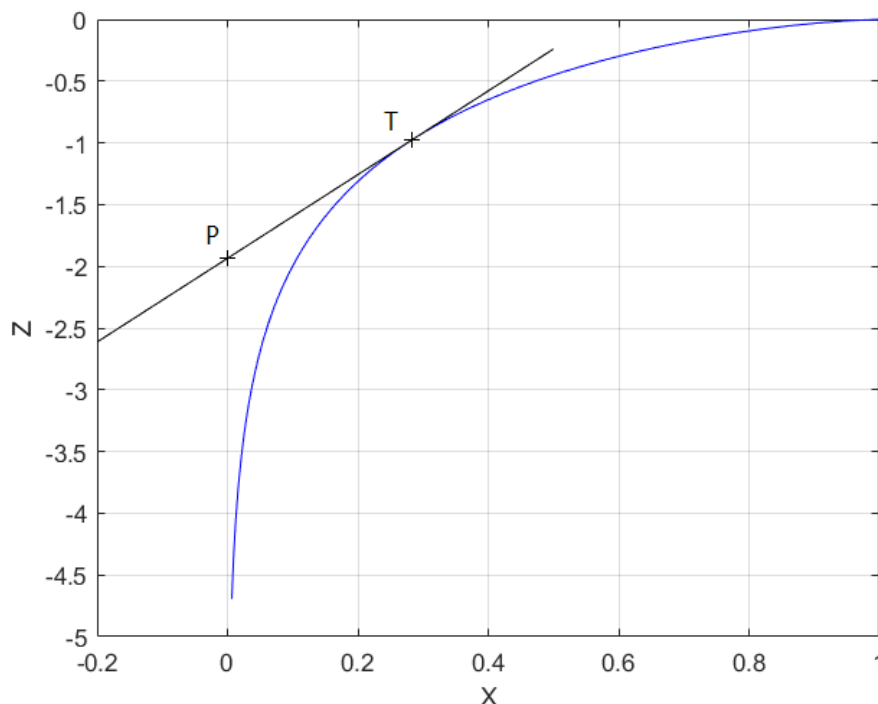
Bod P (průsečík tečny s osou z) má souřadnice $P = (x_1, z_1) = (0, z_1)$, tento bod dosadíme do rovnice tečny a spočítáme z_1 :

$$z_1 = z_0 + \frac{\sqrt{1-x_0^2}}{x_0}(0-x_0) = z_0 - \sqrt{1-x_0^2}$$

Nyní můžeme spočítat vzdálenost bodů T a P .

$$|TP| = \sqrt{(x_0-x_1)^2 + (z_0-z_1)^2} = \sqrt{(x_0-0)^2 + \left(z_0 - z_0 + \sqrt{1-x_0^2}\right)^2} = \sqrt{x_0^2 + 1-x_0^2} = 1$$

Vidíme, že pro libovolný bod křivky traktrix, v němž sestrojíme tečnu, je vzdálenost od tohoto bodu k průsečíku tečny s osou z konstantní a rovna jedné.



Obrázek 8: Křivka traktrix a její tečna.

4 Příklady ploch s nulovou Gaussovou křivostí

V této kapitole uvedeme příklady nejznámějších ploch s nulovou Gaussovou křivostí, jejich možnou parametrizaci ve tvaru $f(u, v)$, kde parametry $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$, a také určíme jejich první základní formy, abychom získali ucelený přehled.

Nejdříve se zaměříme na typy bodů, které se na ploše s nulovou Gaussovou křivostí mohou vyskytovat. Mezi body, v nichž je Gaussova křivost nulová patří parabolické a planární body. Zatímco v parabolickém bodě je nulová pouze jedna z hlavních křivostí, v planárním bodě jsou obě hlavní křivosti nulové (normálová křivost je zde ve všech směrech rovna nule a křivost v libovolném směru tak můžeme považovat za hlavní křivost). Hledáme tedy plochy tvořené výhradně těmito dvěma typy bodů.

4.1 Rovina

Rovina je plocha, jejíž každý bod je planární. V takovém bodě je každý směr asymptotický. Rovinu můžeme popsat parametricky pomocí jednoho bodu X a dvou nekolineárních vektorů a, b rovnicí

$$f(u, v) = X + au + bv.$$

Bez újmy na obecnosti lze uvažovat jednotkové vektory a, b , které jsou na sebe kolmé. Pro výpočet koeficientů první základní formy nejdříve určíme parciální derivace prvního řádu vektorové funkce f : $f'_u = a, f'_v = b$. Potom $g_{11} = f'_u \cdot f'_u = a \cdot a = \|a\|^2 = 1$, stejně tak $g_{22} = f'_v \cdot f'_v = b \cdot b = 1$ (protože vektory a, b jsou jednotkové) a $g_{12} = f'_u \cdot f'_v = a \cdot b = 0$ (protože vektory a, b jsou na sebe kolmé). První základní forma roviny má tak tvar

$$\varphi_1 = du^2 + dv^2.$$

4.2 Kruhový válec

Uvažujme plášť kruhového válce o poloměru r . Pro jeho parametrizaci použijeme cylindrické souřadnice

$$f(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v),$$

kde $u \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a $v \in \mathbb{R}$. Na kruhovém válci je každý bod parabolický, tedy v každém bodě existuje jeden asymptotický směr. Tento směr je při dané parametrizaci ve všech bodech určen stejným jednotkovým vektorem $(0, 0, 1)$. Všechny přímky na ploše rovnoběžné s osou z jsou asymptotickými křivkami. Nyní spočítáme parciální derivace $f'_u = (-r \sin u, r \cos u, 0)$ a $f'_v = (0, 0, 1)$. Potom $g_{11} = f'_u \cdot f'_u = (-r \sin u, r \cos u, 0) \cdot (-r \sin u, r \cos u, 0) = r^2 \sin^2 u + r^2 \cos^2 u = r^2$, $g_{22} = f'_v \cdot f'_v = (0, 0, 1) \cdot (0, 0, 1) = 1$ a $g_{12} = f'_u \cdot f'_v = (-r \sin u, r \cos u, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0$. Odvodili jsme první základní formu kruhového válce

