

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta elektrotechniky
a komunikačních technologií

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Diplomová práce

magisterský navazující studijní obor **Audio inženýrství**

Ústav telekomunikací

Student: Bc. Pavel Hanzálek

ID: 174451

Ročník: 2

Akademický rok: 2018/19

NÁZEV TÉMATU:

Praktické ukázky zpracování signálů

POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

V rámci diplomové práce budou vytvořeny praktické ukázky zpracování signálů, které budou využity při vysvětlování problematiky v předmětu Analýza signálů a soustav a Číslicové zpracování signálů. Bude se jednat o ukázky demonstrující využití těchto oblastí: 1) posunutí a změna časového měřítka signálu; 2) konvoluce (1D i 2D); 3) korelace; 4) Fourierova řada; 5) kmitočtové filtry (kmitočtová charakteristika + rozložení pólů a nulových bodů); 6) aliasing a vzorkování; 7) kvantování; 8) diskrétní Fourierova transformace; 9) rychlá Fourierova transformace; 10) transformace Z; 11) FIR a IIR systémy; 12) modulace; 13) spektrální výkonová hustota; 14) diskrétní kosinova transformace; 15) změna vzorkovacího kmitočtu; 16) banka filtrů; 17) vlnková transformace; 18) krátkodobá spektrální analýza; 19) lineární predikční analýza; 20) 2D filtrace. Ke každé ukázce bude vytvořen kód v prostředí Matlab.

DOPORUČENÁ LITERATURA:

[1] SMÉKAL, Z. Číslicové zpracování signálů. Skripta FEKT VUT v Brně, 2010.

[2] PROAKIS, J. G.; MANOLAKIS, D. K. Digital Signal Processing. 4. Londýn: Pearson, 2006. ISBN 978-0131873742.

Termín zadání: 1.2.2019

Termín odevzdání: 16.5.2019

Vedoucí práce: Ing. Jiří Mekyska, Ph.D.

Konzultant:

prof. Ing. Jiří Mišurec, CSc.
předseda oborové rady

UPOZORNĚNÍ:

Autor diplomové práce nesmí při vytváření diplomové práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION

ÚSTAV TELEKOMUNIKACÍ

DEPARTMENT OF TELECOMMUNICATIONS

PRAKTICKÉ UKÁZKY ZPRACOVÁNÍ SIGNÁLŮ

PRACTICAL EXAMPLES OF SIGNAL PROCESSING

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Pavel Hanzálek

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Jiří Mekyska, Ph.D.

BRNO 2019

ABSTRAKT

Práce se zaměřuje na problematiku zpracování signálů. Pomocí praktických ukázek se snaží ukázat využití jednotlivých operací zpracování signálů z praktického hlediska. Pro každou z vybraných operací zpracování signálů je vytvořena aplikace v prostředí MATLAB včetně grafického rozhraní pro její snadnější ovládání. Členění práce je takové, že každá kapitola je v úvodu rozebrána nejdříve z teoretického hlediska, posléze je ukázáno pomocí praktické ukázky, k čemu se daná operace v praxi využívá. V této části se nachází popis jednotlivých aplikací, hlavně z hlediska způsobu jejich obsluhy, a také popis jejich možných výsledků. V příloze práce se nachází výsledky praktické části.

KLÍČOVÁ SLOVA

1D lineární konvoluce, 2D konvoluce, aliasing, AM a FM modulace, banka filtrů, DCT, DFT, FFT, FIR a IIR systémy, Fourierova řada, kmitočtové filtry, krátkodobá spektrální analýza, kvantování, lineární predikční analýza, posunutí signálu, spektrální výkonová hustota, transformace Z, vlnková transformace, změna časového měřítka signálu, změna vzorkovacího kmitočtu, zpracování signálů

ABSTRACT

The thesis focuses on the issue of signal processing. Using practical examples, it tries to show the use of individual signal processing operations from a practical point of view. For each of the selected signal processing operations, an application is created in MATLAB, including a graphical interface for easier operation. The division of the thesis is such that each chapter is first analyzed from a theoretical point of view, then it is shown using a practical demonstration of what the operation is used in practice. Individual applications are described here, mainly in terms of how they are handled and their possible results. The results of the practical part are presented in the attachment of the thesis.

KEYWORDS

1D Linear Convolution, 2D Convolution, Aliasing, AM and FM Modulation, Filter Bank, DCT, DFT, FFT, FIR and IIR Systems, Fourier Series, Frequency Filters, Short-Term Spectral Analysis, Quantization, Linear Prediction Analysis, Spectral Power Density, Wavelet Transform, Change of Time Signal, Change of Sampling Frequency, Signal Processing

HANZÁLEK, Pavel. *Praktické ukázky zpracování signálů*. Brno, 2019, 128 s. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav telekomunikací. Vedoucí práce: Ing. Jiří Mekyska, Ph.D

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou diplomovou práci na téma „Praktické ukázky zpracování signálů“ jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené diplomové práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této diplomové práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a/nebo majetkových a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

Brno

.....

podpis autora

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych poděkoval vedoucímu diplomové práce panu Ing. Jiřímu Mekyskovi, Ph.D. za odborné vedení, konzultace, trpělivost a podnětné návrhy k práci.

Brno

.....

podpis autora

PODĚKOVÁNÍ

Výzkum popsáný v této diplomové práci byl realizován v laboratořích podpořených z projektu SIX; registrační číslo CZ.1.05/2.1.00/03.0072, operační program Výzkum a vývoj pro inovace.

Brno

.....
podpis autora

Obsah

Úvod	14
1 Signály	16
1.1 Operace se spojitými a diskrétními signály	16
1.2 Časové posunutí	16
1.2.1 Časové posunutí – praktická ukázka	17
1.3 Změna časového měřítka	19
1.3.1 Změna časového měřítka – praktická ukázka	20
1.4 Lineární konvoluce	21
1.4.1 1D lineární konvoluce – praktická ukázka	22
1.4.2 2D konvoluce – praktická ukázka č.1	23
1.4.3 2D konvoluce – praktická ukázka č.2	24
1.5 Korelace	25
1.5.1 Korelace – praktická ukázka	26
2 Spektrální analýza	28
2.1 Vzorkování signálu	29
2.2 Vzorkovací věta	30
2.3 Podvzorkování signálu	30
2.4 Nadvzorkování signálu	30
2.4.1 Vzorkování – praktická ukázka č.1	32
2.4.2 Vzorkování – praktická ukázka č.2	33
2.5 Kvantování	34
2.5.1 Kvantování – praktická ukázka	35
2.6 Aliasing	35
2.6.1 Aliasing – praktická ukázka	36
2.7 Fourierova transformace diskrétního signálu	38
2.8 Diskrétní Fourierova řada (DFŘ)	38
2.8.1 Diskrétní Fourierova řada – praktická ukázka č.1	39
2.8.2 Diskrétní Fourierova řada – praktická ukázka č.2	39
2.9 Diskrétní Fourierova transformace (DFT)	41
2.9.1 Diskrétní Fourierova transformace – praktická ukázka	42
2.10 Rychlá Fourierova transformace (FFT)	42
2.10.1 Rychlá Fourierova transformace – praktická ukázka č.1	44
2.10.2 Rychlá Fourierova transformace – praktická ukázka č.2	44
2.10.3 Rychlá Fourierova transformace – praktická ukázka č.3	45
2.11 Diskrétní kosinová transformace	46

2.12	Jednorozměrná diskrétní kosinová transformace DCT-II	47
2.12.1	DCT – praktická ukázka	48
3	Modulace	50
3.1	Lineární modulace	50
3.2	Amplitudová modulace – AM	51
3.3	Frekvenční modulace – FM	51
3.3.1	AM a FM – praktická ukázka	52
4	Transformace Z	54
4.1	Definice transformace Z	54
4.2	Transformace Z – praktická ukázka	55
5	Kmitočtové filtry	57
5.1	Základní typy filtrů	57
5.1.1	Kmitočtové filtry – praktická ukázka	58
5.2	Řád přenosové funkce	60
5.3	Číslicové filtry	60
5.4	Číslicové filtry typu IIR	61
5.5	Číslicové filtry typu FIR	62
5.6	Hřebenové filtry	63
5.7	FIR a IIR – praktická ukázka	63
6	Banky číslicových filtrů	65
6.1	Banky číslicových filtrů - praktická ukázka	66
7	Vlnková transformace	68
7.1	Vlnková transformace – praktická ukázka	70
8	Krátkodobá spektrální analýza	71
8.1	Krátkodobá Fourierova transformace	72
8.2	Krátkodobá spektrální analýza – praktická ukázka	73
9	Lineární predikční analýza	75
9.1	Lineární dopředná predikce	75
9.2	Zpětná lineární predikce	77
9.3	Lineární predikční analýza – praktická ukázka	77
9.4	Lineární predikční syntéza – praktická ukázka	78
10	Spektrální výkonová hustota – PSD	80
10.1	Neparametrické metody	84

10.1.1	Bartlettova metoda	84
10.1.2	Welchova metoda	86
10.1.3	Blackmanova a Tukeyova metoda	87
10.2	Parametrické metody	88
10.2.1	ARMA, AR a MA parametrické modely	89
10.2.2	Yuleova–Walkerova metoda	90
10.2.3	Burgova metoda	91
10.3	Výkonová spektrální hustota – praktická ukázka	92
11	Závěr	94
	Literatura	96
	Seznam symbolů, veličin a zkratk	98
	Seznam příloh	100
A	Praktické ukázky – výsledky	101
A.1	Časové posunutí	101
A.2	Změna časového měřítka	102
A.3	1D lineární konvoluce	103
A.4	Konvoluce 2D	104
A.5	2D filtrace	105
A.6	Korelace	106
A.7	Moire efekt	107
A.8	Změna vzorkovacího kmitočtu	108
A.9	Aliasing	109
A.10	Kvantizace	110
A.11	Fourierova řada	111
A.12	Fourierova řada – syntéza signálů	112
A.13	Vztah DFT a DTFT	113
A.14	Vztah DFT a FFT	114
A.15	Rychlá Fourierova transformace	115
A.16	Rychlá Fourierova transformace – konvoluce	116
A.17	Diskrétní kosinová transformace	117
A.18	Modulace	118
A.19	Transformace Z	119
A.20	Kmitočtové filtry	120
A.21	Číslicové filtry	121
A.22	Banka číslicových filtrů	122

A.23 Vlnková transformace	123
A.24 Krátkodobá spektrální analýzy	124
A.25 Lineární predikční analýza	125
A.26 Lineární predikční syntéza	126
A.27 Spektrální výkonová hustota	127
B Obsah přiloženého CD	128

Seznam obrázků

1.1	Časové posunutí signálu	17
1.2	Aplikace ECHO	18
1.3	Změna časového měřítka	19
1.4	Aplikace TIMESCALE	20
1.5	Aplikace CONVOLUTION 1D	22
1.6	Aplikace CONVOLUTION 2D	23
1.7	Aplikace FILTRATION 2D	24
1.8	Aplikace CORRELATION	26
2.1	Podvzorkování signálu	31
2.2	Nadvzorkování signálu	32
2.3	Aplikace MOIRE	33
2.4	Aplikace DECIMATION AND INTERPOLATION	34
2.5	Aplikace QUANTIZATION	36
2.6	Aplikace ALIASING	37
2.7	Aplikace FOURIER SERIES	40
2.8	Aplikace FOURIER SYNTHESIS	41
2.9	Aplikace DFT AND DTFT	43
2.10	Aplikace DFT AND FFT	45
2.11	Aplikace FFT	46
2.12	Aplikace FFT CONVOLUTION	47
2.13	Aplikace DISCRETE COSINE TRANSFORM	49
3.1	Aplikace AM AND FM	53
4.1	Oblast konvergence obrazu transformace Z pro jednotkový skok a reálnou mocninnou posloupnost	55
4.2	Aplikace Z -TRANSFORMATION	56
5.1	Kmitočtová charakteristika filtrů	58
5.2	Aplikace FREQUENCY FILTERS	59
5.3	Aplikace FIR AND IIR SYSTEMS	64
6.1	Základní blokové schéma banky číslicových filtrů	65
6.2	Aplikace FILTER BANK	67
7.1	Mateřské vlnky dle Daubechiesové	68
7.2	Aplikace WAVELET DECOMPOSITION	70
8.1	Ukázka širokopásmového a úzkopásmového spektrogramu	73
8.2	Aplikace SPECTRAL ANALYSIS	74
9.1	Aplikace LPC	78
9.2	Aplikace LPC SYNTHESIS	79
10.1	Výkonová spektrální hustoty	80

10.2 Aplikace POWER SPECTRAL DENSITY	93
A.1 Zobrazení ECHO	101
A.2 Zobrazení časové komprese	102
A.3 Zobrazení 1D lineární konvoluce	103
A.4 Zobrazení 2D konvoluce	104
A.5 Zobrazení 2D filtrace	105
A.6 Zobrazení Korelace signálů	106
A.7 Zobrazení Moire efektu	107
A.8 Zobrazení změny vzorkovacího kmitočtu	108
A.9 Zobrazení Aliasingu	109
A.10 Zobrazení Aliasingu	109
A.11 Zobrazení kvantování	110
A.12 Zobrazení Fourierovy řady	111
A.13 Zobrazení Fourierovy syntézy	112
A.14 Zobrazení DFT a DTFT	113
A.15 Zobrazení DFT a FFT	114
A.16 Zobrazení FFT	115
A.17 Zobrazení konvoluce signálů	116
A.18 Zobrazení diskrétní kosinové transformace	117
A.19 Zobrazení amplitudové modulace	118
A.20 Zobrazení transformace Z	119
A.21 Zobrazení kmitočtových filtrů	120
A.22 Zobrazení číslicových filtrů	121
A.23 Zobrazení banky číslicových filtrů	122
A.24 Zobrazení vlnkové transformace	123
A.25 Zobrazení krátkodobé spektrální analýzy	124
A.26 Zobrazení LPC	125
A.27 Zobrazení LPC syntézy	126
A.28 Zobrazení PSD	127

Seznam tabulek

2.1	Ukázka výpočtu algoritmu FFT pro $N = 4$	44
2.2	Ukázka výpočtu algoritmu FFT pro $N = 4$ – upravené členy	44

Úvod

Diplomová práce se zabývá praktickými ukázkami zpracování signálů. Za pomoci teoretických poznatků a vytvořených aplikací se snaží demonstrovat užití jednotlivých operací se signály v praxi. Členění práce je takové, že se v každé kapitole nachází teoretická část k dané operaci a následně její praktická ukázka. V příloze práce se pak nachází výsledky těchto praktických ukázek.

Cílem diplomové práce je vytvořit 20 praktických ukázek pro zpracování signálů včetně grafických rozhraní v prostředí MATLAB. Mezi tyto ukázky patří:

- časové posunutí signálu,
- změna časového měřítka signálu,
- 1D lineární konvoluce,
- 2D konvoluce,
- korelace,
- Fourierova řada,
- aliasing,
- vzorkování,
- kvantování,
- diskrétní Fourierova transformace,
- rychlá Fourierova transformace,
- diskrétní kosinová transformace,
- modulace,
- transformace Z ,
- kmitočtové filtry,
- FIR a IIR systémy,
- 2D filtrace,
- změna vzorkovacího kmitočtu,
- banka filtrů,
- vlnková transformace,
- krátkodobá spektrální analýza
- lineární predikční analýza
- spektrální výkonová hustota.

Kapitola první se obecně zabývá signály se spojitým a diskrétním časem a některými základními operacemi s nimi. Mezi takové operace patří – časové posunutí, změna časového měřítka, konvoluce a korelace. Pro všechny tyto operace se zde nachází jejich praktické ukázky. Kapitola druhá je věnována spektrální analýze, vzorkování signálu, kvantování signálu, aliasingu, Fourierově transformaci diskrétního signálu, diskrétní Fourierově řadě, diskrétní Fourierově transformaci, rychlé Fou-

rierově transformaci a diskrétní kosinové transformaci. Pro všechny tyto operace se zde nacházejí jejich praktické ukázky. Třetí kapitola se snaží přiblížit operaci modulace signálů. Nachází se zde základní rozdělení modulací a blíže jsou popsány modulace amplitudová a frekvenční. Pro obě tyto modulace je vytvořena praktická ukázka. Další kapitola se zabývá teoretickými poznatky Z transformace. Nachází se zde základní informace o základních modifikacích této transformace a také je součástí její praktická ukázka. Pátá kapitola je věnována kmitočtovým filtrům, jejich rozdělením do tří základních skupin a následným návrhem kmitočtových filtrů. Také se zde nachází teoretická část k číslicovým filtrům, která se zabývá obecnými informacemi o filtrech typu FIR a IIR a také hřebenovými filtry. Pro obě zmíněné oblasti se zde nachází jejich praktické ukázky. Šestá kapitola se zabývá vlnkovou transformací, jsou zde popsány základní vlastnosti mateřské vlnky, a také se zde nachází základní rozdělení této transformace. V závěru kapitoly se nachází praktická ukázka. Osmá kapitola je věnována krátkodobé spektrální analýze. Součástí této kapitoly je i krátkodobá Fourierova transformace a její využití pro výpočet spektrogramu. Následující kapitola se zabývá lineární predikční analýzou. Je zde vysvětlena lineární dopředná predikce, zpětná lineární predikce a nachází se zde praktické ukázky k LPC analýze a LPC syntéze. Závěrečná kapitola je věnována spektrální výkonové hustotě. Nachází se zde základní rozdělení metod výpočtu spektrální výkonové hustoty, které jsou blíže popsány. V závěru kapitoly se nachází praktická ukázka.

1 Signály

Teorie signálů zaujímá důležitou roli v mnoha oborech, např. v telekomunikacích, radiotechnice, akustice, seismologii, digitálním zpracováním řeči, hudby a obrazu.[15]

První zlom ve využití diskrétního a číslicového zpracování signálu nastal v roce 1965, kdy J. W. Cooley a J. W. Tukey představili první z množiny algoritmů pro efektivnější výpočet obrazu diskrétní Fourierovy transformace. Mezi další zlomové roky patří rok 1979, kdy byl vyroben první signálový procesor i2920 a následně rok 1990, kdy byla spuštěna první mobilní síť GSM. [10]

Signál se považuje za fyzikální vyjádření zprávy, může jej představovat vše, co je schopné nést určitou informaci. Tato informace je dána časovými změnami okamžité hodnoty fyzikální veličiny, kterou signál představuje. Jedná se buď o sdělení, nebo údaj, který nás zajímá. Informace je nehmotná, ale samotný signál je považován za hmotného nositele informace. Platí tzv. míra neurčitosti – čím méně příjemce ví, co mu zpráva přinese, tím více informací pro něj má. Přenos informace je zprostředkováván pomocí elektrických a optických signálů a mohou být ukládány na CD nebo DVD disku, flash disku, paměti RAM apod.[15, 10, 12]

Reálné signály jsou vždy náhodné. Pro jejich popis je nutné vytvořit matematické modely, které z obecného hlediska přináší popis reality zjednodušenými prostředky. Mezi signálové modely např. patří: časové průběhy, posloupnosti vzorků nebo matematické modely (rovnice, aj.). [10]

1.1 Operace se spojitými a diskrétními signály

Základní operace se spojitými i diskrétními signály můžeme rozdělit na dvě kategorie. První kategorie představuje operace s jedním signálem. Zde patří:[10]

- časové posunutí,
- změna časového měřítka,
- obrácení časové osy,
- zesílení a zeslabení signálu.

Druhá kategorie zahrnuje operace se dvěma signály. Zde patří:[10]

- součet a rozdíl,
- podíl a součin,
- konvoluce a korelace.

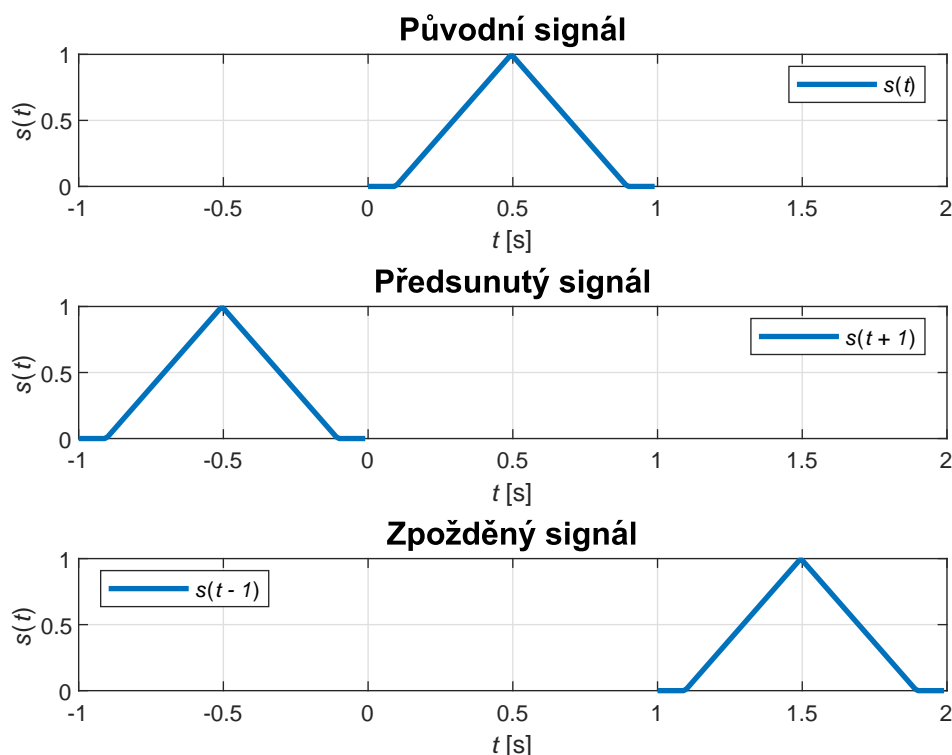
1.2 Časové posunutí

Jak bylo zmíněno v podkapitole 1.1, časové posunutí představuje operaci pouze s jedním signálem. Tato operace signálu $s(t)$ přiřazuje signál $s(t - \tau)$, nebo $s(t + \tau)$,

kde $\tau \in \mathbb{R}$. [10]

Při přičtení hodnoty τ k původnímu signálu dochází k předcházení signálu. V opačném případě při odečtení hodnoty τ od původního signálu dochází k časovému zpoždění signálu – obr.1.1.[10]

Časového posunutí si v praxi lze všimnout ve sdělovací technice – přenos signálu od televizní kamery ze studia do obrazovky diváka. Dalším příkladem může být např. magnetofonový zápis signálu a jeho následné čtení.[10]



Obr. 1.1: Ukázka časového posunutí spojitého signálu

1.2.1 Časové posunutí – praktická ukázka

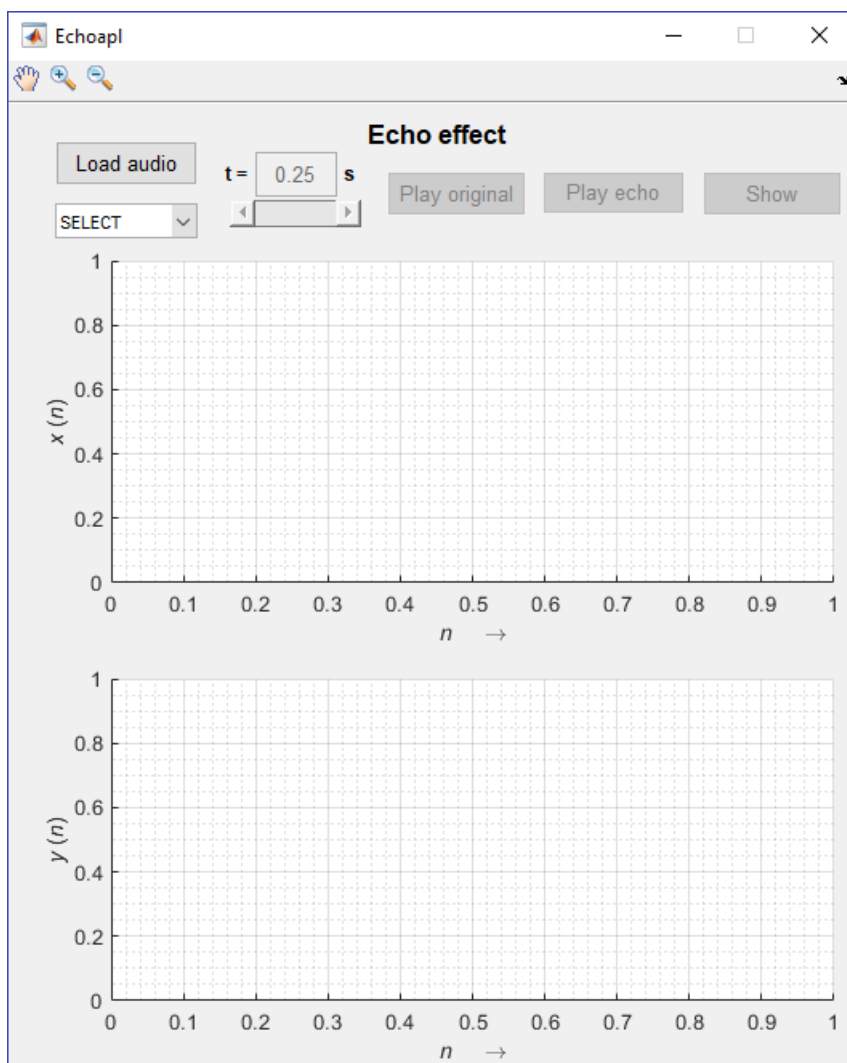
V praxi se lze s časovým zpožděním setkat u některých akustických efektů. Mezi takové patří např. efekt echo, který byl zvolen jako praktická ukázka pro tuto operaci.

Spuštění aplikace probíhá zadáním příkazu přes Command Window, který představuje název aplikace. V tomto případě se jedná o příkaz – *Echoapl*. Po jeho zadání dochází k načtení aplikace, viz obr. 1.2.

Pomocí tlačítka *Load audio* musí uživatel nahrát zvukový soubor, se kterým chce dále pracovat. V následujícím kroku musí v menu zvolit jednu z nabízených možností. Buď dvojité echo (*Twice Echo*), nebo trojitě echo (*Triple Echo*). Dále může změnit

nastavení hodnoty zpoždění, buď pomocí posuvníku, nebo přepisem časové hodnoty v textovém poli. V aplikaci je přednastavená hodnota zpoždění na 0,25 sekund. Taktéž je zde nastaven rozsah hodnoty zpoždění od 0 do 0,5 sekund a ošetření aplikace proti zadání záporné hodnoty či zadání vyšší hodnoty, než je povolené maximum.

Pomocí tlačítka *Play original* si může uživatel přehrát originální zvukový soubor, stiskem tlačítka *Play echo* se přehraje zvuková nahrávka, na kterou je aplikován daný efekt a stiskem tlačítka *Show* dochází k zobrazení spektra originálního signálu a signálu, na který je aplikován efekt echo.



Obr. 1.2: Aplikace ECHO

1.3 Změna časového měřítka

Při změně časového měřítka (time scaling) je původní signál $s(t)$ nahrazen signálem:[14]

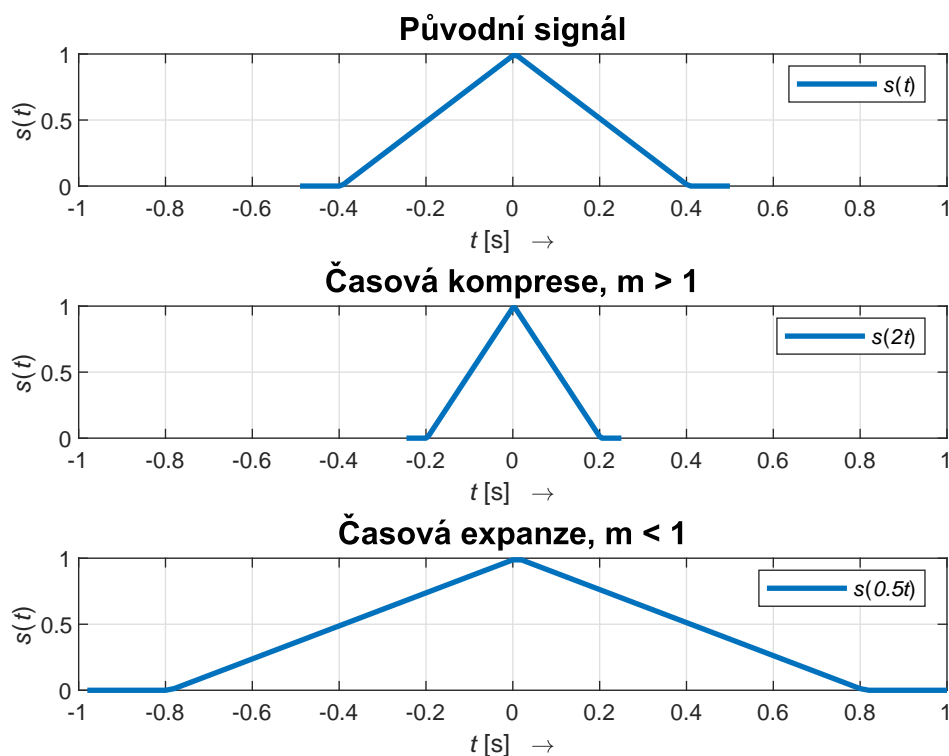
$$s = (m \cdot t), \quad (1.1)$$

kde $m \in \mathbb{R}$ a $m \neq 1$.

Podle toho, jakých hodnot m nabývá, rozlišujeme:[10]

- časovou kompresi, kdy $m > 1$,
- časovou expanzi, kdy $m < 1$.

