



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**KVALITATIVNÍ VLASTNOSTI SYSTÉMŮ S
NECELOČÍSLELNÝMI ČLENY V TEORII ŘÍZENÍ**

QUALITATIVE PROPERTIES OF SYSTEMS WITH FRACTIONAL-ORDER TERMS IN CONTROL THEORY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Peter Malárik

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Tomáš Kisela, Ph.D.

BRNO 2022

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Student: **Peter Malárik**
Studijní program: Matematické inženýrství
Studijní obor: bez specializace
Vedoucí práce: **Ing. Tomáš Kisela, Ph.D.**
Akademický rok: 2021/22

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Kvalitativní vlastnosti systémů s neceločíselnými členy v teorii řízení

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Teorie řízení patří mezi hlavní aplikace teorie zlomkového kalkulu. Zlomkové derivace poskytují přirozený způsob zobecnění tzv. PID kontrolních členů. Zařazení zlomkových členů přináší mnoho zajímavých možností jak z pohledu stability, tak i oscilací.

Cíle bakalářské práce:

1. Najít vhodné modely pro srovnání vlastností systému s klasickým celočíselným a zlomkovým členem.
2. Vytvořit algoritmus pro vykreslování fázových portrétů takových systémů.
3. Simulace a srovnání s teoretickými výsledky pro různé systémy a hodnoty jejich parametrů.

Seznam doporučené literatury:

PODLUBNÝ, I. Fractional Differential Equations. Academic Press, 1998.

CAPONETTO, R., DONGOLA, G., FORTUNBA, L., PETRÁŠ, I. Fractional Order Systems: Modelling and Control Applications. World Scientific Publishing, 2010.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2021/22

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Táto bakalárska práca sa zaoberá analýzou lineárnych sústav zlomkových diferenciálnych rovníc s oneskoreným a neoneskoreným členom. V práci je tiež uvedená základná teória zlomkového kalkulu. Samotná analýza sústav je doplnená o grafickú demonštráciu známych teoretických výsledkov s komentárom, v ktorom porovnávame vlastnosti sústav s klasickými sústavami obsahujúcimi deriváciu celočíselného rádu a vzájomné odlišnosti jednotlivých sústav zlomkových diferenciálnych rovníc. Predovšetkým sa zameriavame na stabilitu a asymptotické vlastnosti. V práci tiež prezentujeme aplikáciu zlomkového kalkulu na príklade modelovania dynamiky systému dvoch kyvadiel spojených pružinou, čím ukazujeme možné využitie zlomkových diferenciálnych modelov pri riešení reálnych úloh.

Abstract

This bachelor thesis deals with the analysis of linear systems of fractional differential equations with and without delay. The thesis also introduces the basic theory of fractional calculus. The analysis itself is supported by a graphical representation of known theoretical results with comments comparing various properties of integer-order systems with fractional ones. We focus mainly on stability and asymptotic properties. We also present an application of fractional calculus on the coupled pendulum problem, where fractional differential equations are used to solve real problems.

Klíčová slova

zlomkový kalkulus, lineárne sústavy zlomkových diferenciálnych rovníc, stabilita sústav zlomkových diferenciálnych rovníc, sústavy rovníc s oneskorením, Caputova zlomková derivácia

Keywords

fractional calculus, linear systems of fractional differential equations, stability of systems of fractional differential equations, systems of equations with time delay, Caputo's fractional derivative

MALÁRIK, Peter. *Kvalitativní vlastnosti systémů s neceločíselnými členy v teorii řízení*. Brno, 2022. Dostupné z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/139809>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav matematiky. Vedoucí práce Ing. Tomáš Kisela, Ph.D.

Prehlasujem, že som bakalársku prácu *Kvalitativní vlastnosti systémů s neceločíselnými členy v teorii řízení* vypracoval samostatne pod vedením Ing. Tomáše Kiselu, Ph.D. s použitím materiálov uvedených v zozname literatúry.

Peter Malárik

Na tomto mieste by som sa chcel poďakovať svojmu vedúcemu Ing. Tomášovi Kiselovi, Ph.D. za početné konzultácie, ľudský prístup a cenné rady pri písaní tejto práce. Vďaka patrí tiež mojej rodine za podporu počas štúdia.

Peter Malárik

Obsah

1	Úvod	2
2	Užitočné funkcie a pojmy	3
3	Základy zlomkového kalkulu	6
4	Lineárne sústavy zlomkových diferenciálnych rovníc	9
4.1	Lineárna sústava bez oneskorenia	9
4.2	Lineárna sústava s konštantným oneskorením	10
4.3	Lineárna sústava s oneskoreným a neoneskoreným členom	12
4.4	Numerická metóda pre výpočet riešení sústav	14
5	Vizualizácia teoretických výsledkov	17
5.1	Lineárna sústava bez oneskorenia	17
5.2	Lineárna sústava s konštantným oneskorením	25
5.3	Lineárna sústava s oneskoreným a neoneskoreným členom	35
6	Aplikácia: Stabilita regulovanej sústavy kyvadiel	38
7	Záver	45

1 Úvod

Zlomkový kalkulus je odvetvie matematickej analýzy, ktoré sa venuje zavádzaniu a výskumu vlastností diferenciálnych operátorov ľubovoľného reálneho alebo komplexného rádu. Z historického hľadiska siaha teória zlomkovej derivácie do čias konca 17. storočia, kedy Leibniz vo svojom liste L'Hospitalovi prvýkrát spomína a diskutuje význam derivácie polovičného rádu. Nasledujúce tri storočia sa teória zlomkovej derivácie vyvíjala ako čisto teoretická záležitosť, ktorá mala svoje uplatnenie iba medzi matematikmi. Až v posledných dekádach začalo mnoho autorov poukazovať na možnosti reálneho využitia zlomkovej derivácie a zlomkového integrálu pri opise správania rôznych materiálov, napr. polymérov a pri modelovaní rôznych procesov z oblasti biológie, fyziky, financií atď. Ako sa ukazuje, zlomková derivácia je skvelým nástrojom pre popis pamäti a dedičných vlastností materiálov a procesov. Práve to je aj jedna z hlavných výhod pri systémoch obsahujúcich zlomkovú deriváciu oproti klasickým systémom s deriváciou celočíselného rádu, pri ktorých je zohľadnenie pamäte systému zanedbané. Zlomková derivácia a zlomkový integrál sa tiež často objavujú v teórii riadenia dynamických systémov, kedy je kontrolovaný systém popísaný pomocou sústavy zlomkových diferenciálnych rovníc.

Obsahom tejto práce je ukážka vlastností zlomkových diferenciálnych sústav, ktorých využitie sa často objavuje práve v teórii riadenia, ale môže byť tiež aplikovaná na rôzne iné inžinierske a vedecké problémy. Vo štvrtej kapitole sa najskôr venujeme lineárnej sústave zlomkových diferenciálnych rovníc, lineárnej sústave zlomkových diferenciálnych rovníc s konštantným oneskorením, ktorých teória je pomerne dobre zvládnutá. V ďalšej časti kapitoly spomíname tiež lineárnu sústavu zlomkových diferenciálnych rovníc s aj bez oneskoreného členu. Teória k tejto sústave je však pre svoju zložitosť značne obmedzená a teoretické výsledky sú známe iba v niektorých špeciálnych prípadoch.

Jedným z hlavných cieľov tejto práce je tiež čitateľovi čo najnázornejšie predstaviť správanie jednotlivých sústav. Celá piata kapitola je preto venovaná grafickej interpretácii známych teoretických výsledkov. Rôznou formou vykreslenia riešení predstavených sústav sa snažíme poukázať na rôzne kvalitatívne vlastnosti, ktoré so sebou prináša prítomnosť zlomkovej derivácie. Kapitola je doplnená o komentár, v ktorom porovnávame správanie zlomkových diferenciálnych sústav vzhľadom ku klasickým sústavám obsahujúcich celočíselnú deriváciu.

V šiestej kapitole je uvedený zovšeobecnený model dvoch identických matematických kyvadiel spojených pružinou, ktorého správanie je možné popísať pomocou lineárnej sústavy dvoch zlomkových diferenciálnych rovníc. Na tomto príklade prezentujeme konkrétnu aplikáciu zlomkového kalkulu ako vhodného nástroja pre popis správania sa dynamických systémov. Následne pridaním regulačného členu k modelu kyvadiel získame regulovaný systém, ktorý je možné popísať konkrétnym tvarom lineárnej sústavy zlomkových diferenciálnych rovníc s oneskoreným a neoneskoreným členom. Tvrdenia, ktoré riešia vlastnosti takto vzniknutej sústavy, však nie sú doposiaľ teoreticky odvodené. V práci sme preto uviedli numerický pokus, z výsledkov ktorého sme sa snažili správanie sa tejto sústavy odhadnúť.

2 Užitočné funkcie a pojmy

V tejto kapitole pripomenieme niekoľko dôležitých definícií, ktoré sú často využívané v teórii zlomkového kalkulu.

Eulerova Gamma funkcia

Definícia 2.1. Funkcia $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná predpisom

$$\Gamma(t) := \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx \quad (2.1)$$

sa nazýva *Eulerova Gamma funkcia*.

Poznámka. Integrál (2.1) konverguje práve pre $t \in (0, \infty)$.

Jednou z dôležitých vlastností Eulerovej Gamma funkcie je fakt, že spĺňa rovnosť:

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t) \quad t \in (0, \infty), \quad (2.2)$$

čo môže byť jednoducho odvodené priamo z definície 2.1 integrovaním per partes. Túto vlastnosť môžeme tiež považovať za akúsi analógiu pre vlastnosť *faktoriálu*, pre ktorý platí:

$$n! = n(n-1)! \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

Z vlastností (2.2) a (2.3) môžeme aplikovaním matematickej indukcie odvodiť vzťah

$$\Gamma(n+1) = n! \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

ktorý slúži ako priame prepojenie medzi Eulerovou Gamma funkciou a faktoriálom.

Poznámka. Eulerovu Gamma funkciu zavedenú podľa definície 2.1 môžeme považovať za rozšírenie faktoriálu na kladné nenulové reálne čísla. Pre viac informácií o Eulerovej Gamma funkcii viď [12],[15].

Mittag-Lefflerova funkcia

Definícia 2.2. Nech $\alpha \in (0, \infty)$ a Γ je Eulerova Gamma funkcia. Potom funkcia $E_\alpha : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ daná predpisom

$$E_\alpha(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (2.4)$$

sa nazýva *jednparametrická Mittag-Lefflerova funkcia*.

V prípade $\alpha = 1$ prechádza (2.4) na tvar:

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

Jednparametrická Mittag-Lefflerova funkcia teda predstavuje zovšeobecnenie (parametrizáciu) exponenciálnej funkcie e^z .

Definícia 2.3. Nech $\alpha, \beta \in (0, \infty)$, Γ je Eulerova Gamma funkcia. Potom funkcia $E_{\alpha, \beta} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ daná predpisom

$$E_{\alpha, \beta}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (2.5)$$

sa nazýva *dvojparametrická Mittag-Lefflerova funkcia*.

Konkrétnou voľbou parametrov α a β dostávame dosadením do (2.5) niektoré dobre známe funkcie, napríklad:

$$\begin{aligned} E_{1,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \\ E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}, \\ E_{2,1}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z), \\ E_{2,2}(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}. \end{aligned}$$

Pre účely práce bude tiež potrebné uviesť tvar dvojparametrickej Mittag-Lefflerovej funkcie pre prípad, kedy argument funkcie nie je skalár $z \in \mathbb{C}$, ale matica $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$, kde $d \in \mathbb{N}$.

Definícia 2.4. Nech $\alpha, \beta \in (0, \infty)$, Γ je Eulerova Gamma funkcia. Potom funkcia $E_{\alpha, \beta} : \mathbb{C}^{d \times d} \rightarrow \mathbb{C}^{d \times d}$ daná predpisom

$$E_{\alpha, \beta}(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (2.6)$$

sa nazýva *maticová Mittag-Lefflerova funkcia*.

Poznámka. Značením A^k v (2.6) myslíme k -tu mocninu matice A , teda súčin k matíc A . Pre prípad $k = 0$, definujeme $A^0 := I$, kde I je jednotková matica s rozmermi $d \times d$, teda rovnakými ako matica A .

Ako uvidíme neskôr, práve pomocou maticovej Mittag-Lefflerovej funkcie budeme schopní vyjadriť riešenie sústavy zlomkových diferenciálnych rovníc, s ktorou sa budeme bližšie zaoberať. Pre ďalšie špeciálne prípady a viac informácií o Mittag-Lefflerovej funkcii (jednparametrickej aj dvojparametrickej) viď [12]. O vlastnostiach maticovej Mittag-Lefflerovej funkcie viď [14].

Laplaceova transformácia

V tejto časti uvedieme stručný prehľad teórie k Laplaceovej transformácii, ktorá je dôležitou súčasťou pri riešení sústav zlomkových diferenciálnych rovníc, s ktorými sa budeme v ďalších častiach textu zaoberať. Viac o Laplaceovej transformácii, ako aj dôkazy uvedených viet viď [16], o využití Laplaceovej transformácie pri výpočtoch diferenciálnych rovníc celočíselného rádu viď [11].

Definícia 2.5 (Laplaceova transformácia). Nech $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je reálna funkcia. Potom Laplaceova transformácia funkcie f je komplexná funkcia $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ daná vzťahom

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) := \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

kde $s \in \mathbb{C}$, pre ktoré tento nevlastný integrál konverguje. Funkciu $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ nazývame Laplaceov obraz funkcie f .

Predpoklad existencie Laplaceovej transformácie uvádza nasledujúca veta.

Veta 2.6 (existencia Laplaceovej transformácie). Nech $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je po častiach spojitá funkcia. Potom ak existujú konštanty $a \in \mathbb{R}$, $K \in (0, \infty)$ také, že $|f(t)| \leq Ke^{at}$ na nejakom intervale $[t_0, \infty)$, kde $t_0 \in [0, \infty)$, tak $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ je definovaná pre $s \in \mathbb{C}$, ktoré spĺňajú $\operatorname{Re}(s) > a$.

Poznámka. $\operatorname{Re}(s)$ značí reálnu časť komplexného čísla s . Pod pojmom po častiach spojitá funkcia rozumieme, že počet bodov nespojitosti je konečný, pričom ide o skokovú nespojitosť, teda obe jednostranné limity v týchto bodoch existujú a sú konečné a rozdielne. Podmienka $|f(t)| \leq Ke^{at}$, ktorú od funkcie f požadujeme, sa tiež nazýva *exponenciálna obmedzenosť*.

Laplaceova transformácia je veľmi užitočný nástroj pri riešení niektorých sústav diferenciálnych rovníc práve vďaka svojim vlastnostiam, preto je vhodné niekoľko z nich spomenúť.

Linearita:

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\}(s) = a\mathcal{L}\{f(t)\}(s) + b\mathcal{L}\{g(t)\}(s) \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Transformácia n -tej derivácie:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0).$$

Dôležitou súčasťou pri aplikácii Laplaceovej transformácie je, aby sme boli schopní z komplexnej funkcie $F(s)$ získať pôvodnú funkciu $f(t)$, preto zavádzame pojem tzv. *Inverznej Laplaceovej transformácie*.

Definícia 2.7 (Inverzná Laplaceova transformácia). Nech $F(s)$ je komplexná funkcia taká, že $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$. Potom *inverzná Laplaceova transformácia* funkcie F je reálna funkcia $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$, pre ktorú platí

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = f(t).$$

Poznámka. Pre výpočet inverznej transformácie existuje aj explicitný vzorec

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) ds.$$

Ide však o tzv. *krivkový integrál v komplexnej rovine*, ktorého výpočet je technicky dosť náročný, preto sa v praxi používa zriedka. Častejšie sa využívajú tabuľky so vzorcami pre určenie inverznej Laplaceovej transformácie. To nám umožňuje pri spojitých funkciách skutočnosť, že vzor Laplaceovej transformácie je určený jednoznačne, ako uvádza nasledujúca veta.

Veta 2.8 (Lerchova). Nech $f, g \in C[0, \infty)$, pre ktoré platí $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$, potom $f(t) = g(t)$.

Poznámka. Značením $C[0, \infty)$ myslíme množinu spojitých funkcií na intervale $[0, \infty)$.

3 Základy zlomkového kalkulu

V tejto kapitole zdefinujeme základné a pre potreby tejto práce dôležité pojmy zlomkového kalkulu. Zameriame sa na definíciu tzv. zlomkového integrálu a Caputovej zlomkovej derivácie, ktoré zovšeobecňujú definíciu n -násobného integrálu a derivácie n -tého rádu. Následne uvedieme vlastnosti, ktoré tieto definície implikujú. Rôzne spôsoby zavedenia pojmu derivácie (resp. integrálu) neceločíselného rádu sú podrobne popísané v [6],[8] a [12], ktoré sú aj hlavným zdrojom tejto kapitoly.

Zlomkový integrál

Pre naše potreby je vhodné pri zavedení zlomkového integrálu vychádzať z tzv. *Cauchyho formuly pre n -násobný integrál* integrovateľnej reálnej funkcie f , ktorá je tvaru

$$D_a^{-n}f(t) := \int_a^t \left(\int_a^{\tau_n} \dots \left(\int_a^{\tau_2} f(\tau_1) d\tau_1 \right) \dots d\tau_{n-1} \right) d\tau_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad (3.1)$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je dolná medza integrálu a $n \in \mathbb{N}$ je násobnosť integrálu (tiež sa používa pomenovanie n -tá iterácia integrálu). Odvodenie viď napr. [13].

Poznámka. Jediný predpoklad, ktorý sa kladie na funkciu f , je už spomínaná integrovateľnosť.

Zovšeobecnený tvar Cauchyho formuly dostaneme nahradením n za $\alpha \in (0, \infty)$ a faktoriálu $(n-1)!$ za Eulerovu Gamma funkciu $\Gamma(\alpha)$.

Definícia 3.1 (Zlomkový integrál). Nech $\alpha \in (0, \infty)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f je integrovateľná funkcia na intervale $[a, b]$. Potom operátor $D_a^{-\alpha}$ definovaný vzťahom

$$D_a^{-\alpha}f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (3.2)$$

pre $t \in [a, b]$ nazveme *zlomkový integrál rádu α* . Pre prípad $\alpha = 0$ definujeme $D_a^0 f(t) = f(t)$ ako identický operátor.

Poznámka. Korektnosť takto zavedeného zlomkového integrálu je pre $\alpha \geq 1$ zrejmá, pretože integrand sa skladá zo súčinu integrovateľnej funkcie f a spojitej funkcie $(t-\tau)^{\alpha-1}$, teda integrál existuje pre všetky $t \in [a, b]$. Prípad $\alpha \in (0, 1)$ situáciu trochu komplikuje. Existenciu integrálu (3.2) však upresňuje nasledujúca veta.

Veta 3.2. Nech $\alpha \in (0, \infty)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f je integrovateľná funkcia na intervale $[a, b]$. Potom zlomkový integrál $D_a^{-\alpha}f(t)$ existuje skoro všade na $[a, b]$. Navyše aj funkcia $D_a^{-\alpha}f(t)$ je integrovateľná na $[a, b]$.

Poznámka. Termínom *skoro všade* myslíme, že zlomkový integrál nemusí existovať iba na množine bodov s nulovou mierou. Pre presnú definíciu množiny s nulovou mierou viď [2].

Ďalej je vhodné spomenúť dôležitú vlastnosť operátora $D_a^{-\alpha}$, ktorá je uvedená v nasledujúcej vete.

Veta 3.3. Nech $\alpha, \beta \in [0, \infty)$ a f je integrovateľná na $[a, b]$. Potom

$$D_a^{-\alpha} D_a^{-\beta} f(t) = D_a^{-(\alpha+\beta)} f(t) \quad (3.3)$$

platí skoro všade na $[a, b]$.

Poznámka. Termínom *skoro všade* opäť referujeme na fakt, že platnosť rovnosti (3.3) môže byť porušená iba na množine bodov s nulovou mierou. Pridaním predpokladu $f \in C[a, b]$ alebo $\alpha + \beta \geq 1$ dostávame platnosť rovnosti (3.3) na celom intervale $[a, b]$. Značením $C[a, b]$ myslíme množinu spojitých funkcií na intervale $[a, b]$.

Dôkazy vety 3.2 a vety 3.3 ako aj podrobnú diskusiu zavedenia zlomkového integrálu môže čitateľ nájsť napríklad v [6].

Caputova zlomková derivácia

Zavedenie zlomkovej derivácie je o niečo zložitejšia úloha. Analógia vzorca (3.1) pre prípad derivácie n -tého rádu v reálnom obore nie je známa. Preto na zavedenie zlomkovej derivácie využijeme zlomkový integrál. Ešte pripomeňme, že existuje niekoľko spôsobov, ako zlomkovú deriváciu definovať. Preto je ich pomenovanie často viazané k menu autora danej definície.

Definícia 3.4 (Caputova zlomková derivácia). Nech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\alpha \in [0, \infty)$, $n = \lceil \alpha \rceil$ a f je reálna funkcia, pre ktorú $f^{(n)}$ je integrovateľná na $[a, b]$. Potom operátor D_a^α definovaný vzťahom

$$D_a^\alpha f(t) := D_a^{-(n-\alpha)}(f^{(n)}(t)) \quad (3.4)$$

pre $t \in [a, b]$ nazveme *Caputova zlomková derivácia rádu α* .

Poznámka. Symbolom $\lceil \cdot \rceil$ značíme *hornú celú časť čísla*. Pre prípad $\alpha = 0$ dostávame $D_a^0 f(t) = f(t)$ a pre $\alpha = n \in \mathbb{N}$ dostávame klasickú deriváciu n -tého rádu. Predpoklad na integrovateľnosť $f^{(n)}$ je potrebný z dôvodu zaručenia existencie zlomkového integrálu $D_a^{-(n-\alpha)}$ podľa vety 3.2.

Ako definícia Caputovej zlomkovej derivácie sa pre $n - 1 < \alpha < n$, kde $n \in \mathbb{N}$, tiež zvykne využívať rozpísanie vzťahu (3.4) na tvar

$$D_a^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau.$$

Ešte poznamenajme, že Caputova zlomková derivácia sa tiež zvykne označovať symbolom ${}^C D_a^\alpha$, aby sa zdôraznilo, že ide práve o tento typ zlomkovej derivácie. V tejto práci však iný druh zlomkovej derivácie nevyužívame, preto budeme pokračovať v značení D_a^α .