$$\varphi_1 = r^2 du^2 + dv^2.$$

Transformujme nyní souřadnici u následujícím způsobem: $u^* = ru$. Pak parametrizace válce bude tvaru $f(u^*, v) = (r \cos \frac{u^*}{r}, r \sin \frac{u^*}{r}, v)$. Souřadnice v ani hodnota f'_v se nemění. Přepočítáme pouze parciální derivaci podle nové proměnné: $f'_{u^*} = (-\sin u^*, \cos u^*, 0)$ a nové koeficienty $g_{11} = f'_{u^*} \cdot f'_{u^*} = (-\sin u^*, \cos u^*, 0) \cdot (-\sin u^*, \cos u^*, 0) = \sin^2 u^* + \cos^2 u^* = 1$ a $g_{12} = f'_{u^*} \cdot f'_v = (-\sin u^*, \cos u^*, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0$. V nových souřadnicích je tedy první základní forma kruhového válce rovna

$$\varphi_1 = du^{*2} + dv^2.$$

Existují tedy souřadnice, ve kterých je první základní forma kruhového válce stejná jako první základní forma roviny. To znamená, že tyto dvě plochy jsou izometrické.

4.3 Kruhový kužel

Uvažujme kuželovou plochu s vrcholem v počátku souřadnicového systému. Pro její parametrizaci využijeme opět cylindrické souřadnice,

$$f(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v),$$

kde $u \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a $v \in \mathbb{R}$. Z uvažované plochy vyloučíme vrchol kuželové plochy, tedy bod $[0, 0, 0]$ určený hodnotou parametru $v = 0$, ve kterém není splněna podmínka, aby byl vektorový součin tečných vektorů f'_u a f'_v různý od nuly ($f'_u \times f'_v = \vec{0}$ pro $v = 0$). Potom každý bod kuželové plochy je parabolický a existuje v něm jeden asymptotický směr, který ukazuje do počátku souřadnicového systému. Spočítáme parciální derivace $f'_u = (-v \sin u, v \cos u, 0)$ a $f'_v = (\cos u, \sin u, 1)$. Potom pro koeficienty první základní formy platí $g_{11} = f'_u \cdot f'_u = (-v \sin u, v \cos u, 0) \cdot (-v \sin u, v \cos u, 0) = v^2 \sin^2 u + v^2 \cos^2 u = v^2$, $g_{22} = f'_v \cdot f'_v = (\cos u, \sin u, 1) \cdot (\cos u, \sin u, 1) = \cos^2 u + \sin^2 u + 1 = 2$ a $g_{12} = f'_u \cdot f'_v = (-v \sin u, v \cos u, 0) \cdot (\cos u, \sin u, 1) = -v \sin u \cos u + v \cos u \sin u = 0$. Odvodili jsme tvar první základní formy kužele

$$\varphi_1 = v^2 du^2 + 2dv^2.$$

Nyní potřebujeme zjistit, zda se nám podaří transformovat souřadnice takovým způsobem, abychom dostali první základní formu ve stejném tvaru jako v případě roviny. Uvažujme transformaci $u^* = \alpha u$, $v^* = \beta v$, kde hledáme vhodné $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom $f(u^*, v^*) = (\frac{v^*}{\beta} \cos \frac{u^*}{\alpha}, \frac{v^*}{\beta} \sin \frac{u^*}{\alpha}, \frac{v^*}{\beta})$. Nyní určíme parciální derivace $f'_{u^*} = (-\frac{v^*}{\alpha\beta} \sin \frac{u^*}{\alpha}, \frac{v^*}{\alpha\beta} \cos \frac{u^*}{\alpha}, 0)$ a $f'_{v^*} = (\frac{1}{\beta} \cos \frac{u^*}{\alpha}, \frac{1}{\beta} \sin \frac{u^*}{\alpha}, \frac{1}{\beta})$ a vyjádříme koeficienty první základní formy:

$$g_{11} = f'_{u^*} \cdot f'_{u^*} = (-\frac{v^*}{\alpha\beta} \sin \frac{u^*}{\alpha}, \frac{v^*}{\alpha\beta} \cos \frac{u^*}{\alpha}, 0) \cdot (-\frac{v^*}{\alpha\beta} \sin \frac{u^*}{\alpha}, \frac{v^*}{\alpha\beta} \cos \frac{u^*}{\alpha}, 0) = \frac{v^{*2}}{\alpha^2 \beta^2},$$

$$g_{22} = f'_{v^*} \cdot f'_{v^*} = (\frac{1}{\beta} \cos \frac{u^*}{\alpha}, \frac{1}{\beta} \sin \frac{u^*}{\alpha}, \frac{1}{\beta}) \cdot (\frac{1}{\beta} \cos \frac{u^*}{\alpha}, \frac{1}{\beta} \sin \frac{u^*}{\alpha}, \frac{1}{\beta}) = \frac{2}{\beta^2},$$

$$g_{12} = f'_{u^*} \cdot f'_{v^*} = (-\frac{v^*}{\alpha\beta} \sin \frac{u^*}{\alpha}, \frac{v^*}{\alpha\beta} \cos \frac{u^*}{\alpha}, 0) \cdot (\frac{1}{\beta} \cos \frac{u^*}{\alpha}, \frac{1}{\beta} \sin \frac{u^*}{\alpha}, \frac{1}{\beta}) = 0.$$

Vidíme, že $g_{12} = 0$ pro libovolné $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Protože chceme dostat tvar první základní formy shodný s rovinou, druhý výraz položíme roven jedné, takže $\beta = \sqrt{2}$. Následně první výraz položíme roven v^{*2} , odkud získáváme $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Hledaná transformace je tedy tvaru: $u^* = \frac{u}{\sqrt{2}}$, $v^* = \sqrt{2}v$. Dostáváme tvar první základní formy kužele

$$\varphi_1 = v^{*2} du^{*2} + dv^{*2}.$$

Získaná první základní forma je shodná s první základní formou roviny, je pouze zapsaná v cylindrických souřadnicích. Rovinu totiž můžeme rovněž parametrizovat pomocí cylindrických souřadnic například takto: $f(u, v) = (v \cos u, v \sin u, 0)$, potom $f'_u = (-v \sin u, v \cos u, 0)$ a $f'_v = (\cos u, \sin u, 0)$. Koeficienty g_{ij} určíme z již známých vzorců.

$$g_{11} = f'_u \cdot f'_u = (-v \sin u, v \cos u, 0) \cdot (-v \sin u, v \cos u, 0) = v^2,$$

$$g_{22} = f'_v \cdot f'_v = (\cos u, \sin u, 0) \cdot (\cos u, \sin u, 0) = 1,$$

$$g_{12} = f'_u \cdot f'_v = (-v \sin u, v \cos u, 0) \cdot (\cos u, \sin u, 0) = 0.$$

První základní forma roviny s parametrizací $f(u, v) = (v \cos u, v \sin u, 0)$ je tedy tvaru

$$\varphi_1 = v^2 du^2 + dv^2.$$

Vidíme, že získaná první základní forma kužele se opravdu shoduje s první základní formou roviny.