V praxi se změna časového měřítka objevuje např. opět u magnetofonů. Během přehrávání lze měnit rychlost otáček přehrávané desky, což se projevuje ve změně časového měřítka. Dochází k ovlivnění výšek reprodukováných tónů a tím dochází ke změně kmitočtových vlastností signálu.[10, 14]



Obr. 1.3: Ukázka změny časového měřítka signálu

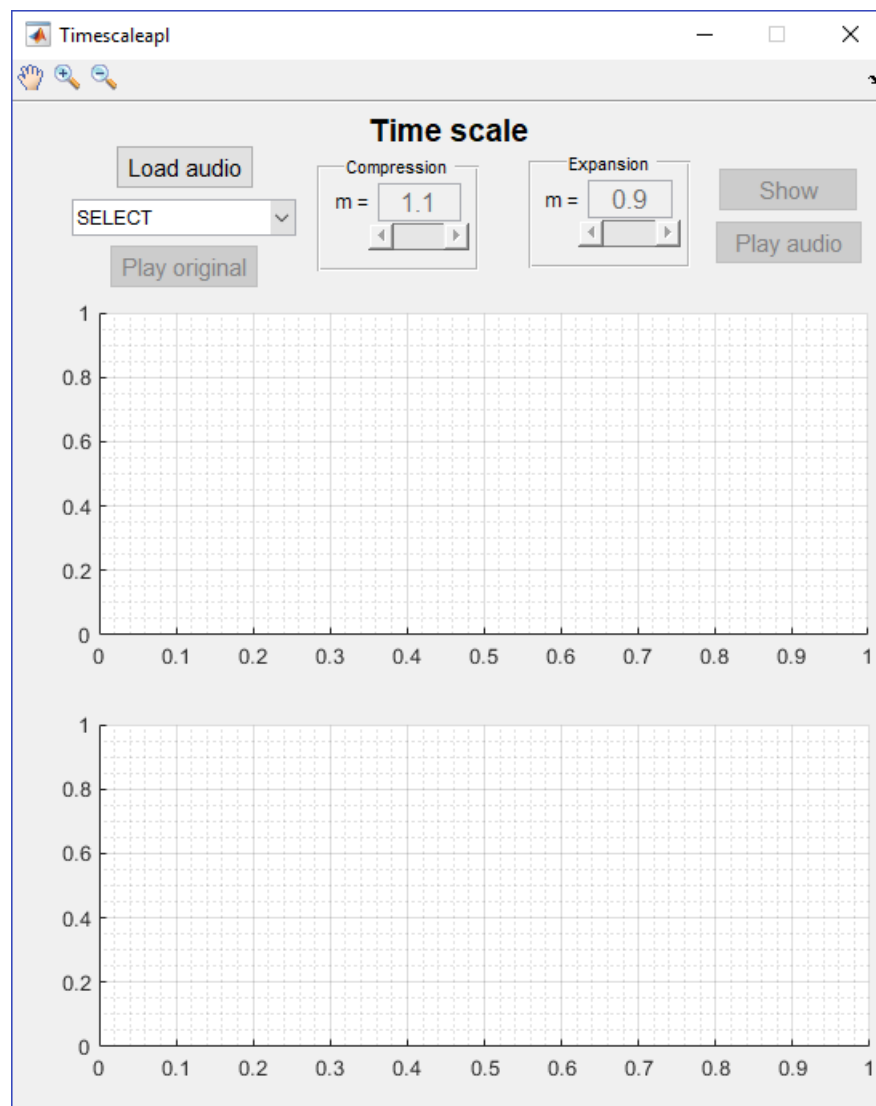
1.3.1 Změna časového měřítka – praktická ukázka

Jak již bylo zmíněno v části 1.3, změna časového měřítka se vyskytuje u magnetofonů. Na podobném principu funguje i následující praktická ukázka.

Aplikace, viz obr. 1.4, se vyvolá zadáním příkazu přes Command Window, který představuje název aplikace – *Timescaleapl*.

Pomocí tlačítka *Load audio* musí uživatel nahrát testovaný hudební soubor. V dalším kroku musí v menu vybrat požadovanou operaci:

- *Compression* (komprese), nebo
- *Expansion* (expanze).



Obr. 1.4: Aplikace TIMESCALE

Dále je možné upravit parametry komprese nebo expanze, buď posuvníky, nebo změnou číselné hodnoty v textovém poli u příslušné operace. Pro časovou kompresi

je nastaven rozsah hodnoty m od 1,1 po 2. Pro časovou expanzi je hodnota m v rozmezí od 0,1 po 0,9. Aplikace je ošetřena tak, aby nedošlo k zadání menší či větší hodnoty, než je povolené minimum či maximum.

Pomocí tlačítka *Play original* lze přehrát nahraný zvukový soubor. Stiskem tlačítka *Play audio* se přehraje upravený hudební soubor a následným stiskem tlačítka *Show* dojde k zobrazení časové komprese či expanze.

1.4 Lineární konvoluce

Jedná se o základní operaci se dvěma spojitými signály $x(t)$ a $h(t)$. Pokud je dodržena podmínka, že integrál konverguje, je lineární konvoluce definována vztahem:[10]

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \\ &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.2)$$

V praxi se konvoluce využívá pro filtraci signálů. Pokud $h(t)$ představuje impulzní charakteristiku kmitočtového filtru, dochází ke kmitočtové filtraci na vstupu pomocí tohoto kmitočtového filtru $h(t)$. [10]

Lineární konvoluce pro diskrétní signály x_1 a x_2 (s délkou N_1 a N_2), je vyjádřena posloupností x_3 , která má délku $L = N_1 + N_2 - 1$. Tato posloupnost je vyjádřena pomocí konvoluční sumy:[6]

$$x_3[n] = \sum_{k=0}^{L-1} x_1[k] x_2[(n - k)], \quad (1.3)$$

kde $n = 0, 1, \dots, L - 1$. $n, k \in \mathbb{N}$.

Pro signály nekonečných délek platí:[6]

$$x_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] x_2[(n - k)], \quad (1.4)$$

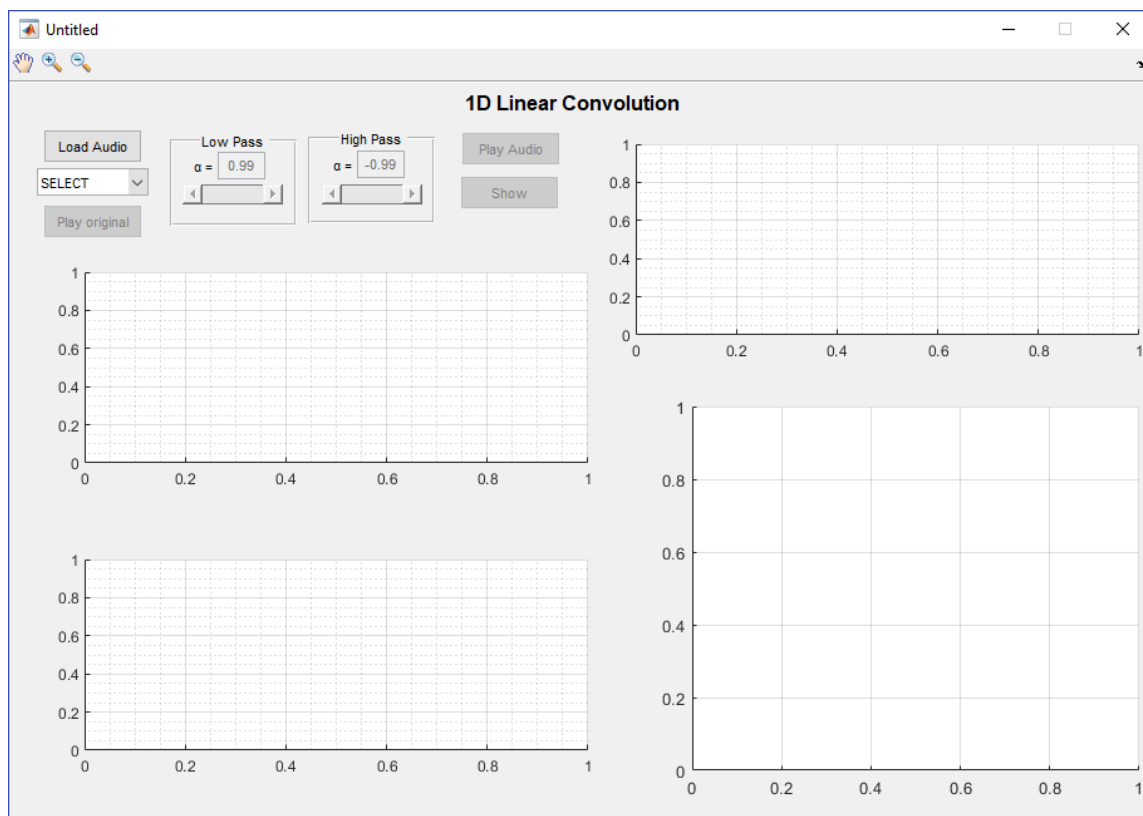
kde $n, k \in \mathbb{N}$.

1.4.1 1D lineární konvoluce – praktická ukázka

Jako praktická ukázka 1D lineární konvoluce byla zvolena filtrace zvukového signálu. Aplikace, viz obr. 1.5, se spouští zadáním příkazu *Untitled* přes Command Window.

V prvním kroku musí uživatel nahrát zvukový soubor, který chce filtrovat. Následně musí z menu vybrat, jaký typ filtru chce na nahrávku použít. Na výběr je mezi horní, nebo dolní propustí. Dále lze nastavit parametr α , který nastavuje pozici nulového bodu. Pro dolní propust jej lze nastavit v rozmezí od 0 po 0,99. Pro horní propust je v rozmezí hodnot od -0,99 po 0. Diferenční rovnice:

$$y[n] = b_0 x[n] + \alpha y[n-1]. \quad (1.5)$$



Obr. 1.5: Aplikace CONVOLUTION 1D

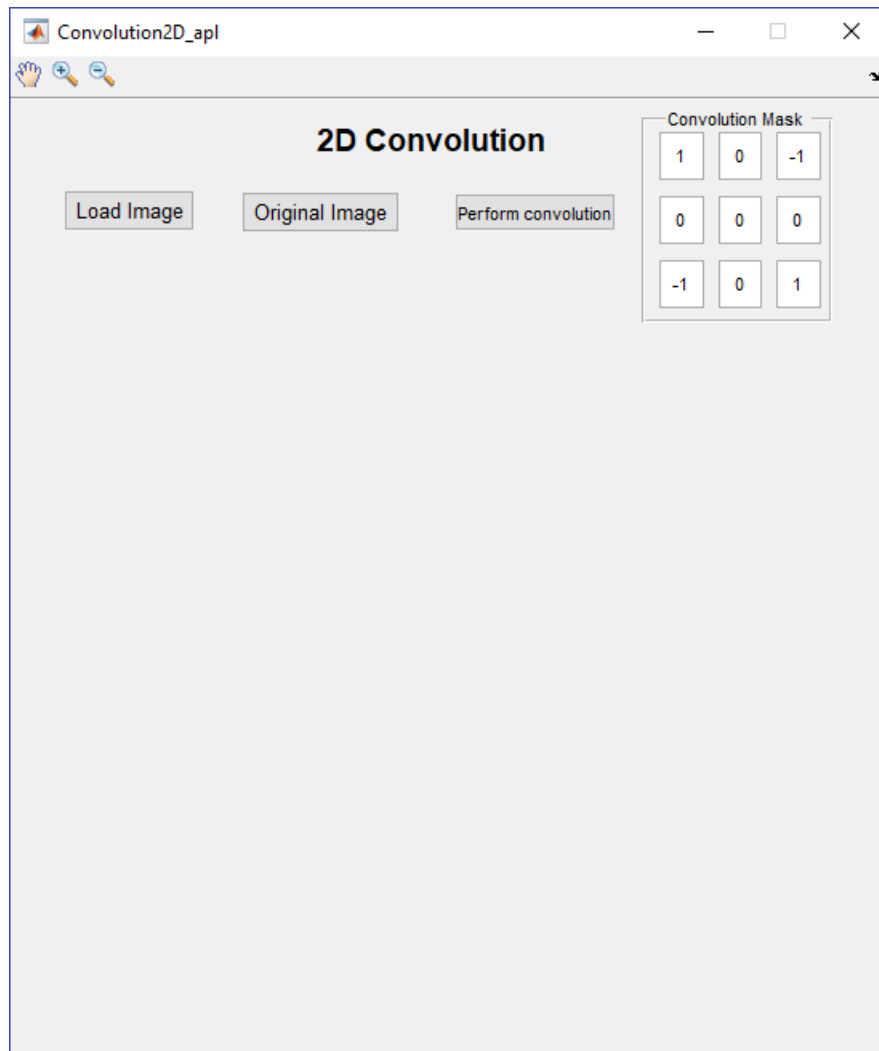
Při stisku tlačítka *Play original* si uživatel může přehrát nefiltrovaný hudební signál. Stiskem tlačítka *Play Audio* si lze přehrát filtrovaný zvukový soubor. Následným stiskem tlačítka *Show* dojde k zobrazení impulsní charakteristiky zvoleného filtru, spektra signálu před a po filtraci a rozložení nulových bodů a pólů.

1.4.2 2D konvoluce – praktická ukázka č.1

Jednou z možných operací, kde se 2D konvoluce využívá je např. hranový detektor. Spuštění aplikace 1.6 probíhá zadáním příkazu *Convolution2D_apl* v Command Window.

V prvním kroku musí uživatel nahrát obrazový soubor, který si stiskem tlačítka *Original Image* může prohlédnout. V dalším kroku má možnost změnit konvoluční masku, nebo ponechat masku již přednastavenou. Změna je možná přepsáním původních hodnot do jednotlivých textových polí.

V posledním kroku už jen stiskne tlačítko *Perform convolution*. Dochází k převodu obrazového souboru do stupně šedi a následnému vykreslení hran, pokud je ponechána přednastavená maska. Zobrazí detekované hrany pomocí zvolené konvoluční masky.



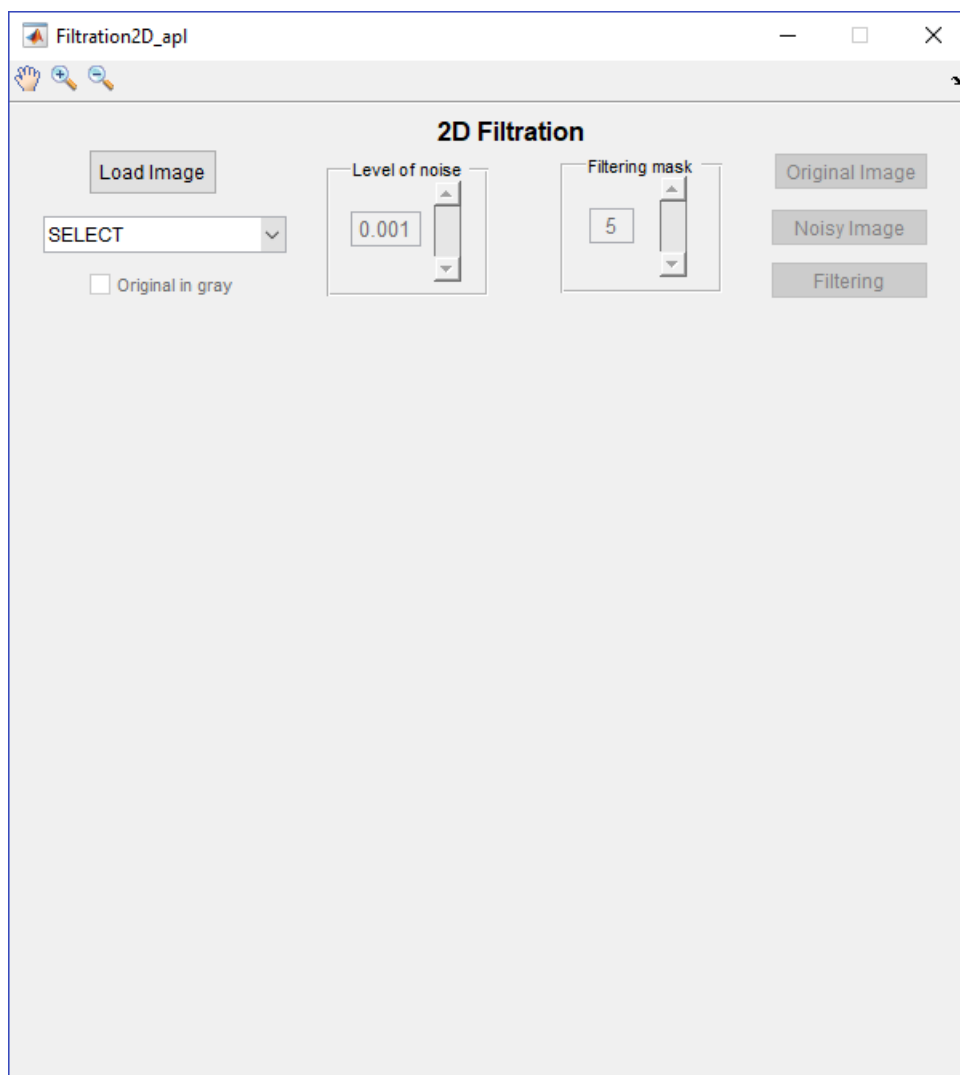
Obr. 1.6: Aplikace CONVOLUTION 2D

1.4.3 2D konvoluce – praktická ukázka č.2

Další možnou operací, kde je možné využít 2D konvoluci, je pro odstranění šumu z obrazu. Aplikace 1.7 se spouští zadáním příkazu *Filtration2D_apl* v Command Window.

V prvním kroku musí uživatel nahrát stiskem tlačítka *Load Image* obrazový soubor. Dále má v menu na výběr ze tří typů šumů, kterými je následně nahraný obrazový soubor zašuměný. Lze vybrat mezi:

- *Gaussian white noise* – Gaussův bílý šum,
- *Speckle noise* – „skvrnitý“ šum,
- *Salt and pepper noise* – šum typu „sůl a pepř“.



Obr. 1.7: Aplikace FILTRATION 2D

Uživatel musí vybrat jeden typ šumu. V dalším kroku má možnost změnit úroveň

zašumění obrazového souboru pomocí posuvníku, nebo vepsáním číselné hodnoty do textové pole *Level of noise*. Následně může ovlivňovat rozměr konvoluční masky, pomocí které je zašuměný obraz filtrován. Současná hodnota vytvoří konvoluční masku o rozměru 5x5. Ovlivňování hodnoty je možné opět buď pomocí posuvníku, nebo úpravou číselné hodnoty v textovém poli *Filtering mask*.

Stiskem tlačítka *Original Image* si může uživatel zobrazit originální obrazový soubor. Při zaškrtnutí tlačítka *Original in gray* a stisknutím tlačítka *Original Image* dojde k zobrazení originálního obrazového souboru ve stupních šedi. Stiskem tlačítka *Noisy Image* se zobrazí zašuměný obrazový soubor zvoleným typem šumu se zadanými parametry a následným stiskem tlačítka *Filtering* dojde k vykreslení filtrovaného obrazového souboru pomocí zvolené filtrační masky.

1.5 Korelace

Tato matematická operace je velmi podobná konvoluci. Opět se jedná o operaci se dvěma signály. Z teoretického hlediska popisuje míru podobnosti průběhu dvou spojitých i diskrétních signálů $x(t)$ a $y(t)$. Pokud je dodržen předpoklad, že integrál konverguje, korelace se rovná: [10, 7]

$$\gamma_{x,y}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t + \tau) dt, \tau \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Pro posloupnost x_1 s délkou N_1 vzorků a posloupnost x_2 s délkou N_2 vzorků lze korelaci vyjádřit pomocí posloupnosti r_{x_1,x_2} , která má délku $L = 2N - 1$ vzorků [6]

$$\begin{aligned} r_{x_1,x_2}[n] &= (x_1[n] * x_2[n]) = \sum_{k=-(N-1)}^{(N-1)} x_1[k] x_2[k - n] \\ &= \sum_{k=-(N-1)}^{(N-1)} x_1[k + n] x_2[k], \end{aligned} \quad (1.7)$$

kde $n \in \{-(N-1), (N-1)\}$, $n \in \mathbb{N}$, $N = \max(N_1, N_2)$.

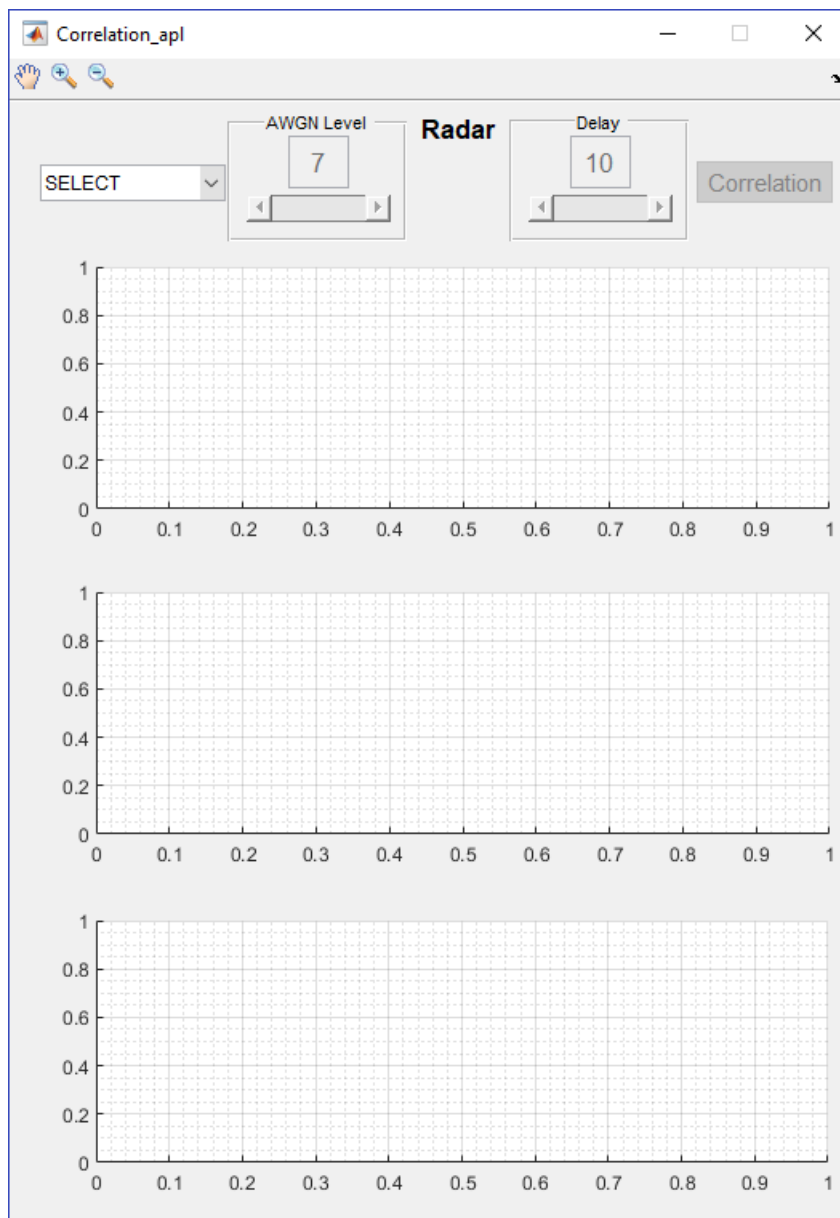
Maximum korelace v bodě n se nachází v místě, kde je největší podobnost signálů. Nejčastější použití korelace je u radarů. [10]

1.5.1 Korelace – praktická ukázka

Jak již bylo zmíněno v podkapitole 1.5, nejčastěji se korelace využívá u radarů. Aplikaci 1.8 lze spustit zadáním příkazu *Correlation_apl* v Command Window.

Uživatel musí v menu vybrat jednu z nabízených možností typů signálů. Na výběr má mezi:

- *Sawtooth signal* – pilovým signálem,
- *Unit Impulse* – jednotkovým impulsem,
- *Triangle signal* – trojúhelníkovým signálem.



Obr. 1.8: Aplikace CORRELATION

Dále může nastavit hodnotu *AWGN level*, představující Gaussův bílý šum, který je přidán do původního generovaného signálu. Nebo může nechat tuto hodnotu již přednastavenou. Tato hodnota se může pohybovat od -15 do 15 dB. Aplikace je ošetřena proti zadání menší, nebo vyšší hodnoty, než je nastavené minimum či maximum. Dále lze měnit zpoždění mezi vysílaným a přijímaným signálem. Tato hodnota se pohybuje v rozmezí hodnot od 1 do 20 vteřin a lze jí měnit buď pomocí posuvníku, nebo přepisem číselné hodnoty v poli *Delay*.

Pomocí tlačítka *Correlation* dochází k zobrazení původního signálu, zašuměného zpožděného signálu a vzájemné korelace obou signálů.

2 Spektrální analýza

V praxi existuje mnoho signálů se spojitým časem, které lze vytvářet pomocí periodických funkcí. Aby byl signál $s(t)$ periodický, musí existovat takové číslo T_1 , kde $T_1 \in \mathbb{R}$ a $T_1 > 0$, že pro všechna $t \in \mathbb{R}$ platí:[10]

$$s(t + T_1) = s(t), \quad (2.1)$$

Základní periodou nazýváme nejmenší hodnotu T_1 . Periodický signál lze dále značit jako $s_p(t)$ a dále jej lze dělit na:[10]

- signál harmonický,
- signál neharmonický.

Příkladem periodického signálu může být např. datový signál, který vyjadřuje periodickou posloupnost 0 a 1.[12]

Operace, při níž dochází k rozkladu periodického signálu na dílčí harmonické složky, se nazývá harmonická analýza (rozklad složek do Fourierovy řady). Harmonická syntéza popisuje operaci skládání signálu z harmonických složek.[12]

- kmitočet harmonických složek je celistvým násobkem kmitočtu základního (tzv. fundamentu) $f_1 = \frac{1}{T_1}$, $\omega_1 = 2\pi f_1$,
- amplituda dílčích harmonických složek je definována modulovým spektrem,
- počáteční fáze je definována spektrem fází.

Existuje mnoho tvarů Fourierovy řady, v praxi se ale nejčastěji používá Fourierova řada v komplexním tvaru:[12]

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_1 t}, \\ c_k &= \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} s(t) e^{-jk\omega_1 t} dt, \end{aligned} \quad (2.2)$$

kde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Pokud jsou splněny Dirichletovy podmínky, budou hodnoty Fourierovy řady konvergovat k hodnotám periodického signálu. Spektrum periodického signálu je čárové a frekvenční vzdálenost mezi dvěma sousedními složkami se rovná:[12]

$$\omega_{k+1} - \omega_k = \omega_1, \quad (2.3)$$

kde $\omega_1 = 2\pi f_1$ představuje úhlový kmitočet první harmonické složky.

V rámci této práce bude více popsána diskretní Fourierova transformace a rychlá Fourierova transformace.

2.1 Vzorkování signálu

Tato podkapitola se zabývá vztahy mezi signály s diskretním a spojitým časem. Tyto vztahy jsou důležité hlavně z praktického hlediska. Mnoho výchozích signálů jsou se spojitým časem (např. signál z mikrofonu), pro efektivnější zpracování je ale výhodnější použití signálů číslicových (s diskretním časem). Je tedy nutné převést signály se spojitým časem na signály číslicové. Takový převod probíhá ve třech krocích:[10, 14]

1. **vzorkování** – zde dochází k převodu signálu se spojitým časem na diskretní signál. Vzorkování se dá dále rozdělit na:
 - ideální vzorkování,
 - vzorkování prvního druhu,
 - vzorkování druhého druhu.
2. **kvantování** – cílem této operace je vyjádřit diskretní vzorky pomocí konečné množiny čísel. Při této operaci vzniká tzv. kvantovací šum.
3. **kódování** – zde dochází k převodu kvantovaných vzorků na čísla binární, která jsou součástí určitých kódů, např. inverzních, doplňkových, apod.

Platí, že:[10]

$$x_d[n] = x(n \cdot T), \quad (2.4)$$

kde T představuje vzorkovací periodu, pomocí které lze vypočítat vzorkovací frekvenci:[10]

$$f_{vz} = \frac{1}{T}. \quad (2.5)$$

Aby signál se spojitým časem mohl být dále zpracován pomocí číslicového nebo diskretního systému, musí být použit analogově – číslicový (A/Č) a číslicově – analogový (Č/A) převodník. [10]

2.2 Vzorkovací věta

Jestliže signál $x(t)$ obsahuje frekvenční složky, jejichž frekvence jsou menší, než je f_{\max} , pak je celá informace signálu součástí hodnot $x(n \cdot T)$, pokud je vzorkovací frekvence $f_{\text{vz}} = \frac{1}{T}$ větší než $2 \cdot f_{\max}$, čili:[3]

$$f_{\text{vz}} > 2 \cdot f_{\max}. \quad (2.6)$$

Vztah 2.6 se nazývá vzorkovací poučka (Nyquistův teorém). Pokud teorém neplatí, dochází k překrývání sousedních spekter, vzniká tzv. aliasing. Pokud tento jev nastane, časový průběh signálu $x(t)$ pak již nelze obnovit.[10]

2.3 Podvzorkování signálu

Podvzorkování (decimace, komprese) je proces, při kterém dochází k záměrnému snižování vzorkovacího kmitočtu signálu – obr. 2.1. Operace je prováděna tak, že jsou rovnoměrně ponechány jen některé vzorky ve spektru a ostatní jsou vypuštěny. Pokud je $x[n]$ vstupní signál a $y_M[n]$ podvzorkovaný signál činitelem M , pak platí:[12]

$$y_M[n] = x[n \cdot M], n \in \mathbb{Z}. \quad (2.7)$$

Dochází-li k podvzorkování činitelem M , výstupní posloupnost $y_M[n]$ je M -krát kratší než $x[n]$. [12]

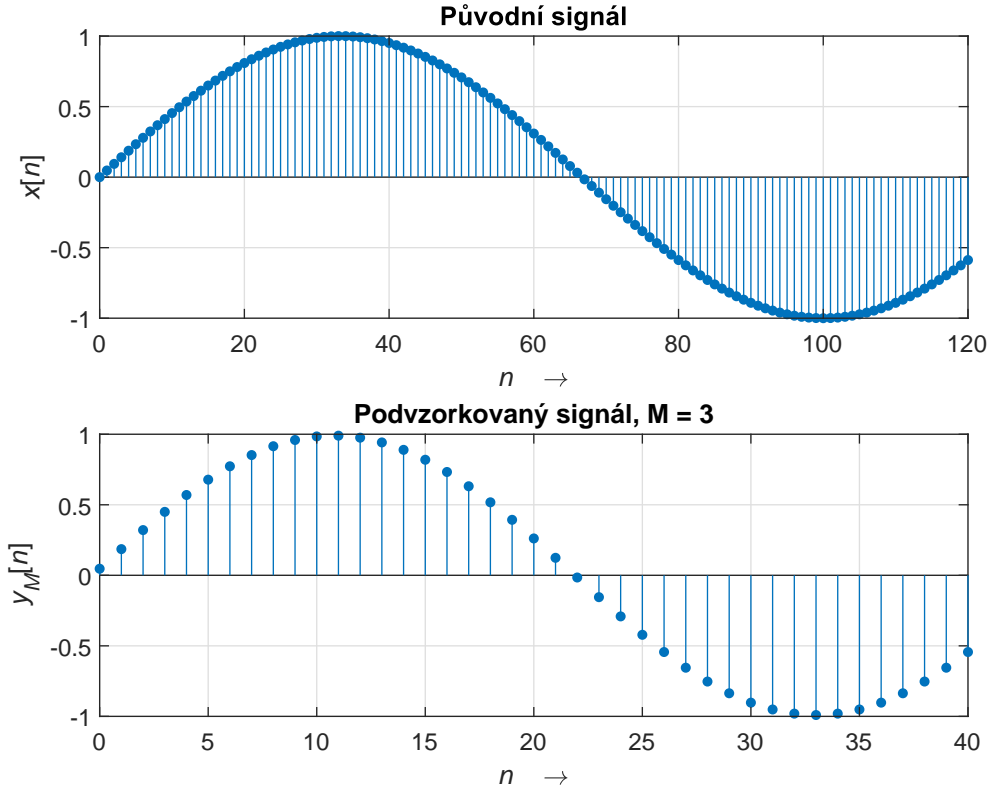
Velmi důležité je, aby nový vzorkovací kmitočet splňoval Nyquistův teorém. Jinak by vznikl aliasing. Aby k tomuto jevu nedošlo, je nutné omezit kmitočtové spektrum signálu pomocí dolní propusti, jejíž mezní kmitočet se rovná:[9]

$$f_m = f_{\text{vz}}/2M, \quad (2.8)$$

kde f_{vz} představuje původní vzorkovací kmitočet.