Pri klasickej teórii je známe, že derivácia celočíselného rádu má lokálny charakter, teda na jej určenie potrebujeme poznať iba ľubovoľne malé okolie bodu, v ktorom deriváciu určujeme. To však pri Caputovej zlomkovej derivácii neplatí. V jej definícii je priamo obsiahnutý zlomkový integrál, a preto je nutné poznať hodnotu funkcie na celom intervale $[a, t]$. S touto skutočnosťou súvisí aj závislosť hodnoty Caputovej zlomkovej derivácie od voľby počiatočného bodu a . Táto vlastnosť sa preto dá vhodne využiť pri modelovaní systémov, ktorých súčasný stav je závislý od svojej minulosti.

Poznámka. V prípade $\alpha = n \in \mathbb{N}$ prechádza Caputova zlomková derivácia na tvar klasickej derivácie, teda v tomto prípade má aj Caputova zlomková derivácia lokálny charakter.

Jednou z dôležitých vlastností Caputovej derivácie je, rovnako ako pri klasickej celočíselnej derivácii, linearita:

$$D_a^\alpha [\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda D_a^\alpha f(t) + \mu D_a^\alpha g(t), \quad (3.5)$$

kde $\alpha \in (0, \infty)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ a f, g sú reálne funkcie, pre ktoré sú všetky operácie definované.

Nasledujúce vety uvádzajú vzájomný vzťah medzi zlomkovým integrálom a Caputovou zlomkovou deriváciou.

Veta 3.5. *Nech $\alpha \in [0, \infty)$ a $f \in C[a, b]$. Potom*

$$D_a^\alpha D_a^{-\alpha} f(t) = f(t)$$

pre všetky $t \in [a, b]$.

Veta 3.6. *Nech $\alpha \in [0, \infty)$, $n = \lceil \alpha \rceil$ a $f \in AC^n[a, b]$. Potom*

$$D_a^{-\alpha} D_a^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k$$

pre všetky $t \in [a, b]$.

Poznámka. Značením $AC^n[a, b]$ myslíme množinu funkcií s absolútne spojitou $(n-1)$ -ou deriváciou. Pre presnú definíciu tejto množiny viď [6].

Z vety 3.5 teda vyplýva, že Caputova derivácia plní funkciu ľavej inverzie ku zlomkovému integrálu. Z vety 3.6 však vidíme, že Caputova derivácia nie je jeho pravou inverziou, keďže sa na pravej strane rovnosti objavuje Taylorov polynóm stupňa $n-1$ so stredom v bode a . S výskytom spomínaného Taylorovho polynómu je spojený aj predpoklad $f \in AC^n[a, b]$, ktorý zaručuje jeho existenciu. Odvodenie vlastnosti (3.5) a dôkazy viet 3.5 a 3.6 ako aj bližšie zdôvodnenie jednotlivých podmienok pre platnosť týchto tvrdení viď [6].

4 Lineárne sústavy zlomkových diferenciálnych rovníc

V tejto kapitole uvidíme niekoľko typov sústav zlomkových diferenciálnych rovníc a k nim pridruženú teóriu spojenú so stabilitou a asymptotickými vlastnosťami riešenia týchto sústav.

V tejto práci sa budeme často stretávať s pojmom asymptotickej stability nulového riešenia, preto iba v skratke pripomeňme, že nulové riešenie danej sústavy diferenciálnych rovníc budeme označovať za *asymptoticky stabilné* práve vtedy, keď pre všetky riešenia sústavy $y(t)$ platí, že $\|y(t)\| \rightarrow 0$ pre $t \rightarrow \infty$. V prípade, ak pre všetky nenulové riešenia platí $\|y(t)\| \rightarrow \infty$ pre $t \rightarrow \infty$, zas budeme nulové riešenie nazývať *nestabilné*. Keďže sa budeme zaoberať iba lineárnymi sústavami, je takáto formulácia dostatočná.

Prípady, kedy pripúšťame možnosť stability (nie asymptotickej) nulového riešenia, však budeme vynechávať, pretože pre naše potreby sú v tejto práci pomerne nepotrebné. Stabilita nulového riešenia nasledujúcich sústav je skôr hraničná situácia medzi asymptotickou stabilitou a nestabilitou, preto je numericky tieto situácie pomerne ťažké dosiahnuť.

4.1 Lineárna sústava bez oneskorenia

Lineárnou sústavou bez oneskorenia budeme rozumieť sústavu tvaru

$$D_0^\alpha y(t) = Ay(t), \quad (4.1)$$

kde $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ je reálna matica, kde $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, \infty)$, $n = [\alpha]$, D_0^α je Caputova zlomková derivácia rádu α a $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ je vektorová reálna funkcia.

K sústave (4.1) pridávame počiatočné podmienky

$$y^{(k)}(0) = y_k \in \mathbb{R}^d, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (4.2)$$

Veta 4.1. *Nech $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $\alpha \in (0, \infty)$. Potom riešenie $y(t)$ sústavy (4.1) s počiatočnými podmienkami (4.2) je tvaru:*

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k E_{\alpha, k+1}(t^\alpha A) y_k. \quad (4.3)$$

Poznámka. Pre odvodenie vety 4.1 viď [14].

Zavedme podmnožinu komplexnej roviny M_α danú predpisom

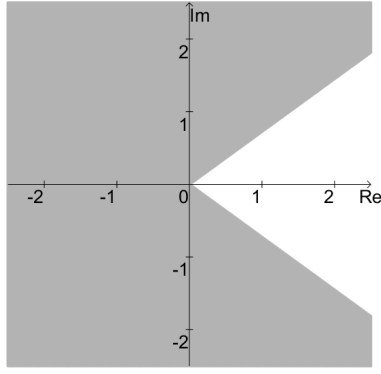
$$M_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\text{Arg}(z)| > \frac{\alpha\pi}{2}, \quad \alpha \in (0, \infty) \right\}, \quad (4.4)$$

kde $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$ je hlavná hodnota argumentu komplexného čísla z .

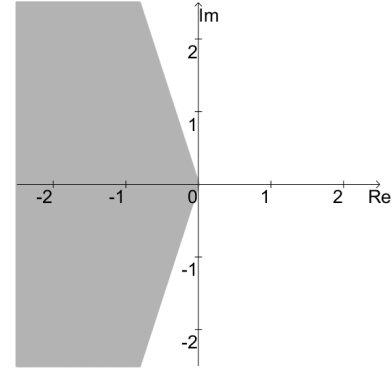
Otázku stability riešenia sústavy (4.1) s počiatočnou podmienkou (4.2) rieši nasledujúca veta.

Veta 4.2. *Nech $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ pre $i \in \{1, \dots, d\}$ sú vlastné čísla A , a nech $\alpha \in (0, \infty)$. Potom, ak všetky $\lambda_i \in \mathbb{C}$ pre $i \in \{1, \dots, d\}$ patria do množiny M_α , tak nulové riešenie sústavy (4.1) je asymptoticky stabilné.*

Poznámka. Pre dôkaz vety 4.2 viď [10]. Poznamenajme, že pre prípad $\alpha \in (0, 2)$ je možné vetu 4.2 formulovať aj v tvare ekvivalencie. Môžeme si tiež všimnúť, že pre $\alpha \geq 2$ sa z M_α stáva prázdna množina. Množina M_α zobrazená na Obr. 1 sa tiež zvykne nazývať *Matignonov sektor*.



(a) Vykreslené pre hodnotu: $\alpha = 0,4$



(b) Vykreslené pre hodnotu: $\alpha = 1,2$

Obr. 1: Oblasť stability M_α

Veta 4.2 nám udáva podmienky, pri ktorých je nulové riešenie sústavy (4.1) asymptoticky stabilné. Môžeme si tiež všimnúť, že na rozdiel od klasickej sústavy, kedy $\alpha = 1$ (sústava je celočíselného rádu), môže byť nulové riešenie v zlomkovom prípade asymptoticky stabilné aj v prípade $\text{Re}(\lambda) > 0$, čo pri celočíselnom nie je možné, viď [9]. Ďalšou odlišnosťou v prípade neceločíselného rádu je rýchlosť konvergencie normy riešenia, ktorá nie je exponenciálneho, ale algebraického typu. Túto vlastnosť presnejšie uvádzame v nasledujúcej vete. Predtým však ešte uvedieme jeden pomocný pojem.

Definícia 4.3 (Asymptotická ekvivalencia funkcií). Nech $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sú funkcie. Potom hovoríme, že funkcie f a g sú *asymptoticky ekvivalentné* práve vtedy, keď platí:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|f(t)|}{|g(t)|} = C,$$

kde $C \in (0, \infty)$. Asymptotickú ekvivalenciu funkcií f a g značíme: $f \sim g$.

Veta 4.4. Nech $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $\alpha \in (0, \infty) \setminus \{1, 2, 3, \dots\}$, $n = \lceil \alpha \rceil$. Ak norma riešenia sústavy (4.1) s počiatočnými podmienkami (4.2) konverguje k nulovému riešeniu, potom existuje príslušné $j \in \{0, \dots, n-1\}$ také, že $\|y(t)\| \sim t^{j-\alpha}$ pre $t \rightarrow \infty$.

Poznámka. Pre odvodenie vety 4.4 odkážeme čitateľa na [10].

4.2 Lineárna sústava s konštantným oneskorením

Lineárnou sústavou s konštantným oneskorením rozumieme sústavu tvaru

$$D_0^\alpha y(t) = By(t - \tau), \quad (4.5)$$

kde $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ je reálna matica, kde $d \in \mathbb{N}$, $\alpha, \tau \in (0, \infty)$, $n = \lceil \alpha \rceil$, D_0^α je Caputova zlomková derivácia rádu α a $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ je vektorová funkcia.

K sústave (4.5) pridávame počiatočné podmienky

$$y(t) = \phi(t) \quad t \in [-\tau, 0] \quad (4.6)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} y^{(k)}(t) = \phi_k \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (4.7)$$

kde $\phi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^d$ je vektorová funkcia, ktorej komponenty $\phi_1(t), \dots, \phi_d(t)$ sú absolútne riemannovsky integrovateľné funkcie.

Poznámka. Pre všetky dôkazy viet, vzťahujúcich sa k sústave (4.5), odkážeme čitateľa na [5].

Na vyjadrenie riešenia počiatkovej úlohy (4.5)-(4.7) potrebujeme zaviesť nasledujúcu pomocnú definíciu:

Definícia 4.5. Nech $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$, I je jednotková matica o rozmeroch $d \times d$ a $\alpha, \tau \in (0, \infty)$. Potom maticová funkcia $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ daná vzťahom:

$$R(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s^\alpha I - Be^{-s\tau})^{-1}\}(t),$$

kde $\mathcal{L}^{-1}$ je inverzná Laplaceova transformácia, sa nazýva *fundamentálna matica riešenia sústavy* (4.5).

Poznámka. Všimnime si, že v tomto prípade je inverzná Laplaceova transformácia použitá na maticu $(s^\alpha I - Ae^{-s\tau})^{-1}$, ktorej rozmery sú $d \times d$, predpokladáme teda, že operácia je použitá na jednotlivé prvky tejto matice.

Riešenie počiatkovej úlohy (4.5)-(4.7) potom dostávame v nasledujúcom tvare.

Veta 4.6. Nech $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $\alpha, \tau \in (0, \infty)$, $n = [\alpha]$ a R je fundamentálna matica riešenia sústavy (4.5). Potom riešenie $y(t)$ sústavy (4.5) s počiatkovými podmienkami (4.6)-(4.7) je tvaru

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} D_0^{\alpha-k-1} R(t) \phi_k + \int_{-\tau}^0 R(t - \tau - u) B \phi(u) du.$$

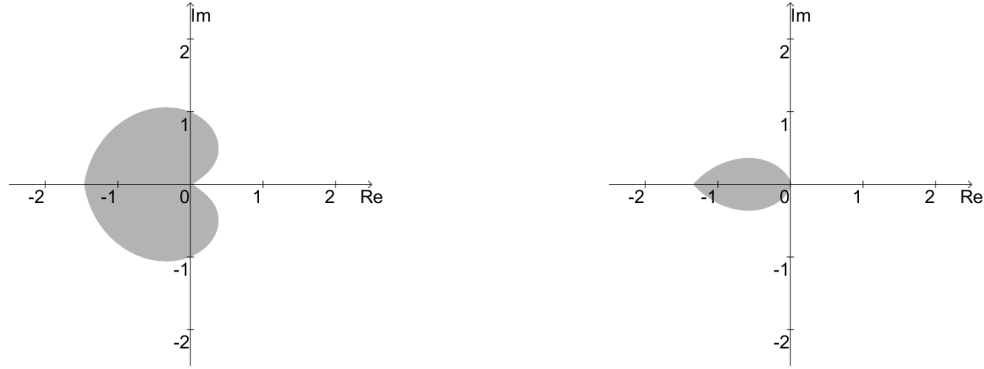
Zavedme podmnožinu komplexnej roviny $M_{\alpha, \tau}$ danú predpisom:

$$M_{\alpha, \tau} = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\text{Arg}(z)| > \alpha \frac{\pi}{2} \quad \wedge \quad |z| < \left(\frac{|\text{Arg}(z)| - \frac{\alpha\pi}{2}}{\tau} \right)^\alpha : \quad \alpha, \tau \in (0, \infty) \right\}, \quad (4.8)$$

kde $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$ je hlavná hodnota argumentu komplexného čísla z .

Veta 4.7. Nech $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ pre $i \in \{1, \dots, d\}$ sú vlastné čísla B , a nech $\alpha, \tau \in (0, \infty)$. Potom, ak všetky λ_i patria do množiny $M_{\alpha, \tau}$, tak nulové riešenie sústavy (4.5) je asymptoticky stabilné.

Poznámka. Obdobne ako pri vete 4.2 aj v prípade vety 4.7 sme schopní pre hodnoty $\alpha \in (0, 2)$ tvrdenie formulovať vo forme ekvivalencie. Opäť si môžeme všimnúť, že pre $\alpha \geq 2$ sa z $M_{\alpha, \tau}$ stáva prázdna množina. Taktiež je možné ľahko odvodiť, že pre $\tau \rightarrow 0$ platí $M_{\alpha, \tau} \rightarrow M_\alpha$ a sústava (4.5) prechádza na tvar (4.1), teda sústavu bez oneskorenia. Oblasť stability $M_{\alpha, \tau}$ je vykreslená na Obr. 2.



(a) Vykreslené pre hodnoty: $\alpha = 0,4$ $\tau = 1$

(b) Vykreslené pre hodnoty: $\alpha = 1,2$ $\tau = 1$

Obr. 2: Oblasť stability $M_{\alpha, \tau}$

Z dôkazu vety 4.7 uvedenom v [5] tiež vyplýva, že konvergencia normy k nulovému riešeniu pre $\alpha \in (0, \infty) \setminus \{1, 2, 3, \dots\}$ je algebraického typu. Presné tvrdenie uvedieme v nasledujúcej vete.

Veta 4.8. *Nech $B \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $\alpha \in (0, \infty) \setminus \{1, 2, 3, \dots\}$, $n = \lceil \alpha \rceil$. Ak riešenie počiatočnej úlohy (4.5) - (4.7) konverguje k nulovému riešeniu, potom existuje príslušné $j \in \{0, \dots, n\}$ také, že $\|y(t)\| \sim t^{j-\alpha-1}$ pre $t \rightarrow \infty$.*

Teda ak dané riešenie konverguje k nulovému riešeniu (nulové riešenie sústavy je asymptoticky stabilné), môžeme pre normu riešenia obdržať nasledujúce možnosti rýchlosti konvergencie:

- Pre $\alpha \in (0, 1)$ je rýchlosť konvergencie $\|y(t)\|$, pre $t \rightarrow \infty$ ako pri $t^{-\alpha}$ alebo $t^{-\alpha-1}$.
- Pre $\alpha \in (1, 2)$ je rýchlosť konvergencie $\|y(t)\|$, pre $t \rightarrow \infty$ ako pri $t^{-\alpha}$, $t^{-\alpha-1}$ alebo $t^{1-\alpha}$.

4.3 Lineárna sústava s oneskoreným a neoneskoreným členom

Posledný typ sústavy, ktorej sa budeme venovať, je tvaru

$$D_0^\alpha y(t) = Ay(t) + By(t - \tau), \quad (4.9)$$

kde $\alpha \in (0, \infty)$, D_0^α je Caputova zlomková derivácia rádu α , $A, B \in \mathbb{R}^{d \times d}$ a $\tau \in (0, \infty)$ je oneskorenie.

Táto sústava predstavuje matematický model s pomerne veľkým aplikačným potenciálom, špeciálne v teórii riadenia. So sústavou (4.9) sa môžeme často stretnúť pri modelovaní úlohy stabilizácie bodu rovnováhy zlomkového dynamického systému pomocou riadenia so spätnou väzbou (konkrétne člen $Ay(t)$ popisuje správanie dynamického systému a $By(t)$ predstavuje spätnoväzobný regulačný člen, ktorý s oneskorením τ reaguje na systém $Ay(t)$). Z tvaru (4.9) vidíme, že sa jedná o kombináciu sústav (4.1) a (4.5), ktorým sme sa venovali v predchádzajúcich častiach tejto kapitoly. Dôležité je tiež spomenúť, že tvrdenia ohľadom stability a asymptotiky tejto sústavy pre všeobecné matice A, B neboli doposiaľ teoreticky odvodené. Pri sústave (4.9) sa teda obmedzíme iba na jej jeden konkrétny tvar, ktorý bol podrobne rozobratý v [4] a pre naše potreby tento článok predstavuje teoretický základ, z ktorého budeme čerpať.

Ďalej sa už budeme zaoberať planárnou zlomkovou sústavou s oneskoreným aj neoneskoreným členom, ktorá je tvaru

$$\begin{aligned} D_0^\alpha &= ay_1(t - \tau) + by_2(t) \\ D_0^\alpha &= cy_1(t) + ay_2(t - \tau), \end{aligned} \quad (4.10)$$

so vstupmi $a, b, c \in \mathbb{R}$ ($b, c \neq 0$), rádom Caputovej zlomkovej derivácie $\alpha \in (0, 1)$ a oneskorením $\tau \in (0, \infty)$.

Zaujímavým rozdielom medzi (4.10) a predtým spomínanou sústavou (4.5) je vplyv oneskorenia τ na zmenu stability nulového riešenia. Pri sústave (4.5) vieme, že pri spojitom zvyšovaní hodnoty τ pri zafixovaní ostatných parametrov (rád derivácie α a koeficienty matice B) dochádza maximálne k jednej zmene správania sústavy (4.5). Tým myslíme, že nulové riešenie prejde pri zvyšovaní hodnoty τ z asymptotickej stability do nestability maximálne jedenkrát. Môžeme teda interval hodnôt τ rozdeliť na dva podintervaly $(0, \tau^*]$ a (τ^*, ∞) , kde τ^* značí maximálnu hodnotu τ , pre ktoré je nulové riešenie sústavy (4.5) asymptoticky stabilné. V prípade sústavy (4.10), ako neskôr uvidíme, môžu nastať situácie, kedy pri zvyšovaní hodnoty τ dochádza k tzv. "prepínaniu stability" nulového riešenia.

K sústave (4.10) pridávame počiatočné podmienky

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \phi_1(t) \\ y_2(t) &= \phi_2(t) \quad t \in [-\tau, 0], \end{aligned} \quad (4.11)$$

kde funkcie ϕ_1, ϕ_2 sú po častiach spojitú funkcie na intervale $[-\tau, 0]$.

Poznámka. Keďže sa s rádom Caputovej zlomkovej derivácie pohybujeme na intervale $\alpha \in (0, 1)$, väčší počet počiatočných podmienok nie je potrebný.

Tvar riešenia počiatočného problému (4.10)-(4.11) je nad rámec tohto textu, preto čitateľa odkážeme na [4], kde je odvodenie riešenia uvedené. Ďalej spomenieme iba pojmy týkajúce sa stability nulového riešenia.

Veta 4.9. *Nech $\alpha \in (0, 1)$, $\tau \in (0, \infty)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ spĺňajúce podmienku $bc > 0$, a nech τ^* je číslo definované vzťahom*

$$\tau^*(a, b, c) = \frac{\frac{(2-\alpha)\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{\sqrt{bc}}{a} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right)}{\left(\sqrt{a^2 - bc \sin^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} + \sqrt{bcc} \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Potom nulové riešenie sústavy (4.10) je asymptoticky stabilné práve vtedy, keď

$$a + \sqrt{bc} < 0 \quad \wedge \quad \tau < \tau^*.$$

Poznámka. Pre dôkaz viď [4].

Otázka stability sústavy (4.10) je v prípade $bc < 0$ značne náročnejšia a vyžaduje niekoľko medzikrokov, ktoré v texte vynecháme a čitateľa odkážeme na [4], kde je uvedený presný postup a samotný dôkaz nasledujúcej vety 4.10, ktorá prípad stability pre $bc < 0$ rieši.

Pre formuláciu výsledkov budeme potrebovať hodnoty α^* a θ_0^* , ktoré sú jednoznačne určené sústavou nelineárnych rovníc (sústava je uvedená v [4]) s približným numerickým riešením:

$$\alpha^* \approx 0,6150768144 \quad \text{a} \quad \theta_0^* \approx 0,562788670. \quad (4.12)$$

Ďalej zavedieme hodnoty $\theta_j^* \in (0, \alpha\pi/2)$ ako jedinečné riešenia rovníc

$$-\frac{\sin(\theta + \frac{\alpha\pi}{2})}{\sin(\theta - \frac{\alpha\pi}{2})} = \left(\frac{(2j+3-\alpha)\pi}{\theta + (j + \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2})\pi} - 1 \right)^\alpha, \quad (4.13)$$

kde $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Pre tieto hodnoty navyše platí $\theta_j^* > \theta_{j+1}^*$ pre všetky $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ a $\theta_j^* \rightarrow 0^+$ pre $j \rightarrow \infty$.

Poznámka. Pre dôkazy týchto pomocných tvrdení viď [4].