4.4 Shrnutí

V této kapitole jsme uvedli příklady nejznámějších ploch s nulovou Gaussovou křivostí a ukázali jsme, že u nich lze dojít ke stejnému tvaru první základní formy. Patří mezi ně rovina, válcová plocha a kuželová plocha. Všechny tyto plochy jsou rozvinutelné přímkové plochy a jsou lokálně izometrické otevřené množině v rovině.

5 Klasifikace ploch s nulovou Gaussovou křivostí

V kapitole 3 jsme provedli klasifikaci rotačních ploch s konstantní Gaussovou křivostí K . Konkrétně jsme ukázali, že kruhový válec, kruhový kužel a rovina mají nulovou Gaussovu křivost K . Poznamenejme, že kruhový válec, kruhový kužel i rovina jsou přímkové plochy. V této souvislosti je přirozené položit si otázku, zda existují i další plochy s touto vlastností a případně klasifikovat všechny takové plochy.

Definice 5.1. Řekneme, že bod X plochy S je umbilický, jestliže hlavní křivosti κ_1 a κ_2 v tomto bodě jsou si rovny.

Je zřejmé, že každý bod roviny nebo sféry je umbilický. Příkladem izolovaného umbilického bodu je např. vrchol $[0, 0, 0]$ paraboloidu $z = x^2 + y^2$. V monografii [4] je dokázáno

Věta 5.2. *Nechť S je souvislá plocha, jejíž každý bod je umbilický. Pak S je částí roviny nebo sféry.*

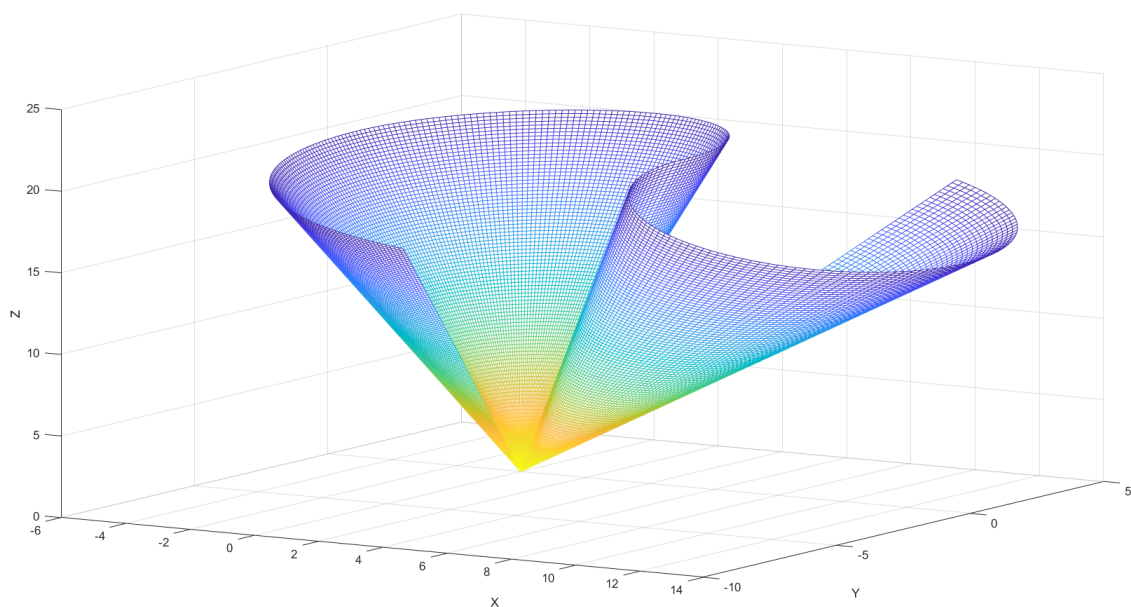
V knize [6] je dokázána následující věta

Věta 5.3. *Nechť X je bod plochy S s nulovou Gaussovou křivostí K , který není umbilický. Pak existuje parametrizace plochy S obsahující bod X taková, že S je přímková plocha.*

K úplnému popisu všech ploch s nulovou Gaussovou křivostí tedy stačí omezit se na klasifikaci přímkových ploch s touto vlastností. Nejdříve uvedeme příklady tří přímkových ploch ze skript [3], které mají nulovou Gaussovu křivost K .

Příklad 5.4. Obecný kužel Obecným kuželem nazýváme takovou přímkovou plochu, jejíž každá tvořící přímka prochází pevným bodem $A \in \mathbb{R}^3$. Řídící křivkou je tedy jediný bod a parametrizace obecného kužele má tvar