2.4 Nadvzorkování signálu

Nadvzorkování (interpolace, expanze) je proces, kdy dochází k záměrnému navyšování vzorkovacího kmitočtu – obr. 2.2. U diskrétního signálu $x[n]$ se provádí operace



Obr. 2.1: Podvzorkování signálu s činitelem $M = 3$

nadvzorkování pomocí činitele L tak, že dochází ke vkládání $L - 1$ nových aproximovaných hodnot mezi stávající sousední vzorky. Původní hodnota vzorkovacího kmitočtu se L -krát zvýší a interval vzorkování $T_y = \frac{T_x}{L}$, L -krát klesne. Tato operace probíhá ve dvou krocích:[12]

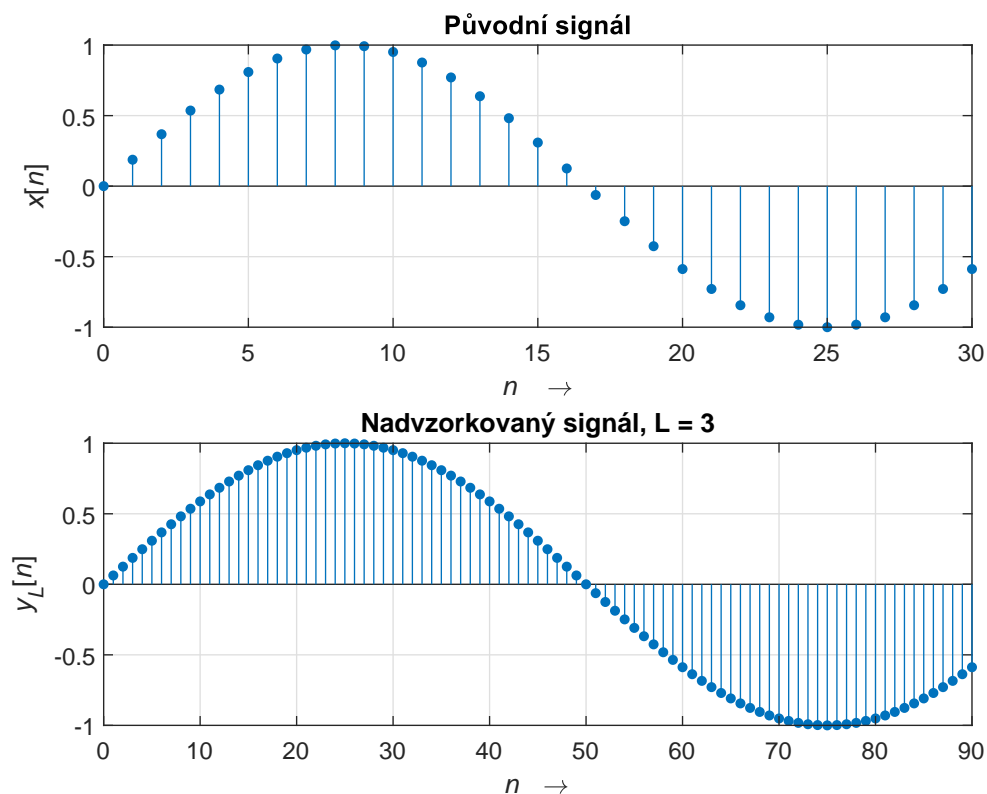
1. vkládání $L - 1$ nulových hodnot. Platí:

$$\begin{aligned} y_L[n] &= x\left[\frac{n}{L}\right], n = i \cdot L, \text{ kde } i \in \mathbb{Z}, \\ y_L[n] &= 0, \text{ pro ostatní } n. \end{aligned} \quad (2.9)$$

2. filtrace signálu pomocí dolní propusti – vkládání aproximovaných hodnot místo hodnot nulových. Nové spektrum obsahuje zperiodizované složky původního signálu, které musí být odstraněny antialiasingovým filtrem. Mezní kmitočet filtru se rovná:[9]

$$f_m = f_{vz}/2L, \quad (2.10)$$

kde f_{vz} představuje nový vzorkovací kmitočet.



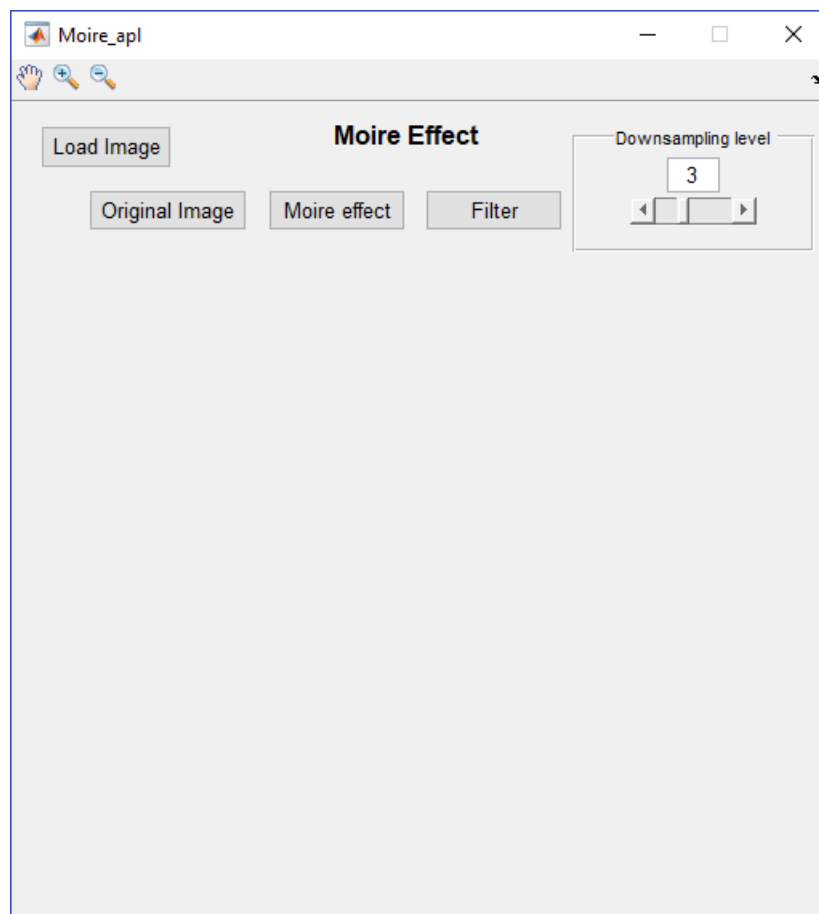
Obr. 2.2: Nadvzorkování signálu s činitelem $L = 3$

2.4.1 Vzorkování – praktická ukázka č.1

Jako praktická ukázka vzorkování byl zvolen tzv. Moire efekt. Z praktického hlediska se jedná o optický efekt, který vzniká při interferenci nebo překryvu dvou hůře odlišených rastrů. Z obecného hlediska se jedná o vzorkovací problém.

Aplikaci 2.3 uživatel spustí zadáním příkazu *Moire_apl* v Command Window. V prvním kroku musí vybrat testovaný obrazový soubor. Dále může nastavit *Downsampling level*, což představuje úroveň podvzorkování. V tomto případě se jedná o zmenšení rozlišení obrazového souboru. Rozsah úrovně je stanoven od 1 do 7. Aplikace je ošetřena proti zadání chybné hodnoty.

Stiskem tlačítka *Original Image* si uživatel může zobrazit originální obrazový soubor. Následně stiskem tlačítka *Moire effect* dojde k vykreslení podvzorkovaného obrazového souboru a stiskem tlačítka *Filter* se zobrazí soubor filtrovaný pomocí dolní propusti.



Obr. 2.3: Aplikace MOIRE

2.4.2 Vzorkování – praktická ukázka č.2

Další praktickou ukázkou pro vzorkování byla zvolena realizace změny vzorkovacího kmitočtu.

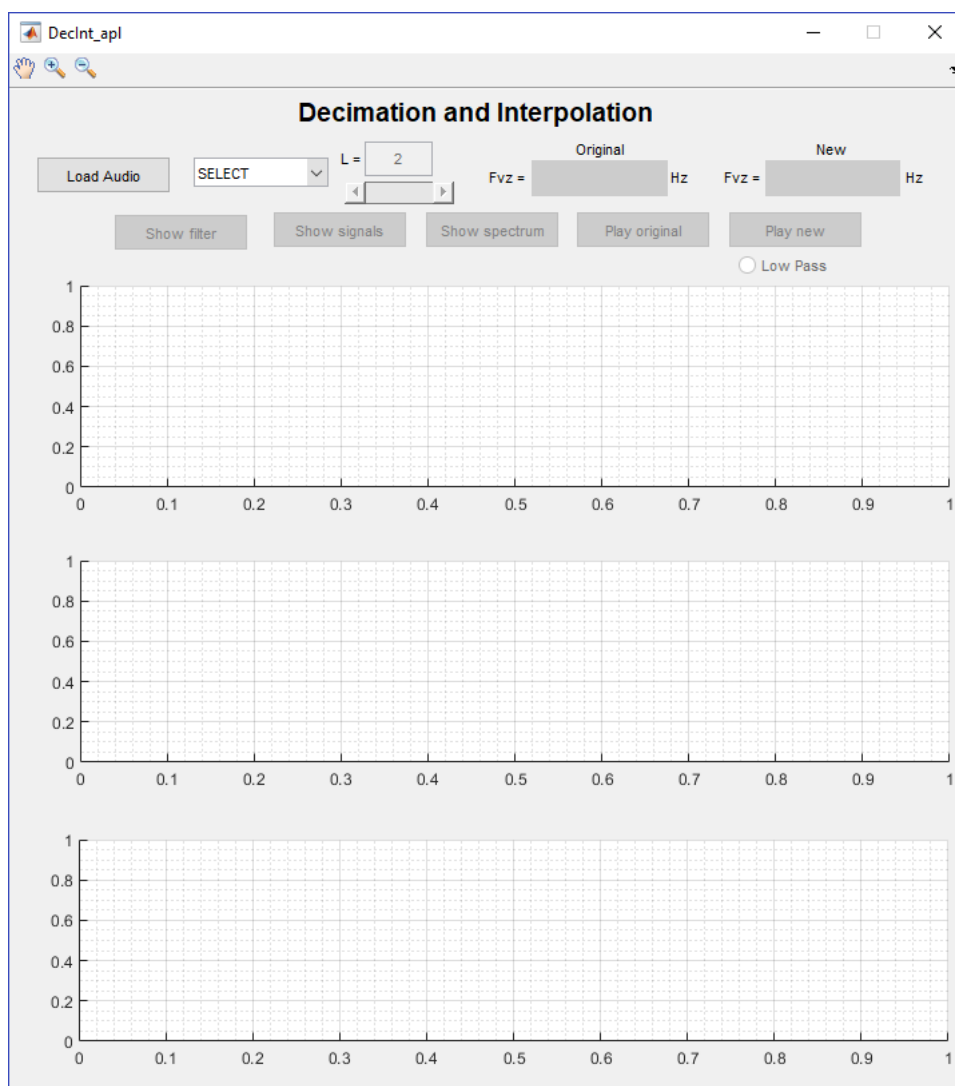
Aplikaci 2.4 může uživatel spustit zadáním příkazu *DecInt_apl* v Command Window. V prvním kroku je uživatel povinen nahrát zvukový soubor. Následně musí z menu zvolit, zda-li chce u vybraného souboru provést decimaci (snížení vzorkovacího kmitočtu), nebo interpolaci (zvýšení vzorkovacího kmitočtu). Po této volbě lze dále měnit úroveň podvzorkování/nadvzorkování. Tuto hodnotu lze měnit pomocí posuvníku nebo přepisem číselné hodnoty v poli *Downsampling level*.

V dalším kroku je možné v aplikaci stiskem tlačítka *Show filter* zobrazit modulovou a fázovou charakteristiku filtru, kterým je zvukový soubor filtrován. Stiskem tlačítka *Show signals* dojde k zobrazení spekter originálního zvukového souboru, dále podvzorkovaného/nadvzorkovaného souboru bez využití dolní propusti a zvukového souboru po podvzorkování/nadvzorkování s dolní propustí.

Stiskem tlačítka *Show spectrum* dojde k zobrazení modulového spektra signálu

originálního, podvzorkovaného/nadvzorkovaného bez dolní propusti a podvzorkovaného/nadvzorkovaného s dolní propustí.

Originální zvukový soubor si lze přehrát pomocí tlačítka *Play original* a stiskem tlačítka *Play new* dojde k přehrání podvzorkovaného/nadvzorkovaného hudebního souboru bez použití dolní propusti. Při zaškrtnutí tlačítka *Low Pass* a následným stiskem *Play new* dojde k přehrání podvzorkovaného/nadvzorkovaného zvukového souboru s dolní propustí.



Obr. 2.4: Aplikace DECIMATION AND INTERPOLATION

2.5 Kvantování

Jak již bylo zmíněno v podkapitole 2.1, cílem této operace je vyjádření diskrétních vzorků pomocí konečné množiny čísel. Při diskrétním zpracování signálů do-

chází v prvním kroku ke kmitočtovému omezení. Hlavním důvodem je, aby šíře pásma nepřekročila polovinu vzorkovacího kmitočtu a byl splněn vzorkovací teorém. Po vzorkování signálu dochází k jeho kvantování pomocí A/D převodníku. Proces diskretizace a kvantování signálu jsou operace lineární, z hlediska analýzy lze jejich pořadí zaměnit.[5]

Při kvantování analogového signálu vzniká tzv. kvantizační chyba $e[x(t)]$, která vytváří rozdíl mezi vstupní úrovní signálu $x(t)$ a kvantovanou úrovní na výstupu A/D převodníku $x_d(t)$. Výstupní signál lze napsat ve tvaru:[5]

$$x_d(t) = Q\{x(t)\} = x(t) + e[x(t)], \quad (2.11)$$

kde $Q\{\cdot\}$ představuje operátor pro vyjádření kvantizačního procesu.

2.5.1 Kvantování – praktická ukázka

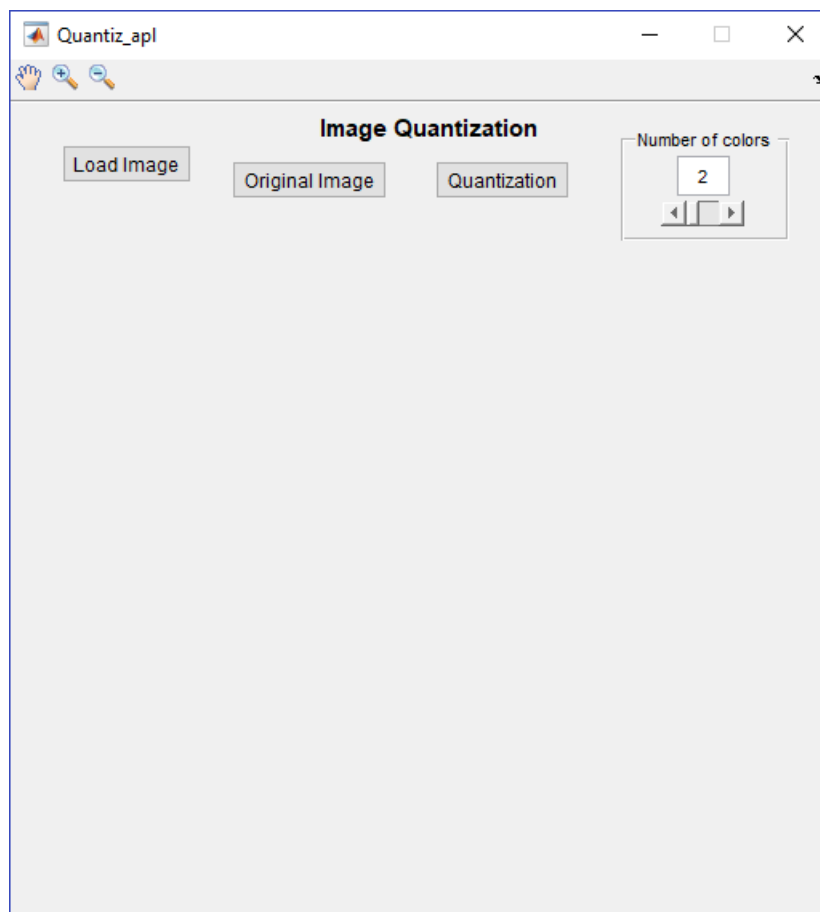
Proces kvantování je v této praktické ukázce demonstrován pomocí snižování barevných úrovní u obrazového souboru.

Aplikaci 2.5 lze spustit pomocí příkazu *Quantiz_apl* v Command Window. V prvním kroku musí uživatel vybrat obrazový soubor, který chce podrobit kvantování. Následně může nastavit hodnotu *Number of colors*, tedy změnit počet vykreslených barev obrázku. Nebo může nechat hodnotu přednastavenou. Její rozsah je stanoven od 1 po 64. Čím více barev uživatel zvolí, tím déle bude probíhat následný výpočet a vykreslení.

Stiskem tlačítka *Original Image* si lze zobrazit originální nahraný obrazový soubor. Stiskem tlačítka *Quantization* uvede uživatel aplikaci do procesu a dojde k zobrazení kvantovaného obrazového souboru.

2.6 Aliasing

Aliasing vzniká v případě, pokud není splněna Nyquistova podmínka. Dochází k superpozici dvou replik periodicky opakujícího se spektra. Tím pádem dochází ke ztrátě informace v okamžiku vzorkování. Pokud k tomuto jevu dojde, nelze již k vzorkům navzorkovaného původního signálu najít správný spojitý časový průběh. Aby nedocházelo k překrývání spekter, musí mít signál $x(t)$ své spektrum $S(\omega)$ omezené antialiasingovým kmitočtovým filtrem typu dolní propusti.[15]



Obr. 2.5: Aplikace QUANTIZATION

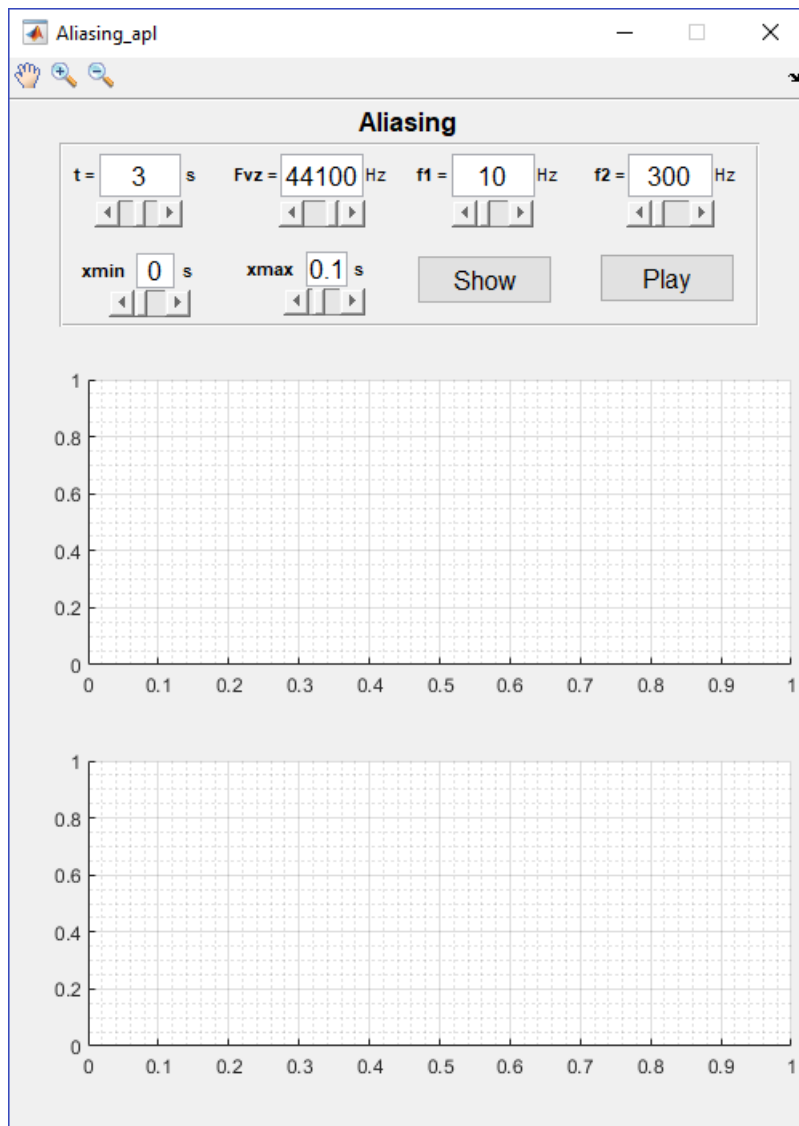
2.6.1 Aliasing – praktická ukázka

Jako praktická ukázka pro aliasing byla vytvořena aplikace 2.6, jejíž spuštění probíhá zadáním příkazu *Aliasing_apl* v Command Window. Pro zobrazení aliasingu jsou zde využity tyto harmonické signály:

$$x = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t).$$

V prvním kroku uživatel může změnit následující parametry:

- t – parametr času, který nastavuje délku přehrávání. Rozsah hodnot času je nastaven od 1 do 5 vteřin.
- F_{vz} – parametr vzorkovací frekvence. Rozsah hodnot je stanoven v rozmezí od 1000 po 48000 Hz.
- f_1 – parametr hodnoty frekvence prvního harmonického signálu. Rozsah hodnot je stanoven v rozmezí od 10 do 20000 Hz.
- f_2 – parametr hodnoty frekvence druhého harmonického signálu. Rozsah hodnot je stanoven v rozmezí od 10 do 20000 Hz.



Obr. 2.6: Aplikace ALIASING

- x_{min} – parametr minimální hodnoty osy x. Rozsah hodnot je stanoven od 0 do 0,1 s.
- x_{max} – parametr maximální hodnoty osy x. Rozsah hodnot je stanoven od 0 do 0,5 s.

Stiskem tlačítka *Play* dojde k přehrání harmonického signálu dle nastavených parametrů a následným stiskem tlačítka *Show* se zobrazí spektrum harmonického signálu a jeho modulové spektrum dle zvolených parametrů.

2.7 Fourierova transformace diskrétního signálu

Po provedení diskretizace (ideálního vzorkování) signálu spojitého v čase vzniká spektrum ideálního vzorkovaného signálu. Jedná se o součin signálu $s(t)$ spojitého v čase a nekonečným sledem Diracových impulzů, jejichž vzdálenost je rovna vzorkovacímu intervalu $T = \frac{1}{f_{vz}}$. [10, 12]

Výsledkem ideálního vzorkování signálu spojitého v čase dostaneme: [10]

$$s_{id}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[nT] \delta(t - nT). \quad (2.12)$$

Tomu odpovídá spektrální funkce: [10]

$$\begin{aligned} S_{id}(\omega) &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(\omega - k\omega_{vz}), \\ \omega_{vz} &= 2\pi f_{vz} = \frac{2\pi}{T}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$s(t) \iff S(\omega), \quad s_{id}(t) \iff S_{id}(\omega).$$

Z těchto základních vlastností ideálně vzorkovaného signálu můžeme odvodit Fourierovu transformaci diskrétního signálu (DTFT – Discrete Time Fourier Transform): [12]

$$S_p(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] e^{-j\omega n}, \quad (2.14)$$

$$s[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_p(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (2.15)$$

Spektrum DTFT $S_p(e^{j\omega})$ je periodickou spojitou funkcí úhlového kmitočtu ω s periodou 2π . [12]

2.8 Diskrétní Fourierova řada (DFŘ)

Diskrétní Fourierova řada přiřazuje časové periodické posloupnosti $s_p[n]$ periodickou posloupnost spektra $S_p[k]$. Obě tyto posloupnosti mají periodu N [12]

$$\begin{aligned}
S_p[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} s_p[n] e^{jk \frac{2\pi}{N} n}, k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\
s_p[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_p[k] e^{jk \frac{2\pi}{N} n}, n = 0, 1, 2, \dots, N-1.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Veličina k nepředstavuje kmitočet, jedná se o pořadové číslo spektrální složky. Normovaný kmitočet ω_k , který připadá k této složce, je dán vztahem:[14]

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N} k. \tag{2.17}$$

Pokud pro rovnici 2.16 platí podmínka $T_1 = N \cdot T$, $N \in \mathbb{N}$, z jádra Fourierovy řady vznikne jádro diskrétní Fourierovy řady [12]

$$e^{jk\omega_1 t} = e^{jk \frac{2\pi}{T_1} t} \Rightarrow t = nT \Rightarrow e^{jk \frac{2\pi}{T_1} nT} = e^{jk \frac{2\pi}{NT} nT} = e^{jk \frac{2\pi}{N} n}. \tag{2.18}$$

2.8.1 Diskrétní Fourierova řada – praktická ukázka č.1

Aplikaci 2.7 je možné spustit zadáním příkazu *Fseries_apl* v Command Window.

Ovládání aplikace je uživatelsky jednoduché. Z praktického hlediska se jedná o skládání harmonických průběhů (zde funkce kosinus). V prvním kroku je nutné zvolit, kolik těchto průběhů chce uživatel skládat. Počet průběhů je omezen od 1 do 3. Aplikace je ošetřena tak, aby zůstaly aktivní jen prvky aplikace, které jsou nutné pro správné zobrazení výsledného průběhu.

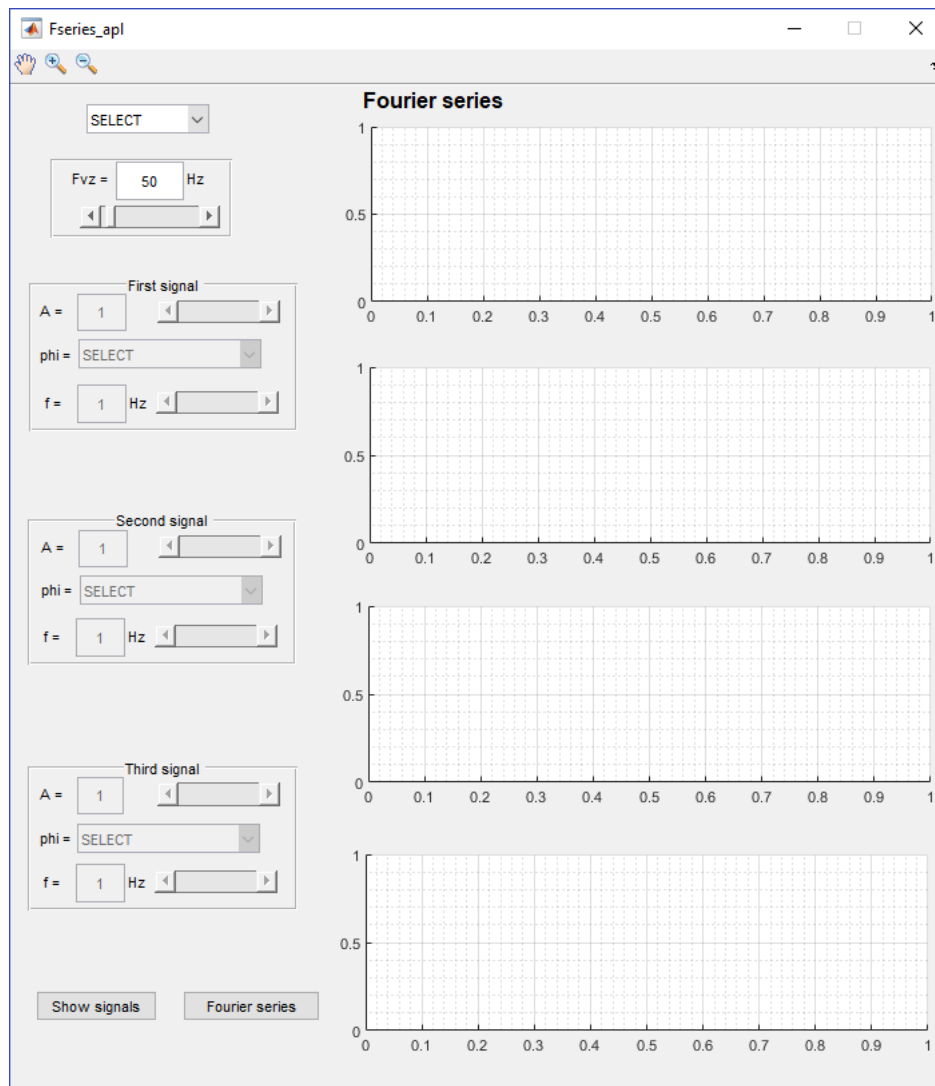
Po volbě počtu harmonických průběhů je důležité zvolit parametry pro jednotlivé signály. Lze měnit tyto parametry:

- A – amplitudu signálu. Rozmezí je stanoveno od 1 po 10,
- ϕ – počáteční fázi signálu,
- f – frekvenci signálu, která je limitována od 1 po 20 Hz,
- f_{vz} – vzorkovací kmitočet, jehož rozmezí je od 1 po 1000 Hz.

Následným stiskem tlačítka *Show signals* dojde k zobrazení jednotlivých spekter signálů a jejich vzájemný součet. Pomocí tlačítka *Fourier series* dojde k zobrazení modulového a fázového spektra těchto signálů.

2.8.2 Diskrétní Fourierova řada – praktická ukázka č.2

Následující aplikace demonstruje syntézu harmonického průběhu v obdélníkový signál.

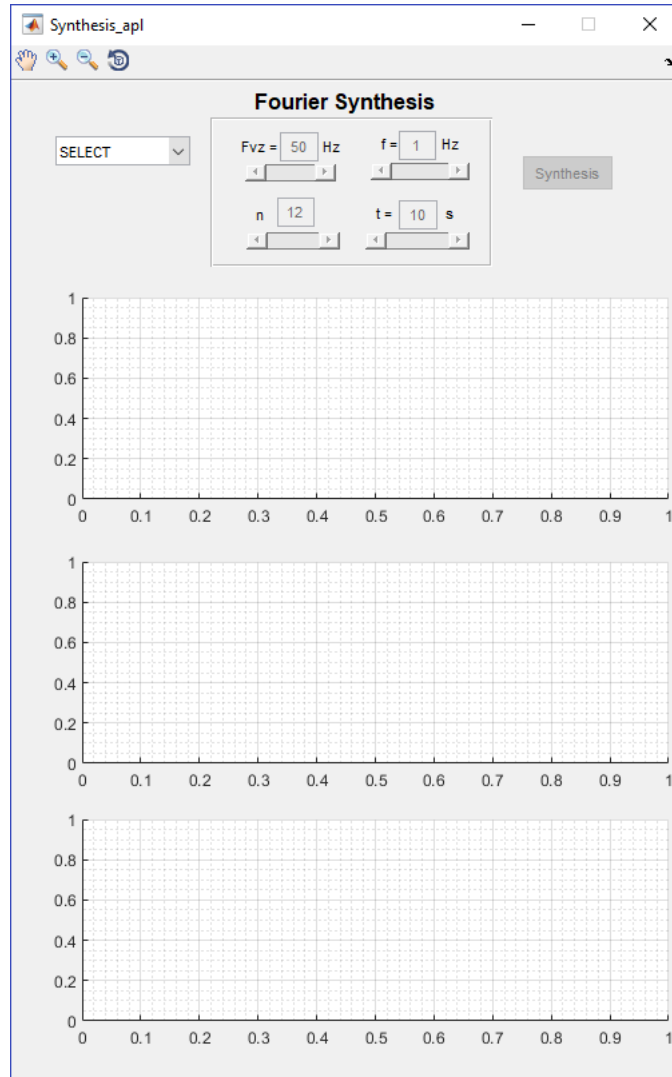


Obr. 2.7: Aplikace FOURIER SERIES

Aplikaci 2.8 je možné spustit pomocí příkazu *Synthesis_apl* v Command Window. V prvním kroku musí uživatel z menu zvolit požadovaný typ zobrazení této syntézy. Na výběr má mezi 2D nebo 3D zobrazením. Aplikace je ošetřena tak, aby zůstaly aktivní jen ty prvky aplikace, které jsou nutné pro správné zobrazení. Mezi tyto prvky patří:

- F_{vz} – vzorkovací kmitočet, který lze nastavit v rozmezí od 50 do 100 Hz,
- f – frekvence signálu. Limitována je od 1 do 2 Hz,
- n – počet skládaných harmonických průběhů, který je v rozmezí od 1 po 12,
- t – nastavení časové osy. Limitace je od 5 do 20 vteřin.