Veta 4.10. *Nech $\alpha \in (0, 1)$, $\tau \in (0, \infty)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ spĺňajúce podmienku $bc < 0$, α^* je daná (4.12) a $\theta_j^* \in (0, \alpha\pi/2)$ sú jedinečné korene (4.13) pre $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$, ďalej za predpokladu $|a|/\sqrt{-bc} \geq \cos(\alpha\pi/2)$, nech $m \geq 0$ je párne celé číslo (ak $a \geq 0$), alebo nepárne celé číslo (ak $a < 0$), jednoznačne určené nerovnosťami*

$$\frac{\cos(\frac{\alpha\pi}{2})}{\cos(\theta_m^*)} \leq \frac{|a|}{\sqrt{-bc}} < \frac{\cos(\frac{\alpha\pi}{2})}{\cos(\theta_{m-2}^*)}, \quad m \geq 2 \quad \text{alebo} \quad \frac{\cos(\frac{\alpha\pi}{2})}{\cos(\theta_m^*)} \leq \frac{|a|}{\sqrt{-bc}}, \quad m \in \{0, 1\}. \quad (4.14)$$

Potom nulové riešenie systému (4.10) je asymptoticky stabilné práve vtedy, keď je splnená niektorá z nasledujúcich podmienok:

$$\frac{|a|}{\sqrt{-bc}} < \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right); \quad (4.15)$$

$$\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \leq \frac{a}{\sqrt{-bc}} < \cotg\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \quad \wedge \quad \tau \in \bigcup_{j=-1}^{\frac{m}{2}-1} (\tau_{2j,-1}^*, \tau_{2j+2,1}^*); \quad (4.16)$$

$$\alpha > \alpha^*, \cotg\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \leq \frac{a}{\sqrt{-bc}} < \frac{\cos(\frac{\alpha\pi}{2})}{\cos(\theta_0^*)} \quad \wedge \quad \tau \in \bigcup_{j=0}^{\frac{m}{2}-1} (\tau_{2j,-1}^*, \tau_{2j+2,1}^*); \quad (4.17)$$

$$\frac{a}{\sqrt{-bc}} \leq -\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \quad \wedge \quad \tau \in \bigcup_{j=-1}^{\frac{m-1}{2}-1} (\tau_{2j+1,-1}^*, \tau_{2j+3,1}^*), \quad (4.18)$$

kde $\tau_{i,\kappa}^* = 0$ pre záporné celé čísla i a pre nezáporné celé čísla i sú $\tau_{i,\kappa}^*$ určené podľa vzťahu

$$\tau_{i,\kappa}^*(a, b, c) = \frac{(i + \frac{1-\alpha}{2})\pi - \kappa \arccos\left(\left|\frac{\sqrt{-bc}}{a}\right| \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right)}{\left(\kappa \sqrt{a^2 - |bc| \cos^2\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)} + \sqrt{-bc} \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad \kappa = \pm 1.$$

4.4 Numerická metóda pre výpočet riešení sústav

V poslednej časti tejto kapitoly ešte stručne popíšeme odvodenie algoritmu numerickej metódy, ktorý pre svoju univerzálnosť využívame pri výpočte riešení všetkých sústav zlomkových diferenciálnych rovníc, ktoré v tejto práci spomínáme. Ešte poznamenajme, že samotný algoritmus preberáme z práce [1], kde bol numerický algoritmus implementovaný v Matlabe.

Zadanie úlohy

Nech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $d \in \mathbb{N}$, $A, B : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ sú maticové funkcie, ktorých jednotlivé zložky sú spojité funkcie a $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ je vektorová funkcia, ktorej jednotlivé zložky sú spojité funkcie. Úlohou je nájsť numerické riešenie $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ sústavy

$$D_a^\alpha y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t - \tau) + f(t) \quad t \in [a, b],$$

s počiatočnými podmienkami

$$\begin{aligned} y(t) &= \phi(t) & t \in [-\tau, 0] \\ \lim_{t \rightarrow a^+} y^{(k)}(t) &= \phi_k \in \mathbb{R}^d & k = 0, \dots, n-1, \end{aligned}$$

kde $\phi : [a - \tau, a] \rightarrow \mathbb{R}^d$ je vektorová funkcia, ktorej komponenty $\phi_1(t), \dots, \phi_d(t)$ sú riemannovsky integrovateľné funkcie.

Odvodenie algoritmu

Odvodenie riešenia budeme realizovať všeobecne pre i -tu zložku neznámej funkcie y , kde $i \in \{1, \dots, d\}$. Rovnicu si pre i -tu zložku môžeme rozpísať nasledovne:

$$D_a^\alpha y_i(t) = \sum_{j=1}^d a_{ij}(t)y_j(t) + \sum_{j=1}^d b_{ij}(t)y_j(t - \tau) + f_i(t), \quad i \in \{1, 2, \dots, d\}.$$

Ako ďalší krok na obe strany rovnice aplikujeme zľava zlomkový integrál

$$D_a^{-\alpha} D_a^\alpha y_i(t) = D_a^{-\alpha} \left(\sum_{j=1}^d a_{ij}(t)y_j(t) + \sum_{j=1}^d b_{ij}(t)y_j(t - \tau) + f_i(t) \right).$$

Následne využijeme vlastnosť vyplývajúcu z vety 3.6, čím dostávame:

$$y_i(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\phi_k}{k!} (t-a)^k = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-r)^{\alpha-1} \left(\sum_{j=1}^d a_{ij}(r)y_j(r) + \sum_{j=1}^d b_{ij}(r)y_j(r - \tau) + f_i(r) \right) dr.$$

Rozdelením intervalu $[a, t]$ na p podintervalov s konštantnou dĺžkou $h > 0$ sme potom pomocou $t_s = t_0 + sh$, kde $t_0 = a$ schopní vyjadriť každý podinterval $[t_s, t_{s+1}]$, kde $s \in \{0, \dots, p-1\}$. Presunutím vzniknutého Taylorovho polynómu z ľavej strany na pravú a rozdelením intervalu $[a, t]$ na p podintervalov dostávame rovnicu v tvare:

$$y_i(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\phi_k}{k!} (t-a)^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{s=0}^{p-1} \left[\int_{t_s}^{t_{s+1}} (t-r)^{\alpha-1} \left(\sum_{j=1}^d a_{ij}(r)y_j(r) + \sum_{j=1}^d b_{ij}(r)y_j(r - \tau) + f_i(r) \right) dr \right].$$

Posledným krokom zostáva aproximovať hodnotu integrálu na jednotlivých podintervaloch. Aproximáciu dostaneme pomocou explicitnej alebo implicitnej obdĺžnikovej metódy. V našom prípade používame implicitnú metódu. Pre presný postup odvodenia ďalej odkážeme čitateľa na prácu [1], kde sú jednotlivé kroky podrobne uvedené.

Výsledné hodnoty vektoru funkcie y v jednotlivých uzlových bodoch delenia intervalu $[a, t]$ potom dostávame vyriešením nasledujúcej lineárnej sústavy rovníc:

$$\left(I - \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} A(t_p) \right) y(t_p) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\phi_k}{k!} (t_p - a)^k + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \left(\sum_{j=0}^{p-2} [\kappa_j^\alpha F(t_{j+1})] + B(t_p) y(t_p) + f(t_p) \right),$$

kde I je jednotková matica s rozmermi $d \times d$, κ_j^α sú koeficienty vypočítané pomocou explicitnej obdĺžnikovej metódy. Člen $F(t_{j+1})$ vyjadruje

$$F(t_{j+1}) = A(t_{j+1})y(t_{j+1}) + B(t_{j+1})y(t_{j+1} - \tau) + f(t_{j+1}).$$

Poznámka. V Matlabe vieme sústavu lineárnych rovníc $Cx = d$ vyriešiť príkazom $C \backslash d$.

5 Vizualizácia teoretických výsledkov

Táto kapitola bude venovaná grafickej prezentácii a porovnaniu už známych vlastností riešení sústav zlomkových diferenciálnych rovníc, ktoré boli predstavené v kapitole štvrtej. Na konkrétnych príkladoch uvedieme charakteristické črty riešení nadobudnuté numerickým modelom a budeme tak schopní sledovať a porovnávať správanie jednotlivých riešení s teoretickými výsledkami.

5.1 Lineárna sústava bez oneskorenia

Predpoklady asymptotickej stability nulového riešenia sústavy (4.1) boli uvedené vo vete 4.2. Vo vete sa spomína oblasť stability M_α , a práve z definície tejto množiny, viď (4.4), dokážeme jej tvar ovplyvniť pomocou rôznej voľby parametru α , ktorý predstavuje rád Caputovej zlomkovej derivácie. Táto skutočnosť nám dovoľuje voľbou rádu Caputovej derivácie α ovplyvniť aj samotnú asymptotickú stabilitu nulového riešenia sústavy (4.1).

Stabilita pre rád Caputovej zlomkovej derivácie $\alpha \in (0, 1)$

Pre názornú demonštráciu začneme so zavedením konkrétnej sústavy, ktorá je tvaru

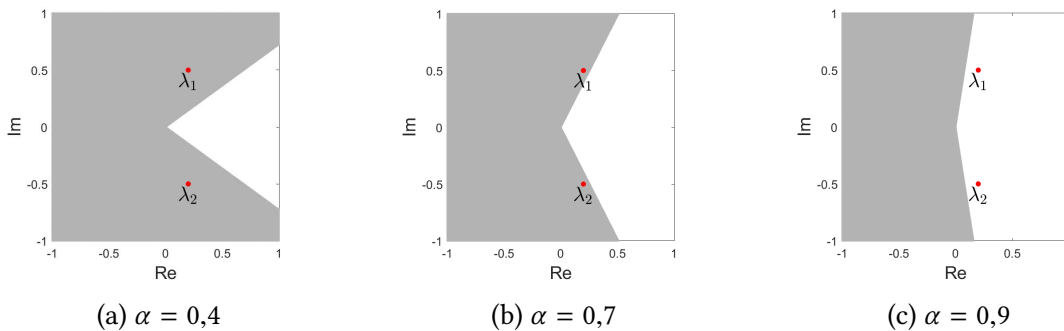
$$\begin{aligned} D_0^\alpha y_1(t) &= 0,2y_1(t) + 0,5y_2(t) \\ D_0^\alpha y_2(t) &= -0,5y_1(t) + 0,2y_2(t) \quad t \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Nie je ťažké ukázať, že vlastné čísla matice sústavy (5.1) sú $\lambda_1 = 0,2 + 0,5i$ a $\lambda_2 = 0,2 - 0,5i$. Koeficienty matice sústavy (5.1) sú volené práve tak, aby sme poukázali na skutočnosť, že v prípade rádu Caputovej zlomkovej derivácie z intervalu $(0, 1)$ je pre sústavy typu (4.1) možné dostať asymptoticky stabilné nulové riešenie aj pre vlastné čísla s kladnou reálnou časťou.

K sústave (5.1) ešte pridávame počiatočné podmienky

$$y_1(0) = 1 \quad y_2(0) = 1. \quad (5.2)$$

Dostávame tak počiatočnú úlohu s jedným parametrom, a to rádom Caputovej zlomkovej derivácie α , ktorý v tomto prípade uvažujeme z intervalu $(0, 1)$. Na Obr. 3 sú zobrazené oblasti stability M_α pre konkrétne hodnoty α spolu s polohou vlastných čísel matice sústavy (5.1).

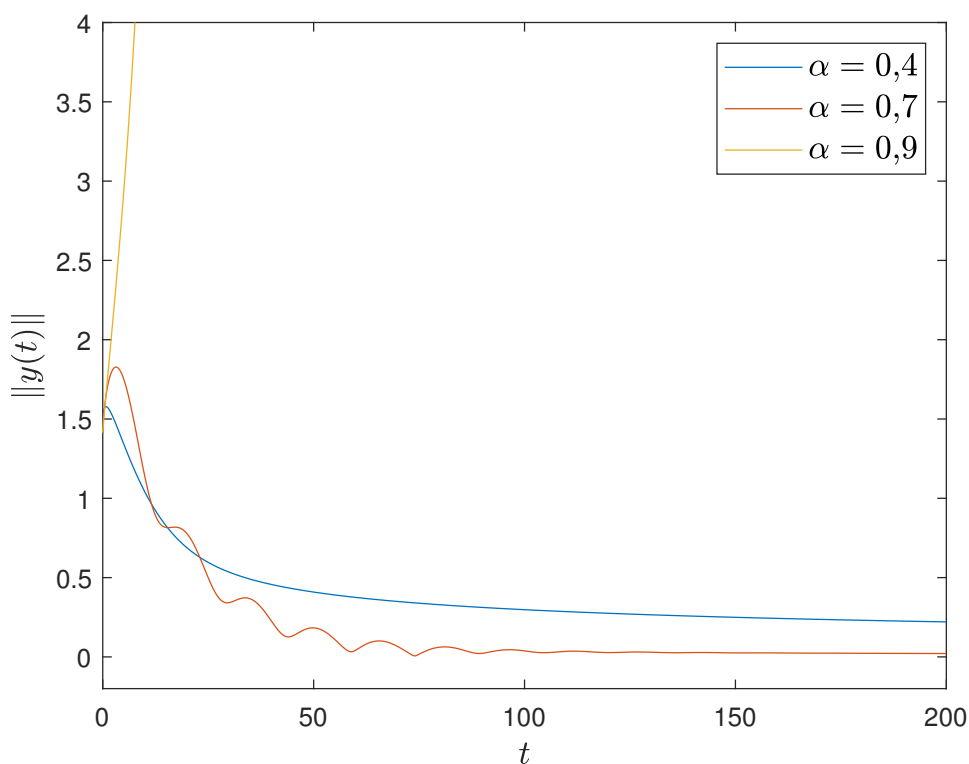


Obr. 3: Poloha vlastných čísel matice sústavy (5.1) vzhľadom k oblasti stability M_α

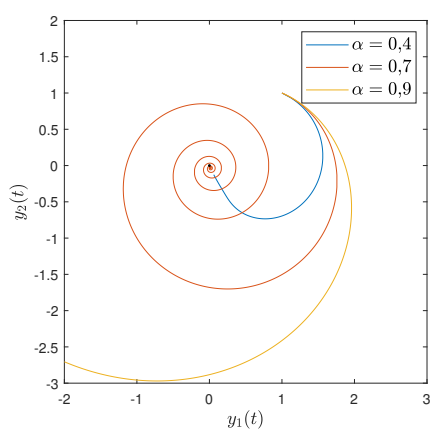
Z Obr. 3 vidíme, že pre hodnoty $\alpha = 0,4$ a $\alpha = 0,7$ ležia vlastné čísla λ_1 a λ_2 vo vnútri oblasti M_α , teda podľa vety 4.2 sú nulové riešenia v týchto prípadoch asymptoticky stabilné.

V prípade $\alpha = 0,9$ sú už vlastné čísla situované mimo množinu M_α , teda ani nulové riešenie nie je asymptoticky stabilné.

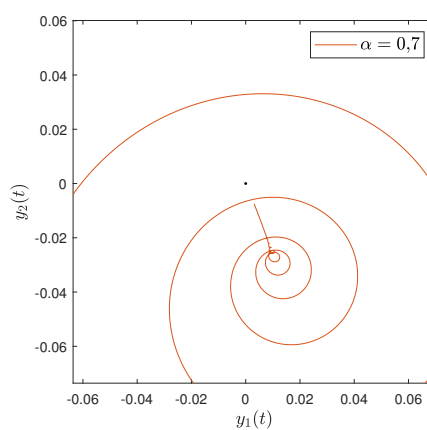
Ďalej prejdeme k samotnému vykresleniu normy a fázových portrétov riešenia počiatkovej úlohy (5.1)-(5.2) pre rôzne hodnoty rádu Caputovej zlomkovej derivácie α .



Obr. 4: Norma riešenia počiatkovej úlohy (5.1)-(5.2) pre rôzne hodnoty α



(a)



(b) Detail

Obr. 5: Fázový portrét riešenia počiatkovej úlohy (5.1)-(5.2) pre rôzne hodnoty α

Na Obr. 4 je vykreslená norma jednotlivých riešení. Prípady $\alpha = 0,4$ a $\alpha = 0,7$ prezentujú priebeh normy riešenia pri asymptoticky stabilnom nulovom riešení. Pre hodnotu $\alpha = 0,9$, kedy sa už vlastné čísla nachádzajú mimo oblasť stability M_α , môžeme vidieť priebeh, kedy je nulové riešenie nestabilné.

Vo fázovom portréte na Obr. 5a je tiež možné pozorovať, že sa riešenia pre $\alpha = 0,4$ a $\alpha = 0,7$ približujú k nulovému riešeniu (nulové riešenie je znázornené čiernym bodom), zatiaľ čo riešenie počiatočného problému (5.1)-(5.2) v prípade $\alpha = 0,9$ k nulovému riešeniu "priťahované" nie je, čo správne prezentuje očakávaný priebeh vyplývajúci z vety 4.2.

Na Obr. 5b je detailom znázornený priebeh fázovej trajektórie pre $\alpha = 0,7$ v blízkosti nulového riešenia. Práve pri tejto fázovej trajektórii môžeme po prvýkrát pozorovať prítomnosť singulárnych bodov fázovej trajektórie (body, kde krivka pretne samú seba). Tento jav sa pri sústavách typu (4.1) v celočíselnom prípade nevyskytuje, keďže by išlo o rozpor s jednoznačnosťou riešenia. V prípade neceločíselného rádu derivácie však tento fenomén nie je ničím neobvyklým.

Ďalej zoberme do úvahy hypotézu predloženú v [3], ktorá tvrdí nasledovné:

Hypotéza 5.1. Nech $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\alpha \in (0, 1)$. Potom existujú singulárne body vo fázových trajektóriách riešení sústavy (4.1) práve vtedy, keď všetky λ_i , kde $i \in \{1, 2\}$, vlastné čísla A spĺňajú:

$$\frac{\alpha\pi}{2} - \delta_1 < |\text{Arg}(\lambda_i)| < \frac{\alpha\pi}{2} + \delta_2,$$

kde $0 < \delta_1 < 0,0067$ a $0 < \delta_2 < 0,8$.

Hypotéza 5.1 v podstate tvrdí, že v prípade polohy vlastných čísiel matice sústavy dostatočne blízkej k hranici množiny M_α (pre definíciu množiny M_α viď (4.4)) dochádza ku vzniku singulárnych bodov vo fázových trajektóriách riešení planárneho systému (4.1) (matica A je o rozmeroch 2×2). Rozsah intervalu, pre ktorý by mala hypotéza platiť, je vymedzený číslami δ_1 a δ_2 , ktorých hodnota však nie je presne stanovená, ale približne odhadnutá na základe početných simulácií.

V prípade nášho konkrétneho systému (5.1) môžeme pozorovať, že ku vzniku singulárnych bodov vo fázových trajektóriách došlo iba v prípade $\alpha = 0,7$.

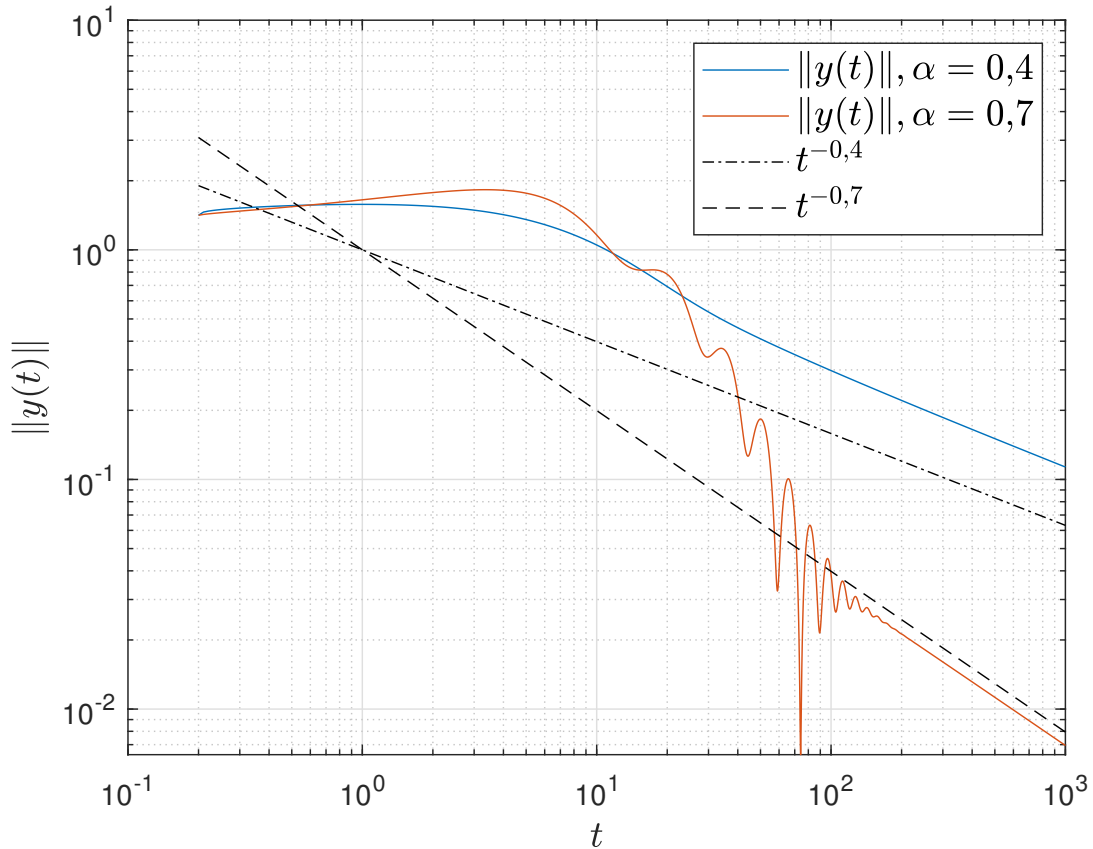
Ďalším zaujímavým pozorovaním fázovej trajektórie riešenia v prípade $\alpha = 0,7$ je tiež viditeľná oscilácia riešenia okolo rovnovážnej polohy (nulového riešenia) v oboch zložkách $y(t)_1, y(t)_2$. Na Obr. 5b je tiež z detailu fázovej trajektórie pre $\alpha = 0,7$ viditeľný postupný prechod z oscilácií zložiek riešenia k monotónnej konvergencii k nulovému riešeniu. Ako neskôr uvidíme, tento trend priebehu riešenia sústav budeme môcť pozorovať aj v ďalších príkladoch, ktoré v tejto práci uvádzame.

Rýchlosť konvergenzie pre rád Caputovej zlomkovej derivácie $\alpha \in (0, 1)$

Rýchlosť konvergenzie noriem jednotlivých riešení v prípade asymptoticky stabilného nulového riešenia je pre sústavy typu (4.1) uvedená vo vete 4.4, z ktorej vyplýva, že rýchlosť konvergenzie normy riešenia pre $t \rightarrow \infty$ je pre prípad rádu Caputovej zlomkovej derivácie α pre hodnoty z intervalu $(0, 1)$ algebraického typu, a to konkrétne ako pri funkcii $t^{-\alpha}$. Rýchlosť konvergenzie je teda závislá od rádu derivácie.