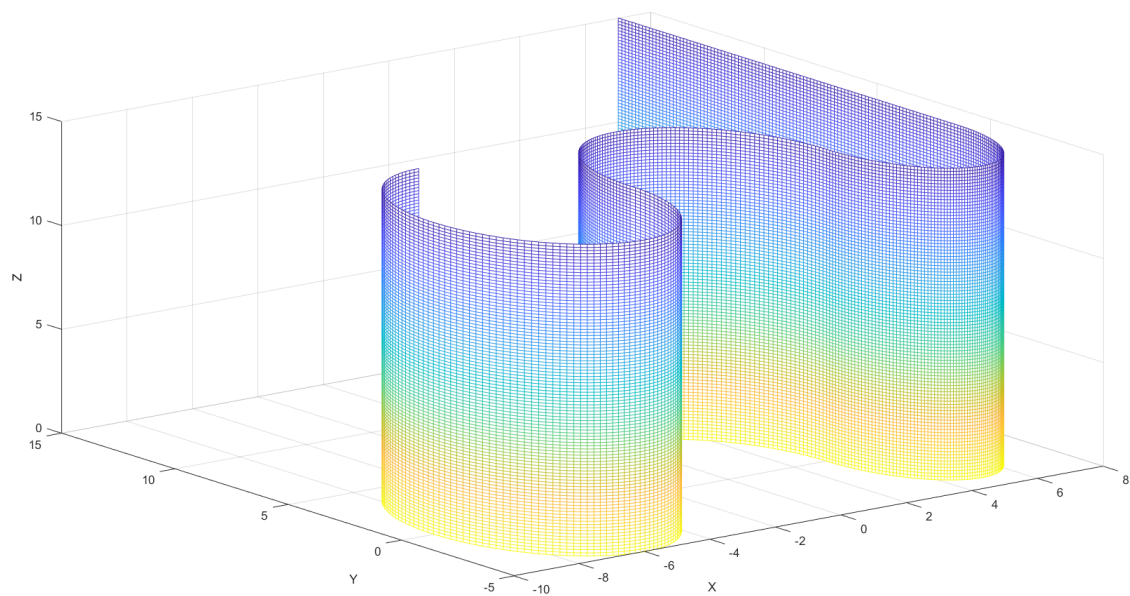
$$f(t, v) = A + vh(t).$$



Obrázek 9: Obecný kužel.

Příklad 5.5. Obecný válec Obecným válcem nazýváme takovou přímkovou plochu, jejíž všechny tvořící přímky jsou vzájemně rovnoběžné. Vektor $h(t)$ určující směr tvořící přímky je tedy konstantní, tj. $h(t) = a$ a parametrizace obecného válce má tvar

$$f(t, v) = g(t) + va.$$



Obrázek 10: Obecný válec.

Příklad 5.6. Plocha tečen Plochou tečen rozumíme takovou přímkovou plochu, jejíž tvořící přímky $h(t)$ jsou tečny řídící křivky $g(t)$, přičemž požadujeme, aby $g(t)$ byla parametrizace řídící křivky bez inflexních bodů. Parametrizace plochy tečen má tvar

$$f(t, v) = g(t) + v g'(t).$$

Věta 5.7. Plocha tečen má nulovou Gaussovu křivost K .

Důkaz. Ze vztahu pro výpočet Gaussovy křivosti $K = \frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})}$ plyne, že $K = 0$ právě tehdy, když $\det(h_{ij}) = 0$. Stačí tedy dokázat, že $\det(h_{ij}) = 0$. Uvažujme parametrizaci plochy tečen ve tvaru

$$f(t, v) = g(t) + v g'(t),$$

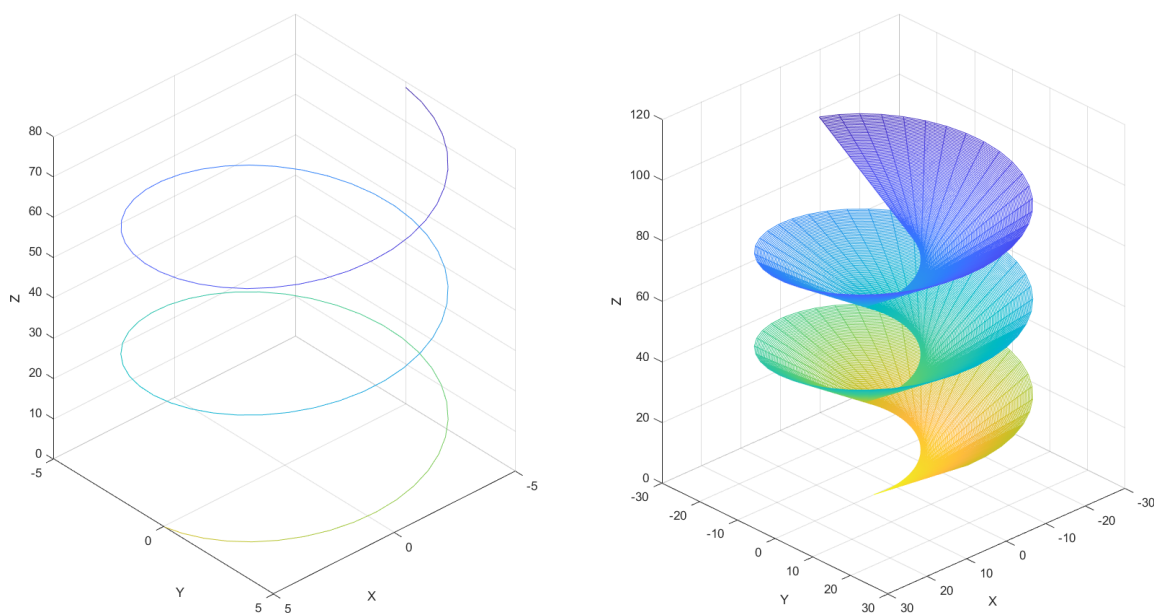
kde $v \neq 0$. Pro výpočet koeficientů 2. základní formy h_{ij} určíme nejdříve první a druhé parciální derivace parametrizace f . Ty jsou tvaru

$$f'_t = g'(t) + v g''(t), \quad f'_v = g'(t), \quad f''_{tt} = g''(t) + v g'''(t), \quad f''_{tv} = g''(t), \quad f''_{vv} = \vec{0}.$$

Protože $f''_{vv} = \vec{0}$, tak platí $h_{22} = n \cdot f''_{vv} = 0$. Dále máme $h_{12} = n \cdot f''_{tv} = n \cdot g''(t)$. Směr normálového vektoru n je určen vektorovým součinem $f'_t \times f'_v = (g'(t) + v g''(t)) \times g'(t) = v(g''(t) \times g'(t))$, tj. normálový vektor n je k -násobkem vektoru $v(g''(t) \times g'(t))$, kde $k \in \mathbb{R}^+$. Koeficient h_{12} je potom tvaru $h_{12} = kv(g''(t) \times g'(t)) \cdot g''(t)$. Tento smíšený součin $(g''(t) \times g'(t)) \cdot g''(t)$ ovšem není tvořen třemi lineárně nezávislými vektory, a proto je roven nule, takže také $h_{12} = 0$. Dokázali jsme, že koeficienty h_{12} a h_{22} jsou pro plochu tečen nulové, a tedy platí

$$\det(h_{ij}) = h_{11}h_{22} - (h_{12})^2 = 0.$$

□



Obrázek 11: Plocha tečen šroubovice.