Pomocí tlačítka *Synthesis* lze zobrazit syntézu harmonických průběhů podle zvolených parametrů.



Obr. 2.8: Aplikace FOURIER SYNTHESIS

2.9 Diskrétní Fourierova transformace (DFT)

Diskrétní Fourierova transformace (Discrete Fourier Transform – DFT) slouží k výpočtu spekter neperiodické posloupnosti. Tato transformace přiřazuje posloupnosti délky N druhou posloupnost o stejné délce N . Původní posloupnost je $s[n]$ a její obraz je $S[k]$. Spektrum DFT se získává:[14, 12]

- k posloupnosti $s[n]$, délky N , se přiřadí periodická posloupnost $s_p[n]$, taktéž délky N :

$$S[k] = R_N[k] s_p[\text{mod}_N(n)] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, \quad (2.19)$$

- dochází k výpočtu obrazu diskrétní Fourierovy řady podle vzorce 2.16,

- posloupnost $S[k]$ se násobí pravoúhlým oknem $R[k]$ s délkou N .

Diskrétní Fourierova transformace je vyjádřena vztahem:[12]

$$S[k] = R_N[k] \sum_{n=0}^{N-1} s_p[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}, k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.20)$$

Z matematického hlediska je člen $R_N[k]$ nadbytečný, jeho vynechání však může způsobit chybu, že obraz DFT je periodický, ten ale periodický není.[12]

2.9.1 Diskrétní Fourierova transformace – praktická ukázka

Následující aplikace demonstruje grafické porovnání mezi Fourierovou transformací diskrétního signálu (DTFT) a diskrétní Fourierovou transformací (DFT).

Aplikaci 2.9 je možné spustit pomocí příkazu *DFTandDTFT_apl* zadanou v Command Window. V prvním kroku musí uživatel z menu zvolit, jakou operaci chce zobrazit. Na výběr má mezi:

- *DFT*,
- *DFT + DTFT*.

Aplikace je ošetřena tak, aby zůstaly aktivní pouze ty prvky, kterými se právě zvolená operace ovládá. Dále je tedy možné změnit nastavení počtu vzorků, ze kterých je posléze DFT nebo DTFT vytvořena.

Stiskem tlačítka *Show* si lze zobrazit zvolenou operaci.

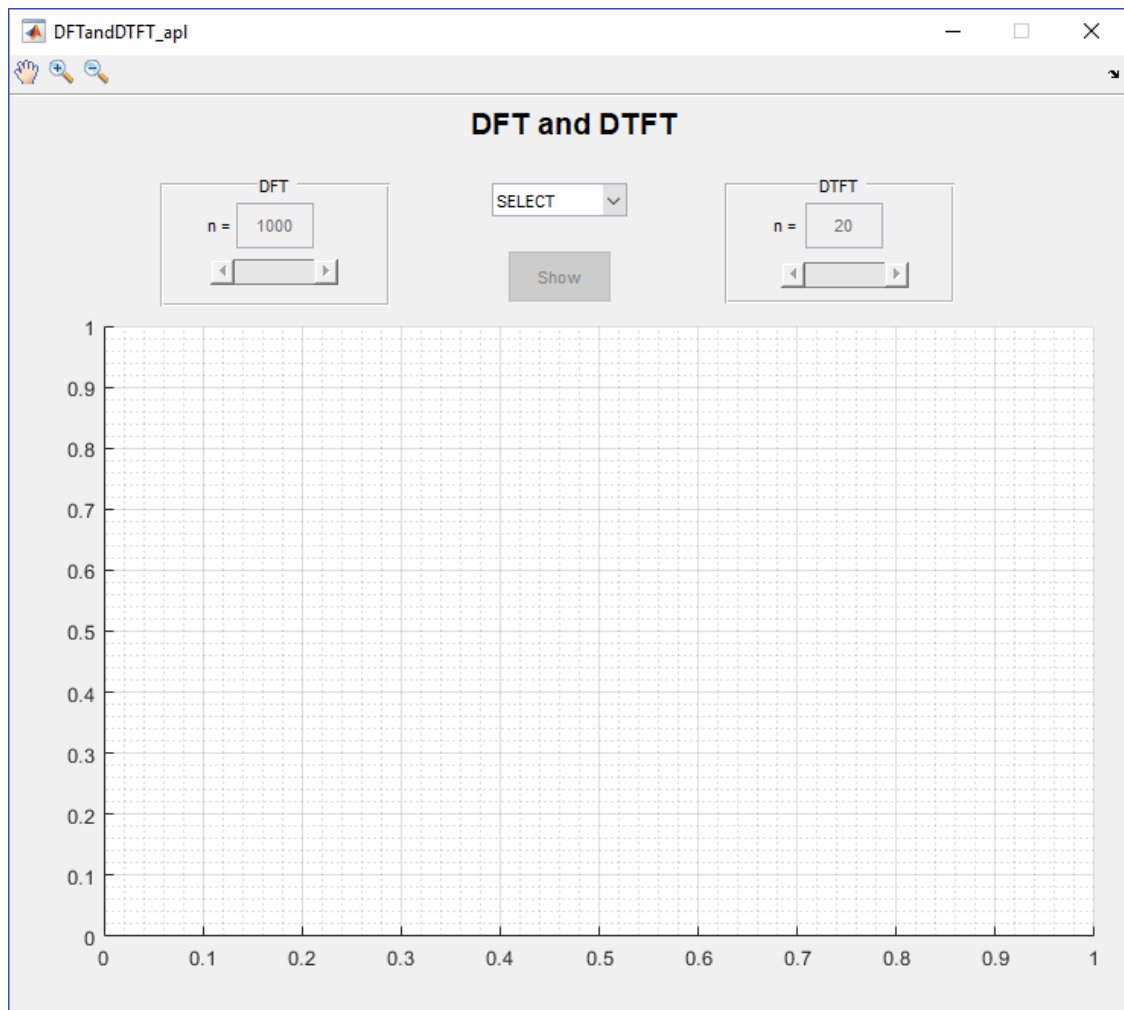
2.10 Rychlá Fourierova transformace (FFT)

Rychlá Fourierova transformace (Fast Fourier Transform) představuje množinu algoritmů, které slouží k efektivnější výpočtu obrazu diskrétní Fourierovy transformace. První algoritmus byl popsán již v roce 1965 J. W. Cooleyem a J. W. Tukeym a zaznamenal revoluci v číslicovém zpracování signálů. Tento algoritmus byl různě modifikován. Z důvodu největší efektivity se nejvíce využívají algoritmy pro posloupnosti délky $N = 2^q$, kde q je celé kladné číslo.[14, 8]

V praxi se FFT využívá např. pro spektrální analýzu stochastických i deterministických signálů, pro výpočet frekvenčních charakteristik, číslicovou filtraci nebo také pro výpočet konvoluce.[2]

V praxi existují dvě rozsáhlejší skupiny algoritmů:[12]

- DIT (Decimation In Time)
- DIF (Decimation In Frequency)



Obr. 2.9: Aplikace DFT AND DTFT

Příklad výpočtu pro $N = 4$, který vychází z literatury [12]

$$S[k] = \sum_{n=0}^3 s[n] e^{-jk\frac{2\pi}{4}n}, k = 0, 1, 2, 3. \quad (2.21)$$

Některé členy lze pomocí Eulerova vztahu $e^{jx} = \cos x + j \cdot \sin x$ upravit:

$$e^{-j\frac{3\pi}{2}} = -e^{-j\frac{\pi}{2}}, e^{\pm j2\pi} = 1, e^{j3\pi} = -1 \text{ a } e^{j\frac{9\pi}{2}} = -e^{j\frac{3\pi}{2}} = e^{-j\frac{\pi}{2}}.$$

Přeřazení některých členů vznikne úspora ve výpočtu. Vznikne tak:

Tab. 2.1: Ukázka výpočtu algoritmu FFT pro $N = 4$

$k = 0$	$S[0] = s[0] + s[1] + s[2] + s[3]$
$k = 1$	$S[1] = s[0] + s[1]e^{-j\frac{\pi}{2}} + s[2]e^{-j\pi} + s[3]e^{-j\frac{3\pi}{2}}$
$k = 2$	$S[2] = s[0] + s[1]e^{-j\pi} + s[2]e^{-j2\pi} + s[3]e^{-j3\pi}$
$k = 3$	$S[3] = s[0] + s[1]e^{-j\frac{3\pi}{2}} + s[2]e^{-j3\pi} + s[3]e^{-j\frac{9\pi}{2}}$

Tab. 2.2: Ukázka výpočtu algoritmu FFT pro $N = 4$ – upravené členy

$S[0] = s[0] + s[2] + s[1] + s[3]$
$S[1] = s[0] + s[2] - (s[1] + s[3])$
$S[2] = s[0] - s[2] + (s[1] - s[3]e^{j\frac{\pi}{2}})$
$S[3] = s[0] - s[2] - (s[1] - s[3]e^{j\frac{\pi}{2}})$

Rovnice v tabulce 2.2 mají jednodušší tvar, než rovnice v tabulce 2.1. Z toho plyne, že je potřeba vypočítat pouze činitel $e^{-j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} - j \cdot \sin\frac{\pi}{2} = -j$.

2.10.1 Rychlá Fourierova transformace – praktická ukázka č.1

První praktická ukázka rychlé Fourierovy transformace má za úkol porovnat délku výpočtu DFT a FFT.

Aplikaci 2.10 lze spustit zadáním příkazu *FFTcomp_apl* v Command Window. V dalším kroku je nutné, aby uživatel z menu vybral jednu z možností. Na výběr má mezi:

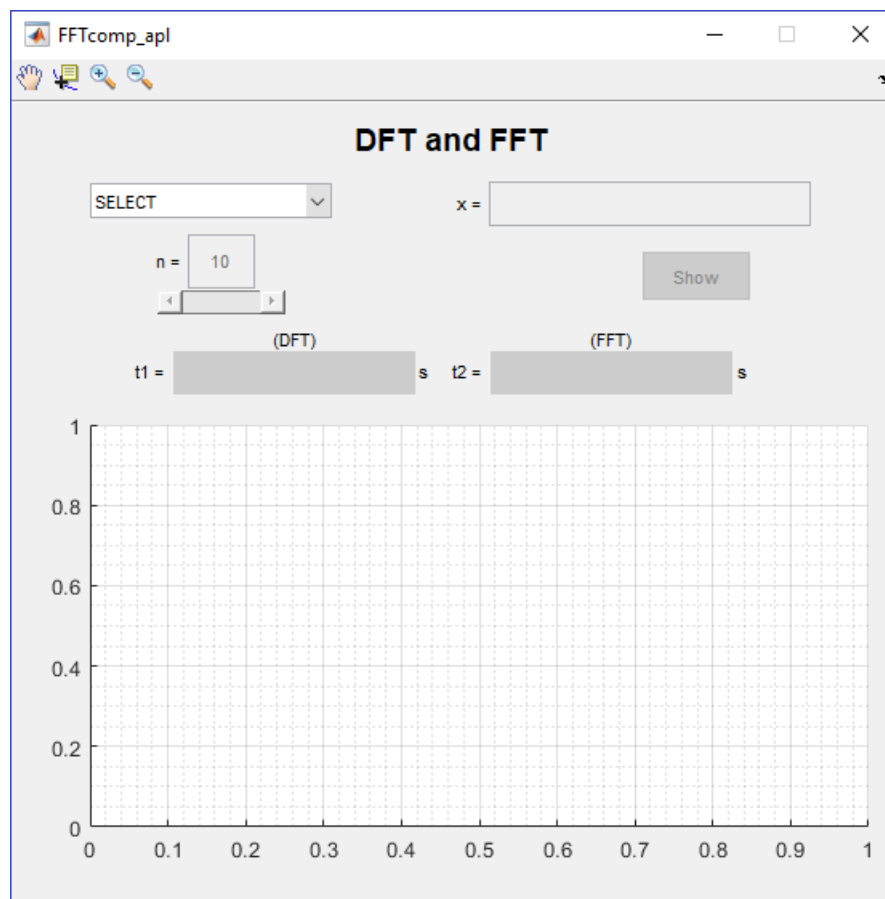
- *Gaussian White noise* – Gaussův bílý šum,
- *User's signal* – uživatelův signál,
- *Random signal* – náhodný signál.

Následně může změnit délky zvoleného signálu, nebo může nechat hodnotu již přednastavenou. Tuto hodnotu lze měnit buď pomocí posuvníku, nebo vepsáním číselné hodnoty do příslušného okna. Aplikace je ošetřena, aby nešla zadat hodnota menší nebo větší, než je povolené minimum či maximum. Rozsah je nastaven od 5 do 1000 vzorků.

Stiskem tlačítka *Show* dojde k zobrazení zvoleného signálu. Taktéž se v aplikaci vypíše délka výpočtu DFT a FFT.

2.10.2 Rychlá Fourierova transformace – praktická ukázka č.2

Druhá aplikace rychlé Fourierovy transformace demonstruje rychlost výpočtu FFT, optimalizovanou pro signály délky N , která je mocninou 2.



Obr. 2.10: Aplikace DFT AND FFT

Aplikace 2.11 se spustí po zadání příkazu *FFTn_apl* v Command Window. Důležité pro správné zobrazení je, aby uživatel z menu zvolil fázi zobrazovaného signálu. Dále může měnit parametry tohoto signálu, buď pomocí posuvného slider, nebo přepisem číselné hodnoty u daného okna. Měnit lze:

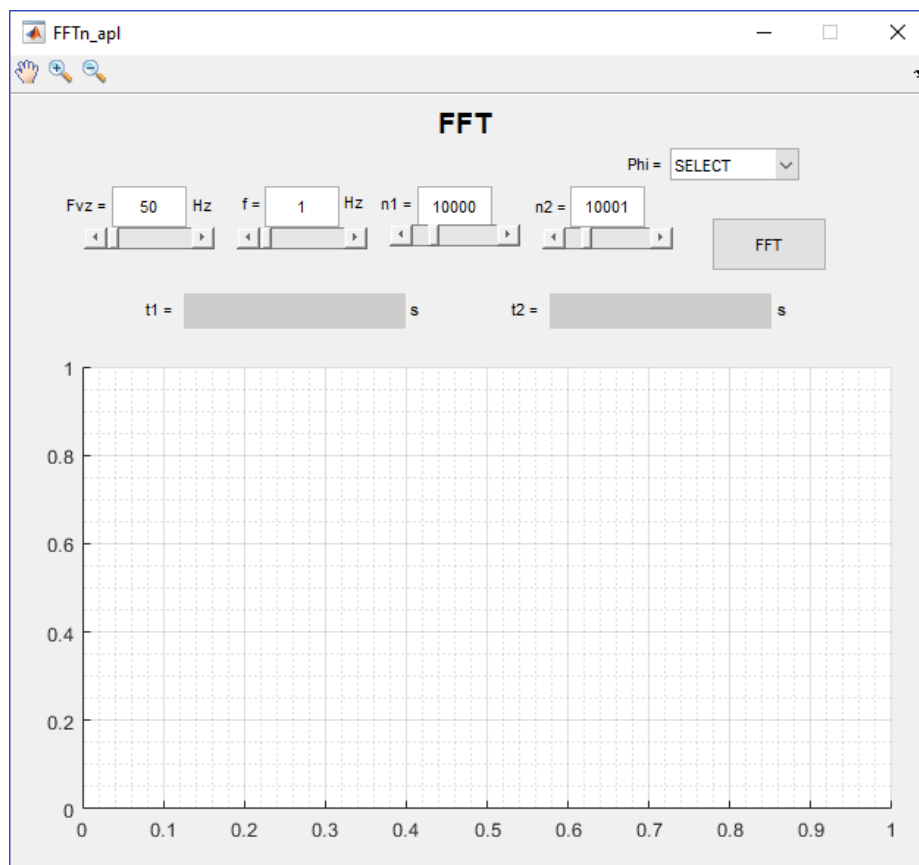
- F_{vz} – vzorkovací kmitočet. Hodnota je v rozsahu od 50 do 500 Hz,
- f – frekvenci signálu, její rozsah je stanoven od 1 do 5 Hz,
- n_1, n_2 – počet prvků prvního a druhého signálu. Rozsah je stanoven od 100 do 50000 vzorků.

Stiskem tlačítka *FFT* se navolený signál zobrazí a následně dochází k vypsání časového výpočtu FFT pro první signál t_1 délky n_1 a pro druhý signál t_2 délky n_2 .

2.10.3 Rychlá Fourierova transformace – praktická ukázka č.3

Následující ukázka rychlé Fourierovy transformace ukazuje rychlost výpočtu lineární konvoluce dvou signálů za využití funkce *Conv* a funkce *FFT*.

Aplikaci 2.12 je možné spustit pomocí příkazu *FFTconv_apl* v Command Window. V prvním kroku musí uživatel vepsat do příslušných oken hodnoty signálů,



Obr. 2.11: Aplikace FFT

u kterých chce provést následnou konvoluci.

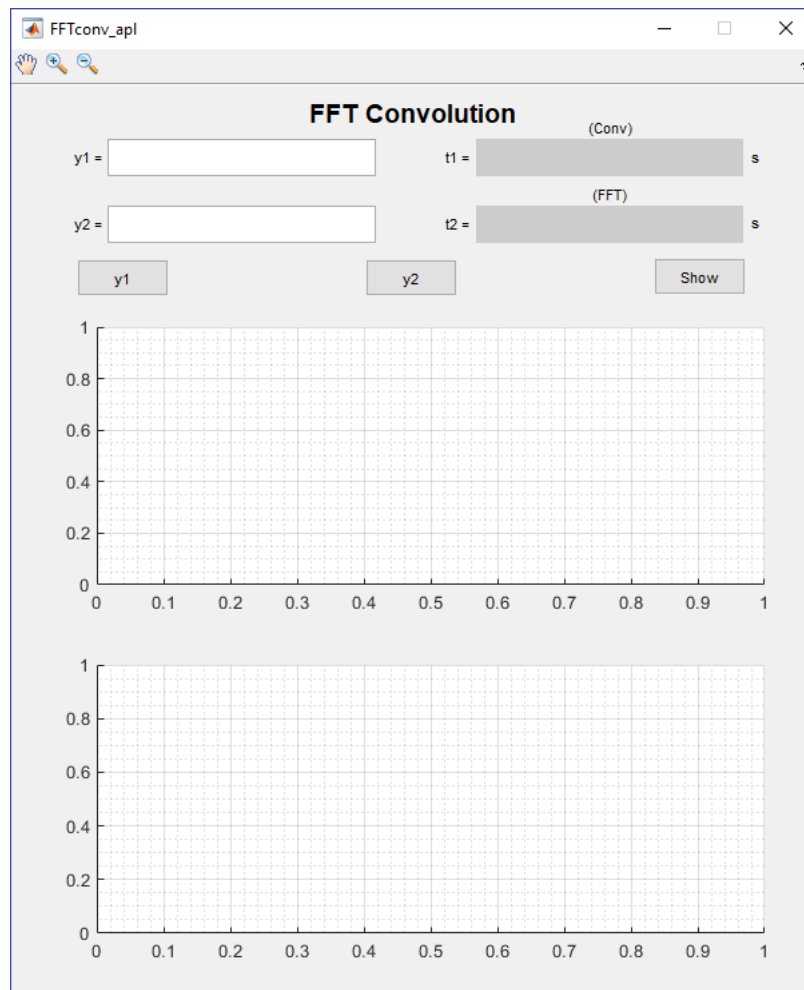
Stiskem tlačítka y_1 si lze zobrazit uživatelův signál y_1 . Stejně tak tlačítkem y_2 je možné zobrazit signál y_2 . Následným stiskem tlačítka *Show* dojde k vykreslení vzájemné konvoluce obou signálů pomocí funkce *Conv* a funkce *FFT*. Taktéž se vypíše doba výpočtu pro obě funkce.

2.11 Diskrétní kosinová transformace

Diskrétní Fourierova transformace se v některých oblastech nepoužívá. Místo ní se využívá diskrétní kosinová transformace (DCT).[12]

Jednorozměrná diskrétní Fourierova transformace je definovaná pomocí vztahu 2.20. Diskrétní kosinová transformace z ní vychází, jelikož také popisuje vzájemný vztah dvou jednorázových posloupností. Spektrum DCT se počítá pomocí periodických posloupností, které vykazují sudou symetrii.[12]

Z praktického hlediska má tato transformace využití při zpracování řeči, nebo také při zpracování obrazu – jeho kompresi (ztrátová komprese JPEG). V praxi existují čtyři nejpoužívanější tvary diskrétní kosinové transformace:[12, 2]



Obr. 2.12: Aplikace FFT CONVOLUTION

- DCT-I,
- DCT-II – v praxi je nejčastěji využívána,
- DCT-III,
- DCT-IV.

2.12 Jednorozměrná diskrétní kosinová transformace DCT-II

Diskrétní kosinová transformace posloupnosti $s[n]$ s délkou N je vyjádřena:[12]

$$S_{\text{DCT-II}}[k] = 2 \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \cos \left[k \frac{\pi (2n+1)}{2N} \right], k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.22)$$

$$s[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \beta[k] S_{\text{DCT-II}}[k] \cos \left[k \frac{\pi (2n+1)}{2N} \right], n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.23)$$

Jedná se o vztah posloupností konečné délky N . Z důvodu odstranění chyby, která by mohla vzniknout ve spektru DCT-II, je zaveden činitel $\beta[k]$ [12]

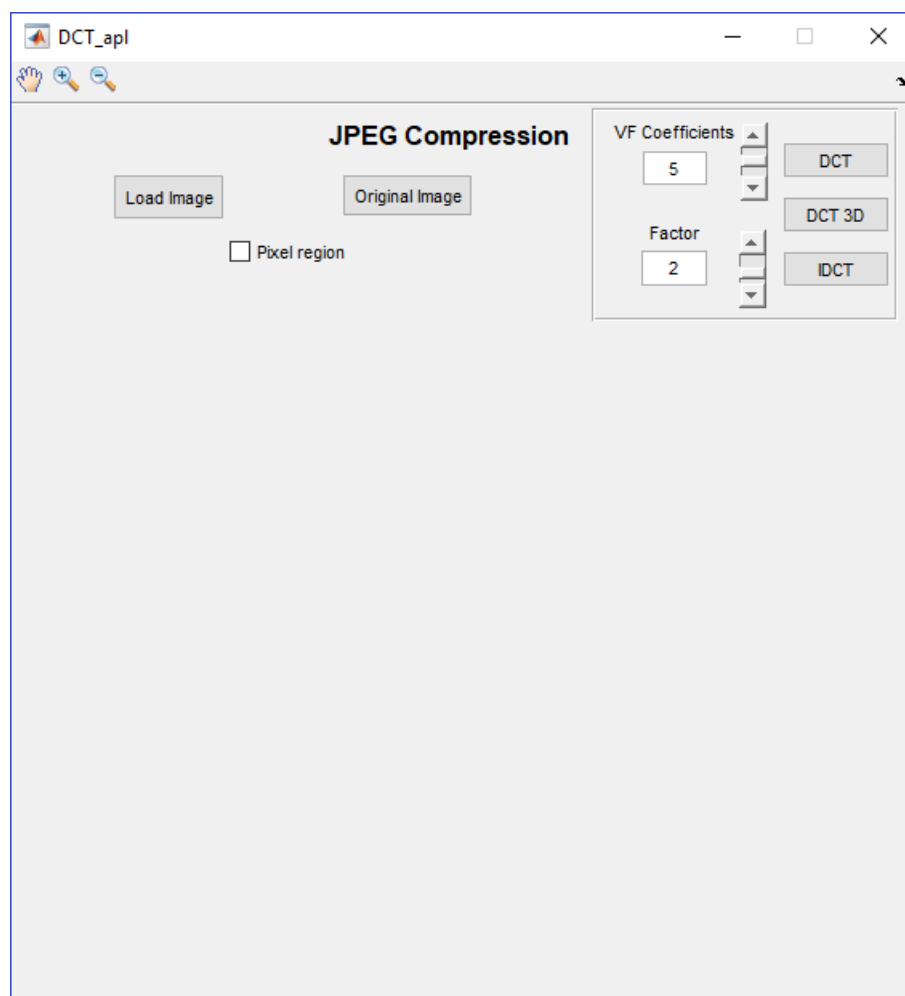
$$\beta[k] = \frac{1}{2} \text{ pro } k = 0, \quad \beta[k] = 1 \text{ pro } k = 1, 2, 3, \dots, N-1. \quad (2.24)$$

2.12.1 DCT – praktická ukázka

Diskrétní kosinová transformace se z praktického hlediska využívá pro kompresi obrazového souboru JPEG. Aplikace 2.13 se spouští zadáním příkazu *DCT_apl* v Command Window.

V prvním kroku musí uživatel vybrat obrazový soubor, který chce analyzovat. To učiní pomocí tlačítka *Load Image*, kdy dojde k otevření nového okna pro výběr obrazového souboru. V dalším kroku lze změnit dělení VF koeficientů pomocí posuvníku, nebo úpravou číselné hodnoty do textového pole *VF Coefficients*. Taktéž lze měnit poměr snížení těchto koeficientů pomocí hodnoty *Factor*. Aplikace je ošetřena proti zadání chybné hodnoty.

V poslední kroku si lze zobrazit stiskem tlačítka *Original Image* originální obrazový soubor. Stiskem tlačítka *DCT* dochází k zobrazení DCT koeficientů. Při současné zatržení tlačítka *Pixel region* se obou zobrazení vykreslí i graf s rozložením jednotlivých pixelů. Po stisknutí tlačítka *DCT 3D* se zobrazí 3D rozložení pixelů a po stisknutí tlačítka *IDCT* dojde k zobrazení obrazového souboru po zpětné DCT.



Obr. 2.13: Aplikace DISCRETE COSINE TRANSFORM

3 Modulace

Modulace signálu je proces, kdy dochází k ovlivňování nosného signálu pomocí signálu modulačního. V praxi se nejčastěji jako nosné signály používají:[14, 3, 10]

- harmonický nosný signál:

$$s_n = S_n \cos(\omega_n t + \varphi_n), \quad (3.1)$$

kde S_n je amplituda, ω_n je úhlový kmitočet a φ_n představuje počáteční fázi.

- periodický sled obdélníkových impulzů.

Pokud přetvářený signál představuje trvalý vysokofrekvenční harmonický signál, jedná se o modulační systém s trvalou nosnou vlnou. V těchto systémech se mění kmitočet, amplituda nebo fáze nosné vlny.[3]

Existuje několik typů modulací. První z nich je lineární modulace – zde je modulační signál přesouván tak, aby zabíral jinou část frekvenčního spektra. Mezi další patří úhlová (exponenciální) modulace – zde se mění kmitočet nebo fáze nosné vlny. Opět dochází ke změně v kmitočtovém spektru signálu.[3]

Zpětná operace, kdy získáváme z modulovaného signálu signál původní, se nazývá demodulace nebo detekce.[3]

3.1 Lineární modulace

Při této modulaci je spektrum modulačního signálu přesouváno po kmitočtové ose, signál podstupuje pouze lineární zpracování – např. filtraci. Obvod, který přetváří signál pro lineární modulaci se nazývá modulátor.

Existuje několik základních typů lineárních modulací. Pokud modulátor přenáší nebo nepřenáší stejnosměrnou složku, nebo zda-li je či není za modulátorem horní, dolní nebo pásmová propust, se rozlišují tyto modulace: [3]

- amplitudová modulace,
- modulace s potlačenou nosnou,
- modulace s potlačenou nosnou a zbytkovým postranním pásmem,
- modulace s potlačenou nosnou a jedním postranním pásmem,
- frekvenční modulace.

V rámci této práce budou více popsány amplitudová a frekvenční modulace.

3.2 Amplitudová modulace – AM

Jedná se o vůbec nejstarší způsob modulace, využívá se prakticky od počátku rozhlasu až dodnes. Modulační signál $s(t)$ má omezené spektrum $S(\omega)$ na pásmo kmitočtů $-\omega_n \leq \omega \leq \omega_n$. Kmitočet nosné musí splňovat podmínku: $\omega_c \gg \omega_n$. [3] Amplitudovou modulaci je možné popsat rovnicí: [10]

$$\begin{aligned} s_{\text{AM}}(t) &= [S_n + \Delta S s(t)] \cos(\omega_n t + \varphi_n) \\ &= S_n (1 + m s(t)) \cos(\omega_n t + \varphi_n), \\ m &= \frac{\Delta S}{S_n}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

kde veličina S_n představuje amplitudu nosného signálu, m je hloubka modulace, jejíž hodnoty se pohybují v rozmezí od 0 do 1, a $f(t)$ je modulační funkce.

Amplitudových modulací existuje několik typů. Podle toho, jaké složky obsahuje frekvenční spektrum amplitudové modulace rozlišujeme: [3, 10]

- **AM DSB (Dual Side Band)** – spektrum obsahuje obě postranní pásma i nosnou. Tento typ modulace se využívá při rozhlasovém vysílání pro dlouhé a střední vlny. AM systémy jsou velmi náchylné na rušení, spektrum AM signálu má dvojnásobnou šířku, než spektrum v základním pásmu,
- **AM DSB SC (Dual Side Band Supressed Carrier)** – spektrum opět obsahuje obě postranní pásma, ale nosná je zde potlačena,
- **AM DSB RC (Dual Side Band Reduced Carrier)** – spektrum obsahuje obě postranní pásma, velikost nosné je zmenšena,
- **AM SSB (Single Side Band)** – spektrum obsahuje pouze jedno postranní pásmo a nosnou,
- **AM SSB SC (Single Side Band Supressed Carrier)** – je zde pouze jedno postranní pásmo a nosná je zcela potlačena,
- **AM SSD RC (Single Side Band Reduced Carirer)** – spektrum obsahuje pouze jedno postranní pásmo, nosná vlna je zmenšena.