V nasledujúcej časti sa pokúsime vykresliť priebeh normy riešenia sústavy (5.1) pre hodnoty α , pri ktorých je nulové riešenie asymptoticky stabilné, v našom prípade pre $\alpha = 0,4$ a $\alpha = 0,7$. Do grafu budeme tiež vykresľovať priebehy funkcií typu $t^{-\alpha}$ pre príslušnú hodnotu α .

Pre dosiahnutie čo najnázornejšieho porovnania budeme všetky funkcie vykresľovať na logaritmickú škálu, čím sa z tvaru krivky $t^{-\alpha}$ stáva priamka so smernicou $-\alpha$, a teda podľa vety 4.4 predpokladáme, že vykreslené $\|y(t)\|$ budú na logaritmickú škálu s touto priamkou pre rastúcu hodnotu t takmer rovnobežné.



Obr. 6: Rýchlosť konverencie normy riešenia počiatkovej úlohy (5.1)-(5.2) pre rôzne α

Z Obr. 6 je vidieť, že sa normy v oboch prípadoch takpovediac "vyrovnávajú" a stávajú sa takmer rovnobežnými s funkciou $t^{-\alpha}$ s príslušnou hodnotou α (teda napr. pre $\alpha = 0,4$ má norma riešenia podobný sklon ako funkcia $t^{-0,4}$), čo vhodne prezentuje tvrdenie vety 4.4.

Na záver tejto časti ešte poznamenajme, že rýchlosť, akou normy riešení sústav typu (4.1) konvergujú k nule, priamo vyplýva z výskytu maticovej Mittag-Lefflerovej funkcie v riešení tohto typu sústavy (pre celý tvar riešenia viď veta 4.1). V prípade $\alpha \in (0, 1)$ nám do riešenia vstupuje člen $E_{\alpha,1}(t^{\alpha}A)$ a práve asymptotické vlastnosti tohto členu priamo vplývajú aj na rýchlosť konverencie normy riešenia sústavy typu (4.1).

Ak si zoberieme jeden konkrétny prípad riešenia našej počiatkovej úlohy (5.1)-(5.2) s hodnotou $\alpha = 0,4$, tak sa bude v riešení objavovať člen $E_{0,4,1}(t^{0,4}A)$ a celkovo tak dostaneme $\|y(t)\| \sim t^{-0,4}$, ako uvádza veta 4.4.

Poznámka. Pre odvodenie asymptotických vlastností Mittag-Lefflerových funkcií viď [14].

Stabilita pre rád Caputovej zlomkovej derivácie $\alpha \in (1, 2)$

V prípade rádu Caputovej derivácie α z intervalu $(1, 2)$ musíme maticu sústavy voliť tak, aby jej vlastné čísla mali zápornú reálnu časť. Dôvod je prostý, oblasť stability M_α sa v prípade $\alpha \in (1, 2)$ nachádza iba v 2. a 3. kvadrante komplexnej roviny, ako je ukázané na Obr. 1b. Teda pre kladnú reálnu časť vlastných čísel matice sústavy nemôže byť žiadne nulové riešenie asymptoticky stabilné.

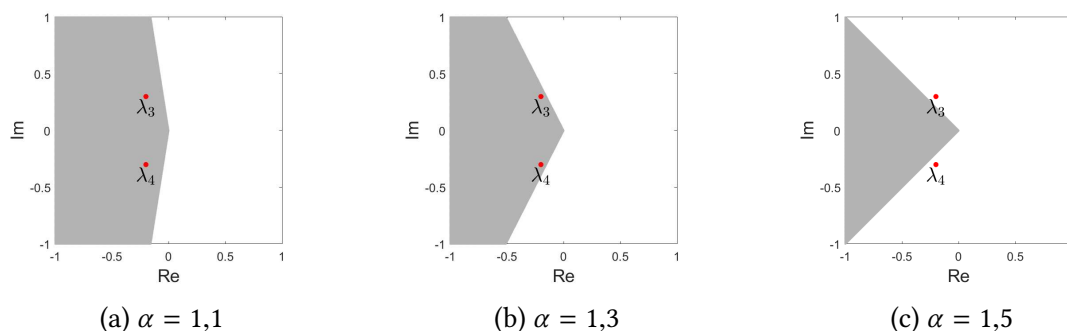
Zmeníme preto sústavu na tvar

$$\begin{aligned} D_0^\alpha y_1(t) &= -0,2y_1(t) + 0,3y_2(t) \\ D_0^\alpha y_2(t) &= -0,3y_1(t) - 0,2y_2(t) \quad t \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Vlastné čísla matice sústavy (5.3) sú v tomto prípade $\lambda_3 = -0,2 + 0,3i$ a $\lambda_4 = -0,2 - 0,3i$. K sústave pridávame počiatočné podmienky

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1 & y_2(0) &= 1 \\ y_1'(0) &= 1 & y_2'(0) &= 1. \end{aligned} \quad (5.4)$$

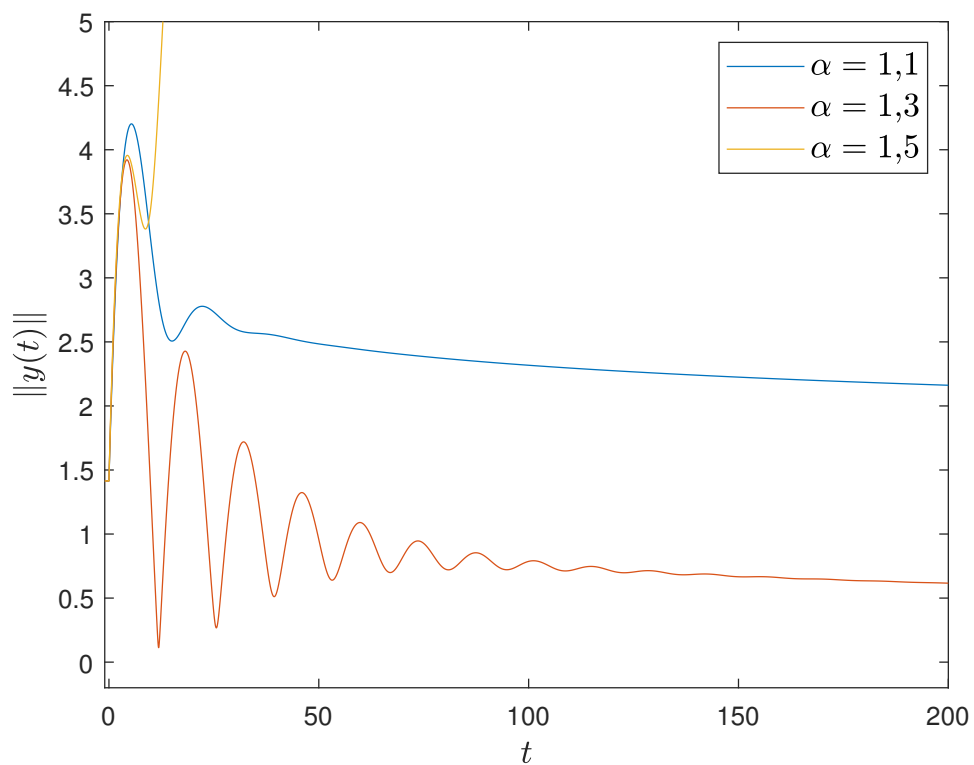
Podobne ako v predošlej sústave aj v tomto prípade vykreslíme polohu vlastných čísel λ_3 a λ_4 spolu s oblasťou stability M_α pre rôzne hodnoty α .



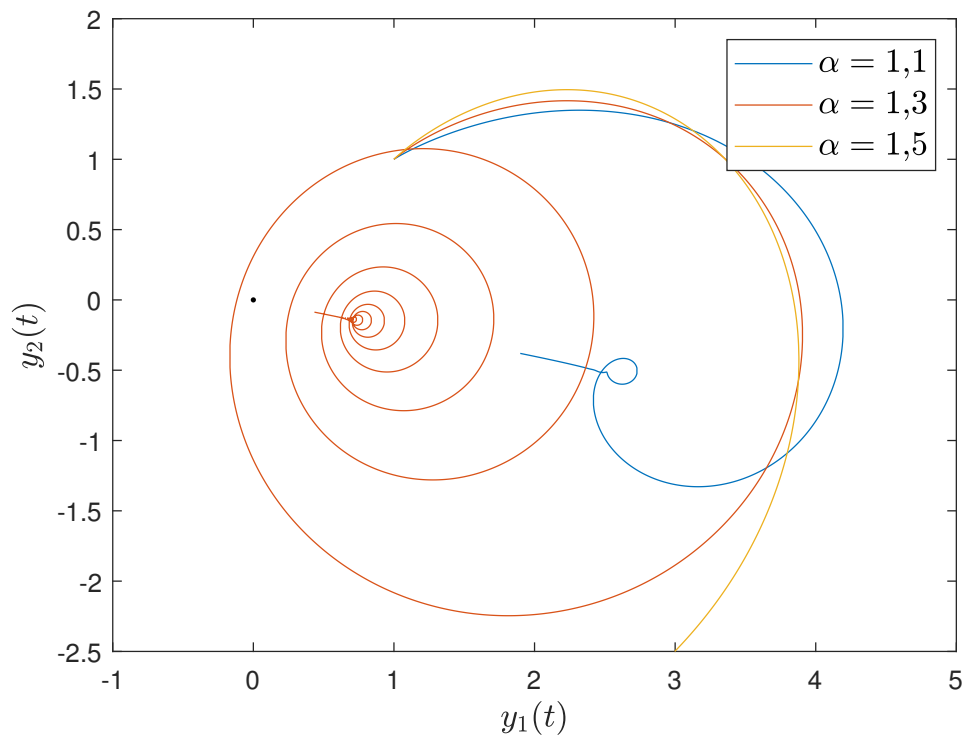
Obr. 7: Poloha vlastných čísel matice sústavy (5.3) vzhľadom k oblasti stability M_α

Na Obr. 7 opäť môžeme vidieť, pre ktoré hodnoty α je nulové riešenie sústavy (5.3) asymptoticky stabilné (pre $\alpha = 1,1$ a $\alpha = 1,3$).

Priebeh riešenia počiatočného problému (5.3)-(5.4) pre rôzne hodnoty α je graficky znázornený na Obr. 8, kde môžeme numericky nadobudnuté riešenia porovnať s teóriou.



(a) Norma riešenia počiatocného problému (5.3)-(5.4) pre rôzne hodnoty α



(b) Fázový portrét riešenia počiatocnej úlohy (5.3)-(5.4) pre rôzne hodnoty α

Obr. 8: Vykreslenie riešenie počiatocnej úlohy (5.3)-(5.4)

Z Obr. 8a môžeme opäť vidieť, ako sa normy riešení pri asymptoticky stabilnom nulovom riešení, teda v prípadoch, keď vlastné čísla λ_3, λ_4 ležia v príslušných oblastiach stability M_α , zreteľne približujú k nulovému riešeniu. Aj v tomto prípade sme dostali výsledky, ktoré vhodne prezentovali tvrdenie vety 4.2. Z Obr. 8b môžeme tiež pozorovať výskyt singulárnych bodov obdobne, ako tomu bolo v prípade sústavy (5.1) pre hodnotu $\alpha = 0,7$ (viď Obr. 5b). Na fázových trajektóriách je tiež možné veľmi dobre pozorovať prechod z krátkodobých oscilácií k monotónnemu približovaniu sa k nulovému riešeniu.

Rýchlosť konvergenzie pre rád Caputovej zlomkovej derivácie $\alpha \in (1, 2)$

Otázka rýchlosti konvergenzie normy riešenia je v tomto prípade o čosi zaujímavejšia, keďže veta 4.4 nám pre prípad rádu derivácie $\alpha \in (1, 2)$ umožňuje dva typy rýchlosti konvergenzie pre $t \rightarrow \infty$, ako pri funkcii $t^{-\alpha}$, teda rovnako ako v prípade $\alpha \in (0, 1)$, a navyše ako pri funkcií $t^{1-\alpha}$.

Typ rýchlosti konvergenzie normy riešenia môžeme ovplyvniť vhodnou voľbou počiatkových podmienok (bude zdôvodnené neskôr).

Zavedieme dve rôzne počiatkové podmienky:

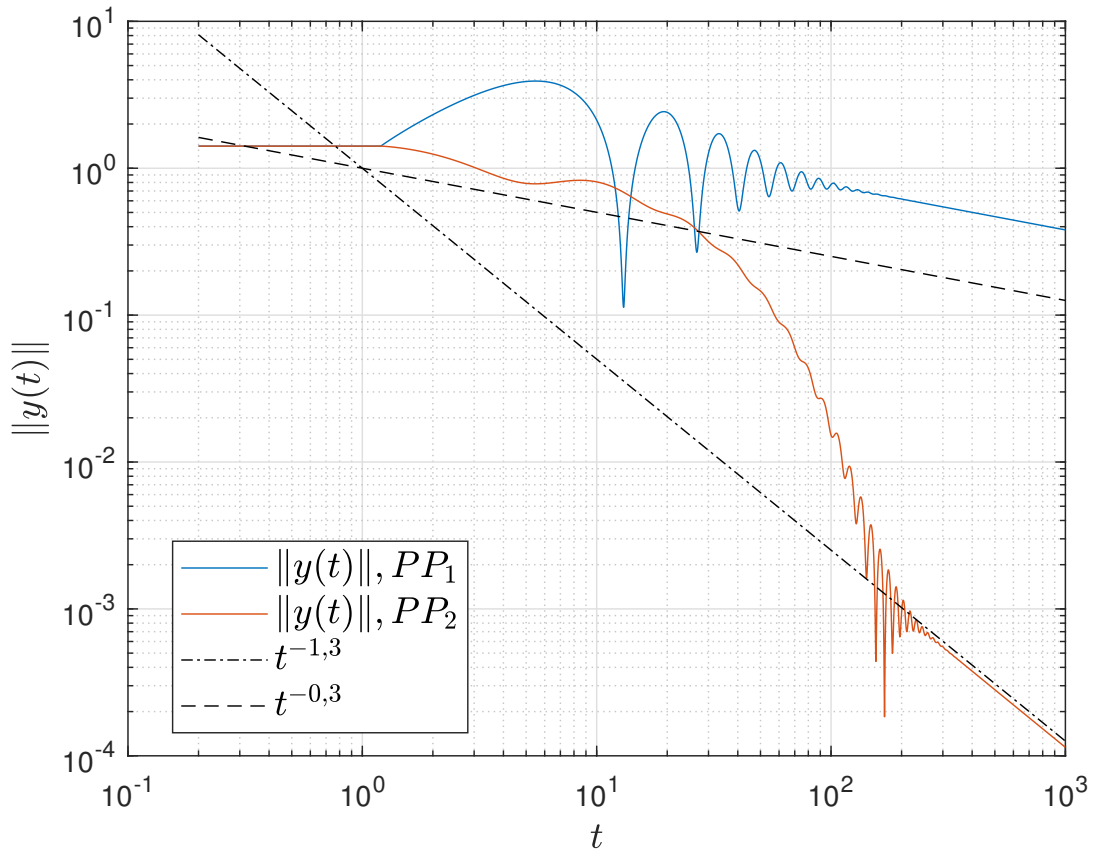
PP₁ :

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1 & y_2(0) &= 1 \\ y_1'(0) &= 1 & y_2'(0) &= 1. \end{aligned}$$

PP₂ :

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1 & y_2(0) &= 1 \\ y_1'(0) &= 0 & y_2'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Na rozdiel od prípadu PP₁, v prípade PP₂ zmeníme hodnotu prvých derivácií na nulu. Pre lepšiu prehľadnosť sa obmedzíme iba na vykreslenie $\|y(t)\|$ pre jednu hodnotu α , pri ktorom máme zaručenú konvergenciu riešenia k nulovému riešeniu. Konkrétne to bude $\alpha = 1,3$. Budeme však $\|y(t)\|$ vykresľovať pre rôzne počiatkové podmienky PP₁ a PP₂.



Obr. 9: Norma riešenia (5.3), $\alpha = 1,3$ s rôznymi počiatočnými podmienkami

Pripomeňme, že sme tentokrát operovali s jednou hodnotou rádu Caputovej zlomkovej derivácie α , a to $\alpha = 1,3$. Podľa vety 4.4 uvažujeme možnosť dvoch typov rýchlostí konvergencie normy riešenia ako pri funkciách $t^{-\alpha}$ a $t^{1-\alpha}$, teda konkrétne $t^{-1,3}$ a $t^{-0,3}$.

V prípade rádu Caputovej zlomkovej derivácie α z intervalu $(1, 2)$ môže nastať rovnaký typ rýchlosti konvergencie normy riešenia k nulovému riešeniu ako pri ráde derivácie z intervalu $(0, 1)$, a to $t^{-\alpha}$. Navyše, vďaka vhodnej voľbe počiatočných podmienok, sme schopní doceliť aj úplne nový typ rýchlosti konvergencie, a to ako pri $t^{1-\alpha}$. Táto skutočnosť vyplýva z tvaru riešenia počiatočnej úlohy (4.1)-(4.2) pre $\alpha \in (1, 2)$, ktoré vyzerá nasledovne:

$$y(t) = E_{\alpha,1}(t^\alpha A)y_0 + tE_{\alpha,2}(t^\alpha)y_1.$$

Ako môžeme z tohoto tvaru riešenia vidieť, v prípade $\alpha \in (1, 2)$ nám, na rozdiel od rádu $\alpha \in (0, 1)$, začne v riešení vystupovať suma dvoch hlavných členov, a to $E_{\alpha,1}(t^\alpha A)y_0$ a $tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)y_1$. Základ oboch týchto členov tvorí maticová Mittag-Lefflerova funkcia, ktorej vlastnosti majú opäť vplyv aj na celkovú rýchlosť normy konvergencie riešenia.

Poznámka. Pre tvar riešenia (4.1)-(4.2) s $\alpha \in (0, \infty)$ viď veta 4.1.

Ak by stáli tieto členy v tvare riešenia počiatočnej úlohy (4.1)-(4.2) samostatne, prvý z členov by vďaka svojim vlastnostiam spôsobil, že $\|y(t)\| \sim t^{-\alpha}$ a druhý člen by spôsobil, že $\|y(t)\| \sim t^{1-\alpha}$. Keďže v riešení sa vo všeobecnosti nachádzajú oba tieto členy, na celkové asymptotické vlastnosti riešenia má vplyv člen, ktorý konverguje "pomalšie". V tomto prípade je pomalšie konvergujúci člen $tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)y_1$.

Vzhľadom na to, že člen $tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)y_1$ obsahuje vektor y_1 , ktorého hodnotu určujeme počiatocnými podmienkami, položením tohto vektora za nulový dokážeme celý člen $tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)y_1$ z tvaru riešenia "vynulovať". Tým docielime, že sa dominantným stane člen $E_{\alpha,1}(t^\alpha A)y_0$, ktorý spôsobí rýchlosť konvergenzie normy riešenia ako v prípade funkcie $t^{-\alpha}$.

V prípade našej konkrétnej sústavy (5.3) pre $\alpha = 1,3$ najskôr uvažujeme počiatocné podmienky PP₁, kedy za vektory y_0 a y_1 dosádzame vektory s jednotkami v oboch zložkách. Dostávame tak tvar riešenia, ktorý obsahuje oba spomínané členy, a teda rýchlosť konvergenzie normy riešenia je závislá od "pomalšie" konvergujúceho člena, ktorý spôsobí, že $\|y(t)\| \sim t^{1-\alpha}$, v našom prípade je to konkrétne $\|y(t)\| \sim t^{-0,3}$. Na Obr. 9 túto vlastnosť ilustrujeme.

Ak budeme uvažovať počiatocné podmienky PP₂, znamená to, že za vektor y_1 dosádzame nulový vektor. Tým dosiahneme, že sa člen $tE_{\alpha,2}(t^\alpha A)y_1$ vynuluje a dominantným sa stane člen $E_{\alpha,1}(t^\alpha A)y_0$, ktorý spôsobí, že $\|y(t)\| \sim t^{-\alpha}$, v našom prípade $\|y(t)\| \sim t^{-1,3}$. Na Obr. 9 opäť pomerne dobre vidieť, ako sa norma v tomto prípade správa.

Poznámka. Asymptotické vlastnosti Mittag-Lefflerových funkcií sú odvodené v [14].

5.2 Lineárna sústava s konštantným oneskorením

Podobne ako v prípade sústavy bez oneskorenia (4.1) aj v prípade sústavy s konštantným oneskorením (4.5) budeme demonštrovať niektoré vlastnosti jej riešení. V teoretickej časti sme uviedli vetu 4.7, ktorá udávala predpoklady asymptotickej stability nulového riešenia sústavy (4.5). Toto tvrdenie uvádza, že nulové riešenie je asymptoticky stabilné práve vtedy, keď všetky vlastné čísla matice sústavy (4.5) ležia v oblasti stability $M_{\alpha,\tau}$, teda v oblasti závislej od dvoch parametrov α, τ . Pri priamom aplikovaní na sústavu (4.5) tieto dva parametre predstavujú rád Caputovej zlomkovej derivácie a veľkosť oneskorenia, z čoho vyplýva, že pri zafixovaní koeficientov matice sústavy môžeme stabilitu ovplyvniť rovnako ako pri sústave (4.1) pomocou rádu Caputovej zlomkovej derivácie α , navyše však môžeme manipulovať s oneskorením τ .

Stabilita pre rád Caputovej zlomkovej derivácie $\alpha \in (0, 1)$

Začneme tým, že uvedieme sústavu, s ktorou budeme pracovať:

$$\begin{aligned} D_0^\alpha y_1(t) &= -0,5y_1(t-1) + 0,2y_2(t-1) \\ D_0^\alpha y_2(t) &= -0,2y_1(t-1) - 0,5y_2(t-1) \end{aligned} \quad t \in [0, \infty). \quad (5.5)$$

Pevne dané sú teda všetky parametre sústavy (pevne zvolené koeficienty matice sústavy a $\tau = 1$), až na rád Caputovej zlomkovej derivácie α . Vlastné čísla matice sústavy (5.5) sú čísla $\lambda_5 = -0,5 + 0,2i$ a $\lambda_6 = -0,5 - 0,2i$.