Věta 5.8. *Obecný válec má nulovou Gaussovu křivost K .*

Důkaz. V případě obecného válce uvažujme parametrizaci

$$f(t, v) = g(t) + va.$$

První a druhé parciální derivace parametrizace f jsou tvaru

$$f'_t = g'(t), \quad f'_v = a, \quad f''_{tt} = g''(t), \quad f''_{tv} = \vec{0}, \quad f''_{vv} = \vec{0}.$$

Dosadíme-li nyní do vztahů pro výpočet h_{12} a h_{22} , dostaneme

$$h_{12} = n \cdot f''_{tv} = 0 \quad \text{a} \quad h_{22} = n \cdot f''_{vv} = 0.$$

Opět jsme dokázali, že koeficienty h_{12} a h_{22} jsou pro obecný válec rovny nule, takže platí $\det(h_{ij}) = 0$. □

Věta 5.9. *Obecný kužel má nulovou Gaussovu křivost K .*

Důkaz. Nakonec uvažujme parametrizaci obecného kužele

$$f(t, v) = a + vg(t),$$

kde $v \neq 0$ a spočteme její první a druhé parciální derivace. Ty jsou tvaru

$$f'_t = vg'(t), \quad f'_v = g(t), \quad f''_{tt} = vg''(t), \quad f''_{tv} = g'(t), \quad f''_{vv} = \vec{0}.$$

Ihned vidíme, že $h_{22} = n \cdot f''_{vv} = 0$. Koeficient $h_{12} = n \cdot f''_{tv}$, přičemž normálový vektor n můžeme opět zapsat jako k -násobek vektorového součinu f'_t a f'_v , tj. $n = k(f'_t \times f'_v) = k(vg'(t) \times g(t))$, kde $k \in \mathbb{R}^+$. Dosazením do vztahu pro výpočet h_{12} máme $h_{12} = n \cdot f''_{tv} = kv(g'(t) \times g(t)) \cdot g'(t)$. Stejně jako v předchozím případě, uvedený smíšený součin je tvořen lineárně závislými vektory, a proto je roven nule. Tedy také $h_{12} = 0$. Dokázali jsme, že pro obecný kužel jsou koeficienty h_{12} a h_{22} nulové, a tedy platí $\det(h_{ij}) = 0$. □

Tedy obecný kužel, obecný válec i plocha tečen mají nulovou Gaussovu křivost K . Ve zbytku této kapitoly se budeme věnovat opačnému problému, tj. klasifikaci všech přímkových ploch s nulovou Gaussovou křivostí. Uvažujme parametrizaci přímkové plochy

$$f(t, v) = g(t) + vh(t). \tag{5.1}$$

V dalším ukážeme klasifikaci přímkových ploch s $K = 0$. Jak již bylo uvedeno v kapitole 2.2.1, tyto plochy jsou rozvinutelné a platí pro ně

$$[g'(t), h(t), h'(t)] = 0, \tag{5.2}$$

tj. vektory $g'(t)$, $h(t)$ a $h'(t)$ jsou v každém bodě lineárně závislé.

Nejdříve ukážeme přímým výpočtem, že (5.2) je ekvivalentní rovnosti $K = 0$.

Věta 5.10. *Nechť (5.1) je parametrizace přímkové plochy. Pak Gaussova křivost K této plochy je rovna nule právě když platí rovnice (5.2).*

Důkaz. Podle důkazu Věty 5.7 platí $K = 0$ právě tehdy, když $\det(h_{ij}) = 0$, kde h_{ij} jsou koeficienty druhé základní formy. Přímým derivováním dostaneme

$$f'_t = g'(t) + v h'(t), \quad f'_v = h(t), \quad f''_{tv} = h'(t), \quad f''_{vv} = 0.$$

Připomeňme, že jednotkový vektor normály plochy má vyjádření

$$n = \frac{f'_t \times f'_v}{\|f'_t \times f'_v\|},$$

a koeficienty h_{22} a h_{12} druhé základní formy přímkové plochy mají tvar

$$h_{22} = n \cdot f''_{vv} = 0, \quad h_{12} = n \cdot f''_{tv} = n \cdot h'.$$

Protože $h_{22} = 0$, tak $\det(h_{ij}) = 0$ právě když $h''_{12} = n \cdot f''_{tv} = n \cdot h' = 0$. Poslední rovnost je splněna právě když $(f'_t \times f'_v) \cdot h' = 0$. Platí

$$(f'_t \times f'_v) \cdot h' = (g' \times h + v h' \times h) \cdot h' = (g' \times h) \cdot h'$$

protože zřejmě platí $(v h' \times h) \cdot h' = 0$. Ukázali jsme tedy že $K = 0$ právě když $(g' \times h) \cdot h' = 0$, což je ekvivalentní rovnici (5.2). $\square$

Nechť nyní platí $K = 0$, což je podle předchozí věty ekvivalentní rovnici (5.2). Ukážeme, že (5.1) je pak buď parametrizací obecného válce nebo parametrizací obecného kužele nebo parametrizací plochy tečen. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že vektor $h(t)$ je v každém bodě jednotkový, takže skalární součin tohoto vektoru se sebou samým je roven $h(t) \cdot h(t) = 1$. Derivací tohoto vztahu dostáváme $h'(t) \cdot h(t) + h(t) \cdot h'(t) = 0$, takže $\forall t$ platí

$$h(t) \cdot h'(t) = 0.$$

Předpokládejme nejdříve $h'(t) = 0$ pro všechna t , což znamená, že $h(t) = a$ je konstantní vektor. V takovém případě se jedná o parametrizaci obecného válce

$$f(t, v) = g(t) + va,$$

kde a je konstantní vektor.