3.3 Frekvenční modulace – FM

Při frekvenční (kmitočtové) modulaci je kmitočet signálu nosného řízený pomocí signálu modulačního. Tato modulace se řadí k modernějším technikám, při níž lze přenášet signály s vyšší kvalitou, než např. u amplitudové modulace. Nicméně oproti

amplitudové modulaci zabírá FM větší šířku pásma. Do poměru SNR asi 12 dB vykazuje tato modulace větší odolnost vůči rušivým signálům, pak dochází ke strmému poklesu kvality demodulovaného signálu.[17, 10]

Kmitočtová modulace lze popsat rovnicí:[10]

$$s_{\text{FM}}(t) = S_n \cdot \cos \left\{ \int_0^t [\omega_n + \Delta\omega \cdot s(t)] dt + \varphi_n \right\}, \quad (3.3)$$

kde veličina $\Delta\omega$ představuje kmitočtový zdvih, $s(t)$ je modulační signál.

Množství postranních pásem ovlivňuje tzv. modulační index, který je definován vztahem:[10]

$$\beta_{\text{FM}} = \frac{\Delta\omega}{\Omega}, \quad (3.4)$$

kde Ω představuje úhlovou frekvenci modulačního signálu.

Důsledkem nárůstu okamžité hodnoty řídicího signálu x dochází k nárůstu kmitočtu výstupního harmonického signálu y . Tato modulace se využívá např. při přenosu TV signálu přes družici, nebo při rozhlasovém vysílání.

Rozdílem mezi FM a AM je, že informace u FM je zakódována ve změně kmitočtu nosného signálu, zatímco u AM v amplitudě. [10, 17]

3.3.1 AM a FM – praktická ukázka

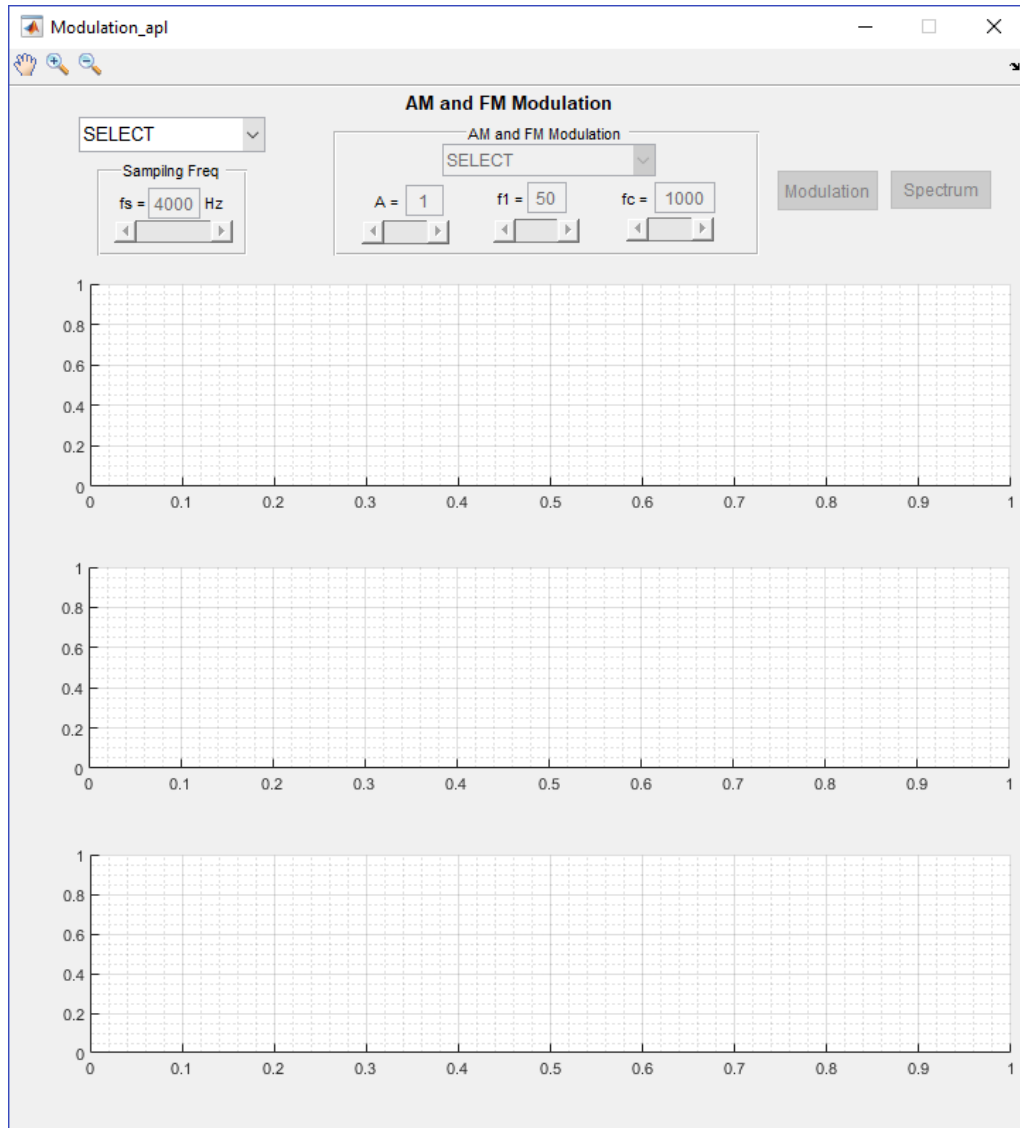
Pro praktickou ukázkou amplitudové a frekvenční modulace byla vytvořena aplikace 3.1. Její spuštění probíhá zadáním příkazu *Modulation_apl* v Command Window.

V prvním kroku musí uživatel z menu vybrat mezi *Amplitude Modulation* (amplitudová modulace) a *Frequency Modulation* (frekvenční modulace). Z hlediska efektivnějšího ovládání zůstanou po výběru typu modulace aktivní pouze ty prvky aplikace, které slouží k nastavení parametrů pro danou modulaci. Při výběru *AM Modulation* musí dále uživatel zvolit, jaký typ této modulace chce zobrazit. Opět může zvolit jen jednu z možností. Na výběr je mezi:

- *AM DSB-SC*
- *AM DSB*
- *AM SSB*

Dále může změnit parametry pro zobrazení vybraného typu modulace. Tyto parametry jsou pro všechny typy modulací shodné. Patří sem:

- f_s – jedná se o vzorkovací frekvenci. Rozsah hodnot je stanoven od 3000 po 5000 Hz.
- A – slouží k nastavení amplitudy signálu. Rozsah parametru je nastaven od 1 do 10 pro oba typy modulační.
- f_1 – nastavení frekvence modulačního signálu. Rozsah parametru je nastaven od 50 do 100 Hz pro oba typy modulační.
- f_c – slouží k nastavení frekvence nosného signálu. Rozsah hodnot je stanoven v rozmezí od 500 do 1500 Hz. Musí zde být splněna podmínka, že $f_s > 2 \cdot f_c$.



Obr. 3.1: Aplikace AM AND FM

Stiskem tlačítka *Modulation* dojde k zobrazení spekter nosného signálu, modulačního signálu a následně zvolené modulační dle nastavených parametrů. Stisknutím tlačítka *Spectrum* se zobrazí frekvenční spektrum dané modulační.

4 Transformace Z

4.1 Definice transformace Z

Principem transformace Z je převod diskrétní posloupnosti vzorků signálu $x[n]$ na funkci komplexní proměnné $X(z)$. Existují dva druhy modifikací:

- **jednostranná Z transformace** – pokud $\{s[n]\}, n = 0, 1, 2, \dots$ představuje posloupnost komplexních čísel a obor $\mathbb{O}_1 = \left\{z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} |s[n] z^{-n}| \text{ konverguje} \right\}$. Definiční vztah pro jednostrannou transformaci Z vypadá: [13, 10]

$$S(z) = Z\{s[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} s[n] z^{-n}, \quad z \in \mathbb{O}_1, \quad s[n] \Leftrightarrow S(z), \quad (4.1)$$

oblast konvergence určuje poloměr konvergence R , platí $|z| > R$. Tento typ transformace se především využívá pro analýzu realizovatelných systémů.

- **dvojstranná Z transformace** – využívá se v keprální analýze a analýze náhodných procesů. Definiční vztah: [13, 10]

$$S\{z\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] z^{-n}. \quad (4.2)$$

Představuje-li obraz $S(z)$ poměr dvou polynomů s proměnnou z , pak: [10]

$$S(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad (4.3)$$

kořeny polynomu $P(z) = 0$ představují nulové body. Značí se pomocí nulových indexů – z_0 . Kořeny polynomu $Q(z) = 0$ představují póly, značí se křížkem – z_x .

Vyjádření obrazu posloupnosti jednotkového skoku $s[n] = \sigma[n]$ v transformaci Z: [10]

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} s[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{z}{z - 1}. \quad (4.4)$$

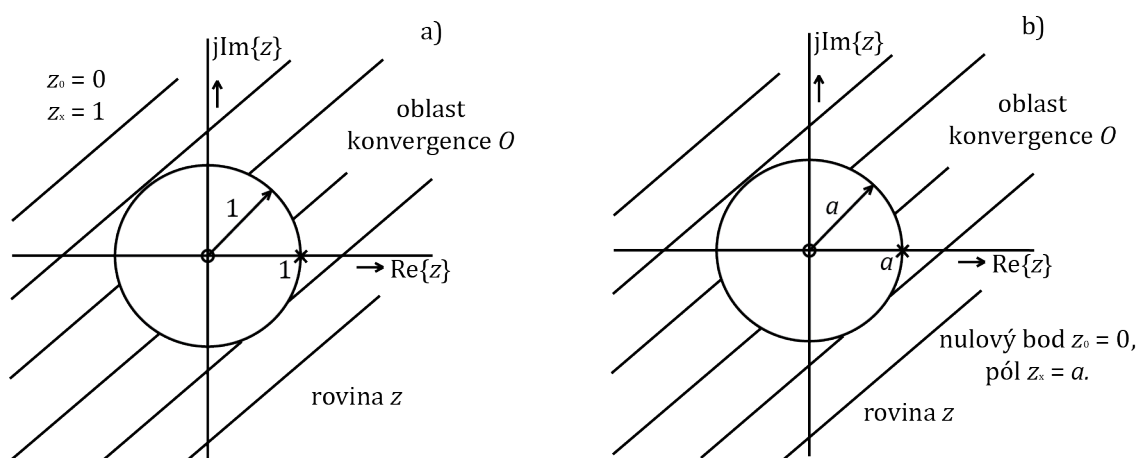
Aby mocninná řada 4.4 konvergovala, musí být násobena kvocientem $q = \frac{1}{z}$, kde $|q| < 1$. Z toho vyplývá, že $|z| > 1$. Oblast konvergence lze vidět na obr. 4.1 a), kde je vyznačena šrafovanou oblastí. Nulový bod z rovnice 4.4 je $z_0 = 0$ a pól $z_x = 1$. [10]

Obraz transformace Z pro reálnou mocninnou posloupnost $s[n] = a^n \sigma[n]$, kde a je reálné číslo, je roven: [10]

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \sigma[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a}, \quad (4.5)$$

kde $\left|\frac{a}{z}\right| < 1, |z| > a$.

Oblast konvergence, nulový bod a pól lze vidět na obr. 4.1 b).



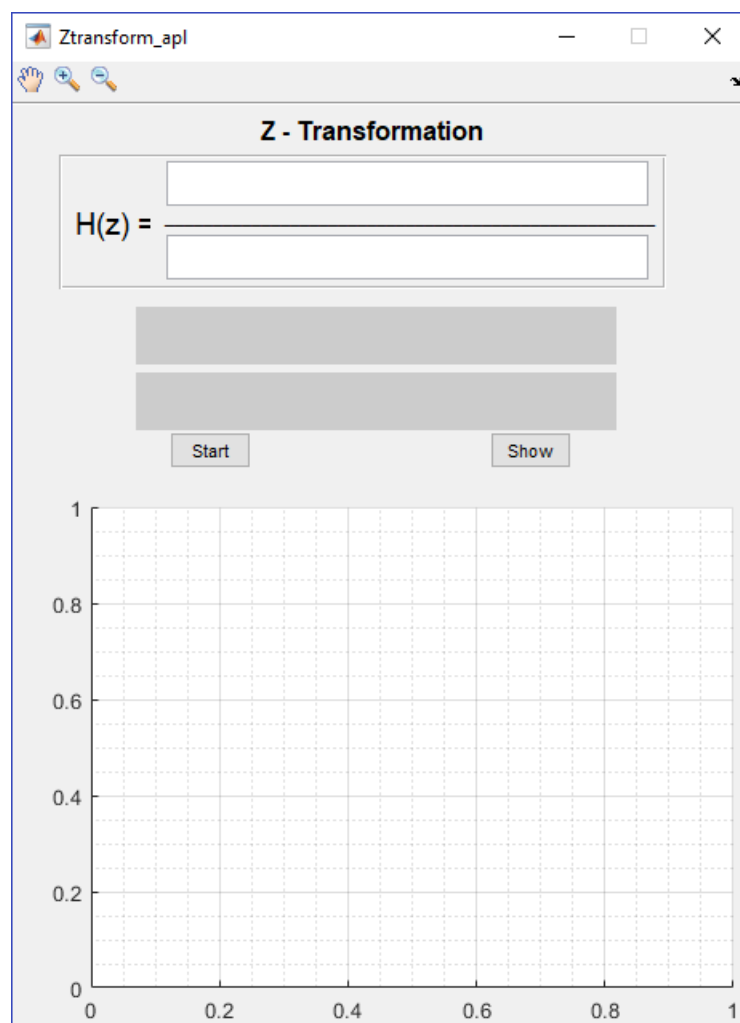
Obr. 4.1: a) oblast konvergence obrazu transformace Z jednotkového skoku, b) oblast konvergence obrazu transformace Z reálné mocninné posloupnosti. Vychází z literatury [10]

4.2 Transformace Z – praktická ukázka

Aplikaci 4.2 je možné spustit zadáním příkazu `Ztransform_apl` v Command Window.

Aplikace je poměrně jednoduchá na ovládání. Jediným krokem, který uživatel musí vykonat je, že musí zadat čitatele a jmenovatele přenosové funkce do přípravených oken v aplikaci.

Následným stiskem tlačítka *Start* dojde k vyhodnocení systému, zda-li je či není stabilní a kauzální. Výsledek této operace se vypíše v aplikaci. V posledním kroku, při stisku tlačítka *Show*, dochází k zobrazení fázové a amplitudové charakteristiky systému a taktéž k vykreslení rozložení nulových bodů a pólů.



Obr. 4.2: Aplikace Z-TRANSFORMATION

5 Kmitočtové filtry

Kmitočtové filtry představují lineární nelineární systémy, které určitou část kmitočtového pásma propouští, tato část prochází tzv. propustným pásmem. Zbývající část kmitočtového pásma je potlačena. Vlastnosti kmitočtového filtru se nejčastěji vyjadřují pomocí modulové kmitočtové charakteristiky – obr. 5.1. [10, 1]

Hlavním požadavkem kmitočtových filtrů je, aby spektrum signálu procházející propustným pásmem prošlo bez změny tvaru. Nicméně při průchodu signálu filtrem může dojít k časovému zpoždění. Důsledkem toho je vznik fázového posuvu u procházejících kmitočtových složek signálu. Tyto vlivy zobrazuje fázová kmitočtová charakteristika. Např. u ideálních kmitočtových filtrů je tato charakteristika nulová – takové kmitočtové filtry není možné fyzikálně realizovat, jelikož představují nekauzální systémy. Mezi nejjednodušší představitele takových systémů, které je možné realizovat, patří RC a RL články. [1, 10]

Kmitočtové filtry se v praxi využívají např.: v radiotechnice (pásmové propusti), elektroakustice (korekční filtry), v měřící technice, v regulační technice a v silnoproudé elektrotechnice. Do speciální skupiny aplikací řadíme filtry typu dolní propust, které jsou součástí systémů pro převod analogového signálu na digitální. Jedná se o antialiasingový filtr, který slouží pro splnění vzorkovacího teorému. [1]

5.1 Základní typy filtrů

Kmitočtové filtry se dělí podle různých hledisek a vlastností. Dle odpovídající funkce filtru a podoby kmitočtové charakteristiky lze kmitočtové filtry dělit do tří základních skupin: [1]

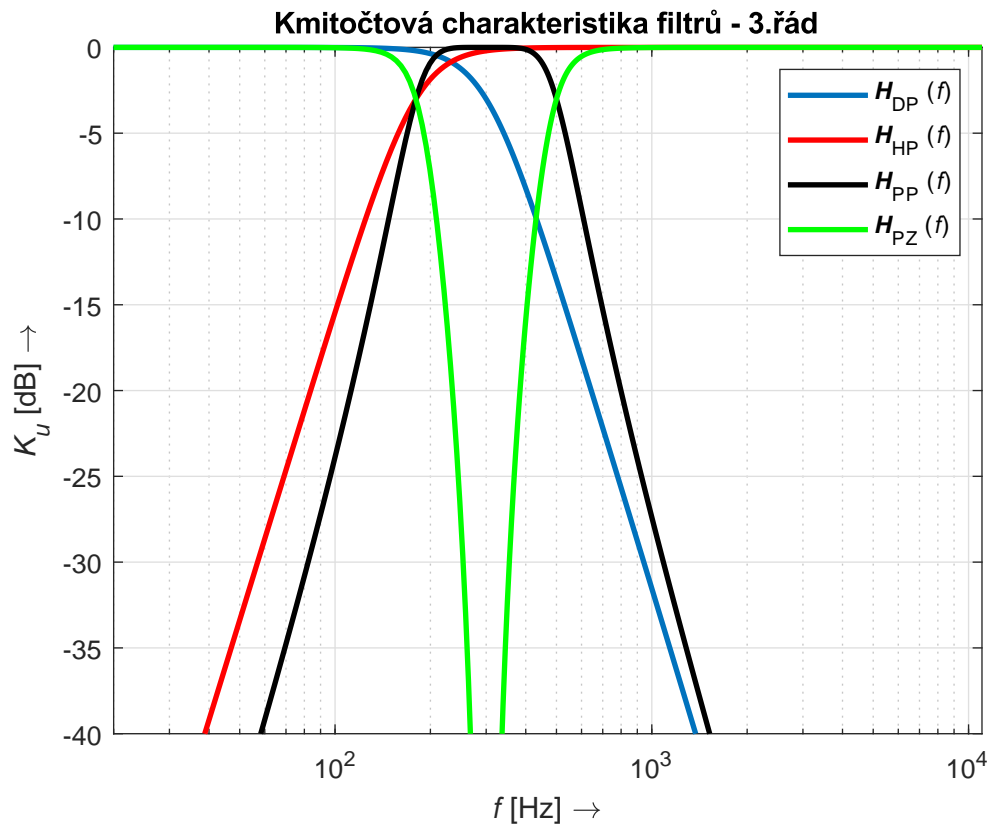
- selektivní filtry,
- korekční filtry,
- fázovací (zpožďovací) obvody.

1. Selektivní filtry

Hlavním úkolem těchto filtrů je potlačení přenosu kmitočtových složek signálu v nepropustném pásmu. Patří sem:

- *Dolní propust* – propouští jen ty složky signálu, které mají kmitočet nižší než mezní kmitočet f_M
- *Horní propust* – propouští jen ty složky signálu, které mají kmitočet vyšší než mezní kmitočet f_M
- *Pásmová propust* – propouští pouze ty složky signálu, které jsou mezi mezním dolním a horním kmitočtem f_{M1} a f_{M2}

- *Pásmová zadrž* – nepropouští složky signálu, které jsou mezi mezním dolním a horním kmitočtem f_{M1} a f_{M2} [1]



Obr. 5.1: Kmitočtová charakteristika filtrů

2. Korekční filtry

Hlavní podstatou těchto filtrů je, aby modul přenosu celé soustavy K vyšel konstantní. [1]

3. Fázovací (zpožďovací) obvody

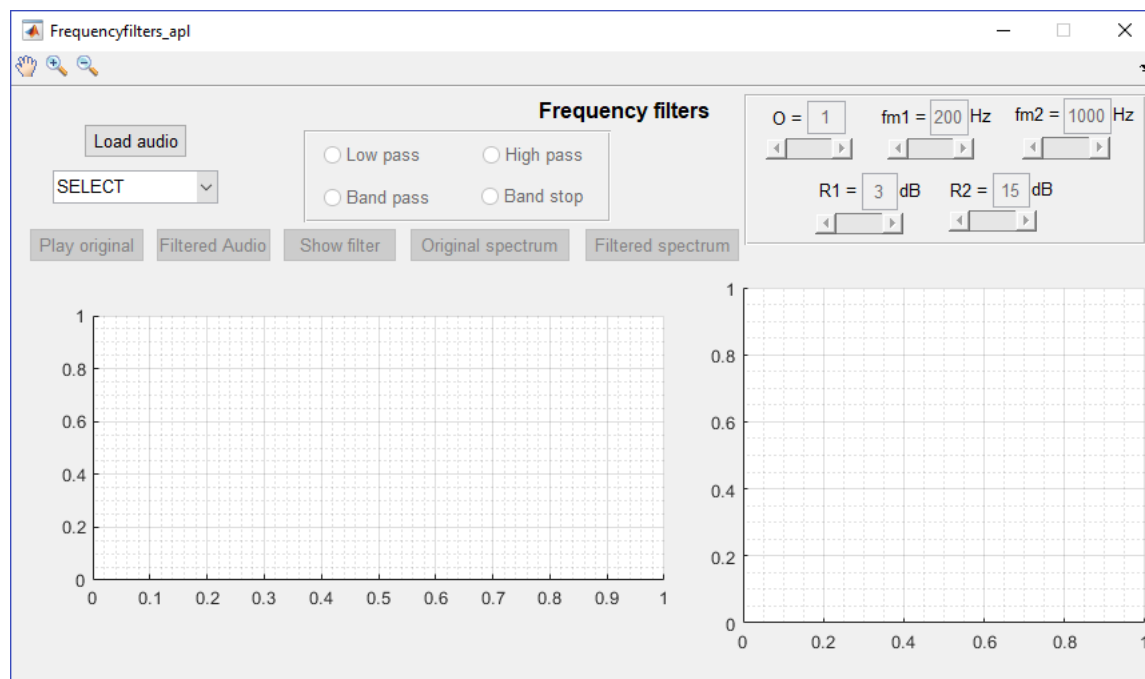
U těchto filtrů hraje významnou roli kmitočtově závislá fázová charakteristika. Modulová kmitočtová charakteristika je zde kmitočtově nezávislá. Takže v praxi neslouží ani tak k filtraci signálu, ale spíše pro změnu fázového posuvu v závislosti na kmitočtu beze změny modulu přenosu. Používají se jako zpožďovací články. [1]

5.1.1 Kmitočtové filtry – praktická ukázka

Jako praktická ukázka kmitočtových filtrů byla vytvořena aplikace 5.2, která se spouští pomocí příkazu `Frequencyfilters_apl` v Command Window.

V prvním kroku musí uživatel stiskem tlačítka *Load audio* nahrát zvukový soubor, který chce dále filtrovat. V dalším kroku musí v menu zvolit jednu ze tří nabízených možností aproximací:

- *Butterworth filter* – jedná se o Butterworthovu aproximaci.
- *Chebyshev filter* – jde o Čebyševovu aproximaci prvního druhu.
- *Cauer filter* – představuje Caurovu aproximaci (eliptické filtry).



Obr. 5.2: Aplikace FREQUENCY FILTERS

V dalším kroku uživatel vybírá typ kmitočtového filtru. Aplikace je ošetřena tak, aby bylo možné vybrat jen jednu z nabízených možností. Po výběru může uživatel přenastavit již nastavené hodnoty pro zobrazení. Pro efektivnější práci s aplikací jsou vždy aktivní jen ty prvky, které slouží pro zobrazení daného typu filtru. Lze nastavovat tyto hodnoty:

- O – jedná se o řád filtru. Rozsah hodnot řádu je od 1 do 6.
- f_{m1} – jde o mezní kmitočet. Jeho rozsah je limitován od 100 do 2000 Hz. Je aktivní pro všechny typy filtrů.
- f_{m2} – představuje horní mezní kmitočet. Jeho rozsah je opět limitován od 100 do 2000 Hz. Je aktivní jen pro pásmovou propust a pásmovou zádrž.
- R_1 – jedná se o povolené zvlnění v propustném pásmu. Jeho rozsah je od 0 do 20 dB. Je aktivní pro všechny typy filtrů s výjimkou Butterworthovi aproximace.

- R_2 – jedná se o povolené zvlnění v nepropustném pásmu. Jeho rozsah lze nastavit v rozmezí od 0 do 20 dB. Je aktivní pro všechny typy filtrů s výjimkou Butterworthovi a Chebyshevovi aproximace.

Stiskem tlačítka *Play original* si může uživatel přehrát originální zvukový vzorek. Pomocí tlačítka *Filtered Audio* si lze přehrát filtrovaný hudební soubor podle zvolených možností. Stiskem tlačítka *Show filter* je možné si zobrazit přenosovou funkci a rozložení nulových bodů a pólů právě zvoleného filtru. Spektrum originálního zvukového souboru si lze zobrazit stiskem tlačítka *Original spectrum* a stiskem tlačítka *Filtered spectrum* se zobrazí spektrum filtrovaného hudebního souboru podle zvoleného typu filtru.

5.2 Řád přenosové funkce

Přenos filtru představuje racionální lomená funkce kmitočtu: [1]

$$K(j\omega) = \frac{a_m(j\omega)^m + a_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + a_1j\omega + a_0}{b_n(j\omega)^n + b_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + b_1j\omega + b_0},$$

$$K(p) = \frac{a_mp^m + a_{m-1}p^{m-1} + \dots + a_1p + a_0}{b_np^n + b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_1p + b_0}, \quad (5.1)$$

kde $\omega = 2\pi f$, $p = j\omega$. Proměnná p představuje komplexní kmitočet, jehož obecný tvar je:[1]

$$p = \sigma + j\omega. \quad (5.2)$$

Řád funkce představuje nejvyšší mocnina n . V praxi je volba řádu velmi důležitá. Se zvyšujícím se řádem se blíží charakteristika filtru k ideálnímu filtru. Taktéž dochází ke zvýšení potlačení složek signálu v nepropustném pásmu a ke zmenšení přechodového pásma mezi propustným a nepropustným pásmem. Toto všechno vede ke zvýšení ceny a nároků na případnou realizaci takového filtru. [1]

5.3 Číslicové filtry

Pro návrh číslicového filtru je nejdůležitější jeho přenosová funkce $H(z)$. Rovnici 5.1 lze pomocí Z transformace upravit na tvar:[16]

$$\begin{aligned}
H(z) &= \frac{a_M z^M + a_{M-1} z^{M-1} + \dots + a_1 z + a_0}{b_N z^N + b_{N-1} z^{N-1} + \dots + b_1 z + b_0} \\
&= z^{M-N} \cdot \frac{(c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_{M-1} z^{-M+1} + c_M z^{-M})}{(d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots + d_{N-1} z^{-N+1} + d_N z^{-N})}. \quad (5.3)
\end{aligned}$$

Konečný tvar přenosové funkce z rovnice 5.3 představuje z-obraz konečných posloupností pro jednostrannou Z transformaci, který umožňuje snadnější konstrukci grafů signálových toků pro různé struktury filtrů. Pro koeficienty platí:[16]

$$\begin{aligned}
a_M &= c_0, & a_{M-1} &= c_1, & \dots, & a_1 &= c_{M-1}, & a_0 &= c_M, \\
b_N &= d_0, & b_{N-1} &= d_1, & \dots, & b_1 &= d_{N-1}, & b_0 &= d_N.
\end{aligned} \quad (5.4)$$

Pokud přenosová funkce $H(z)$ obsahuje jednoduché póly, následně po jejím rozložení na parciální zlomky vychází tvar:[16]

$$H(z) = \sum_{j=0}^N k_j \cdot \frac{z}{z - p_j}. \quad (5.5)$$

Pomocí zpětné Z transformace lze dostat z tvaru 5.5 impulsní charakteristiku daného číslicového filtru, která je dána superpozicí dílčích posloupností.[16]

$$h(n) = \sum_{j=0}^N k_j \cdot p_j^n. \quad (5.6)$$

5.4 Číslicové filtry typu IIR

Dělením čitatele a jmenovatele u přenosové funkce 5.3 lze získat impulsní charakteristiku diskrétního systému s nekonečným počtem členů:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n}, \quad (5.7)$$

$$y[n] = \sum_{m=0}^{\infty} h[m] x[n-m]. \quad (5.8)$$

Takový číslicový filtr je vždy rekurzivní. Modul pólů p_j slouží k určení stability číslicového filtru. Aby byl číslicový filtr stabilní, musí se všechny póly přenosové funkce $H(z)$ nacházet uvnitř jednotkové kružnice v rovině z . Platí tedy:[16, 4]

$$|p_j| < 1 \quad \text{pro } j = 0, 1, 2, 3, \dots, N. \quad (5.9)$$

Jak již bylo zmíněno výše, pozice pólů určuje stabilitu číslicového filtru, to však neplatí pro nulové body. Podle výskytu nulových bodů existují tyto typy filtrů:[4]

- **filtry s minimální fází** – nulové body se nacházejí uvnitř jednotkové kružnice,
- **filtry s maximální fází** – nulové body se nacházejí vně jednotkové kružnice,
- **filtry se smíšenou fází** – některé nulové body jsou uvnitř jednotkové kružnice a některé vně.