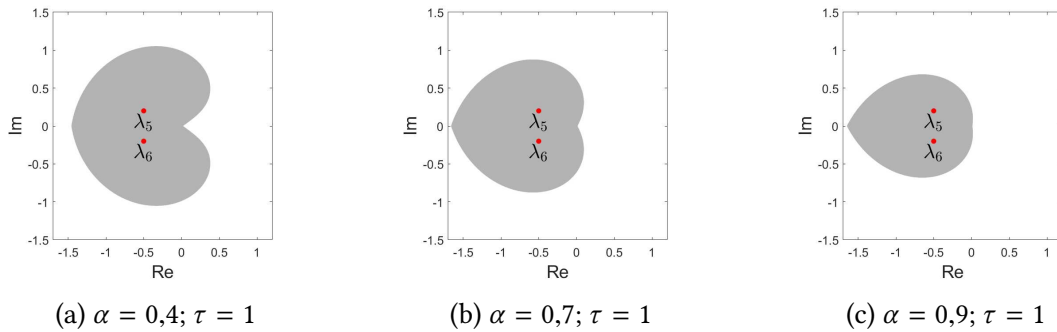
Poznámka. Z tvaru množiny $M_{\alpha,\tau}$ a tvrdenia vety 4.7 môžeme usúdiť, že pre $\alpha \in (0, 1)$ pripúšťame asymptotickú stabilitu nulového riešenia aj v prípade vlastných čísiel s kladnou reálnou časťou, teda obdobne ako pri sústave (4.1).

Momentálne sme však zvolili maticu sústavy (5.5) s vlastnými číslami so zápornou reálnou časťou. Dôvodom je, že budeme s rovnakou sústavou pracovať aj v prípade $\alpha \in (1, 2)$, ktorý pre vlastné čísla s kladnou reálnou časťou nepripúšťa existenciu asymptoticky stabilného nulového riešenia. Takouto voľbou sústavy (teda (5.5)) budeme neskôr schopní porovnať správanie jej riešení pre celý interval hodnôt $\alpha \in (0, 2)$ o niečo názornejšie.

K sústave (5.5) pridávame počiatocné podmienky:

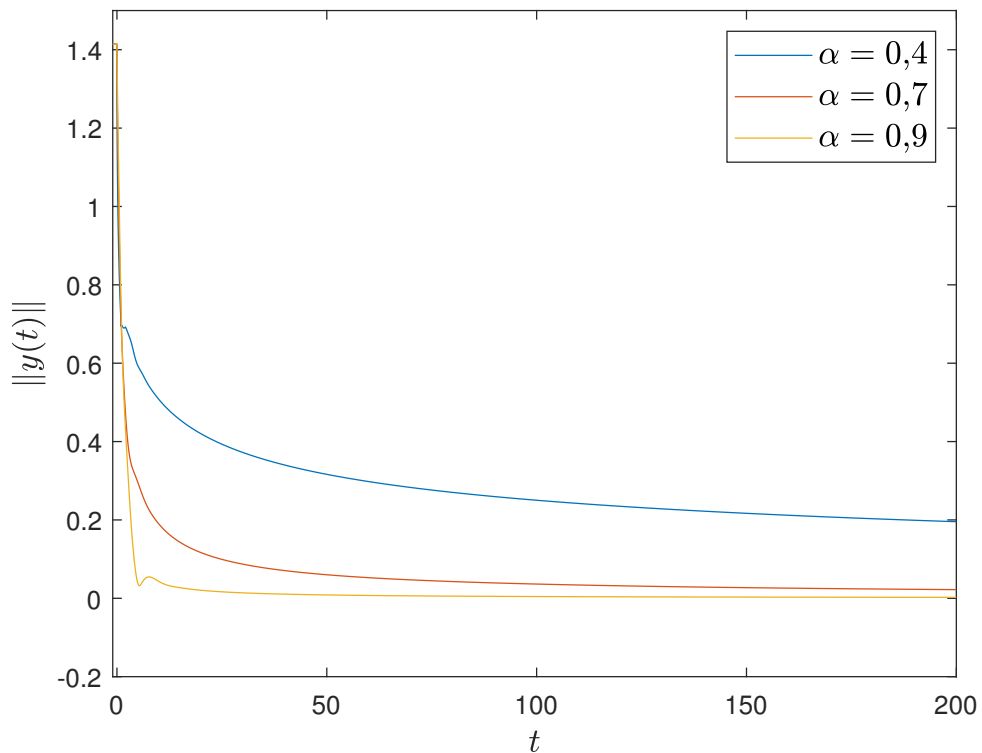
$$\begin{aligned} y_1(t) &= 1 & y_2(t) &= 1 & t &\in [-1, 0] \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} y_1(t) &= 1 & \lim_{t \rightarrow 0^+} y_2(t) &= 1. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Na Obr. 10 vykresľujeme polohu vlastných čísel λ_5 a λ_6 spolu s oblasťou stability $M_{\alpha,\tau}$ pre príslušné hodnoty α a τ , v tomto prípade je hodnota $\tau = 1$ nemenná.

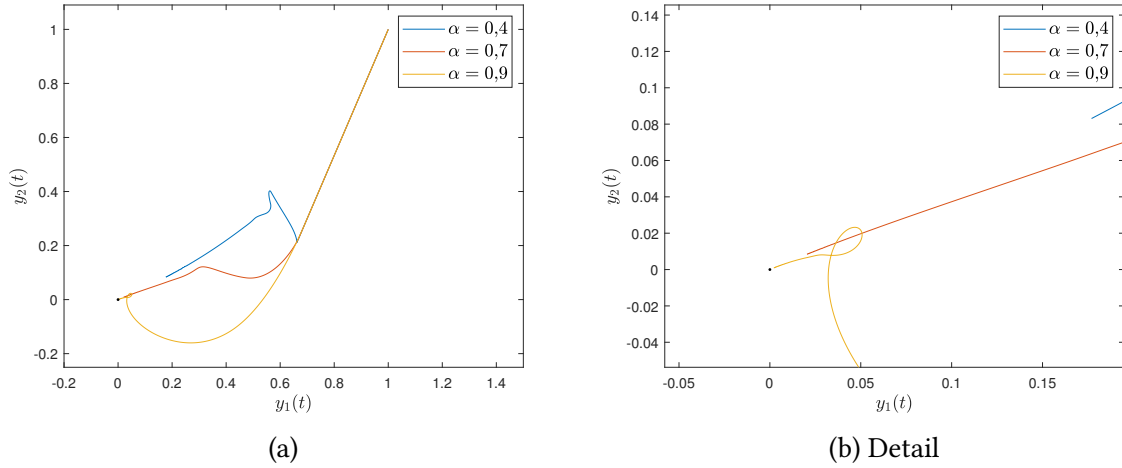


Obr. 10: Poloha vlastných čísel matice sústavy (5.5) vzhľadom k oblasti stability $M_{\alpha,\tau}$

Z Obr. 10 je vidieť, že pre všetky tri zvolené hodnoty α je nulové riešenie asymptoticky stabilné. Túto skutočnosť sa pokúsime ilustrovať na Obr. 11, kde vykresľujeme normu riešenia počiatkovej úlohy (5.5)-(5.6) a na Obr. 12 zobrazujeme príslušné fázové portréty pre jednotlivé hodnoty α .



Obr. 11: Norma riešenia počiatkovej úlohy (5.5)-(5.6) pre rôzne hodnoty α



Obr. 12: Fázový portrét počiatkovej úlohy (5.5)-(5.6) pre rôzne hodnoty α

Pri riešeníach zobrazených na Obr. 11 a Obr. 12 môžeme pozorovať priebeh konvergencie noriem jednotlivých riešení k nulovému riešeniu, teda numericky nadobudnuté riešenia daných počiatkových úloh správne prezentujú teoretické výsledky vyplývajúce z tvrdenia vety 4.7. Môžeme tiež vidieť, že pri riešení pre $\alpha = 0,9$ dôjde ku vzniku singulárneho bodu fázovej trajektórie, ktorý je dobre viditeľný na Obr. 12b.

Rýchlosť konvergencie pre rád Caputovej zlomkovej derivácie $\alpha \in (0, 1)$

Rýchlosť konvergencie riešenia k nulovému riešeniu je od predošlej sústavy (4.1), ktorá neobsahuje oneskorenie τ , trochu odlišná.

Počiatkové podmienky kladieme pri oneskorenej sústave odlišne, viď (4.6)-(4.7). V tomto prípade musíme dodefinovať nie jeden vektor funkčných hodnôt v počiatku, ale celú časť vektorovej funkcie na intervale $[-\tau, 0]$, navyše je potrebné pridať hodnotu vektora jednostranných limít pre $t \rightarrow 0^+$ pre vektorovú funkciu y , ako aj hodnoty jednostranných limít samotnej funkcie y a jej celočíselných derivácií podľa rádu Caputovej zlomkovej derivácie. Voľbou hodnôt týchto limít môžeme rýchlosť konvergencie normy riešenia v prípade asymptoticky stabilného nulového riešenia ovplyvniť. Ak uvažujeme hodnotu $\alpha \in (0, 1)$, podľa vety 4.8 môžu v tomto prípade nastať až dva rôzne typy rýchlosti, na rozdiel od sústavy (4.1), kde bola v prípade rádu $\alpha \in (0, 1)$ iba jedna možná rýchlosť poklesu, a to ako pri funkcii $t^{-\alpha}$. Pri oneskorenej sústave je možné dosiahnuť rýchlosť konvergencie $\|y(t)\|$ k nule, pre $t \rightarrow \infty$, aj ako pri funkcii $t^{-\alpha-1}$. Táto skutočnosť je opäť spojená s tvarom riešenia (viď veta 4.6), v ktorom sa na rozdiel od sústavy (4.1) objavuje navyše aj integrálny člen. Asymptotické vlastnosti tohto člena by sami o sebe spôsobili, že by norma riešenia konvergovala k nule, pre $t \rightarrow \infty$ rýchlosťou ako pri funkcii $t^{-\alpha-1}$. Všeobecne sa však tento člen nachádza v riešení spolu s členom $D_0^{\alpha-1}R(t)\phi_0$, ktorý konverguje pomalšie, teda je dominantný. Vynulovaním jednotlivých členov tak môžeme obdržať rôzne rýchlosti konvergencie obdobne, ako tomu bolo v prípade sústavy (5.3).

Poznámka. Asymptotické vlastnosti jednotlivých členov sú odvodené v [5].

Uvedieme dva typy počiatkových podmienok:

PP₃ :

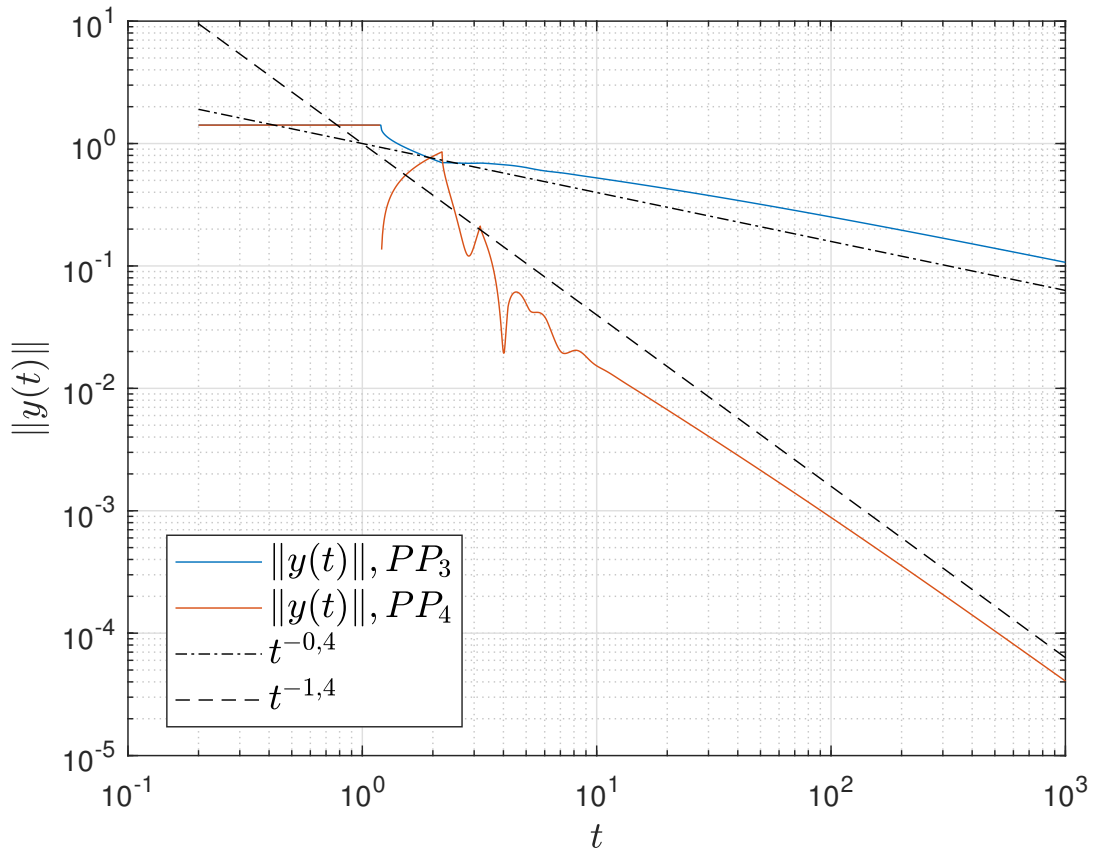
$$\begin{aligned} y_1(t) &= 1 & y_2(t) &= 1 & t &\in [-1, 0], \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} y_1(t) &= 1 & \lim_{t \rightarrow 0^+} y_2(t) &= 1 \end{aligned}$$

PP₄ :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 1 & y_2(t) &= 1 & t &\in [-1, 0] \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} y_1(t) &= 0 & \lim_{t \rightarrow 0^+} y_2(t) &= 0. \end{aligned}$$

V prípade PP₃ nastavujeme pri všetkých hodnotách jednostranných limit hodnotu 1. Pri PP₄ zmeníme hodnotu limit na nulu. Všimnime si, že v prípade PP₄ vlastne volíme za hodnoty jednostranných limit pre $t \rightarrow 0^+$ nulový vektor. Toto nie je náhoda a neskôr bude zdôvodnené, prečo je tomu práve tak.

Na logaritmickej škále vykresľujeme priebeh $\|y(t)\|$ pri zafixovanej hodnote $\alpha = 0,4$ a počiatkových podmienkach PP₃ a PP₄ spolu s príslušnými funkciami $t^{-\alpha}$ a $t^{-\alpha-1}$ (konkrétne $t^{-0,4}$ a $t^{-1,4}$).



Obr. 13: Norma riešenia (5.5) s rôznymi počiatkovými podmienkami

Na Obr. 13 sú rozdielne rýchlosti konverencie pomerne dobre viditeľné aj napriek tomu, že pracujeme iba s jedným rádom Caputovej zlomkovej derivácie $\alpha = 0,4$.

V prípade PP_3 , kedy sme položili vektor hodnôt jednostranných limit ϕ_0 rovný vektoru s jednotkami v oboch zložkách, riešenie obsahuje člen $D_0^{\alpha-1}R(t)\phi_0$, ako aj integrálny člen. V tomto prípade $\|y(t)\|$ konverguje rýchlosťou "pomalšie konvergujúceho" člena $D_0^{\alpha-1}R(t)\phi_0$, a teda rýchlosťou $t^{-\alpha}$, v našom prípade $t^{-0,4}$.

Pre PP_4 sme zvolili za vektor hodnôt jednostranných limit ϕ_0 nulový vektor, teda člen $D_0^{\alpha-1}R(t)\phi_0$ sa vynuluje a dominantným sa stáva integrálny člen, čo spôsobuje, že rýchlosť konvergenzie $\|y(t)\|$ je ako pri funkcii $t^{-\alpha-1}$, v našom prípade $t^{-1,4}$.

Stabilita pre rád Caputovej zlomkovej derivácie $\alpha \in (1, 2)$

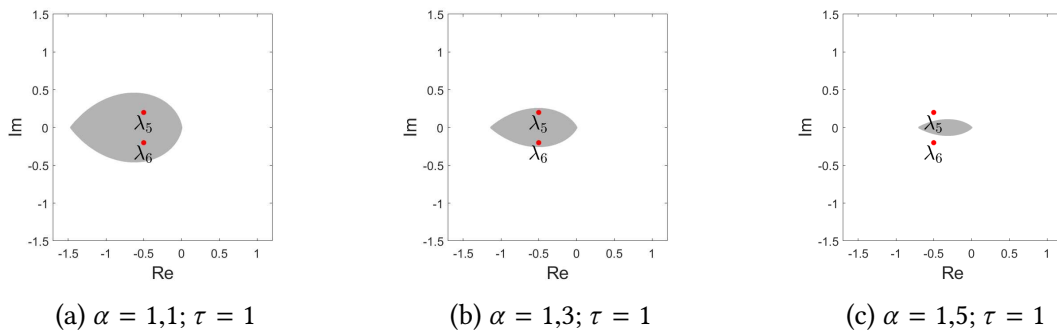
Asymptotickú stabilitu nulového riešenia budeme aj v prípade $\alpha \in (1, 2)$ prezentovať na sústave tvaru (5.5).

Pracujeme teda s rovnakou maticou sústavy (5.5) a rovnakým oneskorením $\tau = 1$. Pripomeňme tiež, že vlastné čísla matice tejto sústavy sú $\lambda_5 = -0,5 + 0,2i$ a $\lambda_6 = -0,5 - 0,2i$.

Počiatkové podmienky však doplníme na tvar

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 1 & y_2(t) &= 1 & t &\in [-1, 0] \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} y_1(t) &= 1 & \lim_{t \rightarrow 0^+} y_2(t) &= 1 \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} y_1'(t) &= 1 & \lim_{t \rightarrow 0^+} y_2'(t) &= 1. \end{aligned} \quad (5.7)$$

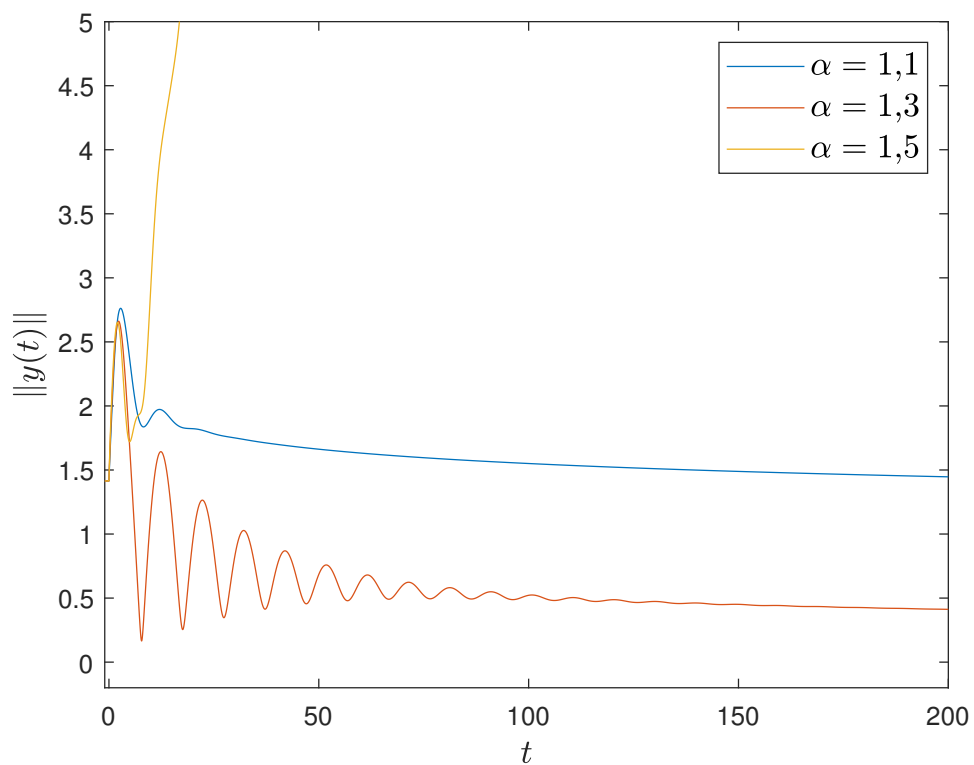
Pridali sme teda podmienky pre hodnoty jednostranných limit aj pre prvé derivácie funkcií y_1 a y_2 . Polohu vlastných čísel matice tejto sústavy spolu s oblasťami stability $M_{\alpha, \tau}$ pre príslušné hodnoty sme vykreslili do nasledujúcich grafov.



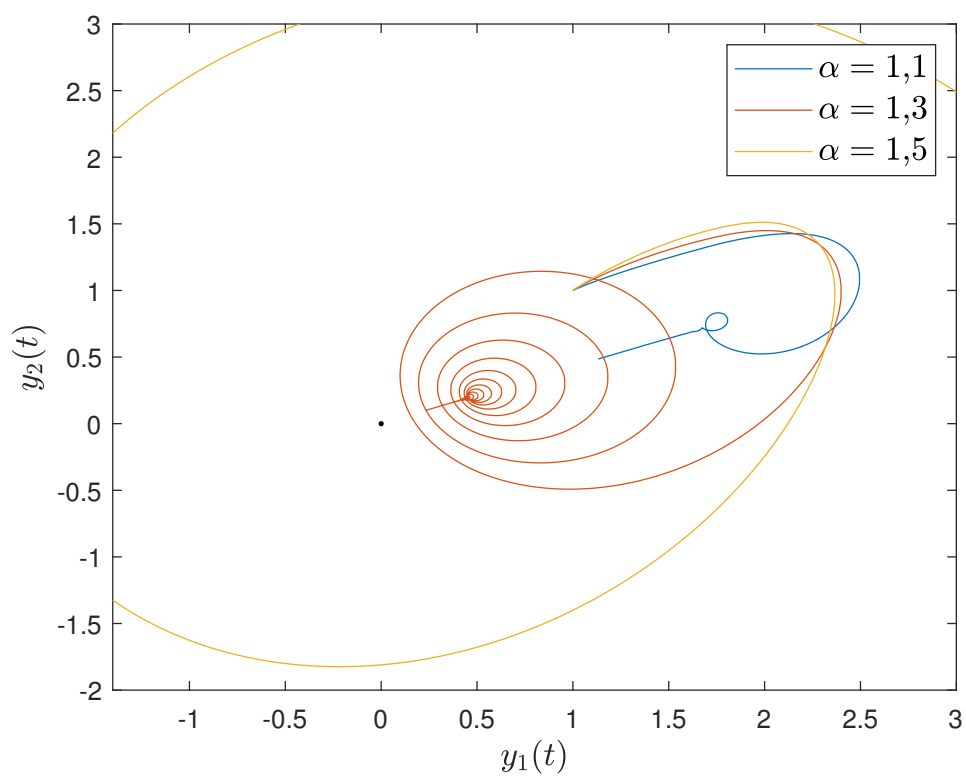
Obr. 14: Poloha vlastných čísel matice sústavy (5.5) vzhľadom k oblasti stability $M_{\alpha, \tau}$

Z Obr. 14 teda vidíme, že pre hodnoty $\alpha = 1,1$ a $\alpha = 1,3$ je nulové riešenie sústavy (5.5) asymptoticky stabilné, keďže λ_5 a λ_6 ležia v týchto prípadoch v oblastiach stability $M_{\alpha, \tau}$. Naopak pre $\alpha = 1,5$ sú už vlastné čísla mimo tejto oblasti, teda ani nulové riešenie nie je asymptoticky stabilné.