Nyní uvažujme případ $h'(t) \neq 0$. Protože vektory $h(t)$ a $h'(t)$ jsou nenulové a na sebe kolmé, jsou také lineárně nezávislé. Aby byl splněn vztah (5.2), musí existovat hladké funkce $\alpha(t), \beta(t)$ takové, že

$$g'(t) = \alpha(t)h(t) + \beta(t)h'(t). \quad (5.3)$$

Nejdříve předpokládejme, že $\forall t$ platí $\alpha(t) = \beta'(t)$, potom

$$g'(t) = \beta'(t)h(t) + \beta(t)h'(t) = (\beta(t)h(t))'.$$

Integrací tohoto vztahu dostáváme tvar řídicí křivky

$$g(t) = \beta(t)h(t) + a,$$

kde a je opět konstantní vektor. Dosazením do (5.1) dostáváme parametrizaci přímkové plochy

$$f(t, v) = (\beta(t) + v)h(t) + a.$$

Provedeme-li nyní reparametrizaci $t \mapsto t$, $v \mapsto v + \beta(t)$, získáme parametrizaci v jednodušším tvaru. Jedná se o parametrizaci obecného kužele

$$f(t, v) = v^* h(t) + a.$$

Předpokládejme nakonec, že platí (5.3) a současně $h'(t) \neq 0$ a $\alpha(t) \neq \beta'(t)$ pro všechna t . Označme nyní

$$\tilde{g}(t) = g(t) - \beta(t)h(t), \quad \tilde{v} = \frac{v + \beta(t)}{\alpha(t) - \beta'(t)}. \quad (5.4)$$

Derivací $\tilde{g}(t)$ a dosazením vztahu (5.3) máme

$$\tilde{g}'(t) = g'(t) - \beta'(t)h(t) - \beta(t)h'(t) = \alpha(t)h(t) - \beta'(t)h(t).$$

Ze vztahů (5.4) vyjádříme $g(t)$ a v ve tvaru

$$g(t) = \tilde{g}(t) + \beta(t)h(t), \quad v = \tilde{v}(\alpha(t) - \beta'(t)) - \beta(t),$$

a dosadíme do (5.1), odtud

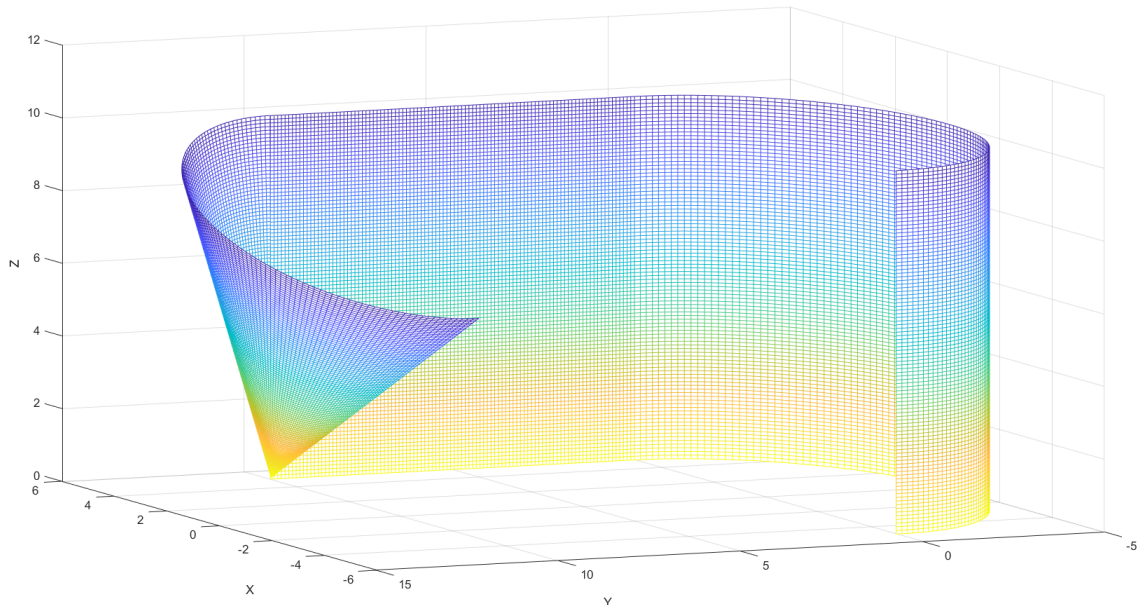
$$\begin{aligned} f(t, v) &= \tilde{g}(t) + \beta(t)h(t) + [\tilde{v}(\alpha(t) - \beta'(t)) - \beta(t)] h(t) = \tilde{g}(t) + \tilde{v}(\alpha(t)h(t) - \beta'(t)h(t)) = \\ &= \tilde{g}(t) + \tilde{v}\tilde{g}'(t). \end{aligned}$$

Dostali jsme tak parametrické vyjádření plochy tečen.

Odvodili jsme tedy následující tvrzení, které je dokázáno rovněž v monografii [6], str. 202, 203:

Věta 5.11. *Pokud Gaussova křivost K přímkové plochy S je rovna nule, tak existuje otevřená podmnožina plochy S , která je částí obecného kužele, obecného válce nebo plochy tečen.*

Poznamenejme, že předchozí věta neříká, že celá plocha S musí být jednou z výše uvedených tří ploch. V obecném případě totiž daná plocha s nulovou Gaussovou křivostí může obsahovat otevřené podmnožiny všech tří typů, viz např. následující obrázek.



Obrázek 12: Plocha tvořená z části rovinou, obecným válcem a a obecným kuželem.

Z výše uvedené věty rovněž plyne, že plocha s $K = 0$ je lokálně izometrická rovině.

6 Souvislosti s neeuklidovskou geometrií

Eukleidovská geometrie je geometrie založená na pěti postulátech, které formuloval Eukleides před více než dvěma tisíci lety. V této kapitole budeme vycházet zejména z knihy [5]. Uvedme zde znění těchto pěti postulátů.