IIR filtry jsou oproti FIR filtrům při srovnatelné kvalitě zpracování signálů řádově méně náročné na rozsah výpočtů, tím pádem mají menší nároky na výkon výpočetní techniky, která je realizuje. Při nevhodném návrhu však mohou být nestabilní. Jsou více citlivé na nepřesnosti, které vznikají při číslicové realizaci, takže je nutné stabilitu pro konkrétní realizaci ověřovat. Mají vždy nelineární fázovou charakteristiku.[4]

5.5 Číslicové filtry typu FIR

V praxi existují číslicové filtry, které ve jmenovateli přenosové funkce $H(z)$ obsahují nulové koeficienty, s výjimkou koeficientu b_N . Přenosová funkce 5.3 má tedy tvar:[16]

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{a_M z^M + a_{M-1} z^{M-1} + \dots a_1 z + a_0}{b_N z^N} = \sum_{i=0}^M \frac{a_i}{b_N} z^{i-N} \\ &= z^{M-N} \cdot \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_{M-1} z^{-M+1} + c_M z^{-M}}{d_0} = z^{M-N} \cdot \sum_{i=0}^M \frac{c_i}{d_0} z^{-i} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Impulsní charakteristika FIR filtrů má konečný počet hodnot:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} h[m] x[n-m]. \quad (5.11)$$

Dle přenosové funkce 5.10 lze vidět, že číslicové FIR filtry jsou absolutně stabilní, jelikož obsahují N -násobný pól v počátku roviny z , takže reprezentace v této rovině je dána nulovými body. Pokud impulsní charakteristika vykazuje symetričnost dle středního vzorku, mají tyto diskrétní systémy lineární fázovou kmitočtovou charakteristiku.[16, 4]

5.6 Hřebenové filtry

Hřebenové filtry mohou být ve své nejjednodušší formě považovány za filtry pásmové zádrže, ve kterých se periodicky vyskytují nuly v celém kmitočtovém pásmu.[7]

Pro ilustraci jednoduché formy hřebenového filtru se používá filtr typu FIR s klouzavým průměrem, který je popsán diferenční rovnicí:[7]

$$y[n] = \frac{1}{M+1} \sum_{m=0}^M x[n-m]. \quad (5.12)$$

Přenosová funkce tohoto filtru je:[7]

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{M+1} \sum_{m=0}^M z^{-m} \\ &= \frac{1}{M+1} \frac{[1 - z^{-(M+1)}]}{1 - z^{-1}}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

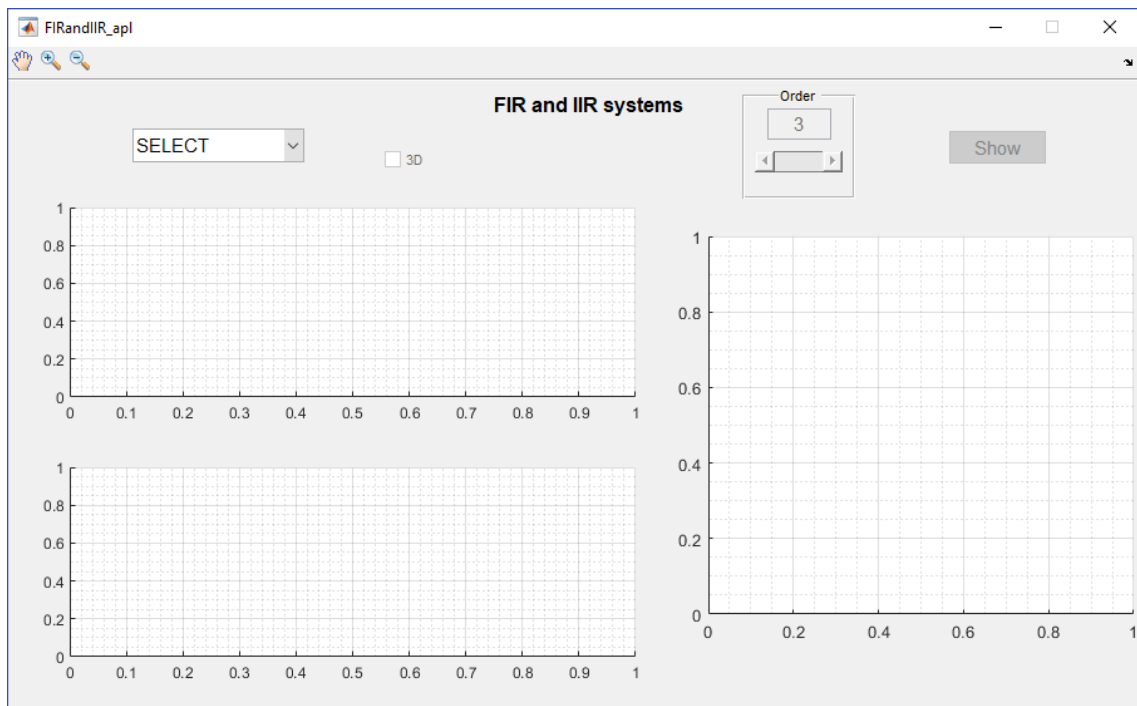
V rovnici 5.13 nahrazujeme člen z členem z^L . Hřebenový filtr má tedy výslednou přenosovou funkci rovnu:[7]

$$H_L(z) = \frac{1}{M+1} \frac{[1 - z^{-L(M+1)}]}{1 - z^{-L}}. \quad (5.14)$$

5.7 FIR a IIR – praktická ukázka

Jako praktická ukázka pro číslicové filtry byla vytvořena aplikace 5.3. Její spuštění probíhá pomocí příkazu *FIRandIIR_apl* v Command Window.

V prvním kroku musí uživatel z menu zvolit, jaký typ číslicového filtru chce zobrazit. Na výběr má mezi *Comb FIR filters* (hřebenové FIR filtry) a *Comb IIR filters* (hřebenové IIR filtry). V další kroku může změnit řád filtru pomocí, buď



Obr. 5.3: Aplikace FIR AND IIR SYSTEMS

posuvníku, nebo přepisem hodnoty do textového pole *Order*. Rozmezí této hodnoty je nastaveno od 3 do 10. Opět je aplikace ošetřena proti zadání chybné hodnoty.

Stiskem tlačítka *Plot* dojde k zobrazení impulsní charakteristiky zvoleného filtru, rozložení nulových bodů a pólů a zobrazení 3D impulsní charakteristiky.

6 Banky číslicových filtrů

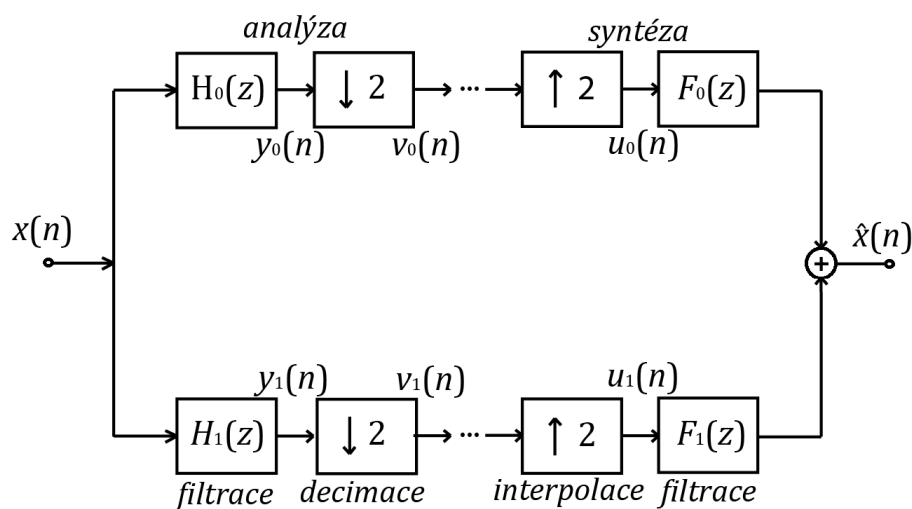
Bankou filtrů se nazývá sdružení několika číslicových filtrů do skupin. V elementárním zapojení se banka skládá ze dvou částí, jimiž jsou:[16]

- **Analýza** – jedná se o filtry horní a dolní propusti, které dělí kmitočtové pásmo na dvě části. Jedna z těchto částí je nízkofrekvenční, kde se nacházejí základní informace o signálu. Druhá část je vysokofrekvenční, ve které jsou uloženy informace o průběhu signálu. Výsledkem analýzy je získání dvou nových diskrétních signálů – aproximační a detailní složky.

Dělení kmitočtového pásma může pomocí filtrů horní a dolní propusti pokračovat i dále. Dochází ke vzniku subpásem a subsignálů, jedná se tedy o subpásmové kódování. Úroveň komprimace u subsignálů bývá vyšší, než u původního signálu.

Jelikož se v této části jedná o filtraci signálu, tedy dochází k záměrnému snižování velikosti kmitočtového pásma, nemusí být zachována celá délka výstupních signálů. Při záměrném snižování vzorkovací frekvence lze vynechávat sudé složky a ponechat jen složky liché. Činitel decimace je rovný 2. Pokud je filtrace M stupňová, zůstává pouze každá M -tá složka. Výstupní signál je tedy stejně dlouhý, jako signál vstupní.

- **Syntéza** – v této části dochází k interpolaci subsignálů s činitelem rovným 2. Dochází k začleňování nulových hodnot mezi vzorky. Posléze je opět provedena filtrace pomocí horní a dolní propusti, čímž dochází ke zvyšování vzorkovací frekvence.



Obr. 6.1: Blokové schéma banky číslicových filtrů, vychází z literatury [16]

Na obr. 6.1 se nachází schéma číslicového filtru, provádějící analýzu a syntézu. Jedná se o elementární blokové schéma číslicového filtru pro subpásmové kódování, taková banka číslicových filtrů se nazývá jako rozkladová a rekonstrukční. Předpokládá se, že filtry jsou časově invariantní a lineární. [12, 16]

Jak lze z obr. 6.1 vypořadovat, funkce $H_0(z)$ a $F_0(z)$ jsou přenosové funkce pro dolní propusti, zatímco $H_1(z)$ a $F_1(z)$ představují přenosové funkce horních propustí. Při procesu nadvzorkování mohou filtry $F_0(z)$ a $F_1(z)$ fungovat jako interpolační filtry.[16, 12]

Banky číslicových filtrů lze dále dělit dle rozdělení spektra vstupního signálu na jednotlivá subpásma:[12]

- **rovnoměrné banky** – rovnoměrné dělení spektra (*Uniform banks*). Pomocí tohoto druhu banky filtrů se dá vypočítat spektrum diskretní Fourierovy transformace,
- **nerovnoměrné banky** – nerovnoměrné dělení spektra (*Non-uniform banks*). Používá se pro subpásmové kódování, jedná se o kompresi signálu (např. řečový signál), u kterého se většina jeho energie nachází v několika menších oblastech kmitočtového spektra.

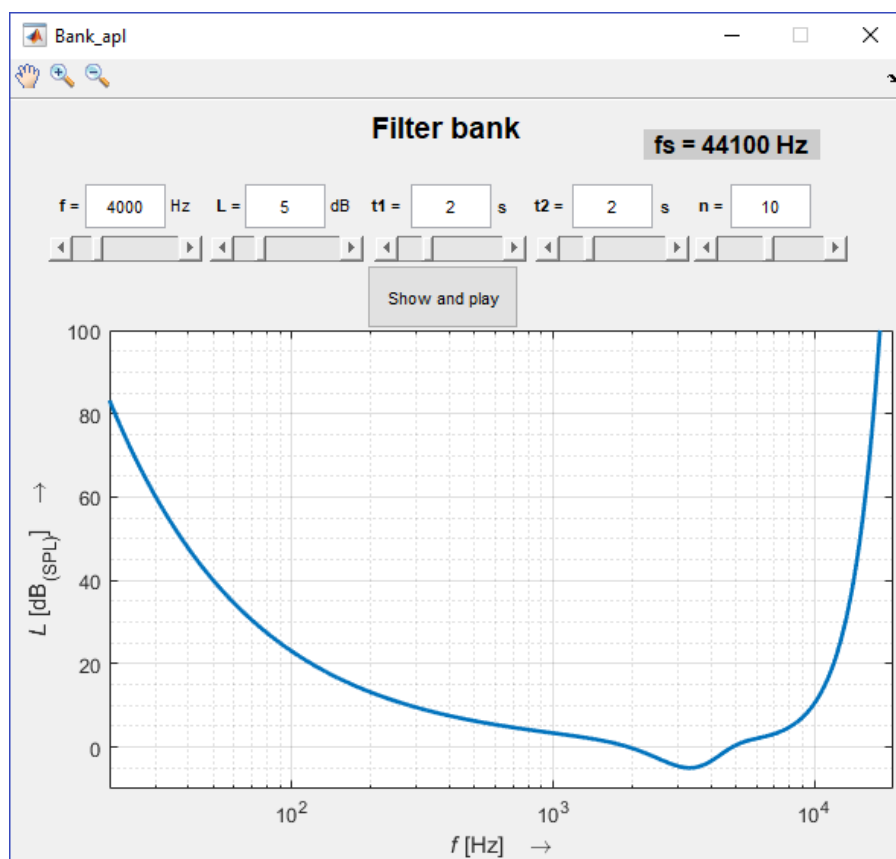
6.1 Banky číslicových filtrů - praktická ukázka

Jako realizace banky číslicových filtrů byla vytvořena aplikace simulující sluchový test.

Aplikaci 6.2 lze spustit zadáním *Bank_apl* v Command Window. V dalším kroku je možné upravit některé parametry aplikace, buď pomocí posuvníku, nebo přepisem číselné hodnoty u příslušného okna. Mezi tyto parametry patří:

- f – parametr představující frekvenci harmonického signálu, který je posléze přehráván. Rozsah je stanoven od 20 po 20000 Hz,
- L – jedná se o pokles hladiny akustického tlaku mezi jednotlivými přehrávanými signály. Jeho rozsah je v rozmezí od 1 po 20 dB,
- t_1 – parametr nastavující délky přehrávaných signálů. Rozsah je od 1 do 5 vteřin,
- t_2 – parametr představující délku pauzy mezi jednotlivými přehrávanými signály. Rozsah je opět od 1 do 5 vteřin,
- n – parametr nastavující počet přehrávaných signálů. Rozsah je stanoven v rozmezí od 1 po 20.

Po stisknutí tlačítka *Show and play* dochází k zobrazení jednotlivých signálů v grafu a následně se signály přehrají.

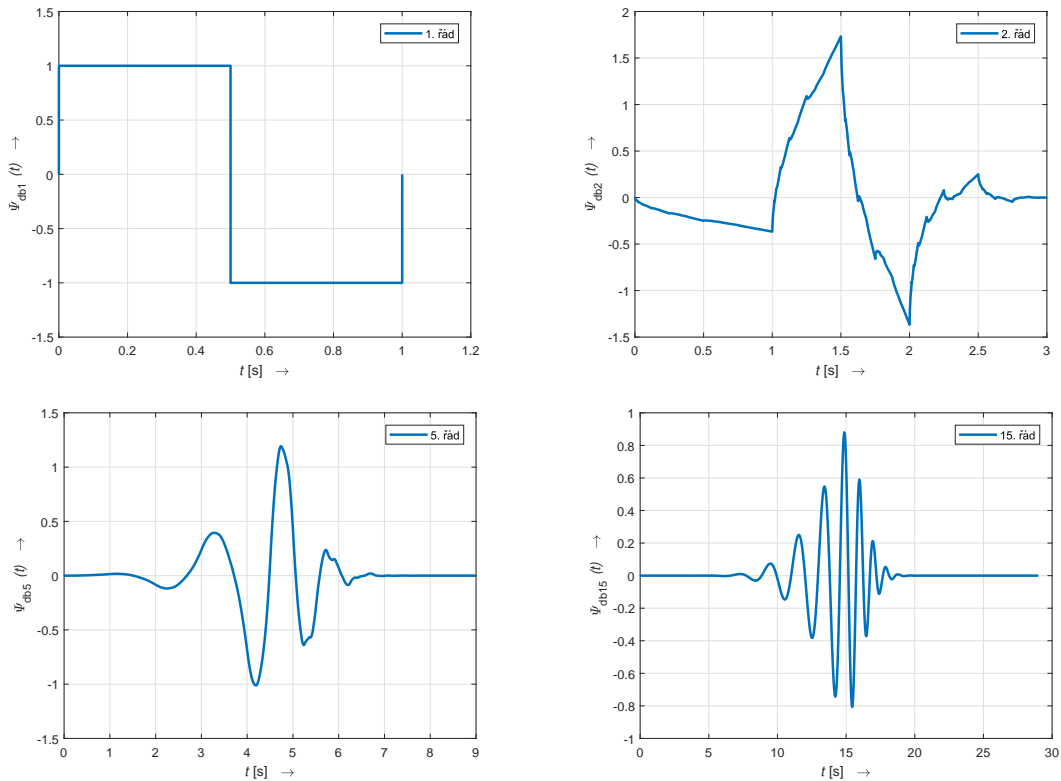


Obr. 6.2: Aplikace FILTER BANK

7 Vlnková transformace

Vlnková (waveletová) transformace se využívá např. pro analýzu nestacionárních signálů. Pro tutéž analýzu se využívá také krátkodobá Fourierova transformace, jejímž výsledkem je spektrogram. [12]

Elementárními funkcemi u waveletové transformace jsou tzv. vlnky, které nepředstavují harmonické signály. Mění se u nich pouze časové měřítko. Zobrazení těchto vlnek probíhá pomocí tzv. vlnkogramu, což je dvourozměrná funkce času a měřítka.[12]



Obr. 7.1: Mateřské vlnky dle Daubechiesové. Vychází z literatury [12]

Vlnka $\psi(t)$ je vlnkou základní, nebo mateřskou. Při posunutí dle časové osy a změně časového měřítka jsou od této vlnky odvozeny ostatní vlnky totožného tvaru. Jedná se o funkce $\psi_{p,q}(t)$. Liší se svou polohou a jsou roztažené.[12, 16]

Vlnka $\psi_{0,q}(t)$, která je posunutá a její počátek je v čase $t = q$ a konec v čase $t = q + \tau$, je vyjádřena:[16]

$$\psi_{0,q}(t) = \psi(t - q).$$

Vlnka $\psi_{t,0}(t)$, která je zkrácená a její počátek je v čase $t = 0$ a konec v čase $t = \frac{\tau}{p}$, je vyjádřena:[16]

$$\psi_{t,0}(t) = \frac{1}{\sqrt{p}} \psi\left(\frac{t}{p}\right).$$

Mateřská vlnka musí splňovat tyto podmínky:[12]

- Střední hodnota musí být rovna nule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0.$$

- Na konečném intervalu má nenulovou hodnotu

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0.$$

- Do řádu vlnky m má spojitě derivace. Nastává rychlý pokles hodnot koeficientů (se zvyšujícím se měřítkem).
- Musí být splněna existence zpětné transformace. Tím pádem musí být splněna podmínka

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty$$

$\Psi(\omega) = F\{\psi(t)\}$, kde $F\{\cdot\}$ představuje Fourierovu transformaci.[12]

V praxi existují tři typy vlnkových transformací:[12]

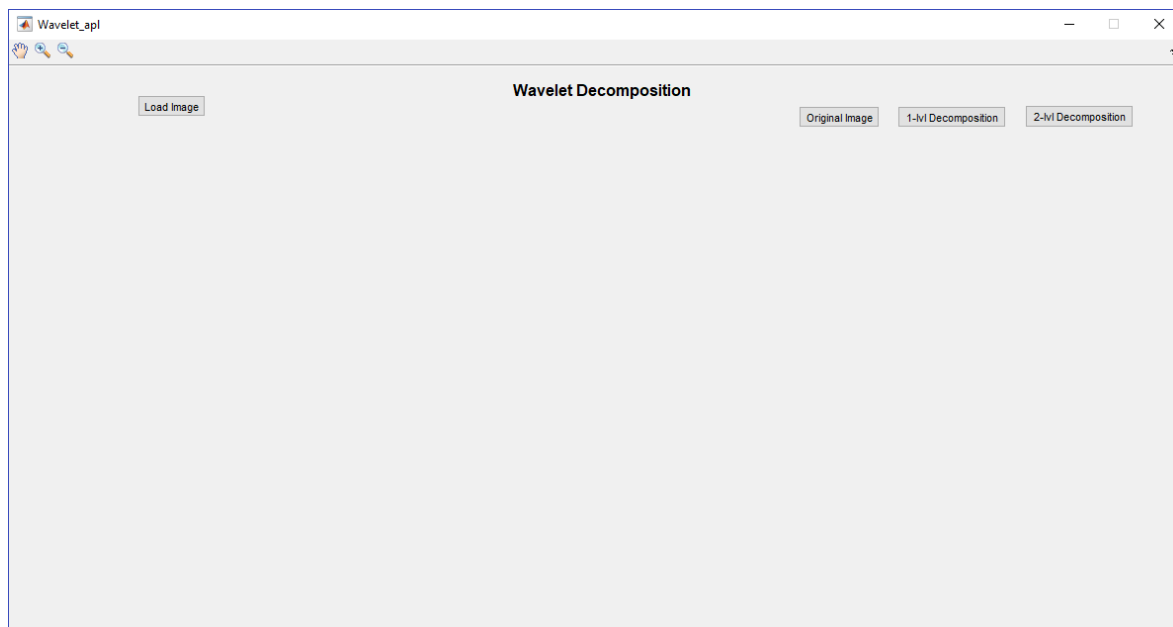
- **Spojitá (CWT)** – změna měřítka, posunutí, vstupní signál i vlnkové funkce jsou spojitě. Definiční vztah:

$$S_{\text{CWT}}(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi_{p,q}^*(t) dt. \quad (7.1)$$

- **Diskrétní (DWT)** – u tohoto typu jsou spojitě jen vstupní signál a vlnkové funkce. Změna měřítka a posun probíhá po krocích diskrétně.
- **Diskrétní s diskrétním časem (DTWT)** – změna měřítka i posun je prováděn diskrétně. Vstupní signál i vlnkové funkce představují diskrétní signál.

7.1 Vlnková transformace – praktická ukázka

Z praktického hlediska se vlnková transformace využívá např. pro dekompozici obrazových souborů.



Obr. 7.2: Aplikace WAVELET DECOMPOSITION

Aplikaci 7.2 je možné spustit zadáním příkazu *Wavelet_apl* v Command Window. V prvním kroku musí uživatel nahrát obrazový soubor, u kterého chce provádět dekompozici. V následujícím kroku lze stiskem tlačítka *Original Image* zobrazit originální obrazový soubor ve stupních šedi.

Pomocí tlačítka *1-lvl Decomposition* dochází k zobrazení jednoúrovňové dekompozice obrazového souboru. Zobrazí se jednotlivé koeficienty – vertikální, horizontální a diagonální. Následným stiskem tlačítka *2-lvl Decomposition* dojde k zobrazení dvouúrovňové dekompozice obrazového souboru.

8 Krátkodobá spektrální analýza

Spektrální popis pomocí Fourierovy transformace nebo Fourierovy řady je u nestacionárních spojitých signálů již nedostatečný. Tato zobrazení popisují spektrum signálů pouze z hlediska kmitočtových vlastností. Neudávají ale žádné informace o čase, ve kterém se toto spektrum objevilo. [12]

Jako příklad spektra se využívá Gaussův impuls, který je definován: [12]

$$w_G(t) = e^{-\pi\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0. \quad (8.1)$$

Aplikujeme-li Fourierovu transformaci na vztah 8.1, získáme spektrum Gaussova impulsu: [12]

$$W_G(\omega) = \alpha e^{-j\left(\frac{\omega\alpha}{2\sqrt{\pi}}\right)^2}, \quad \omega, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0. \quad (8.2)$$

Za pomoci Gaussova impulsu je možné dokázat vlastnost Fourierovy transformace: [12]

$$as(at) \leftrightarrow S\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a \neq 0. \quad (8.3)$$

Pokud dojde ke změně délky okna funkce v časové oblasti, mohou nastat dva případy: [12]

- zlepšení kmitočtového rozlišení (Δf), ale zhoršení časového rozlišení (Δt),
- zhoršení kmitočtového rozlišení (Δf), ale zlepšení časového rozlišení (Δt).

Pro časové a kmitočtové rozlišení tohoto impulsu platí, že: [12]

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha}, \quad \Delta t = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}. \quad (8.4)$$

Podle Heisenbergova principu neurčitosti však existuje mez dosažitelného rozlišení pro obě tyto oblasti. Platí: [12]

$$\Delta f \Delta t \geq \frac{1}{2}. \quad (8.5)$$

8.1 Krátkodobá Fourierova transformace

Krátkodobou Fourierovu transformaci (STFT) lze získat použitím jiného typu okna než Gaussova. Využívá se např. pravoúhlé, Hammingovo, Hannovo, Blackmannovo. Z hlediska zpracování signálů se častěji sleduje zpracovávání diskrétního signálu $s[n]$: [12]

$$S(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] e^{-j\omega n}, \quad (8.6)$$

$$s[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (8.7)$$

Krátkodobou Fourierovu transformaci lze získat limitací délky diskrétního signálu $s[n]$ pomocí diskrétního okna s konečnou délkou N . Platí vztah: [12]

$$S_{\text{STFT}}(e^{j\omega}, m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] w[n-m] e^{-j\omega n}, \quad (8.8)$$

$$s[m] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{\text{STFT}}(e^{j\omega}, m) w^*[n-m] \right\} e^{j\omega n} d\omega, \quad (8.9)$$

kde $*$ představuje komplexní sdružení.

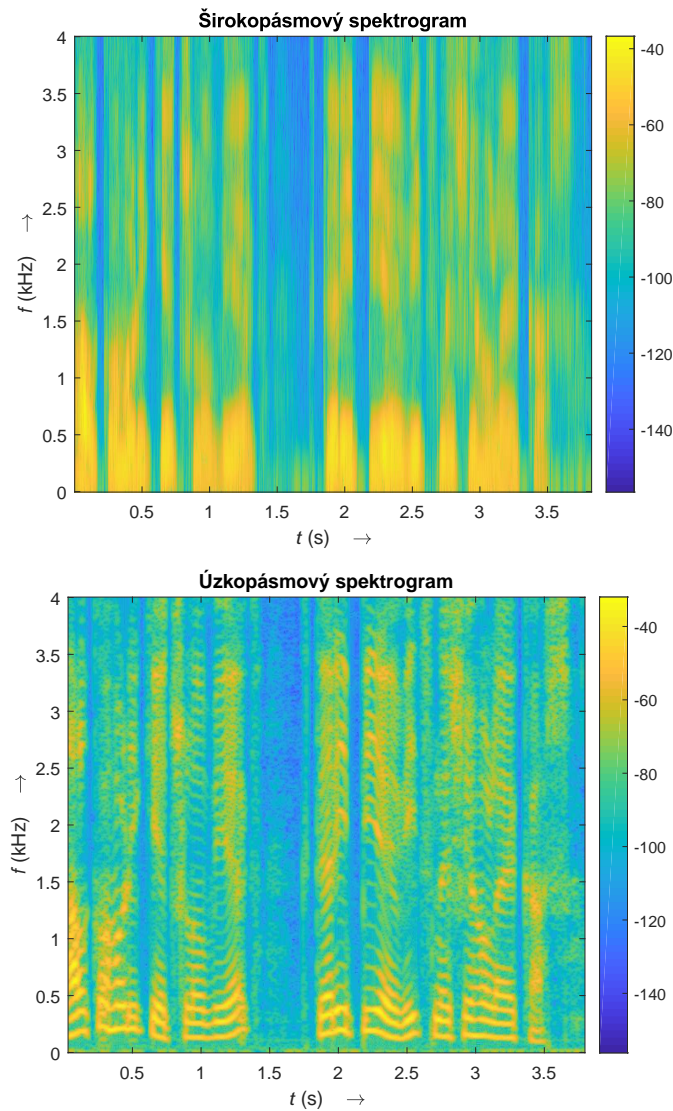
Výběrem N hodnot z rozsahu $\pm\pi$ dochází k diskretizaci kmitočtové osy, která je spojitá. Tato operace je nutná z důvodu využití počítače pro získání krátkodobého spektra: [12]

$$w_k = 2\pi f_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (8.10)$$

Dochází k upravení vztahu 8.8 na tvar: [12]

$$S_{\text{STFT}}(e^{j\omega_k}, m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] w[n-m] e^{-j\omega_k n}. \quad (8.11)$$

Během krátkodobé spektrální analýzy diskrétního signálu dochází k posunování diskrétního časového okna. Během této operace dochází k výběru N časových vzorků pomocí daného okna. Dalším posunováním okna vzniká tzv. klouzavé spektrum (posun o jeden vzorek), nebo skokové spektrum (posun o skupinu vzorků). Celá operace se opakuje. Výsledkem je spektrogram, představující získaná spektra řazená za sebou v čase. [12]



Obr. 8.1: Širokopásmový a úzkopásmový spektrogram

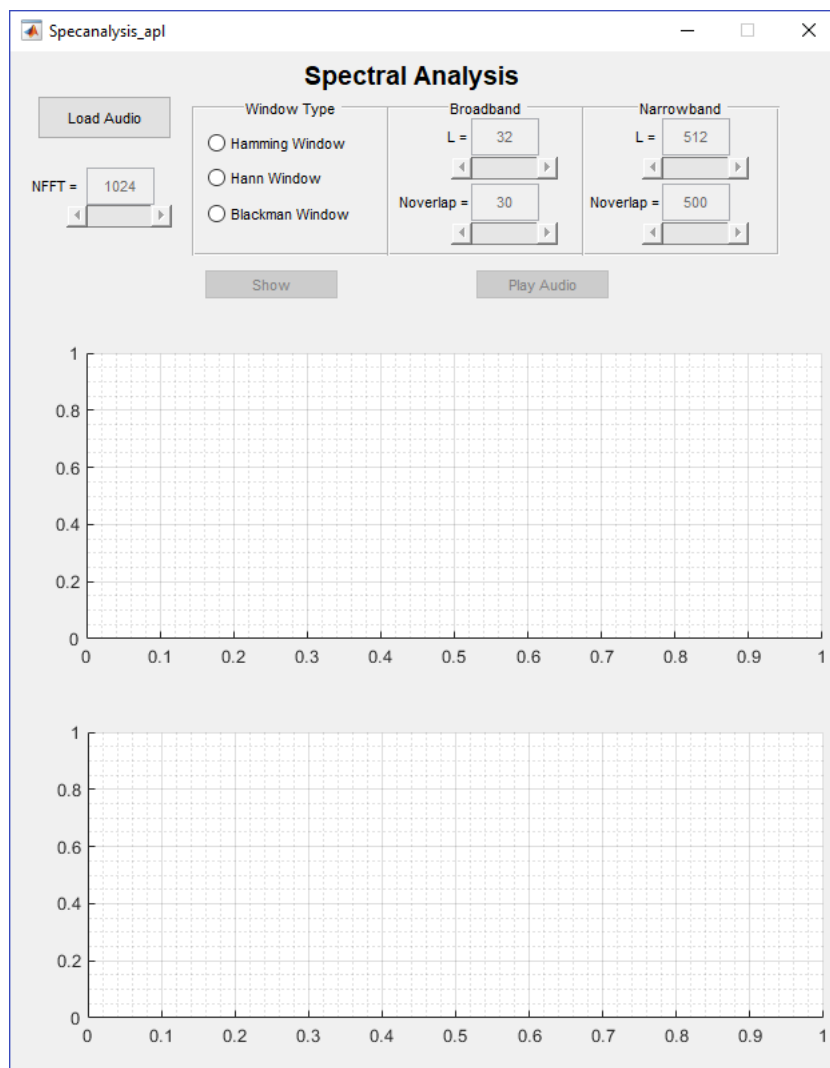
8.2 Krátkodobá spektrální analýza – praktická ukázka

Jako praktická ukázka krátkodobé spektrální analýzy byla vytvořena aplikace 8.2. Její spuštění probíhá pomocí příkazu *Specanalysis_apl*, kterou je nutné zadat v Command Window.

V prvním kroku je uživatel povinen nahrát hudební soubor, u kterého chce provést spektrální analýzu.

V dalším kroku je nutné vybrat typ použitého okna:

- *Hamming Window* – Hammingovo okno,
- *Hann Window* – Hannovo okno,
- *Blackman Window* – Blackmanovo okno.