Vykreslením numericky vyčíslených riešení počiatkovej úlohy (5.5)-(5.7) pre jednotlivé hodnoty α dostávame nasledujúce grafy:



(a) Norma riešenia počiatocnej úlohy (5.5)-(5.7) pre rôzne hodnoty α



(b) Fázový portrét počiatocnej úlohy (5.5)-(5.7) pre rôzne hodnoty α

Obr. 15: Vykreslenie riešení počiatocnej úlohy (5.5)-(5.7)

Na Obr. 15a môžeme vidieť vykreslené normy riešení a fázových portrétov počiatkovej úlohy (5.5)-(5.7). V prípade $\alpha = 1,1$ a $\alpha = 1,3$ pozorujeme priebeh riešení, ktoré konvergujú k nulovému riešeniu. Pre $\alpha = 1,5$, kedy sa vlastné čísla matice sústavy nachádzajú mimo príslušnú oblasť stability $M_{\alpha,\tau}$, prezentujeme riešenie, ktoré k nule nekonverguje. Numericky nadobudnuté riešenia teda vhodne demonštrujú vlastnosti uvedené v teoretickej časti (konkrétne tvrdenie vety 4.7).

Podobne, ako tomu bolo v predchádzajúcich prípadoch, aj teraz konvergujúce riešenia zo začiatku oscilujú okolo počiatku a časom prechádzajú k monotónnemu poklesu smerom k nulovému riešeniu. Z grafov môžeme opäť pozorovať výskyt singulárnych bodov vo fázových trajektóriách.

Rýchlosť konvergenzie pre rád Caputovej zlomkovej derivácie $\alpha \in (1, 2)$

Rýchlosť konvergenzie riešenia k asymptoticky stabilnému nulovému riešeniu pre $t \rightarrow \infty$ rieši veta 4.8, na základe ktorej, v prípade $\alpha \in (1, 2)$, pripúšťame až tri rôzne typy rýchlosti konvergenzie normy, a to konkrétne ako pri funkciách $t^{\alpha-1}$, $t^{-\alpha}$ a $t^{1-\alpha}$. Opäť je to spojené s tvarom riešenia sústav typu (4.5), viď veta 4.6. V riešení sústavy pre $\alpha \in (1, 2)$ všeobecne figurujú až tri hlavné členy: $D_0^{\alpha-1}R(t)\phi_0$, $D_0^{\alpha-2}R(t)\phi_1$ a integrálny člen. Obdobne, ako tomu bolo v predchádzajúcich príkladoch, každý z týchto členov má vplyv na celkovú rýchlosť konvergenzie, keďže každý z nich spôsobuje rozdielnu rýchlosť konvergenzie normy riešenia. Riešenie obsahuje kombináciu všetkých troch spomínaných členov, teda $\|y(t)\|$ konverguje rýchlosťou dominantného člena, a teda "najpomalšie" konvergujúceho. Výsledná rýchlosť konvergenzie $\|y(t)\|$ vie byť opäť ovplyvnená voľbou vhodných počiatkových podmienok.

Uvedme teda tri druhy počiatkových podmienok, ktoré spôsobia tri rôzne rýchlosti konvergenzie k nulovému riešeniu:

PP₅ :

$$\begin{array}{lll} y_1(t) = 1 & y_2(t) = 1 & t \in [-1, 0] \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} y_1(t) = 1 & \lim_{t \rightarrow 0^+} y_2(t) = 1 & \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} y_1'(t) = 1 & \lim_{t \rightarrow 0^+} y_2'(t) = 1 & \end{array}$$

PP₆ :

$$\begin{array}{lll} y_1(t) = 1 & y_2(t) = 1 & t \in [-1, 0] \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} y_1(t) = 1 & \lim_{t \rightarrow 0^+} y_2(t) = 1 & \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} y_1'(t) = 0 & \lim_{t \rightarrow 0^+} y_2'(t) = 0 & \end{array}$$

PP₇ :

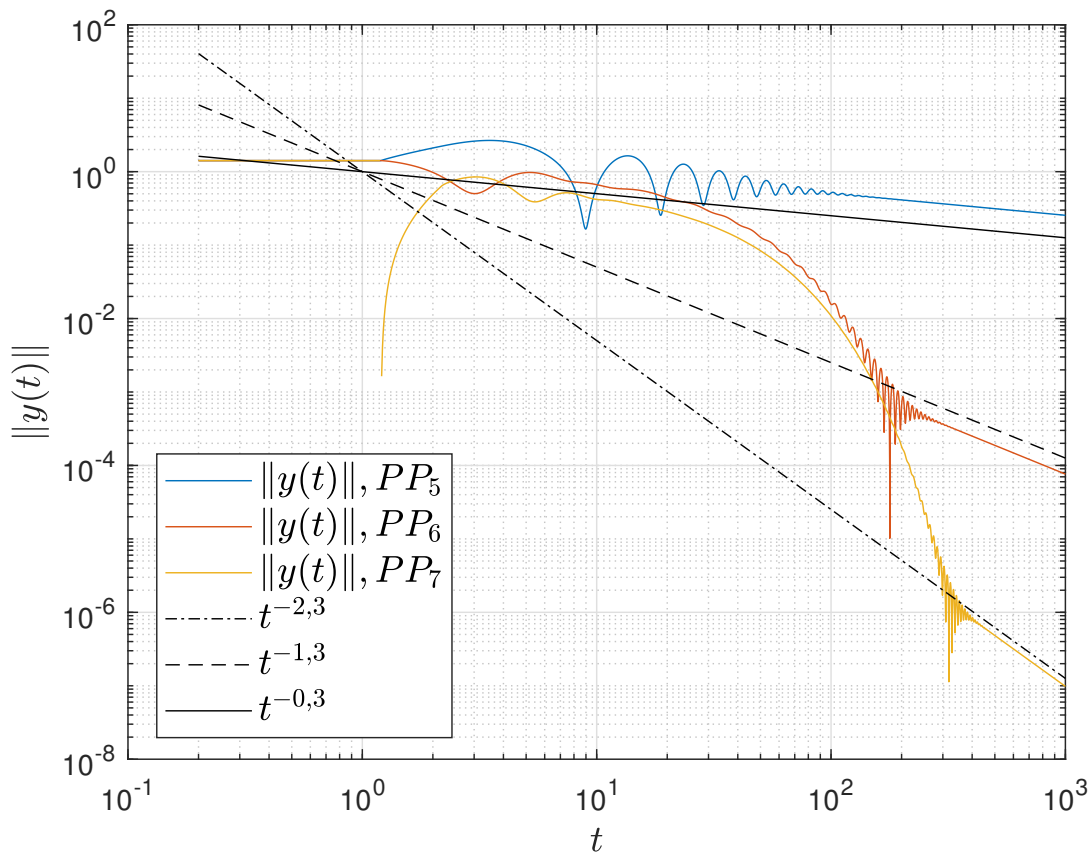
$$\begin{array}{lll} y_1(t) = 1 & y_2(t) = 1 & t \in [-1, 0] \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} y_1(t) = 0 & \lim_{t \rightarrow 0^+} y_2(t) = 0 & \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} y_1'(t) = 0 & \lim_{t \rightarrow 0^+} y_2'(t) = 0. & \end{array}$$

Pre PP₅ figurujú v riešení všetky tri členy a celková rýchlosť konvergenzie $\|y(t)\|$ bude ovplyvnená "najpomalšie" konvergujúcim členom $D_0^{\alpha-2}R(t)\phi_1$, a teda $\|y(t)\| \sim t^{1-\alpha}$.

V prípade PP_6 dosadením nulového vektora za hodnoty jednostranných limit $y'(t)$ pre $t \rightarrow 0^+$, docielime, že nám z riešenia člen $D_0^{\alpha-2}R(t)\phi_1$ vypadne a dominantným sa stane člen $D_0^{\alpha-1}R(t)\phi_0$ ("druhý najpomalšie" konvergujúci), ktorý spôsobí, že $\|y(t)\| \sim t^{-\alpha}$.

V poslednom prípade PP_7 kladieme nulový vektor aj pre vektor jednostrannej limity funkcie $y(t)$ pre $t \rightarrow 0^+$, teda z riešenia vypadnú oba členy $D_0^{\alpha-1}R(t)\phi_0$, $D_0^{\alpha-2}R(t)\phi_1$. Jediný člen, ktorý v riešení zostane, je integrálny člen, ktorý spôsobí konvergenciu normy riešenia ako pri funkcii $t^{-\alpha-1}$. Ako sme už spomínali v prípade, kedy sme rozoberali rýchlosť konvergence tejto sústavy pre $\alpha \in (0, 1)$, výskyt osamoteného integrálneho členu v riešení spôsobuje, že $\|y(t)\| \sim t^{-\alpha-1}$.

Priebeh normy riešenia sústavy (5.5) pre $\alpha = 1,3$, $\tau = 1$ a s rôznymi počiatočnými podmienkami PP_5 , PP_6 a PP_7 je vykreslený na logaritmickej škále na Obr. 16.



Obr. 16: Norma riešenia (5.5) s rôznymi počiatočnými podmienkami

Z Obr. 16 môžeme pomerne dobre pozorovať tri rôzne "rýchlosti" konvergence vplyvom rôznych počiatočných podmienok tak, ako sme popisovali vyššie, konkrétne:

Pre PP_5 : $\|y(t)\| \sim t^{1-\alpha}$ teda $\|y(t)\| \sim t^{-0,3}$.

Pre PP_6 : $\|y(t)\| \sim t^{-\alpha}$ teda $\|y(t)\| \sim t^{-1,3}$.

Pre PP_7 : $\|y(t)\| \sim t^{-\alpha-1}$ teda $\|y(t)\| \sim t^{-2,3}$.

Celkovo je pri porovnaní sústavy (4.1) so sústavou (4.5) pre rád Caputovej derivácie $\alpha \in (0, 2)$ vždy možné dosiahnuť o jednu "rýchlosť" konverencie viac pri sústave s konštantným oneskorením (4.5). Táto skutočnosť je spojená s prítomnosťou integrálneho členu pri riešení tejto sústavy, ktorý spôsobuje, že pri istej voľbe počiatočných podmienok môže nastať možnosť, že $\|y(t)\| \sim t^{-\alpha-1}$. Takýto typ rýchlosti konverencie normy pri sústave (4.1) nastať nemohol. My sme túto vlastnosť demonštrovali graficky, kde bolo jednotlivé typy rýchlosti konverencie možné pozorovať.

Vplyv oneskorenia τ

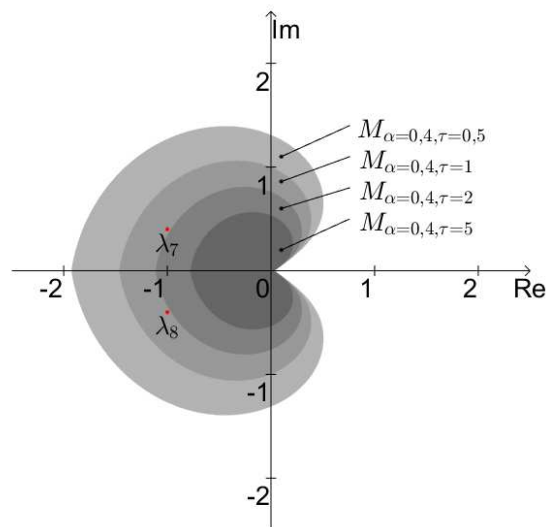
Nakoniec ešte pre sústavu s konštantným oneskorením spomenieme, akým spôsobom vplýva na asymptotickú stabilitu nulového riešenia oneskorenie τ . Ako sme už spomenuli v predošlých častiach textu, samotná asymptotická stabilita nulového riešenia sústav typu (4.5) závisí od polohy vlastných čísel matice sústavy vzhľadom k oblasti stability $M_{\alpha,\tau}$. Tá je však zo svojej definície (viď (4.8)) závislá aj od parametru τ , ktorý predstavuje práve oneskorenie. V tomto prípade sa budeme zaoberať s konkrétnou sústavou

$$\begin{aligned} D_0^{0,4} y_1(t) &= -y_1(t - \tau) + 0,4y_2(t - \tau) \\ D_0^{0,4} y_2(t) &= -0,4y_1(t - \tau) - y_2(t - \tau) \quad t \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Máme teda zafixované všetky parametre, až na hodnotu oneskorenia τ . Matica sústavy (5.8) má v tomto prípade vlastné čísla $\lambda_7 = -1 + 0,4i$ a $\lambda_8 = -1 - 0,4i$, za rád Caputovej zlomkovej derivácie volíme $\alpha = 0,4$ a ako počiatočné podmienky volíme

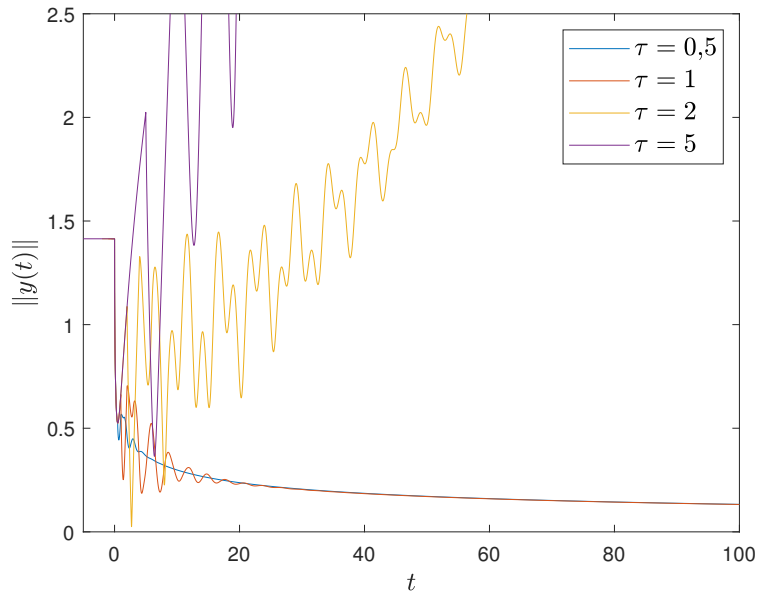
$$\begin{aligned} y_1(t) &= 1 & y_2(t) &= 1 & t &\in [-\tau, 0], \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} y_1(t) &= 1 & \lim_{t \rightarrow 0^+} y_2(t) &= 1. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Na nasledujúcom grafe vykreslíme polohu vlastných čísel sústavy (5.8) spolu s oblasťou stability $M_{\alpha,\tau}$ pre danú hodnotu $\alpha = 0,4$ a rôzne hodnoty τ .

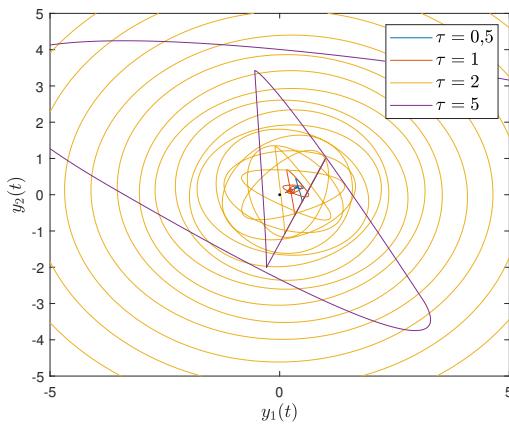


Obr. 17: Oblasť stability $M_{\alpha,\tau}$ pre rôzne hodnoty τ spolu s polohou vlastných čísel

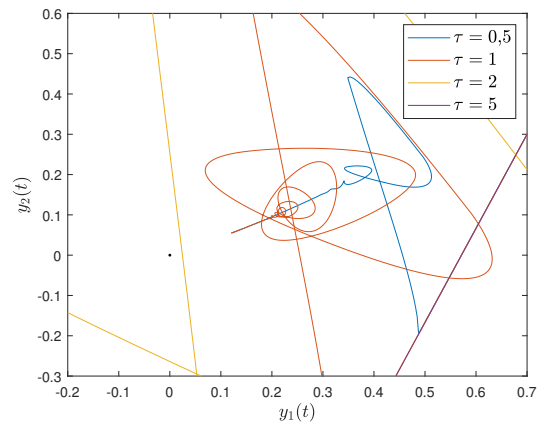
Z Obr. 17 môžeme dobre vidieť, že zmenou hodnoty oneskorenia τ zostáva tvar množiny $M_{\alpha,\tau}$ v podstate nemenný, dochádza iba ku zmene veľkosti. Zafixovaním parametru α , v našom prípade je to konkrétne $\alpha = 0,4$, sme teda dostali systém množín $M_{0,4;\tau}$. Z Obr. 17 je tiež dobre viditeľná skutočnosť, že $M_{0,4;5} \subset M_{0,4;2} \subset M_{0,4;1} \subset M_{0,4;0,5}$. Môžeme si tiež všimnúť, že vlastné čísla λ_7, λ_8 ležia v oblastiach $M_{0,4;0,5}$ a $M_{0,4;1}$, teda nulové riešenie je asymptoticky stabilné iba v týchto prípadoch, vo zvyšných dvoch sa už jedná o nestabilitu.



(a) Norma riešenia pre rôzne hodnoty τ



(b) Fázový portrét pre rôzne hodnoty τ



(c) Detail: Fázový portrét pre rôzne hodnoty τ

Obr. 18: Vykreslenie riešenia počiatkovej úlohy (5.8)-(5.9)

Na Obr. 18a je zobrazený priebeh normy riešení počiatkovej úlohy (5.8)-(5.9) pre rôzne hodnoty τ , na ktorom ilustrujeme priebeh v prípade konverencie noriem riešení pre hodnoty $\tau = 0,5$ a $\tau = 1$. Pre hodnoty $\tau = 2$ a $\tau = 5$ vykresľujeme priebehy noriem pre prípady nestabilného nulového riešenia.

Z Obr. 18b a Obr. 18c opäť vidíme aj výskyt singulárnych bodov vo fázových trajektoriách, ako tomu bolo v predchádzajúcich príkladoch. Zaujímavé je, že pre prípad $\tau = 2$ môžeme pomerne dobre pozorovať výskyt singulárnych bodov aj vo fázovej trajektorii riešenia, ktoré k

nulovému riešeniu nekonverguje. Takéto správanie sa v našich príkladoch vyskytlo prvýkrát.

Vo fázových portrétoch riešení sústav typu (4.5) sme teda mohli výskyt singularít vo fázových trajektoriách pozorovať za podmienok, keď vlastné čísla matice sústav boli situované pomerne blízko hranice oblasti stability $M_{\alpha,\tau}$. Toto pozorovanie nám môže pripomínať tvrdenie hypotézy 5.1, ktorá pri neoneskorenej sústave (4.1) tiež pripúšťala možnosť vzniku singularít vo fázovej trajektorii, ak sa vlastné čísla matice sústavy nachádzajú v určitej blízkosti hranice oblasti M_α .

Ešte upozorníme na fakt, že ak pre istú hodnotu τ nulové riešenie stratí asymptotickú stabilitu, potom pri následnom zvyšovaní hodnoty τ sa už asymptotická stabilita nulového riešenia znovu neobjaví. Túto vlastnosť zdôrazňujeme z dôvodu, že pri sústave typu (4.10) môže nastať aj situácia, pri ktorej dochádza k tzv. "prepínaniu stability" nulového riešenia vplyvom zmeny hodnoty oneskorenia τ .

5.3 Lineárna sústava s oneskoreným a neoneskoreným členom

V poslednej časti tejto kapitoly budeme opäť graficky demonštrovať správanie sústavy (4.10). Zaujímavou vlastnosťou tohoto typu sústavy je tzv. "prepínanie" medzi asymptotickou stabilitou a nestabilitou nulového riešenia pri zmene hodnoty oneskorenia τ , ako je uvedené vo vete 4.10.

Majme sústavu tvaru

$$\begin{aligned} D_0^\alpha &= -0,5y_1(t - \tau) - 0,5y_2(t) \\ D_0^\alpha &= 1,5y_1(t) - 0,5y_2(t - \tau) \quad t \in [0, \infty]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

K sústave pridáme počiatočné podmienky

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 1 \\ y_2(t) &= 1 \quad t \in [-\tau, 0]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Vďaka vete 4.10 sme schopní vyčíslíť presné hodnoty α a τ , pre ktoré je nulové riešenie sústavy (5.10) asymptoticky stabilné. Dosadením hodnôt $a = -0,5$; $b = -0,5$ a $c = 1,5$ do podmienok (4.15)-(4.18) dostávame pre niektoré konkrétne hodnoty α nasledovné:

- Ak $\alpha = 0,8$, potom nulové riešenie systému (5.10) je asymptoticky stabilné práve vtedy, keď

$$\tau \in (0; 1,781364151); \quad (5.12)$$

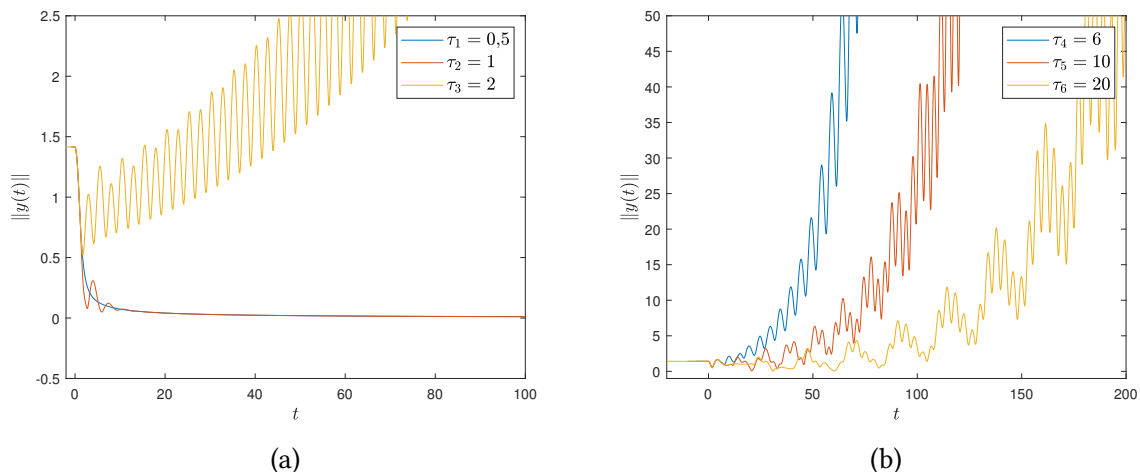
- ak $\alpha = 0,64$, potom nulové riešenie systému (5.10) je asymptoticky stabilné práve vtedy, keď

$$\tau \in (0; 3,589360507) \cup (10,06793272; 10,77857157). \quad (5.13)$$

Môžeme tiež ľahko overiť, že dosadením do podmienky (4.15) dokážeme vyčíslíť kritickú hodnotu $\alpha_\infty \approx 0,6081734480$. Znížením rádu Caputovej zlomkovej derivácie α pod túto hodnotu dostávame asymptotickú stabilitu nulového riešenia, ktorá nie je závislá od oneskorenia, teda nulové riešenie je asymptoticky stabilné pre všetky hodnoty $\tau \in (0, \infty)$.