1. Dvěma body lze vést právě jednu přímku.
2. Každou úsečku lze na obě strany neomezeně prodloužit.
3. V každém bodě lze sestavit kružnici s libovolným poloměrem.
4. Všechny pravé úhly jsou shodné.
5. Bodem neležícím na přímce p lze vést právě jednu přímku, která přímku p neprotíná, tedy je s ní rovnoběžná.

Pátý postulát se označuje jako postulát o rovnoběžkách. Brzy se objevila otázka, zda lze tento postulát dokázat z předchozích čtyř. Tato otázka byla uspokojivě zodpovězena až v devatenáctém století, kdy se objevila geometrie neeukleidovská, která potvrdila, že pátý postulát z předchozích čtyř dokázat nelze. Neeukleidovská geometrie zachovává pouze první čtyři výše zmíněné postuláty. Existují dva typy neeukleidovské geometrie: hyperbolická (též nazývaná Lobačevského po svém objeviteli) a eliptická (též nazývaná Riemannova). Podívejme se nyní na obě zmíněné geometrie a ukažme si souvislost s plochami s konstantní Gaussovou křivostí. Více se této problematice věnuje práce [1].

6.1 Hyperbolická geometrie

V hyperbolické geometrii se objevuje nový Lobačevského axiom, který říká, že bodem neležícím na přímce p prochází aspoň dvě přímky, které přímku p neprotínají. Tímto tvrzením nahrazuje původní pátý postulát. Zatímco v eukleidovské geometrii platí, že součet vnitřních úhlů jakéhokoli trojúhelníku je roven 2π , v případě hyperbolické geometrie je součet vnitřních úhlů trojúhelníku vždy menší než 2π , dokonce lze sestavit i trojúhelník s nulovými úhly. Vhodným modelem hyperbolické geometrie je pseudosféra s konstantní zápornou Gaussovou křivostí $K = -1$.

6.2 Eliptická geometrie

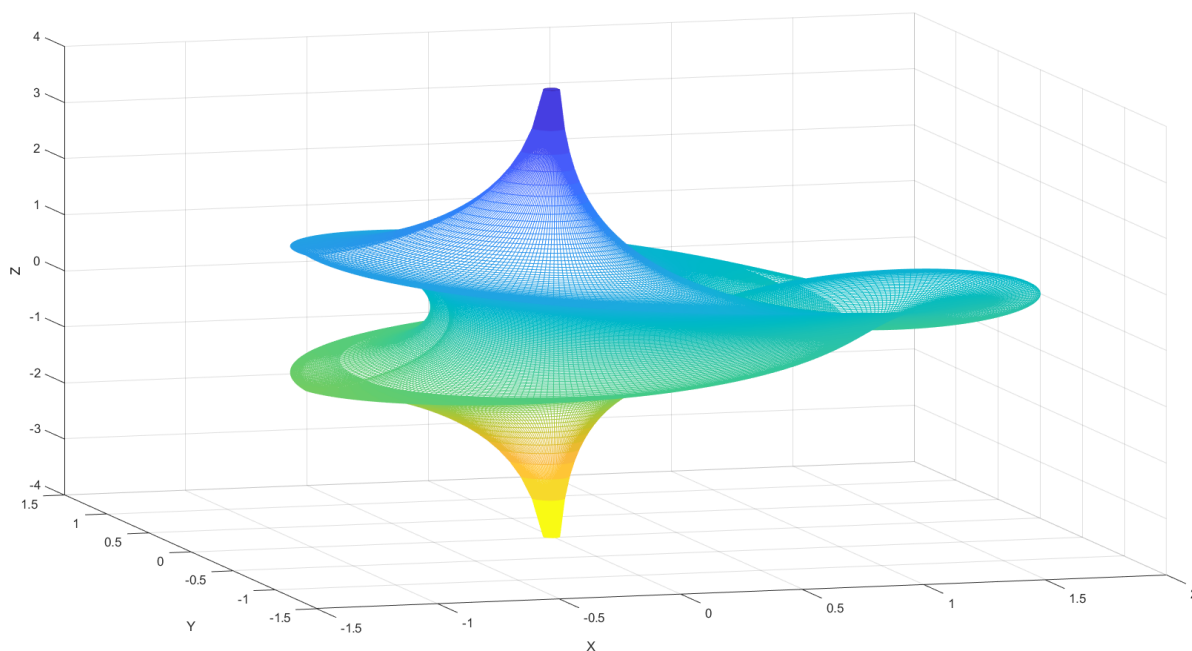
V eliptické geometrii nahrazujeme původní pátý postulát axiomem, který říká, že bodem neležícím na přímce p nelze vést žádnou přímku, která přímku p neprotíná. Neexistují zde tedy žádné rovnoběžky. V případě eliptické geometrie je součet vnitřních úhlů trojúhelníku vždy větší než 2π . Modelem eliptické geometrie může být elipsoid, jehož speciálním případem je sféra s konstantní kladnou Gaussovou křivostí $K = 1$. Takovou geometrii pak nazýváme sférickou geometrií.

7 Shrnutí

V páté kapitole jsme provedli kompletní klasifikaci všech ploch s nulovou Gaussovou křivostí. Podle Věty 5.3 se v tomto případě stačí omezit na plochy přímkové a příslušná klasifikace všech přímkových ploch s $K = 0$ je pak dána Větou 5.11.

Na druhou stranu, u ploch s konstantní kladnou a konstantní zápornou Gaussovou křivostí je situace složitější. V těchto případech jsme ve třetí kapitole provedli příslušnou klasifikaci pouze v případě rotačních ploch. Existují však další plochy s konstantní zápornou Gaussovou křivostí, které nejsou rotační. Příkladem je Kuenova plocha (Kuen's Surface) s parametrizací

$$f(u, v) = \left(\frac{2(\cos u + u \sin u) \sin v}{1 + u^2 \sin^2 v}, \frac{2(\sin u - u \cos u) \sin v}{1 + u^2 \sin^2 v}, \ln \left(\tan \left(\frac{v}{2} \right) \right) + \frac{2 \cos v}{1 + u^2 \sin^2 v} \right).$$