Obr. 8.2: Aplikace SPECTRAL ANALYSIS

Aplikace je ošetřena tak, aby při výběru typu zobrazení zůstaly aktivní jen ty prvky aplikace, kterými se daný typ zobrazení ovládá. Tyto prvky lze dále buď pomocí posuvníku, nebo přepisem číselné hodnoty u daného okna měnit. Sem patří:

- L – proměnná představující počet vzorků daného okna. U širokopásmového spektrogramu se tato hodnota pohybuje v rozmezí od 32 do 512. U úzkopásmového spektrogramu v rozmezí od 500 do 1024.
- *Noverlap* – jedná se o míru překrytí (počet překrývajících se prvků). Pro širokopásmový spektrogram je v rozmezí od 20 po 511, pro úzkopásmový spektrogram se pohybuje v rozmezí od 256 po 1023.

V posledním kroku si lze stiskem tlačítka *Play Audio* zvukový vzorek přehrát a stiskem tlačítka *Show* zobrazit spektrogram dle zvolených parametrů.

9 Lineární predikční analýza

Lineární predikční analýza se využívá v řadě oborů. Jednou z možností využití jsou mobilní sítě, ve kterých se nacházejí moderní LPC kodéry CELP (Code Excited Linear Prediction) a ACELP (Algebraic Code Excited Linear Prediction). [11]

Nejvíce využívaným typem modulace u pevných digitálních sítí je modulace PCM, která přenáší řečový signál s rychlostí 64 kbit/s. Vzorkovací frekvence tohoto signálu je $f_{vz} = 8\text{kHz}$, signál je dále komprimován na 8 bitů. Z důvodu neschopnosti mobilních sítí přenášet tak vysoké přenosové rychlosti je nutné řečový signál pomocí LPC kodérů předělat na datový tok o rychlosti 5,3 kbit/s nebo 12,2 kbit/s. [11]

Pro syntézu řeči se využívá tzv. parametrický model (akustický válcový model), jehož základním prvkem je lineární predikční model hlasového traktu. Tento model využívá lineární predikční koeficienty a vychází z těchto vlastností hlasového traktu: [12]

- Ztráty, které jsou způsobeny chvěním stěn, změnou tvaru apod. jsou zanedbány. Tyto ztráty označujeme jako vnitřní.
- Dále se zanedbává vliv dutiny nosní.
- Akustickou vlnu, která se šíří válci, považujeme za rovinnou vlnu. Její délka je zanedbatelná vůči výšce válců.
- Model je lineární.

Přenosová funkce má pro model 10. řádu tvar 9.1 a aproximuje rezonanční vrcholy (formanty), vyskytující se ve spektru signálu. [11]

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{c_0}{d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots + d_9 z^{-9} + d_{10} z^{-10}} \\ &= \frac{G}{1 + \sum_{i=1}^{10} a_p[i] z^{-i}} = \frac{G}{A_p(z)} = \frac{Y(z)}{X(z)}, \end{aligned} \quad (9.1)$$

kde koeficienty $a_p[i]$ představují lineární dopředné koeficienty.

9.1 Lineární dopředná predikce

Lineární dopředná predikce (Forward Linear Prediction) slouží k odhadu budoucí hodnoty $x[n]$ pomocí předchozích hodnot konečné realizace stacionárního náhodného procesu. Tato predikce má pro řád p tvar: [12]

$$\hat{x}[n] = - \sum_{i=1}^p a_p[i] x[n-i]. \quad (9.2)$$

Celý proces odhadu spočívá ve vynásobení předchozích vzorků realizace náhodného procesu $x[n-1], \dots, x[n-p]$ pomocí váhových koeficientů $a_p[1], \dots, a_p[p]$. Při tomto procesu vzniká tzv. chyba dopředné predikce, jedná se o rozdíl mezi současnou hodnotou $x[n]$ a hodnotou odhadnutou $\hat{x}[n]$. Platí, že: [12]

$$f_p[n] = x[n] - \hat{x}[n] = x[n] + \sum_{i=1}^p a_p[i] x[n-i]. \quad (9.3)$$

Pomocí jednostranné Z transformace rovnice 9.3 lze dostat následující tvar: [12]

$$\begin{aligned} F_p[z] &= X(z) + \sum_{i=1}^p a_p[i] X(z) z^{-i} = X(z) \left[1 + \sum_{i=1}^p a_p[i] z^{-i} \right], \\ F_p(z) &\Leftrightarrow f_p[n], \\ X(z) &\Leftrightarrow x[n]. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Střední kvadratická chyba dopředné lineární predikce je definována vztahem: [12, 11]

$$\begin{aligned} \epsilon_p^f &= E(|f_p[n]|^2) \\ &= \gamma[0] + 2\text{Re} \left\{ \sum_{i=1}^p a_p^*[i] \gamma[i] \right\} + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_p^*[j] a_p[i] \gamma[j-i], \end{aligned} \quad (9.5)$$

kde $E(\cdot)$ představuje střední hodnotu a $\gamma[i]$ představuje autokorelační koeficienty.

Minimalizací chyby ϵ_p^f dochází k zisku množiny lineárních rovnic, které se nazývají normální rovnice. Využívají se pro výpočet predikčních koeficientů: [12, 11]

$$\gamma[j] = - \sum_{i=1}^p a_p[i] \gamma[j-i], \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (9.6)$$

kde proměnná $\gamma[j]$ představuje autokorelační koeficienty, které lze získat z časového průběhu řečového signálu. Následující vztah slouží k výpočtu minimální střední kvadratické predikční chyby: [12, 11]

$$\min(\epsilon_p^f) = E_p^f = \gamma[0] + \sum_{i=1}^p a_p[i] \gamma[-i]. \quad (9.7)$$

9.2 Zpětná lineární predikce

Vychází z předpokladu, že z existence vzorků $x[n], x[n-1], \dots, x[n-p+1]$ diskrétního signálu chceme dostat hodnotu $x[n-p]$: [12]

$$\hat{x}[n-p] = - \sum_{i=0}^{p-1} b_p[i] x[n-i]. \quad (9.8)$$

Chyba zpětné lineární predikce se získá pomocí rozdílu skutečné hodnoty a hodnotou odhadnutou: [12]

$$g_p[n] = x[n-p] - \hat{x}[n-p] = \sum_{i=0}^p b_p[i] x[n-i], \quad b_p[p] = 1. \quad (9.9)$$

Pomocí jednostranné Z transformace rovnice 9.9 dostaneme následující tvar: [12]

$$G_p(z) = B_p(z) X(z) \Rightarrow B_p(z) = \frac{G_p(z)}{X(z)} = \frac{G_p(z)}{G_0(z)} = \sum_{i=0}^p b_p[i] z^{-i}, \quad b_p[p] = 1. \quad (9.10)$$

Střední kvadratickou chybu zpětné lineární predikce lze vyjádřit pomocí vztahu: [12, 11]

$$\epsilon_p^b = E(|g_p[n]|^2). \quad (9.11)$$

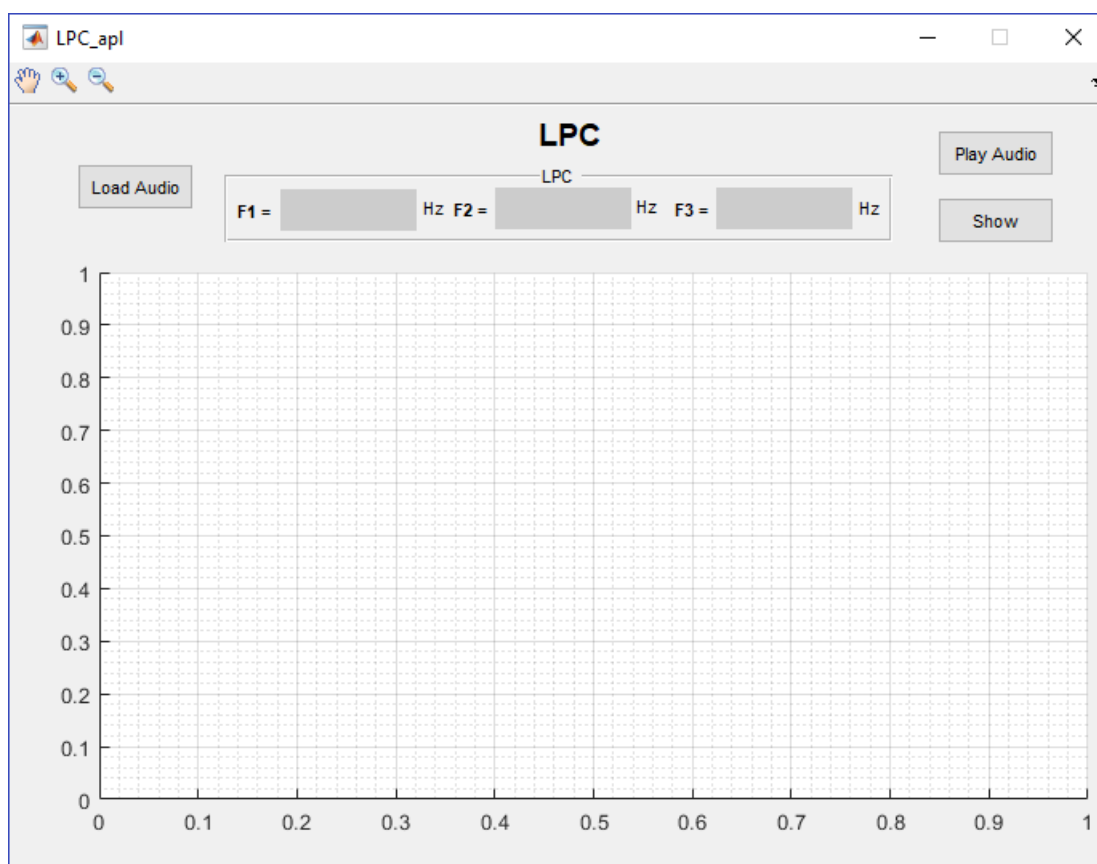
Normální rovnice lze získat stejným způsobem, jak tomu bylo v případě dopředné lineární predikce. Platí vztah, že minimální střední kvadratická chyba zpětné lineární predikce se rovná minimální kvadratické chybě lineární dopředné predikce: [11, 12]

$$\min(\epsilon_p^b) = \min(\epsilon_p^f) = E_p^b = E_p^f. \quad (9.12)$$

9.3 Lineární predikční analýza – praktická ukázka

Následující aplikace se zabývá lineární predikční analýzou u zvukového souboru. Spuštění aplikace 9.1 probíhá pomocí příkazu *LPC_apl* zadaného v Command Window.

V prvním kroku je nutné, aby uživatel nahrál testovaný zvukový soubor. Pro přehrání zvukového souboru je nutné stisknout tlačítko *Play Audio*. Zobrazení LPC analýzy probíhá po stisku tlačítka *Show*. Dojde k zobrazení spektra signálu a LPC. Dále se v aplikaci vypíše až 3 nalezené formanty – jejich frekvence.



Obr. 9.1: Aplikace LPC

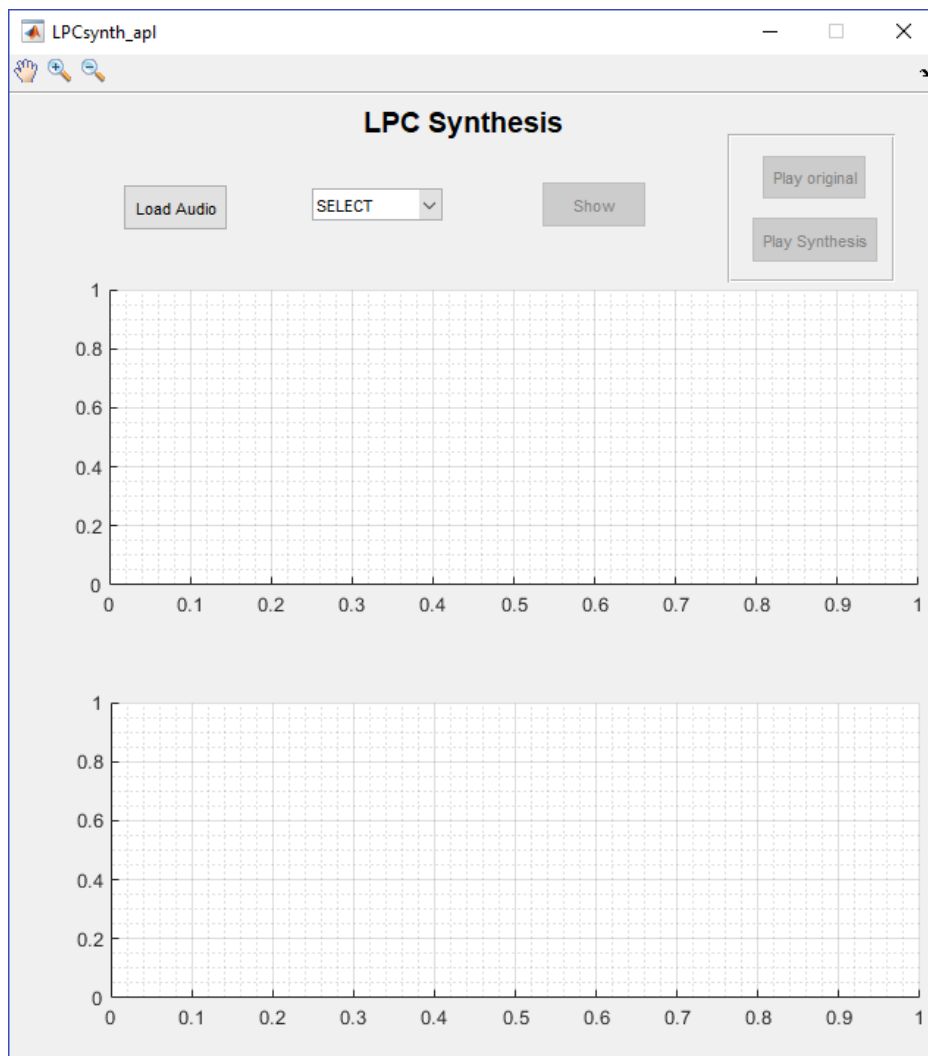
9.4 Lineární predikční syntéza – praktická ukázka

Aplikaci 9.2 může uživatel spustit zadáním příkazu *LPCsynth_apl* v Command Window.

V prvním kroku musí uživatel nahrát zvukový soubor, který chce dále podrobit LPC syntéze. Dále je nutné zvolit z menu jednu z možných variant zobrazení nahraného zvukového souboru. Sem patří:

- *Signals* – zobrazení spekter signálů před a po syntéze,
- *Spectrum* – jedná se o zobrazení modulových spekter signálů před a po syntéze,
- *Spectrograms* – zobrazení spektrogramů před a po syntéze.

Stiskem tlačítka *Play original* se lze přehrát originální hudební soubor, následným stiskem *Play Synthesis* dojde k přehrání zvukového souboru po LPC syntéze.



Obr. 9.2: Aplikace LPC SYNTHESIS

10 Spektrální výkonová hustota – PSD

Pro analýzu nenáhodných jevů se nejčastěji využívá: [12]

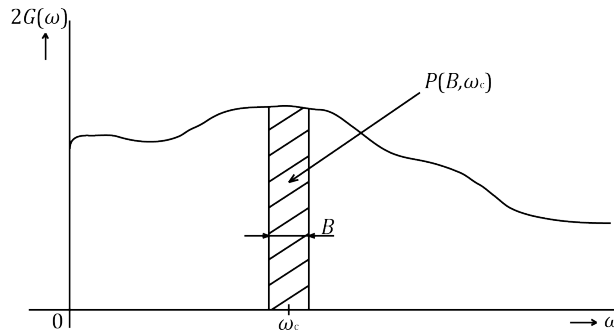
- Fourierova řada – pro signály periodické,
- Fourierova transformace – pro spojitě neperiodické signály.

U diskrétních signálů se nejčastěji používá diskrétní Fourierova transformace a diskrétní Fourierova řada. Tyto operace se ale nedají využít pro studium náhodných procesů, jelikož u nich neznáme jejich průběh. Pro popis těchto procesů ve spektrální oblasti se využívá výkonová spektrální hustota $G(\omega)$. Tato veličina udává rozložení výkonu stacionárního náhodného procesu na frekvenční ose. [12]

$$P = \int_{\omega_1}^{\omega_2} G(\omega) d\omega + \int_{-\omega_2}^{-\omega_1} G(\omega) d\omega = 2 \int_{\omega_1}^{\omega_2} G(\omega) d\omega, \quad (10.1)$$

kde P představuje střední výkon náhodného procesu, ten se nachází v pásmu kmitočtů $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle$. Při splnění nerovnosti $\omega_2 > \omega_1 > 0$, je tento výkon stanoven pomocí 10.1. [12]

Na obr. 10.1 se nachází nejjednodušší způsob měření PSD. Parametr ω_c představuje střední kmitočet a parametr B šířku pásma. Výkon $P(B, \omega_c)$ je přímo úměrný ploše pod křivkou. [12, 11]



Obr. 10.1: Výkonová spektrální hustota – měření, vychází z literatury [12]

Přibližná hodnota spektrální výkonové hustoty je definována jako: [12]

$$G(\omega) \sim \frac{P(B, \omega_c)}{2B}. \quad (10.2)$$

Jednotkou výkonové spektrální hustoty je Watt na Hertz (W/Hz). Pokud máme stacionární náhodný proces $x(t)$ se spojitým časem, lze získat jeho autokorelační funkci pomocí vztahu: [12, 11]

$$\gamma(\tau) = E(x(t), x(t + \tau)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (10.3)$$

symbol $E()$ představuje střední hodnotu.

Spektrální výkonová hustota stacionárního náhodného procesu vytváří dle Wienerova–Chinčinoва teorému pár Fourierovy transformace s autokorelační funkcí: [12]

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \\ \gamma(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Pokud nelze analyticky definovat autokorelační funkci, nelze vypočítat Fourierovu transformaci. Tím pádem nelze ani vypočítat spektrální výkonovou hustotu $G(\omega)$. Odhad autokorelační funkce pro jednu realizaci ergodického náhodného procesu délky $2T_0$, lze určit jako: [12, 11]

$$r(\tau) = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} x^*(t) x(t + \tau) dt, \quad (10.5)$$

kde $*$ představuje komplexní sdružení. Autokorelační funkce toho procesu se dá vyjádřit: [11, 12]

$$\gamma(\tau) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} r(\tau) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} x^*(t) x(t + \tau) dt. \quad (10.6)$$

Odhad spektrální výkonové hustoty lze získat pomocí aplikace Fourierovy transformace na vztah 10.5. Platí, že: [12]

$$\begin{aligned}
P(\omega) &= \int_{-T_0}^{T_0} r(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-T_0}^{T_0} \left(\frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} x^*(t) x(t+\tau) dt \right) e^{-j\omega\tau} d\tau \\
&= \frac{1}{2T_0} \left| \int_{-T_0}^{T_0} x(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2.
\end{aligned} \tag{10.7}$$

Ze vztahu 10.7 plyne, že spektrální hustotu lze vypočítat jako: [12]

$$G(\omega) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} EP(\omega) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} E \left(\frac{1}{2T_0} \left| \int_{-T_0}^{T_0} x(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2 \right). \tag{10.8}$$

Z důvodu využití počítače při výpočtu je nutné určit spektrální výkonovou hustotu pro signál diskrétní.

Diskrétní signál $x[n]$, $x \in \langle 0, N-1 \rangle$, $n \in \mathbb{Z}$ lze dostat pomocí vzorkování jedné realizace stacionárního náhodného ergodického procesu podle autokorelační funkce a střední hodnoty, jejichž kmitočet se rovná kmitočtu vzorkovacímu f_{vz} . Autokorelační posloupnost lze určit: [12]

$$r'[m] = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x^*[n] x[n+m], \tag{10.9}$$

kde * představuje komplexní sdružení. Nevýhodou vztahu 10.9 je vysoký rozptyl. Ten vznikne v případě, že se hodnoty m blíží k hodnotě N .

Z praktického hlediska se pro odhad autokorelační funkce více využívá následující vztah: [12]

$$r[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x^*[n] x[n+m], \quad m \in \langle 0, N-1 \rangle, \quad r \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{10.10}$$

Odhad spektrální výkonové hustoty se dá učinit za pomoci odhadu autokorelační posloupnosti. Platí, že: [12]

$$P(e^{j\omega}) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} r[m] e^{-j\omega m} = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{j\omega n} \right|^2 = \frac{1}{N} |X(e^{j\omega})|^2, \tag{10.11}$$

kde $X(e^{j\omega})$ představuje Fourierovu transformaci signálu $x[n]$.

Vztah 10.11 se nazývá periodogram. Platí, že: [12]

$$\begin{aligned} EP(e^{j\omega}) &= \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) \gamma[m] e^{-j\omega m} \\ &= \frac{1}{2\pi} G(e^{j\omega}) * W_B(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\alpha}) W_B(e^{j(\omega-\alpha)}) d\alpha, \end{aligned} \quad (10.12)$$

kde symbol $*$ představuje diskrétní konvoluci.

Z předchozího vztahu 10.12 je zřejmé, že dochází k násobení autokorelační posloupnosti $\gamma[m]$ trojúhelníkovým oknem $w_B[n]$, které lze vyjádřit jako: [12]

$$\begin{aligned} w_B[n] &= 1 - \frac{|n|}{N}, \quad |n| \leq N-1, \quad n \in \mathbb{N}, \\ w_B[n] &= 0, \quad \text{pro ostatní } n \end{aligned} \quad (10.13)$$

Pro spektrum trojúhelníkového okna ze vztahu 10.13 platí, že:

$$W_B(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \left(\frac{\sin \omega \frac{M}{2}}{\sin \frac{\omega}{2}} \right)^2. \quad (10.14)$$

Dle následujícího vztahu lze zjistit, že periodogram představuje asymptoticky nevychýlený odhad spektrální výkonové hustoty: [12]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} EP(e^{j\omega}) = G(e^{j\omega}). \quad (10.15)$$

Při určování rozptylu periodogramu lze zjistit, že tento rozptyl s rostoucím N neklesá k nule. Platí vztahy: [12]

$$DP(e^{j\omega}) = G^2(e^{j\omega}) \left\{ 1 + \left(\frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{N \sin \frac{\omega}{2}} \right) \right\}, \quad (10.16)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} DP(e^{j\omega}) = G^2(e^{j\omega})$$

Periodogram nepředstavuje konsistentní odhad pro spektrální výkonovou hustotu, ten lze získat až po zavedení průměrování odhadů (využívá se např. u neparametrických metod). [12]

10.1 Neparametrické metody

Mezi 3 hlavní neparametrické metody výpočtu spektrální výkonové hustoty patří: [12]

- *Welchova metoda* – dochází k průměrování modifikovaných periodogramů,
- *Bartlettova metoda* – základem operace je průměrování periodogramů,
- *Blackmanova a Tukeyova* – dochází k vyhlazování periodogramů.

Hlavním znakem neparametrických metod je, že u právě zpracovávaných dat nejsou hledány jejich parametry. Pro obdržení dostatečného odhadu spektrální výkonové hustoty je důležité použít delší záznam ergodického náhodného procesu $x[n]$. Jednou z nevýhod neparametrických metod patří předpoklad nulové hodnoty odhadu autokorelace $r[m]$ pro $m \geq N$, což způsobuje omezení kmitočtového rozlišení periodogramu. Mezi další neplatné předpoklady patří periodičnost signálu s periodou N . Využívají se realizace náhodného procesu s konečnou délkou, dochází tak k překryvu spekter způsobeným časovými okny. [12]

Pro získání nejvhodnějšího kmitočtového rozlišení posloupnosti $x[n]$ konečné délky se využívá pravoúhlé okno s délkou N . Modul spektra pravoúhlého okna (v dB) má při poklesu o -3 dB hodnoty v bodech rovny $1/N$. Kmitočtové rozlišení posloupnosti $x[n]$ je pak shodné se šířkou hlavního laloku tohoto modulu. Pokud dojde k využití ostatních oken, dojde tak k rozšíření laloku modulu spektra u vybraného okna. [12]

10.1.1 Bartlettova metoda

Snížení rozptylu periodogramu u Bartlettovy metody je docíleno pomocí následujících kroků: [12]

- v prvním kroku dochází k rozdělení posloupnosti $x[n]$ konečné délky N na konečný počet segmentů K , kde každý segment je délky M .

$$x_i[n] = x[n + iM], \quad i = 0, 1, \dots, K-1; \quad n = 0, 1, \dots, N-1; \quad N = K \cdot M. \quad (10.17)$$

- V dalším kroku dojde k zisku periodogramu pro každý segment K :

$$\hat{P}^{(i)}(e^{j\omega}) = \frac{1}{M} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x[n] e^{-j\omega n} \right|^2. \quad (10.18)$$

- Následně dochází k průměrování získaných periodogramů:

$$P^B(e^{j\omega}) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} \hat{P}^{(i)}(e^{j\omega}). \quad (10.19)$$

Střední hodnotu pro Bartlettův odhad lze získat ze vztahu: [12]

$$EP^B(e^{j\omega}) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} E\hat{P}^{(i)}(e^{j\omega}) = E\hat{P}^{(i)}(e^{j\omega}). \quad (10.20)$$

Rozptyl spektrální výkonové hustoty pro tento typ odhadu je rovna: [12]

$$DP^B(e^{j\omega}) = \frac{1}{K^2} \sum_{i=0}^{K-1} DP^{(i)}(e^{j\omega}) = \frac{1}{K} DP^{(i)}(e^{j\omega}). \quad (10.21)$$

Kvůli zkrácení vstupní posloupnosti $x[n]$ délky N na délku jednoho segmentu $M = \frac{N}{K}$, došlo k rozšíření šířky hlavního laloku o násobek hodnoty K a ke snížení spektrální rozlišitelnosti. [12]

Z následujícího vztahu lze zjistit, že rozptyl Bartletova odhadu je K krát menší, než rozptyl periodogramu: [12]

$$DP^B(e^{j\omega}) = \frac{1}{K} G^2(e^{j\omega}) \left\{ 1 + \left(\frac{\sin \frac{\omega N}{2}}{N \sin \frac{\omega}{2}} \right)^2 \right\}. \quad (10.22)$$

10.1.2 Welchova metoda

Welch využil Bartlettovu metodu, ve které učinil dvě zásadní úpravy: [10, 12]

- U segmentů povolil jejich překryv. Data jsou pak zastoupena jako

$$x_i[n] = x[n + iD], \quad n = 0, 1, \dots, M-1, \quad i = 0, 1, \dots, L-1. \quad (10.23)$$

Hodnota iD představuje počáteční bod i té posloupnosti. Existují dvě možnosti: [10, 12]

1. $D = M$ – nedochází k překryvu segmentů, tím pádem se $L = K$ a počet segmentů u Welchovy metody je shodný s počtem segmentů v Bartlettově metodě.
 2. $D = \frac{M}{2}$ – zde se $L = 2K$ a počet segmentů je dvojnásobný oproti Bartlettově metodě.
- Před samotným ziskem periodogramu dochází k násobení datového toku pomocí časového okna $w[n]$. Dochází k zisku modifikovaného periodogramu: [10, 12]

$$\hat{P}^{(i)}(e^{j\omega}) = \frac{1}{MU} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_i[n] w[n] e^{-j\omega n} \right|^2, \quad i = 0, 1, \dots, L-1, \quad (10.24)$$

kde U představuje normalizační koeficient, který lze získat ze vztahu: [10, 12]

$$U = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} w^2[n]. \quad (10.25)$$

Pomocí metody průměrování modifikovaných periodogramů lze vypočítat Welchův odhad spektrální výkonové hustoty: [10, 12]

$$P^W(e^{j\omega}) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \hat{P}^{(i)}(e^{j\omega}). \quad (10.26)$$

Pomocí následujícího vztahu lze získat střední hodnotu Welchova odhadu spektrální výkonové hustoty: [10, 12]

$$EP^W(e^{j\omega}) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} E\hat{P}^{(i)}(e^{j\omega}) = E\hat{P}^{(i)}(e^{j\omega}). \quad (10.27)$$

Při využití Bartlettova okna s 50% přesahem se rozptýl Welchova odhadu spektrální výkonové hustoty přibližně rovná: [10, 12]

$$DP^W(e^{j\omega}) \sim \frac{9}{8L} G^2(e^{j\omega}). \quad (10.28)$$

10.1.3 Blackmanova a Tukeyova metoda

Poslední neparametrickou metodou je Blackmanova a Tukeyova. Podstatou této metody je, že v prvním kroku dochází k výpočtu odhadu autokorelační posloupnosti. Tento odhad má konečnou délku N , proto je v následujícím kroku vynásoben časovým oknem $w[n]$. V posledním kroku dochází k odhadu spektrální výkonové hustoty za využití Fourierovy transformace diskretního signálu [12]

$$P^{BT}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} r[m] w[m] e^{-j\omega m}. \quad (10.29)$$

Délka časového okna $w[m]$ je $2M - 1$ a pro $m \geq M$ má nulové hodnoty. Taktéž představuje sudou posloupnost, takže je symetrické kolem $m = 0$. Odhad spektrální výkonové hustoty je pak reálnou funkcí. Další podmínkou je, že spektrum časového okna nesmí obsahovat záporné hodnoty. [12]

$$W(e^{j\omega}) \geq 0, \quad \text{pro } |\omega| < \pi. \quad (10.30)$$

Z následujícího vztahu lze vypočítat střední hodnotu Blackmanova a Tukeyova odhadu: [12]

$$EP^{BT}(e^{j\omega}) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\alpha}) W(e^{j(\omega-\alpha)}) d\alpha. \quad (10.31)$$

Rozptýl Blackmanovy a Tukeyovy metody vychází z následujícího vztahu: [12]

$$DP^{BT}(e^{j\omega}) \sim G^2(e^{j\omega}) \left\{ \frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} W^2(e^{j\alpha}) d\alpha \right\} \quad (10.32)$$

10.2 Parametrické metody

Výpočet spektrální výkonové hustoty pomocí neparametrických metod je poměrně jednoduchý a snadně realizovatelný proces, pokud se při něm využívá algoritmů FFT. Jednou z nevýhod těchto metod je, že pro získání požadovaného kmitočtového rozlišení je nutné využívat delší záznamy dat. Kvalitu kmitočtového rozlišení nejvíce ovlivňuje předpoklad, že odhad autokorelace $r[m]$ má nulové hodnoty, když $m \geq N$. Dalším velikým problémem je spektrální prosakování, při kterém dochází k překryvu nižších složek ve spektru. [12]

Parametrické metody dokáží pomocí získaných dat vypočítat hodnoty autokorelace pro $m \geq N$ a odhadnout tak parametry modelu. A na základě znalosti tohoto modelu lze odhadnout spektrální výkonovou hustotu. Výhodou parametrických metod je, že při jejich využívání nedochází k prosakování spektra a taktéž nejsou potřeba příliš dlouhé úseky pozorovaných dat. Podstata této metody spočívá v tom, že pozorovaná data jsou modelována jako výstup LTI diskrétního systému. Přenosová funkce tohoto systému je ve tvaru: [12]

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{i=0}^q b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}} = \frac{X(z)}{W(z)}. \quad (10.33)$$

Diferenční rovnice pro přenosovou funkci 10.33 je ve tvaru: [12]

$$x[n] = -\sum_{i=1}^p a_i x[n-i] + \sum_{i=0}^q b_i w[n-i], \quad (10.34)$$

kde $w[n]$ představuje vstupní posloupnost systému a $x[n]$ představuje pozorovaná data na výstupu systému. Tato data nejsou při odhadu spektrální výkonové hustoty pozorovatelná. Platí však, že pokud data $x[n]$ představují realizaci náhodného stacionárního procesu, tak musí vstupní data LTI systému být realizací tohoto stacionárního systému. Platí, že: [12]

$$G_x(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 G_w(e^{j\omega}), \quad (10.35)$$

kde $G_w(e^{j\omega})$ představuje spektrální výkonovou hustotu pro posloupnost $w[n]$ a $H(e^{j\omega})$ představuje kmitočtovou charakteristiku modelu, jehož přenosová funkce má tvar 10.33. [12]

Pokud je vstupní posloupnost $w[n]$ posloupností bílého šumu, jehož střední hodnota a autokorelační posloupnost jsou nulové, lze získat spektrální výkonovou hustotu $G_x(e^{j\omega})$ za pomoci vztahu: [12]

$$\gamma_w[m] = \sigma_w^2 \delta[m], \quad (10.36)$$

kde σ_w^2 představuje rozptyl bílého šumu, jehož výpočet je $\sigma_w^2 = E|w[n]|^2$, $\delta[m]$ představuje posloupnost jednotkové pulzu. Aplikací Fourierovy transformace na 10.36 získáme spektrální výkonovou hustotu $G_w(e^{j\omega})$: [12]

$$G_w(e^{j\omega}) = \sigma_w^2. \quad (10.37)$$

Výslednou spektrální výkonovou hustotu lze dostat kombinací rovnic 10.36 a 10.37: [12]

$$G_x(e^{j\omega}) = \sigma_w^2 |H(e^{j\omega})|^2 = \sigma_w^2 \frac{|B(e^{j\omega})|^2}{|A(e^{j\omega})|^2}. \quad (10.38)$$

Spektrální výkonová hustota se získává pomocí parametrických metod ve 2 krocích: [12]

- Z posloupnosti dat $x[n]$, $n \in \langle 0, N-1 \rangle$, $n \in \mathbb{Z}$ jsou získány parametry modelu $a_i, i = 0, 1, \dots, p$ a $b_i, i = 0, 1, \dots, q$.
- V následujícím kroku dochází za pomoci 10.38 k výpočtu spektrální výkonové hustoty.