Poznámka. Jednotlivé hodnoty α a τ pre sústavu (5.10) boli vyčíslené v [4], odkiaľ ich preberáme.

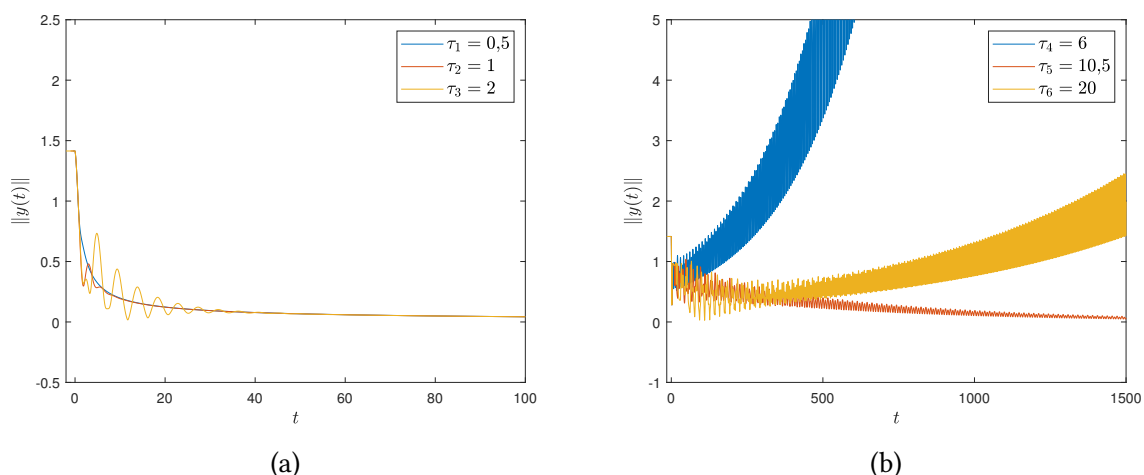
Najskôr rozoberieme možnosť $\alpha = 0,8$. V tomto prípade je nulové riešenie asymptoticky stabilné pre hodnoty $\tau \in (0; 1,781364151)$. Na Obr. 19 uvádzame priebeh normy riešenia pre rôzne hodnoty τ .



Obr. 19: Vykreslenie normy riešenia počiatocnej úlohy (5.10)-(5.11) pre $\alpha = 0,8$

Z Obr. 19 môžeme v prípadoch $\tau_1 = 0,5$ a $\tau_2 = 1$ vidieť priebeh konvergujúcich riešení k nule, keďže τ_1, τ_2 patria do intervalu (5.12). Naopak, v prípade $\tau_3 = 2$, $\tau_4 = 6$, $\tau_5 = 10$ a $\tau_6 = 20$ prezentujeme priebeh, kedy riešenia k nulovému riešeniu nekonvergujú. To súhlasí aj so skutočnosťou, že $\tau_3, \tau_4, \tau_5, \tau_6$ už do intervalu (5.12) nepatria. Numerický výpočet teda súhlasí s tvrdením vety 4.10. Môžeme si tiež všimnúť, že zmenou hodnôt oneskorenia τ dôjde k prechodu z asymptotickej stability nulového riešenia k nestabilite práve jedenkrát, teda správanie, vzhľadom k zmene τ , je v tomto prípade obdobné ako pri sústavách typu (4.5), ktoré sme demonštrovali na Obr. 18.

Zaujímavejší je prípad $\alpha = 0,64$, kde je nulové riešenie sústavy (5.10) asymptoticky stabilné pre hodnoty $\tau \in (0; 3,589360507) \cup (10,06793272; 10,77857157)$. Na Obr. 20 opäť ilustrujeme priebeh normy riešení pre rôzne hodnoty τ .



Obr. 20: Vykreslenie normy riešenia počiatocnej úlohy (5.10)-(5.11) pre $\alpha = 0,64$

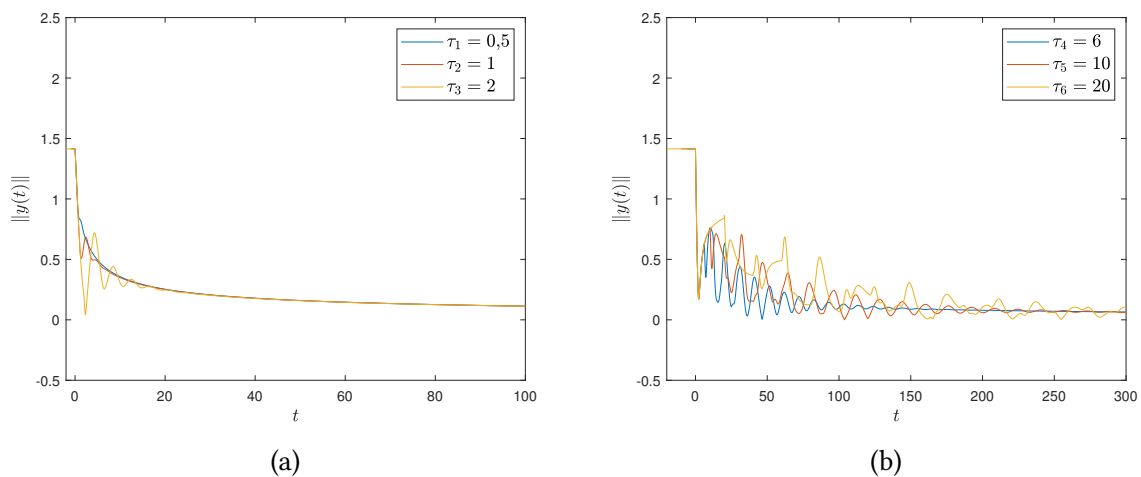
Z Obr. 20 si môžeme všimnúť, že je nulové riešenie pre zvyšujúce sa hodnoty oneskorenia τ nasledovné: Pre hodnoty τ_1, τ_2 a τ_3 riešenia prejavujú známky konvergenzie k nulovému riešeniu, čo súhlasí so skutočnosťou, že tieto hodnoty patria do zjednotenia intervalov (5.13). Následným zvýšením hodnoty na τ_4 sa však už dostaneme mimo tohoto zjednotenia intervalov (5.13), a teda podľa vety 4.10 sa jedná o nestabilný prípad nulového riešenia. Na vykreslenom

grafe z Obr. 20b je túto skutočnosť možno pozorovať, keďže sa ani norma numerického riešenia k nule nepribližuje. Ďalším zvýšením hodnoty oneskorenia na τ_5 však opäť môžeme vidieť, ako norma riešenia konverguje k nule, keďže sme sa opäť s hodnotou τ_5 dostali do zjednotenia intervalov (5.13). Zvýšením hodnoty na τ_6 znova prechádza nulové riešenie do nestabilného stavu. Na tomto príklade bolo prezentované "prepínanie" medzi asymptotickou stabilitou a nestabilitou nulového riešenia pri postupnom zvyšovaní hodnoty oneskorenia τ .

Môžeme si tiež všimnúť, že v niektorých prípadoch sa javil priebeh konverencie normy k nule pomerne rýchly (myslíme tým, že v rádoch pár desiatok sekúnd, ak pripúšťame možnosť, že premenná t predstavuje časový priebeh riešenia). Naopak, ak sa zameriame na priebeh riešenia na Obr. 20b, aby sme mohli dostatočne názorne interpretovať výsledky, bolo potrebné vykresliť priebeh riešenia rádovo v stovkách až tisícoch sekúnd. Rovnako to platí pre prípady nestabilného riešenia, kedy hodnota normy narastala pomerne pomaly a pri grafickej interpretácii by bola pri vykreslení na krátkom časovom intervale slabo viditeľná.

Nakoniec uvedieme prípad $\alpha = 0,5$. Táto hodnota je menšia než kritická hodnota $\alpha_\infty \approx 0,6081734480$, takže podľa vety 4.10 platí, že nulové riešenie je asymptoticky stabilné pre všetky hodnoty $\tau \in (0, \infty)$.

Priebeh riešení (5.10)-(5.11) pre rôzne hodnoty τ ilustrujeme na Obr. 21.



Obr. 21: Vykreslenie normy riešenia počiatočnej úlohy (5.10)-(5.11) pre $\alpha = 0,5$

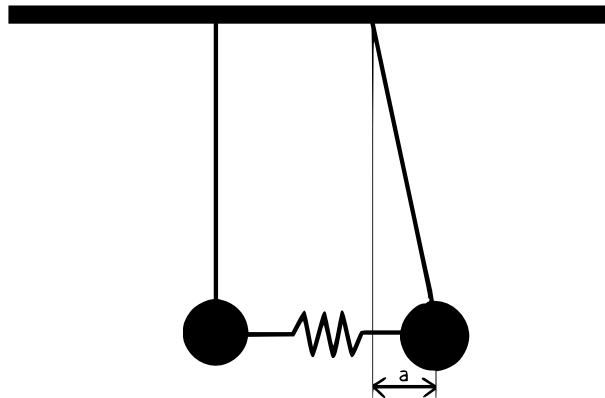
Keďže $\alpha = 0,5 < \alpha_\infty$, z Obr. 21 môžeme vidieť, ako jednotlivé normy riešení konvergujú k nulovému riešeniu.

6 Aplikácia: Stabilita regulovanej sústavy kyvadiel

V tejto kapitole bude predstavená možná aplikácia zlomkového kalkulu pri popise jednoduchého dynamického systému. Predstavený bude zovšeobecnený model dvoch identických matematických kyvadiel spojených pružinou, ktorých dynamiku je možné popísať sústavou dvoch diferenciálnych rovníc druhého rádu, ktorej vlastnosti porovnáme so sústavou, kde klasickú deriváciu nahradíme Caputovou zlomkovou deriváciou. K takto vzniknutému zlomkovému modelu následne pridáme tzv. regulačný člen, čím dostaneme konkrétny tvar lineárnej sústavy (4.9). Vlastnosti takto vzniknutej sústavy však nie sú teoreticky odvodené. My sa na konci kapitoly pokúsime jednoduchým numerickým testom nájsť vhodnú kombináciu parametrov, pre ktorú je možné túto sústavu stabilizovať.

Formulácia úlohy

Máme dve identické závažia o hmotnosti m zavesené vedľa seba na tenkom vlákne o dĺžke L (hmotnosť vlákna zanedbávame), ktoré sú spojené pružinou s tuhosťou k . Jedná sa teda o dve matematické kyvadlá spojené pružinou. Budeme predpokladať, že jedno zo závaží vychýlime o vzdialenosť a z rovnovážnej polohy a následne voľne pustíme. Úloha je schematicky znázornená na Obr. 22.



Obr. 22: Schematické zobrazenie úlohy spojených kyvadiel

Na kyvadlá pôsobí kombinácia dvoch síl: gravitačná sila a sila spôsobená predĺžením pružiny. Budeme uvažovať popis pohybu kyvadla vzhľadom k horizontálnej osi x . Z 2. Newtonovho zákona po istom zjednodušení dostávame pohybovú rovnicu pre obe kyvadlá vo forme lineárnej sústavy diferenciálnych rovníc druhého rádu, ktorá je tvaru

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -\frac{mg}{L} x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -\frac{mg}{L} x_2 - k(x_2 - x_1), \end{aligned} \quad (6.1)$$

kde m je hmotnosť závažia, g je gravitačné zrýchlenie, L je dĺžka závesného vlákna, výraz $\frac{d^2 x_i}{dt^2}$, $i \in \{1, 2\}$ predstavuje zrýchlenie jednotlivých kyvadiel v horizontálnom smere.

Poznámka. Pre odvodenie modelu (6.1) viď [7].

K sústave pridávame počiatočné podmienky:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= a & y_2(0) &= 0 \\ x_1'(0) &= 0 & y_2'(0) &= 0, \end{aligned} \quad (6.2)$$

kde $a \in \mathbb{R}$. Z počiatočných podmienok vidíme, že z rovnovážneho bodu vychýľujeme jedno z kyvadiel o vzdialenosť a (v prípade zápornej hodnoty a myslíme vychýlenie v zápornom smere x -ovej osi).

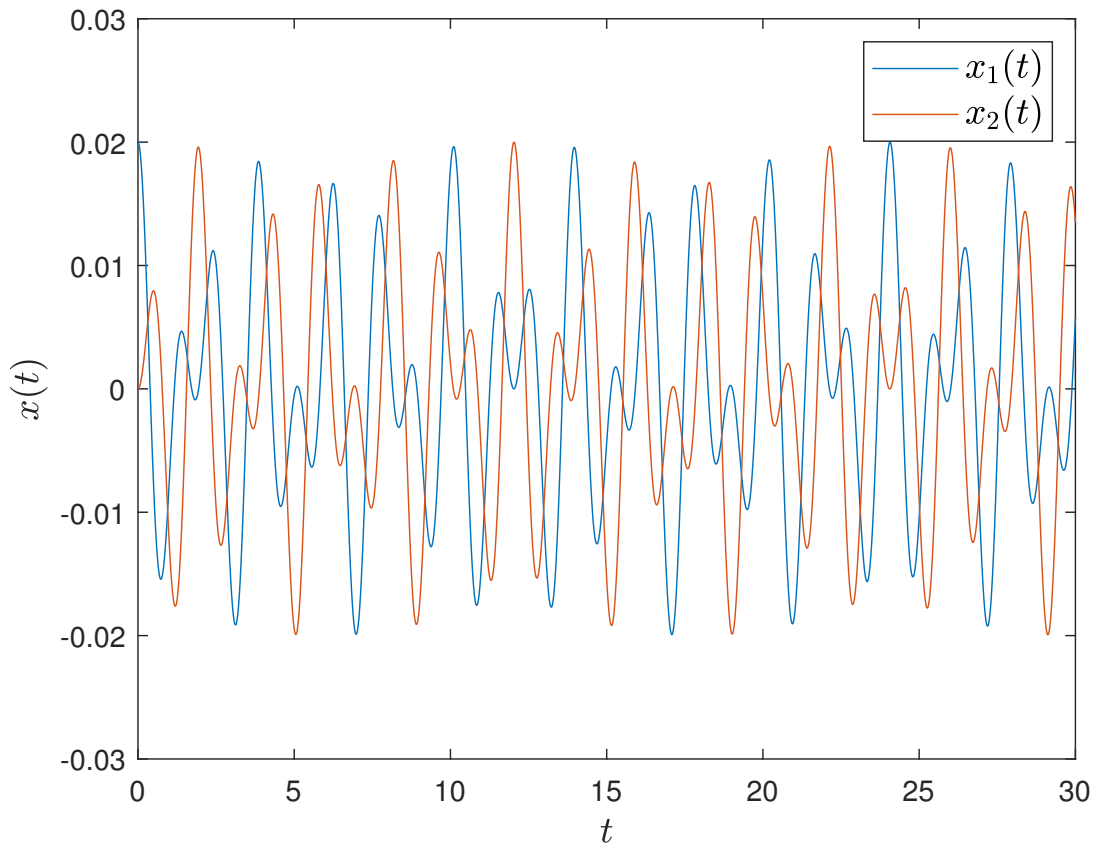
Dá sa ukázať, že riešenie takto formulovanej počiatočnej úlohy je tvaru

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a}{2} [\cos(\omega_p t) + \cos(\omega_s t)] \\ x_2 &= \frac{a}{2} [\cos(\omega_p t) - \cos(\omega_s t)], \end{aligned} \quad (6.3)$$

kde ω_p a ω_s sú definované

$$\omega_p = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \omega_s = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}}. \quad (6.4)$$

Dosadením hodnôt: $a = 0,02\text{m}$; $L = 1\text{m}$; $g = 9,81\text{ms}^{-2}$; $m = 1\text{kg}$; $k = 7,4\text{Nm}^{-1}$. do (6.3) a (6.4) dostávame riešenie počiatočnej úlohy (6.1)-(6.2), ktorého priebeh je vykreslený na Obr. 23.



Obr. 23: Vykreslenie riešenia počiatočnej úlohy (6.1)-(6.2)

Na Obr. 23 môžeme vidieť oscilačný pohyb kyvadiel. Tento model však nezohľadňuje prípadné tlmenie, ktoré sa klasicky modeluje pridaním člena obsahujúceho deriváciu prvého rádu. My namiesto toho budeme pracovať s modelom obsahujúcim Caputovu zlomkovú deriváciu rádu α z intervalu $(1, 2)$, čím sú simulované straty energie plynúce z vnútorného usporiadania systému kyvadiel.

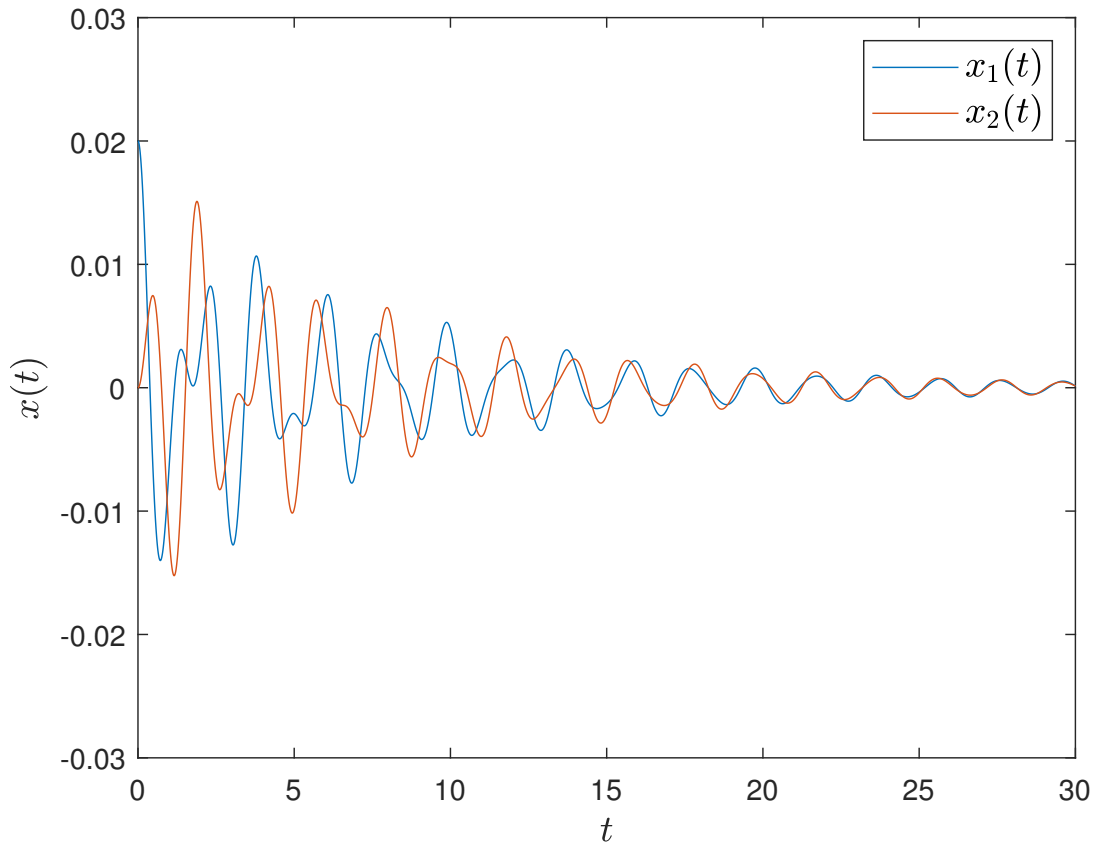
Zámenou derivácie druhého rádu za Caputovu zlomkovú deriváciu obdržíme sústavu tvaru

$$\begin{aligned} mD_0^\alpha x_1(t) &= -\frac{mg}{L}x_1 + k(x_2 - x_1) \\ mD_0^\alpha x_2(t) &= -\frac{mg}{L}x_2 - k(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Následným vydelením oboch rovníc tejto sústavy členom m (predpokladáme jeho nenulovosť) a po miernych úpravách dostávame sústavu tvaru

$$\begin{aligned} D_0^\alpha x_1(t) &= -\frac{gm + kL}{Lm}x_1 + \frac{k}{m}x_2 \\ D_0^\alpha x_2(t) &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{gm + kL}{Lm}x_2. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Jedná sa teda v podstate o prípad sústavy (4.1), s ktorou sme sa už zaoberali v piatej kapitole. Počiatočné podmienky ponechávame tvaru (6.2). Vykreslením numericky nadobudnutého riešenia počiatočnej úlohy (6.5)-(6.2) pre hodnoty $a = 0,02$; $L = 1$; $g = 9,81$; $m = 1$; $k = 7,4$ a rádu Caputovej derivácie $\alpha = 1,97$ dostávame priebeh zobrazený na Obr. 24.



Obr. 24: Vykreslenie riešenia počiatočnej úlohy (6.5)-(6.2) pre rád Caputovej derivácie $\alpha = 1,97$

Na Obr. 24 už môžeme vidieť, že sa amplitúdy oscilácií kyvadiel pomaly znižujú. Viditeľné je tiež, že na rozdiel od celočíselného modelu (Obr. 23), kedy boli oscilácie kyvadiel po celý čas vo fáze (jednotlivé amplitúdy oscilácií boli vzájomne posunuté), v prípade zlomkového modelu (Obr. 24) sa jednotlivé amplitúdy postupne snažia čoraz viac zosynchronizovať.