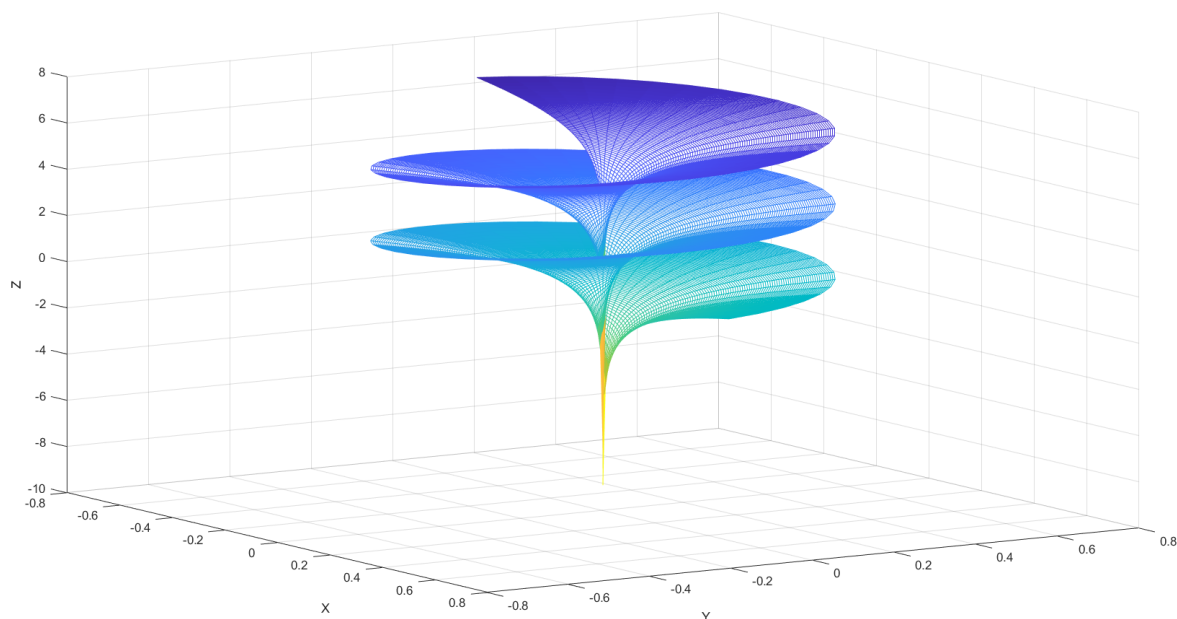


Obrázek 13: Kuenova plocha.

Podle [4] tato plocha má Gaussovou křivost rovnou $K = -1$. Dalším příkladem plochy s konstantní zápornou Gaussovou křivostí je Diniho plocha (Dini's Surface) s parametrizací

$$f(u, v) = \left(\cos u \sin v, \sin u \sin v, \ln \left(\tan \left(\frac{v}{2} \right) \right) + \cos v + \frac{u}{2} \right).$$

Řadu dalších (mnohdy exotických) ploch lze najít na webu [8].



Obrázek 14: Diniho plocha.

Nejznámější plochou s nulovou Gaussovou křivostí je rovina, nejznámější plochou s kladnou Gaussovou křivostí je sféra a nejznámější plochou se zápornou Gaussovou křivostí je pseudosféra. V obecném případě platí

Věta 7.1 (Theorem 10.3. 1 v [6]). *Každý bod plochy s konstantní Gaussovou křivostí leží v otevřené podmnožině této plochy, která je izometrická otevřené podmnožině roviny, sféry nebo pseudosféry.*

Následující věta (která je dokázána např. v [2] a [6]) popisuje kompaktní plochy s konstantní Gaussovou křivostí

Věta 7.2. *Každá spojitá kompaktní plocha s konstantní Gaussovou křivostí je sféra.*

V monografii [2] je dále dokázáno tvrzení

Věta 7.3 (Mindingova věta). *Libovolné dvě plochy se stejnou konstantní Gaussovou křivostí jsou lokálně izometrické.*

Výše uvedené věty jinými slovy říkají, že ačkoli jsme nedokázali kompletně klasifikovat všechny plochy s konstantní kladnou a konstantní zápornou Gaussovou křivostí, tak platí, že existuje lokální izometrie těchto ploch s výše popsanými rotačními plochami, kterými jsou sféra a pseudosféra. Z hlediska vlastností, které zachovává izometrické zobrazení lze tedy tuto klasifikaci považovat za dostatečnou.

Reference

- [1] BRDEČKOVÁ, J.: *Hyperbolické geometrie*, Brno, 2021. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ustav matematiky. Vedoucí práce Miroslav Doupovec.
- [2] DO CARMO, M. P.: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Dover Publications, New York, 2017, ISBN 978-0-486-80699-0.
- [3] DOUPOVEC, M.: *Diferenciální geometrie a tenzorový počet*, VUT v Brně, FSI, Brno, 1999, ISBN 80-214-1470-7
- [4] GRAY, A.: *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*, CRC Press, 1993, ISBN 0-8493-7872-9.
- [5] PAVLÍČEK, J. B.: *Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského*, Přírodovědecké nakladatelství, Praha, 1953.
- [6] PRESSLEY, A.: *Elementary Differential Geometry*, Springer Verlag, London, 2010, ISBN 978-1-84882-890-2.
- [7] UMEHARA, M., YAMADA, K.: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, World Scientific, London, 2015, ISBN 9789814740234.
- [8] Geometry: Gallery of Surfaces [online] (25.5.2012) <http://virtualmathmuseum.org/Surface/>

Seznam obrázků

1	Kruhový kužel s parametrizací (3.4).	23
2	Případ (a) z poznámky 3.3, kde $a = 0, 8$	24
3	Případ (c) z poznámky 3.3, kde $a = 1, 2$	25
4	Profil (3.9), tj. křivka traktrix.	26
5	Plocha s profilem (3.11).	27
6	Plocha s profilem (3.12).	27
7	Plocha s profilem (3.10), tj. pseudosféra.	28
8	Křivka traktrix a její tečna.	29
9	Obecný kužel.	33
10	Obecný válec.	33
11	Plocha tečen šroubovice.	34
12	Plocha tvořená z části rovinou, obecným válcem a a obecným kuželem.	37
13	Kuenova plocha.	39
14	Diniho plocha.	40