Pridanie regulačného člena

Ďalšou otázkou, ktorou sa budeme zaoberať, je možnosť, ako sme schopní oscilácie kyvadiel regulovať. Klasický spôsob, akým je možné dosiahnuť reguláciu systémov, je pridanie regulačného člena do sústavy, čím typicky obdržíme sústavu tvaru (4.9). V prípade nášho vzorového príkladu spojených kyvadiel členom $Ay(t)$ popisujeme práve dynamiku samotného systému kyvadiel. Pridaním regulačného člena $By(t - \tau)$ sme schopní oscilácie v istom zmysle spätnoväzobne regulovať.

V tejto práci ďalej nerozoberáme, akým spôsobom by bola regulácia realizovaná, ale sa budeme na túto problematiku pozeráť z hľadiska čisto matematického.

Keďže sa v prípade nášho zlomkového modelu kyvadiel v podstate jedná o planárnu lineárnu sústavu tvaru

$$\begin{aligned} D_0^\alpha y_1(t) &= -ay_1(t) + by_2(t) \\ D_0^\alpha y_2(t) &= by_1(t) - ay_2(t), \end{aligned} \quad (6.6)$$

kde $a, b \in (0, \infty)$, hodnota Caputovej zlomkovej derivácie α bola uvažovaná z intervalu $(1, 2)$.

Poznámka. V prípade modelu kyvadla boli parametre a, b volené tak, aby mal model svoje opodstatnenie z hľadiska fyzikálnej realizácie.

Pridaním regulačného člena do (6.6) nakoniec obdržíme konečnú sústavu tvaru

$$\begin{aligned} D_0^\alpha y_1(t) &= -ay_1(t) + by_2(t) + cy_1(t - \tau) \\ D_0^\alpha y_2(t) &= by_1(t) - ay_2(t) + cy_2(t - \tau), \end{aligned} \quad (6.7)$$

kde $a, b, \tau \in (0, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$ a rád Caputovej zlomkovej derivácie uvažujeme z intervalu $\alpha \in (1, 2)$. Pre túto sústavu kladieme počiatočné podmienky

$$\begin{aligned} y(t) &= \phi(t) \\ \lim_{t \rightarrow 0^+} y^{(k)}(t) &= \phi_k \quad k \in \{0, 1\}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

kde $\phi(t) : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2$ a $\phi_0, \phi_1 \in \mathbb{R}^2$.

Takto formulovaná počiatočná úloha však predstavuje problém, ktorého predpoklady na stabilitu resp. asymptotickú stabilitu nulového riešenia nie sú teoreticky známe. Naším cieľom je odhadnúť správanie riešení počiatočnej úlohy (6.7)-(6.8) pomocou jednoduchého numerického testu. Pred predstavením samotného testu uvedieme tvar počiatočnej úlohy, ktorú testujeme.

Máme sústavu tvaru

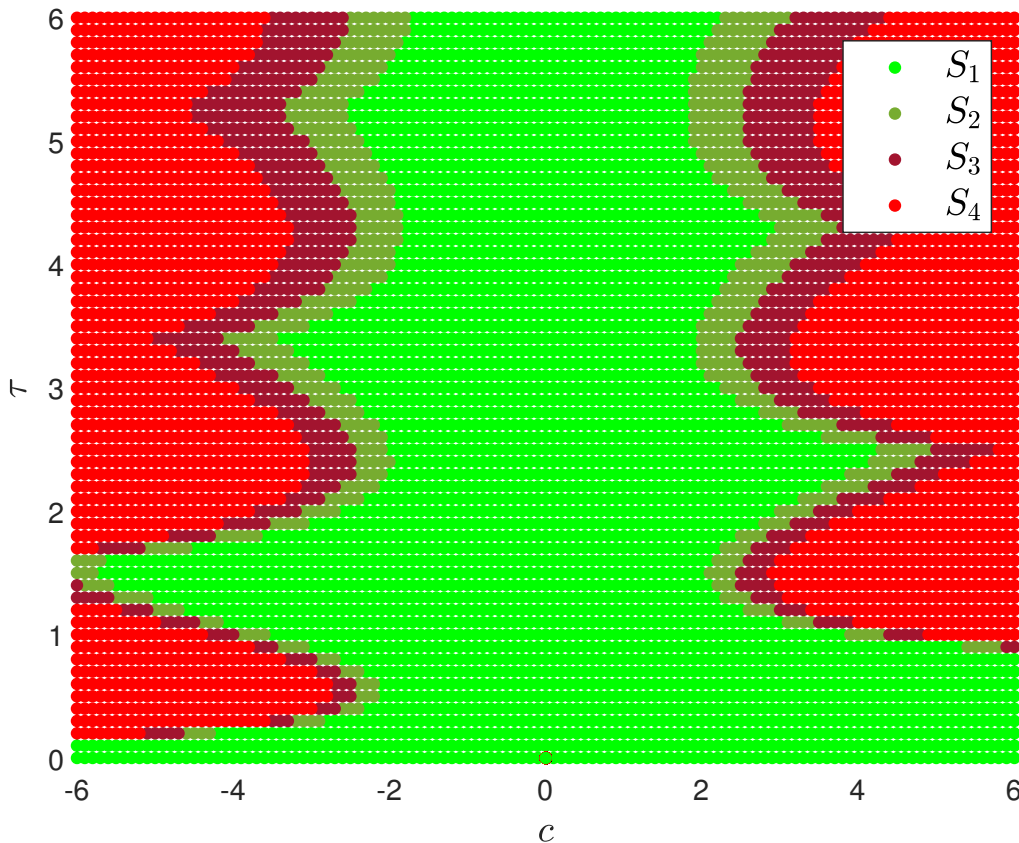
$$\begin{aligned} D_0^{1,85} y_1(t) &= -17,21y_1(t) + 7,4y_2(t) + cy_1(t - \tau) \\ D_0^{1,85} y_2(t) &= 7,4y_1(t) - 17,21y_2(t) + cy_2(t - \tau) \quad t \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Poznámka. Číselné hodnoty koeficientov a, b boli určené tak, aby korešpondovali s hodnotami koeficientov ako pri príklade modelu kyvadiel (6.5) po dosadení konkrétnych hodnôt g, k, L, m . Ešte poznamenajme, že v prípade $c = 0$ dostaneme z našej vzorovej sústavy (6.9) sústavu typu (4.1), ktorej matica sústavy by mala vlastné čísla $\lambda_9 = -24,61$ a $\lambda_{10} = -9,81$, teda pre túto sústavu by bolo nulové riešenie asymptoticky stabilné (vyplýva z vety 4.2).

K sústave pridávame počiatočné podmienky:

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= 0,02 & y_2(t) &= 0 & t &\in [-\tau, 0] \\
 \lim_{t \rightarrow 0^+} y_1(t) &= 0,02 & \lim_{t \rightarrow 0^+} y_2(t) &= 0 \\
 \lim_{t \rightarrow 0^+} y_1'(t) &= 0 & \lim_{t \rightarrow 0^+} y_2'(t) &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Takouto formuláciou počiatočnej úlohy nám vznikne sústava s dvoma parametrami: koeficient c a oneskorenie τ . Náš test spočíva v numerickom vyčíslení riešení tejto úlohy pri postupnej zmene parametrov c a τ . Následne pre jednotlivé riešenia prepočítavame ich normy vo vyčíslených bodoch. Poznamenajme, že riešenia sú vyčíslené pre interval $t \in [-\tau, 100]$, pre príslušnú hodnotu τ , s dĺžkou kroku medzi jednotlivými bodmi $h = 0,01$. Takto vyčíslený priebeh noriem rozdeľujeme na dva intervaly $t \in (0, 50]$ a $t \in (50, 100]$. Pre takto upravené intervaly vyčíslujeme priemernú hodnotu, ktorú normy v daných intervaloch nadobúdajú. Tieto hodnoty značíme m_1 – priemerná hodnota normy riešenia na intervale $(0, 50]$ a m_2 – priemerná hodnota normy riešenia na intervale $(50, 100]$. Dostávame teda dve hodnoty, ktoré popisujú správanie riešenia sústavy. Pre hodnotu rádu Caputovej zlomkovej derivácie $\alpha = 1,85$ bol na základe porovnania hodnôt m_1 a m_2 vytvorený graf $c - \tau$, ktorý je uvedený na Obr. 25.



Obr. 25: Odhad oblasti stability nulového riešenia (6.9)-(6.10) od parametrov c , τ a $\alpha = 1,85$

Na Obr. 25 je zobrazený graf parametrov $c - \tau$, ktorý je farebne rozdelený do štyroch oblastí vytvorených na základe nasledujúcich kritérií:

- Do oblasti S_1 sme priradili dvojicu (c, τ) , pri ktorej bola hodnota m_1 stonásobne väčšia ako hodnota m_2 .
- Do oblasti S_2 sme priradili dvojicu (c, τ) , pri ktorej bola hodnota m_1 väčšia ako hodnota m_2 , ale nebola viac ako stonásobne väčšia.
- Do oblasti S_3 sme priradili dvojicu (c, τ) , pri ktorej bola hodnota m_1 menšia ako hodnota m_2 , ale nebola viac ako stonásobne menšia.
- Do oblasti S_4 sme priradili dvojicu (c, τ) , pri ktorej bola hodnota m_1 stonásobne menšia ako hodnota m_2 .

Obr. 25 teda predstavuje akési rozdelenie pravdepodobnosti. Oblasť S_1 je tvorená dvojicami (c, τ) , pri ktorých nadobúdala norma riešenia daného počiatočného problému (6.9)-(6.10) v priemere stonásobne vyššie hodnoty v prvej časti intervalu ako v druhej. Vzhľadom na tento pomerne signifikantný rozdiel hodnôt m_1 a m_2 , sme sa rozhodli s istou pravdepodobnosťou predpokladať, že pri kombinácií parametrov z oblasti S_1 by sa mohlo jednať o sústavu so stabilným resp. asymptoticky stabilným nulovým riešením.

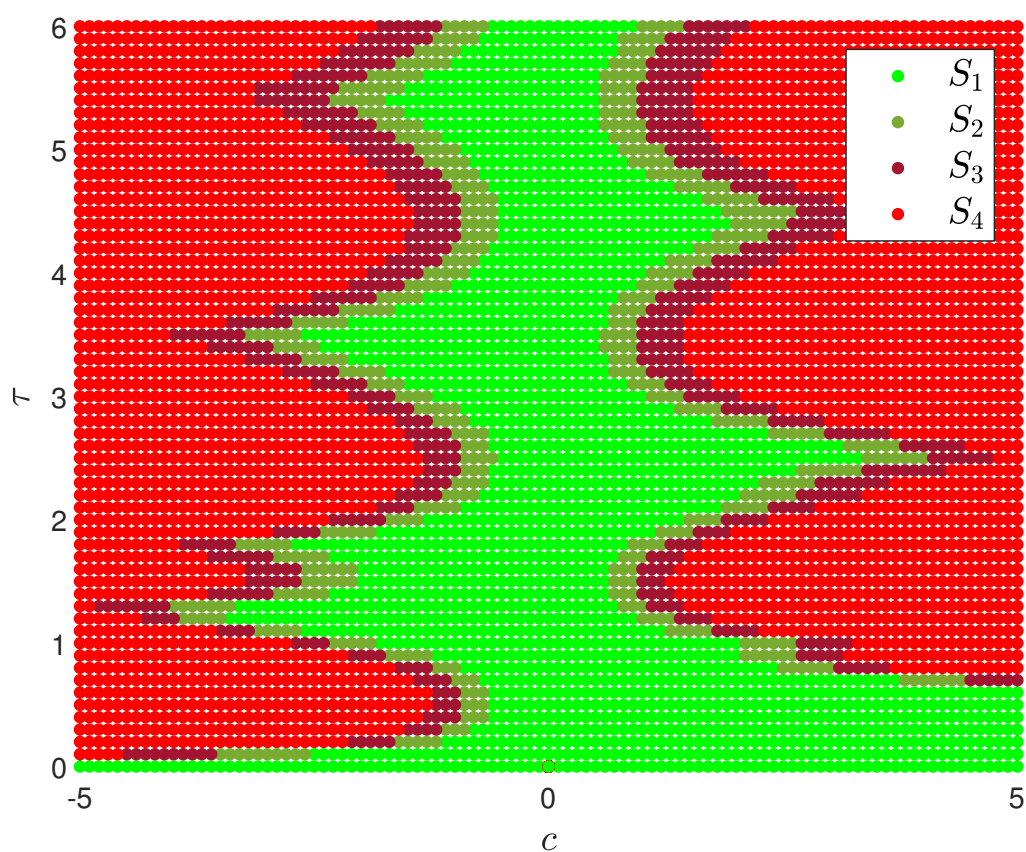
Naopak pri oblasti S_4 , kde normy daných riešení nadobúdali v priemere viac ako stonásobne vyššie hodnoty v druhej časti intervalu než v prvej, môžeme usúdiť, že sa jedná o kombináciu dvojice parametrov (c, τ) , pri ktorých je nulové riešenie stabilné iba s veľmi malou pravdepodobnosťou. S_4 by sme tiež mohli označovať za oblasť kombinácie dvojice parametrov (c, τ) , kde je dosť možné, že pre sústavu (6.9) obdržíme nestabilné nulové riešenie.

Dvojice parametrov (c, τ) z S_2 a S_3 môžeme považovať za akési prechodové oblasti, pri ktorých boli priemerné hodnoty na jednotlivých častiach intervalu veľmi podobné, a teda nevieme ani približne rozhodnúť, či sa v týchto prípadoch jedná o stabilné nulové riešenie alebo nie. Ich presnejšie určenie by bolo možné prípadným vyčíslením priebehu riešenia na väčšom intervale.

Z nášho pohľadu sa teda javí, že by sa v prípade oblasti parametrov S_1 mohlo s istou pravdepodobnosťou jednať o približný odhad kombinácie parametrov c a τ , pre ktorú by bolo nulové riešenie sústavy (6.9) stabilné, resp. asymptoticky stabilné. Za predpokladu tejto hypotézy by sme tiež zo samotného tvaru tejto oblasti mohli predpokladať, že je rovnako ako v prípade sústavy (4.10) možné, pri zafixovaní hodnoty c , dosiahnuť "prepínanie" stability nulového riešenia zmenou hodnoty τ .

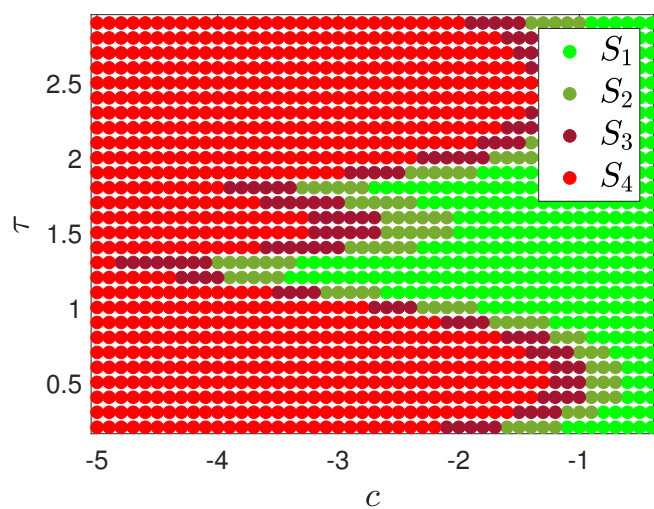
Nanešťastie, ako sme už spomínali, doposiaľ nie je odvodená teória, ktorá by mohla naše hypotézy potvrdiť. Minimálne je však zaujímavé pozorovať tvar oblastí na Obr. 25, ktoré sa podobajú na analyticky odvodené oblasti stability v prípade sústavy (4.10) z práce [4]. Táto skutočnosť tiež prispieva k našim úvahám o možnej existencii vety podobnej s vetou 4.10 pre sústavy typu (4.1) pre rád Caputovej zlomkovej derivácie $\alpha > 1$.

Ešte pre doplnenie uvádzame aj Obr. 26, kde je znázornená oblasť parametrov $c - \tau$ pre hodnotu rádu Caputovej zlomkovej derivácie $\alpha = 1,95$, ktorý bol vytvorený na základe rovnakých kritérií, ako tomu bolo v prípade Obr. 25.



Obr. 26: Odhad oblasti stability (6.9)-(6.10) od parametrov c , τ a $\alpha = 1,95$

Aj z tohto obrázku môžeme vidieť, že tvar oblasti možnej stability S_1 je podobný ako na Obr. 25. V tomto prípade je však zaujímavé pozorovať vzniknutý útvar v ľavej spodnej časti, ktorý sa mierne vymyká z charakteru tvaru oblasti S_1 pre $\alpha = 1,85$. Tento atypický útvar zobrazujeme detailnejšie na Obr. 27.



Obr. 27: Odhad oblasti stability (6.9)-(6.10) od parametrov c , τ a $\alpha = 1,95$ - Detail

7 Záver

V tejto práci boli predstavené kvalitatívne vlastnosti niekoľkých typov lineárnych sústav zlomkových diferenciálnych rovníc. Predovšetkým sme sa zaoberali otázkami stability a asymptotického správania riešení týchto sústav. V priebehu práce bola čitateľovi najskôr vo štvrtej kapitole predstavená známa teória k trom typom lineárnych sústav zlomkových diferenciálnych rovníc. Následne sme v piatej kapitole na konkrétnych príkladoch počiatočných úloh známe vlastnosti spomínaných sústav demonštrovali pomocou grafickej vizualizácie. Čitateľa sme tiež textovým doprovodom upozorňovali na prípadné odlišnosti, ktoré so sebou prináša prítomnosť zlomkovej derivácie v porovnaní s klasickou celočíselnou deriváciou. Konkrétne sme poukazovali na odlišnosti podmienok, ktoré zaručujú asymptotickú stabilitu nulového riešenia jednotlivých sústav a rozdielnu rýchlosť konverencie noriem riešení, ktorá je algebraického typu a nie exponenciálneho, ako pri sústavách s celočíselnou deriváciou. Čitateľovi sme tiež na fázových portrétoch riešení sústav prezentovali klasickú vlastnosť fázových trajektórií, ktorou je výskyt singulárnych bodov, ktoré sa vo fázových trajektóriách pri klasickom celočíselnom prípade derivácie nevyskytujú, keďže by sme boli v rozpore s jednoznačnosťou. Poslednú vlastnosť, ktorú sme v tejto kapitole pozorovali, bol vplyv oneskorenia na sústavu, ktoré oneskorený člen obsahujú. Čitateľovi sme predstavili konkrétny typ lineárnej sústav zlomkových diferenciálnych rovníc, ktorého teória pripúšťa tzv. "prepínanie" stability nulového riešenia. Táto vlastnosť bola tiež graficky demonštrovaná.

Aplikáciu sústav zlomkových diferenciálnych rovníc sme uviedli v kapitole šiestej na príklade dvoch matematických kyvadiel spojených pružinou, na ktorom boli prezentované možné fyzikálne interpretácie zlomkovej derivácie pri modelovaní dynamických systémov. Do modelu kyvadiel sme tiež pridaním regulačného člena obdržali príklad sústav obsahujúcej oneskorený aj neoneskorený člen (viď (6.6)). Teoreticky odvodené vlastnosti takejto sústav však nie sú známe. V práci sme preto uviedli jednoduchý numerický test, v ktorom sme sa pokúsili odhadnúť možný výskyt stabilného nulového riešenia pri určitej kombinácii parametrov sústav, kde jedným z parametrov bola hodnota oneskorenia τ . Na Obr. 25 a Obr. 26 sme prezentovali náš konzervatívny odhad oblasti kombinácie parametrov, pre ktoré by sme očakávali prípadnú stabilitu resp. asymptotickú stabilitu nulového riešenia. Vzhľadom na tvar tejto oblasti a tvrdenie vety 4.9, ktorá potvrdzuje "prepínanie" stability nulového riešenia vplyvom zmeny parametru oneskorenia τ pre sústavu tvaru (4.10), prichádzame k záveru, že s istou pravdepodobnosťou sme schopní odvodiť tvrdenia, ktoré pripúšťajú možnosť "prepínania" stability nulového riešenia aj pre širšiu množinu problémov.

Literatúra

- [1] ANDRESÍK, Michal. *Vlastnosti systémů s neceločíselnými členy v teorii řízení*. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství, 2021.
- [2] BARTLE, Robert G. *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley and Sons, 2014. ISBN 978-0471042228.
- [3] BHALEKAR, Sachin, P. MADHURI. *Singular points in the solution trajectories of fractional order dynamical systems*. Chaos (Woodbury, N.Y.) [online]. MELVILLE: AIP Publishing, 2018. ISSN 1054-1500. Dostupné z: doi:10.1063/1.5054630.
- [4] ČERMÁK, Jan, T. KISELA. *Delay-dependent stability switches in fractional differential equations* [online]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Volume 79, 2019. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2019.104888>.
- [5] ČERMÁK, Jan, T. KISELA. *Oscillatory and asymptotic properties of fractional delay differential equations* [online]. 2019. Dostupné z: <https://digital.library.txstate.edu/handle/10877/14742>.
- [6] DIETHELM, Kai. *Analysis of Fractional Differential Equations*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 265, 2002. ISBN 978-3642145735.
- [7] JARVIS, Matt. *Waves and normal modes* [online]. 2017. Dostupné z: <https://docplayer.net/101667535-Waves-normal-modes-matt-jarvis.html>.
- [8] KILBAS, Anatoly A., Hari M. SRIVASTAVA a Juan J. TRUJILLO. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam: Elsevier, 2006. ISBN 978- 0-444-51832-3.
- [9] KRBÁLEK, M. *Matematická analýza III..* Applied Mathematics and Computation 338, 2018.
- [10] LI, Changpin, Fengrong ZHANG. *A survey on the stability of fractional differential equations* [online]. The European Physical Journal Special Topics, 2011. Dostupné z: <http://dx.doi.org/10.1140/epjst/e2011-01379-1>.
- [11] NECHVÁTAL, Luděk. *Laplaceova transformace a stabilita řešení soustav diferenciálních rovnic* [online]. Dostupné z: https://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=1306.
- [12] PODLUBNÝ, Igor. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. San Diego: Academic Press, 1999. Mathematics in Science and Engineering. ISBN 0-12-558840-2.
- [13] RUDIN, Walter. *Real and complex analysis*. 1970. ISBN 978-0070542341.
- [14] SADEGHI, Amir, J.R. CARDOSO. *Some notes on properties of matrix Mittag-Leffler function*. Praha: České vysoké učení technické, 2019. ISBN 978-80-01-06663-8.
- [15] SEBAH, Pascal, X. GOURDON. *Introduction to the Gamma Function* [online]. 2008. Dostupné z: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.527.8519>.
- [16] VEIT, Jan. *Integrální transformace*. 2.vyd. Praha: SNTL, 1983.