10.2.1 ARMA, AR a MA parametrické modely

ARMA (AutoRegressive–moving Average) řádu (p, q) se nazývá stacionární náhodný proces, který je možné vyjádřit modelem s přenosovou funkcí 10.33 s póly a nulovými body. [12]

Pokud je splněna podmínka, že $q = 0$ a $b_0 = 1$, je výsledná přenosová funkce daného modelu následující: [12]

$$H(z) = \frac{1}{A(z)} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}}. \quad (10.39)$$

Získaná výstupní posloupnost $x[n]$ představuje tzv. autoregresivní model náhodného procesu (AR(p)). Tento model je z praktického hlediska nejvíce využívaný. Je nejvhodnější při reprezentaci spektra, které obsahuje úzké vrcholy, a také výpočet jeho parametrů probíhá za pomoci soustavy lineárních rovnic. [12]

Poslední možný model lze získat, pokud je dodržena podmínka, že $A(z) = 1$. Výsledná přenosová funkce má pak tvar: [12]

$$H(z) = B(z) = \sum_{i=0}^q b_i z^{-i}. \quad (10.40)$$

Výstupní posloupnost $x[n]$ představuje model tzv. náhodného procesu s klouzavými součty (MA(q)). [12]

10.2.2 Yuleova–Walkerova metoda

Yuleova–Walkerova metoda využívá pro odhad spektrální výkonové hustoty AR model. Odhad autokorelační posloupnosti probíhá pomocí 10.41 a jedná se o asymptoticky nevychýlený odhad: [12]

$$r[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x^*[n] x[n+m], \quad m \in \langle 0, N-1 \rangle, \quad r \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (10.41)$$

Důvodem je, aby autokorelační matice obsahovala pouze kladná čísla. Dalším důležitým předpokladem je stabilita AR modelu, jehož parametry lze získat za pomoci Levinsonova–Durbinova algoritmu. Pro odhad spektrální výkonové hustoty platí: [12]

$$\hat{G}_x^{\text{YW}}(e^{j\omega}) = \frac{\hat{\sigma}_{wp}}{\left| 1 + \sum_{i=1}^p \hat{a}_p[i] e^{-j\omega i} \right|^2}, \quad (10.42)$$

kde $\hat{a}_p[i]$ představuje odhad lineárních predikčních koeficientů pro AR model. Minimální střední kvadratická chyba predikce se dá vypočítat podle následujícího vztahu: [12]

$$\hat{\sigma}_{wp} = \hat{E}_p^f = r[0] \prod_{i=1}^p (1 - |\hat{a}_p[i]|^2). \quad (10.43)$$

10.2.3 Burgova metoda

Při používání Burgovy metody existuje předpoklad, že existují data $x[n]$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, u kterých chceme získat odhad spektrální výkonové hustoty, který probíhá s využitím dopředné a zpětné LP m tého řádu: [12]

$$\hat{x}[n] = - \sum_{i=1}^m a_m[i] x[n-i],$$

$$\hat{x}[n-m] = - \sum_{i=1}^m a_m[m-i] x[n+i-m],$$

kde $a_m[i]$ představují reálné LP koeficienty. Definice dopředné a zpětné chyby LP vypadá následovně: [12]

$$f_m[n] = x[n] - \hat{x}[n], \quad g_m[n] = x[n-m] - \hat{x}[n-m]. \quad (10.44)$$

Nejmenší kvadratickou chybu lze získat pomocí vztahu: [12]

$$\epsilon_m = \sum_{n=m}^{N-1} (|f_m[n]|^2 + |g_m[n]|^2). \quad (10.45)$$

Chybu 10.45 je možné minimalizovat správnou volbou LP koeficientů, které jsou získány pomocí Levinsonova–Durbinova algoritmu. Tento algoritmus má tvar: [12]

$$a_m[i] = a_{m-1}[i] + K_m a_{m-1}^*[m-1], \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad 1 \leq m \leq p. \quad (10.46)$$

Minimalizace chyby ϵ_m pomocí koeficientů K_m lze provést dosazením rovnice 10.46 do vztahu 10.44. Platí, že: [12]

$$K_m = \frac{- \sum_{n=m}^{N-1} f_{m-1}[n] g_{m-1}[n-1]}{\frac{1}{2} \sum_{n=m}^{N-1} (|f_{m-1}[n]|^2 + |g_{m-1}[n-1]|^2)} = \frac{- \sum_{n=m}^{N-1} f_{m-1}[n] g_{m-1}[n-1]}{\frac{1}{2} \sum_{n=m}^{N-1} (\hat{E}_{m-1}^f + \hat{E}_{m-1}^b)}, \quad (10.47)$$

kde $m = 1, 2, \dots, p$ a $\hat{E}_m = \hat{E}_{m-1}^f + \hat{E}_{m-1}^b$ představuje odhad celkové chyby \hat{E}_m .

Odhad spektrální výkonové hustoty pomocí Burgovy metody spočívá ve 3 krocích: [12]

- V prvním kroku jsou Burgovým algoritmem získány za pomoci vztahu 10.47 koeficienty odrazu u křížové struktury.
- Ve druhém kroku jsou z těchto koeficientů získány pomocí Levinsonova–Durbinova algoritmu 10.46 LP koeficienty $a_m[i]$.
- V posledním kroku je z predikčních koeficientů získán odhad spektrální výkonové hustoty:

$$\hat{G}_x^{\text{BU}}(e^{j\omega}) = \frac{\hat{E}_p}{\left|1 + \sum_{i=1}^p \hat{a}_p[i] e^{-j\omega i}\right|^2}. \quad (10.48)$$

Kmitočtové rozlišení je při odhadu spektrální výkonové hustoty Burgovou metodou vysoké. Výhodou využití AR modelu je jeho stabilita a efektivnost výpočtu. Mezi nevýhody využití této metody patří dělení spektrálních čar, které vzniká při větším dostupu signálu od šumu. [12]

10.3 Výkonová spektrální hustota – praktická ukázka

Následující aplikaci 10.2 lze spustit pomocí příkazu *PSD_apl* v Command Window.

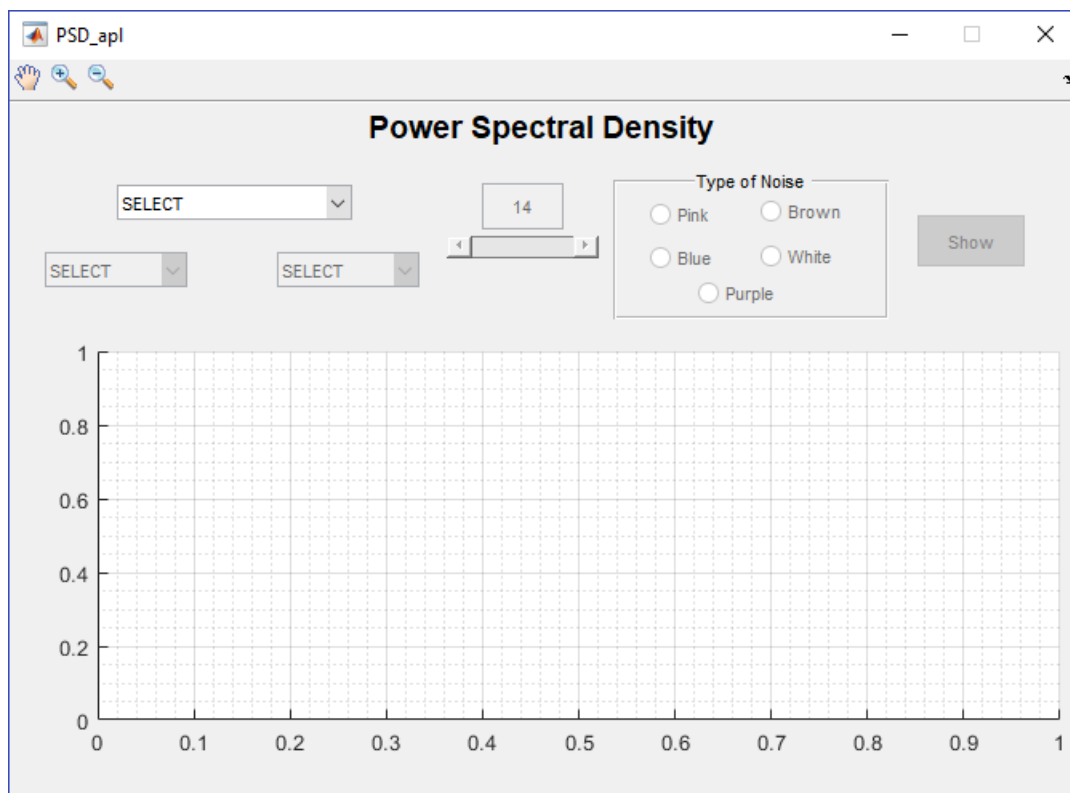
V první kroku je nutné, aby uživatel z menu zvolil, zda-li chce zobrazovat parametrické nebo neparametrické metody. Po této volbě zůstanou aktivní pouze ty prvky aplikace, kterými se zvolený typ metody ovládá. V dalším kroku je nutné zvolit, jaký typ dané metody chce uživatel zobrazit. Pro parametrické metody má na výběr:

- *Yule–Walker AR Method* – Yuleova–Walkerova metoda,
- *Burg AR Method* – Burgova metoda,
- *Covariance Methods* – kovarianční metoda,
- *Modified Covariance Methods* – modifikovaná kovarianční metoda.

Mezi neparametrické metody patří:

- *Periodogram* – periodogram,
- *Welch's Method* – Welchova metoda,
- *Thomson Multitaper Method* – Thomsonova metoda.

V následujícím kroku musí uživatel zvolit, jaký typ šumu chce zobrazit. Na výběr má mezi růžovým, hnědým, modrým, bílým a fialovým. Dále může ovlivnit řád



Obr. 10.2: Aplikace PSD

modelu, nebo použít hodnotu již nastavenou. Změnu řádu lze provést buď pomocí posuvníku, nebo přepisem číselné hodnoty. Rozsah hodnoty se pohybuje od 1 po 30 a je aktivní pouze pro parametrické metody.

Na závěr lze pomocí tlačítka *Show* zobrazit zvolenou metodu zobrazení spektrální výkonové hustoty pro daný typ šumu.

11 Závěr

Tato práce se zabývá praktickými ukázkami zpracování signálů. Jsou zde obecně popsány jednotlivé operace se signály spojitými i diskrétními a jejich využití v praxi. Pro všechny zmíněné operace jsou vypracovány praktické ukázky v programovém prostředí MATLAB včetně grafických rozhraní pro snadnější obsluhu aplikací.

V každé části práce se nachází obecné kapitoly popisující danou problematiku z teoretického hlediska. Následně se za touto částí nachází vypracovaná praktická ukázka demonstrující danou problematiku.

První část práce se zabývá teoretickými poznatky z oblasti signálů, jednotlivými operacemi se spojitými a diskrétními signály. Blíže jsou zde popsány operace časového posunutí, změny časového měřítka, 1D a 2D konvoluce a korelace. Pro všechny tyto operace se zde nachází jejich praktická ukázka.

Další část se věnuje obecně spektrální analýze a převodem signálu se spojitým časem na signál diskrétní, jedná se tedy o proces vzorkování a kvantování signálu. Pro obě tyto operace se zde nachází praktická ukázka. Dále je zde vysvětlena příčina vzniku aliasingu a jeho praktická ukázka. V závěru této kapitoly se nacházejí teoretické poznatky k diskrétní Fourierově řadě a transformaci, rychlé Fourierově transformaci a diskrétní kosinové transformaci. Pro všechny tyto operace se zde nachází opět praktické ukázky využití.

Na tuto část navazuje kapitola zabývající se modulacemi signálu. Nachází se zde základní rozdělení modulací, blíže jsou popsány modulace amplitudová a frekvenční, pro které je vytvořena taktéž praktická ukázka.

Další kapitola práce se zabývá obecnými principy Z transformace a jejími modifikacemi. Jsou zde vysvětleny základní pojmy, jimiž jsou – oblast konvergence, póly a nulové body. Taktéž se zde nachází praktická ukázka využití této transformace.

Na tuto kapitolu navazuje část, která se zabývá kmitočtovými filtry a číslicovými filtry. Z hlediska kmitočtových filtrů jsou zde popsány základní typy filtrů, jejich návrhy a také se zde nachází část zabývající se řádem přenosové funkce filtru. U číslicových filtrů jsou zde blíže popsány filtry typu FIR a IIR a hřebenové filtry. Pro obě zmíněné operace se zde nachází jejich praktická ukázka.

Šestá kapitola je věnována bankám číslicových filtrů. Blíže je zde popsáno složení základní banky filtru a jejich základní rozdělení. Jako praktická ukázka byl vytvořen sluchový test.

Následující kapitola se zabývá vlnkovou transformací. Jsou zde popsány základní náležitosti mateřské vlnky a taktéž se zde nachází základní rozdělení pro vlnkovou transformaci. Taktéž se zde nachází praktická ukázka pro tuto transformaci.

Osmá kapitola je věnována krátkodobé spektrální analýze a jejímu praktickému využití. Dále se zde nacházejí teoretické poznatky ke krátkodobé Fourierově trans-

formaci.

Předposlední kapitola zpracovává základní poznatky k lineární predikční analýze. Nachází se zde teoretická část k lineární dopředné i zpětné predikci. V závěru kapitoly je vypracována praktická ukázka k této operaci.

V závěrečné kapitole je rozebrána spektrální výkonová hustota. Nachází se zde základní členění jejího výpočtu a také je zde vypracovaná aplikace.

Tato práce má za úkol ulehčit pochopení problematiky zpracování signálů. Cílem diplomové práce bylo vytvořit 20 praktických ukázek pro zpracování signálů. V příloze práce se nacházejí výsledky jednotlivých aplikací. Mezi tyto praktické ukázky patří:

- časové posunutí signálu – efekt echo,
- změna časového měřítka signálu – magnetofon,
- 1D lineární konvoluce – filtrace signálu,
- 2D konvoluce – hranový detektor,
- korelace – radar,
- vzorkování – 'moire' efekt,
- změna vzorkovacího kmitočtu,
- kvantování,
- aliasing,
- Fourierova řada,
- diskrétní Fourierova transformace,
- rychlá Fourierova transformace,
- diskrétní kosinová transformace – komprese JPEG,
- AM a FM modulace,
- transformace Z,
- kmitočtové filtry – filtrace signálu,
- číslicové filtry,
- banka filtrů,
- vlnková transformace,
- krátkodobá spektrální analýza,
- lineární predikční analýza,
- spektrální výkonová hustota.

Literatura

- [1] HÁJEK, Karel a Jiří SEDLÁČEK. *Kmitočtové filtry*. Praha: BEN - technická literatura, 2002. ISBN 80-730-0023-7.
- [2] HLAVÁČ, Václav a Miloš SEDLÁČEK. *Zpracování signálů a obrazů*. Vyd. 2., přeprac. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2005. ISBN 80-010-3110-1.
- [3] HOFFNER, Václav. *Úvod do teorie signálů*. Praha: SNTL, 1979. Teoretická knižnice inženýra. ISBN 0452979.
- [4] JAN, Jiří. *Číslicová filtrace, analýza a restaurace signálů*. 2. upr. a rozš. vyd. Brno: VUTUM, 2002. ISBN 80-214-1558-4.
- [5] KADLEC, František. *Zpracování akustických signálů*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2002. ISBN 80-010-2588-8.
- [6] MIŠUREC, Jiří. *Základní metody číslicového zpracování signálů pro integrovanou výuku VUT a VŠB-TUO*. [online]. 2014 Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav telekomunikací, [cit. 2018-10-25]. ISBN 978-80-214-5118-6.
- [7] PROAKIS, John G. *Introduction to digital signal processing*. II. New York: Macmillan Publishing Company, 1989. Engineering. ISBN 00-294-6253-3.
- [8] SEDLÁČEK, Miloš. *Zpracování signálů v měřicí technice*. Vyd. 2. Praha: České vysoké učení technické, 1998. ISBN 9788001009000.
- [9] SCHIMMEL, Jiří. *Studiová a hudební elektronika*. Vyd. 2. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2015. ISBN 978-80-214-4452-2.
- [10] SMÉKAL, Zdeněk. *Analýza signálu a soustav - BASS* [online]. 2012, Vysoké učení technické v Brně Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav telekomunikací, Brno, [cit. 2018-09-30]. ISBN 978-80-214-4453-9.
- [11] SMÉKAL, Zdeněk. *Číslicové zpracování signálů*. Purkyňova 118, 61200 Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, ústav komunikací, 2012. ISBN 978-80-214-4639-7.
- [12] SMÉKAL, Zdeněk. *Systémy a signály: 1D a 2D diskrétní a číslicové zpracování*. Praha: Sdělovací technika, 2013. ISBN 978-80-86645-23-0.
- [13] SOVKA, Pavel a Petr POLLÁK. *Vybrané metody číslicového zpracování signálů*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2001. ISBN 80-010-2416-4.

- [14] ŠEBESTA, Vladimír. *Systémy, procesy a signály*. Brno: PC-DIR, 1994. ISBN 80-214-0574-0.
- [15] UHLÍŘ, Jan a Pavel SOVKA. *Číslicové zpracování signálů*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1995. ISBN 80-010-1303-0.
- [16] VÍCH, Robert a Zdeněk SMÉKAL. *Číslicové filtry*. Praha: Academia, 2000. Česká matice technická (Academia). ISBN 80-200-0761-X.
- [17] ZAPLATÍLEK, Karel. *MATLAB®: začínáme se signály*. Brno: Tribun EU, 2015. Knihovnicka.cz. ISBN 978-80-263-0898-0.

Seznam symbolů, veličin a zkratek

ACELP	Algebraic Code Excited Linear Prediction
AM	Amplitude Modulation – amplitudová modulace
AM DSB	Amplitude Modulation Dual Side Band – amplitudová modulace s oběma postranními pásmy a nosnou
AM DSB RC	Amplitude Modulation Dual Side Band Reduced Carrier – amplitudová modulace s oběma postranními pásmy a zmenšenou nosnou
AM DSB SC	Amplitude Modulation Dual Side Band Supressed Carrier – amplitudová modulace s oběma postranními pásmy a potlačenou nosnou
AM SSB	Amplitude Modulation Single Side Band – amplitudová modulace s jedním postranním pásmem a nosnou
AM SSB RC	Amplitude Modulation Single Side Band Reduced Carrier – amplitudová modulace s jedním postranním pásmem a potlačenou nosnou
AM SSB SC	Amplitude Modulation Single Side Band Supressed Carrier – amplitudová modulace s jedním postranním pásmem a potlačenou nosnou
AR	Autoregressive model – autoregresní model
ARMA	AutoRegressive–moving Average
AWGN	Additive White Gaussian Noise – aditivní bílý Gaussův šum
CD	Compact Disc – kompaktní disk
CELP	Code Excited Linear Prediction
dB	decibel
DCT	Discrete Cosine Transform – diskrétní kosinová transformace
DFŘ	Diskrétní Fourierova řada
DFT	Diskrétní Fourierova transformace
DIF	Decimation in Frequency
DIT	Decimation in Time
DTFT	Discrete Time Fourier Transform
DVD	Digital Video Disc – digitální video disk
FFT	Fast Fourier Transform – rychlá Fourierova transformace
FIR	Finite Impulse Response – filtr s konečnou impulsní odezvou
FM	Frequency Modulation – frekvenční modulace
GSM	Groupe Spécial Mobile – standard pro mobilní telefony
Hz	hertz
IIR	Infinite Impulse Response – filtr s nekonečnou impulsní odezvou

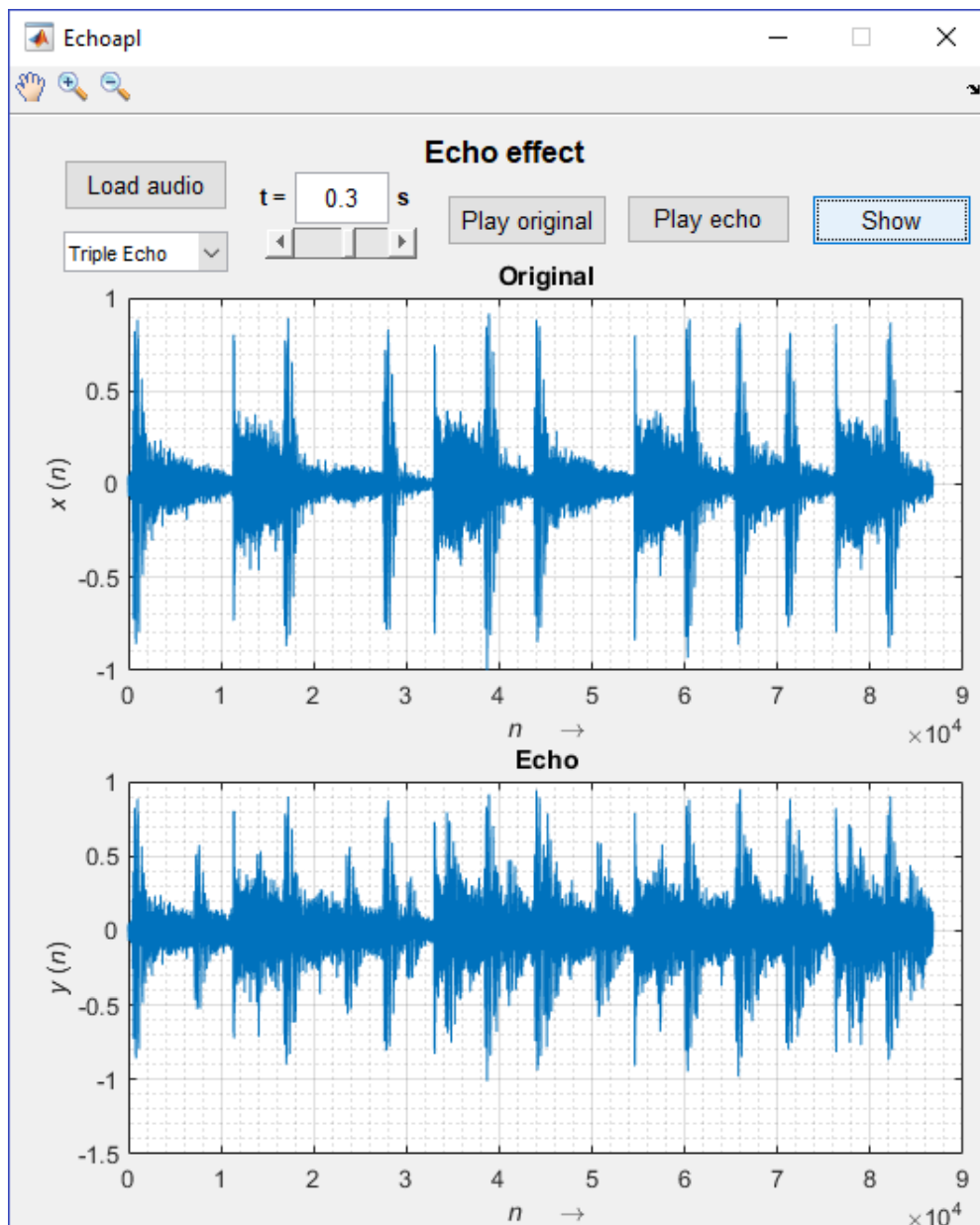
LPC	Linear Predictive Coding – lineární prediktivní kódování
MA	Moving-average model – model s pohyblivým průměrem
PCM	Pulse-code modulation – pulzně kódová modulace
PSD	Power Spectral Density – výkonová spektrální hustota
RAM	Random Acces Memory – paměť s libovolným přístupem
SNR	Signal Noise Ratio – poměr signál/šum
STFT	Short-time Fourier Transform – krátkodobá Fourierova transformace

Seznam příloh

A Praktické ukázky – výsledky	101
A.1 Časové posunutí	101
A.2 Změna časového měřítka	102
A.3 1D lineární konvoluce	103
A.4 Konvoluce 2D	104
A.5 2D filtrace	105
A.6 Korelace	106
A.7 Moire efekt	107
A.8 Změna vzorkovacího kmitočtu	108
A.9 Aliasing	109
A.10 Kvantizace	110
A.11 Fourierova řada	111
A.12 Fourierova řada – syntéza signálů	112
A.13 Vztah DFT a DTFT	113
A.14 Vztah DFT a FFT	114
A.15 Rychlá Fourierova transformace	115
A.16 Rychlá Fourierova transformace – konvoluce	116
A.17 Diskrétní kosinová transformace	117
A.18 Modulace	118
A.19 Transformace Z	119
A.20 Kmitočtové filtry	120
A.21 Číslicové filtry	121
A.22 Banka číslicových filtrů	122
A.23 Vlnková transformace	123
A.24 Krátkodobá spektrální analýzy	124
A.25 Lineární predikční analýza	125
A.26 Lineární predikční syntéza	126
A.27 Spektrální výkonová hustota	127
B Obsah přiloženého CD	128

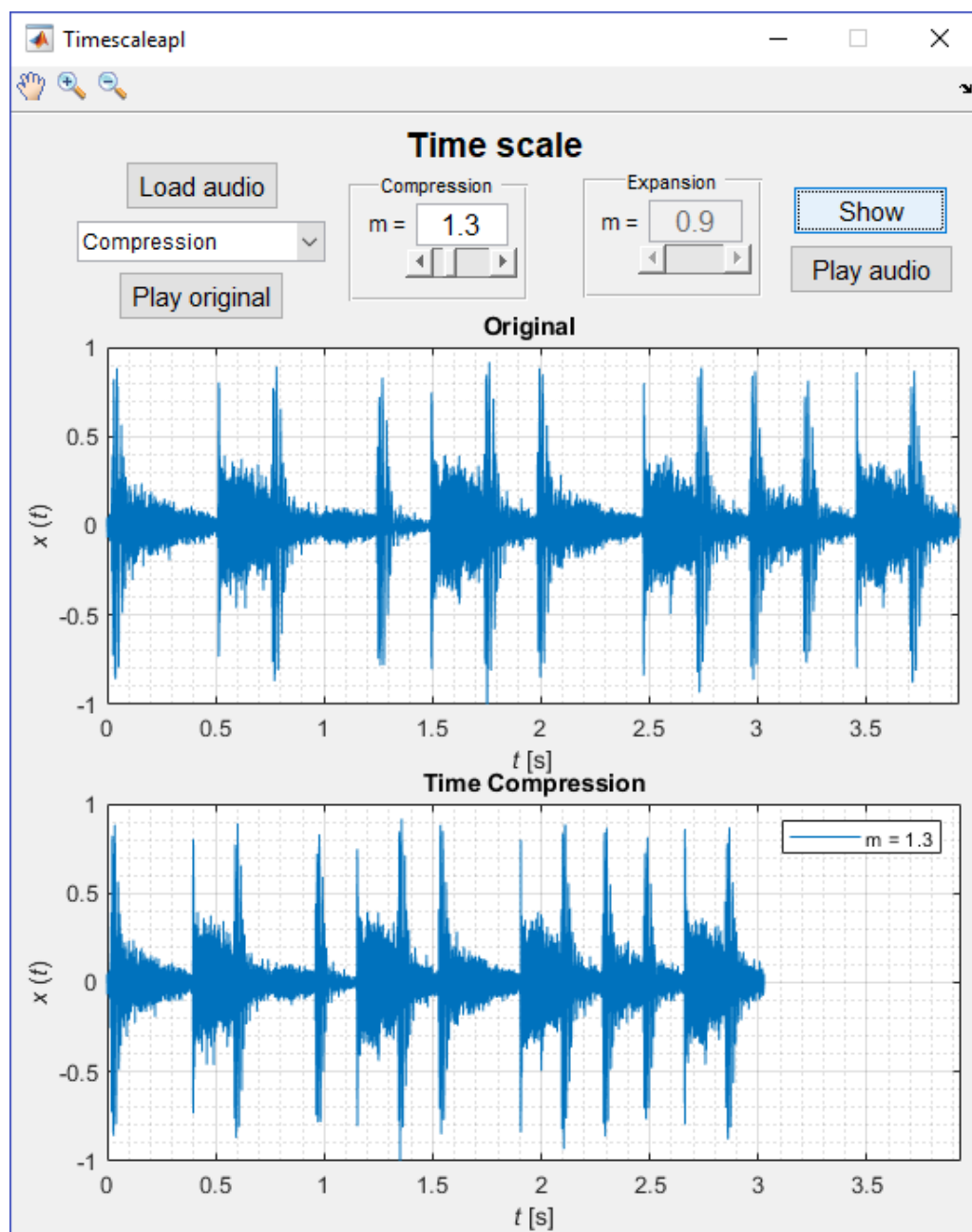
A Praktické ukázky – výsledky

A.1 Časové posunutí



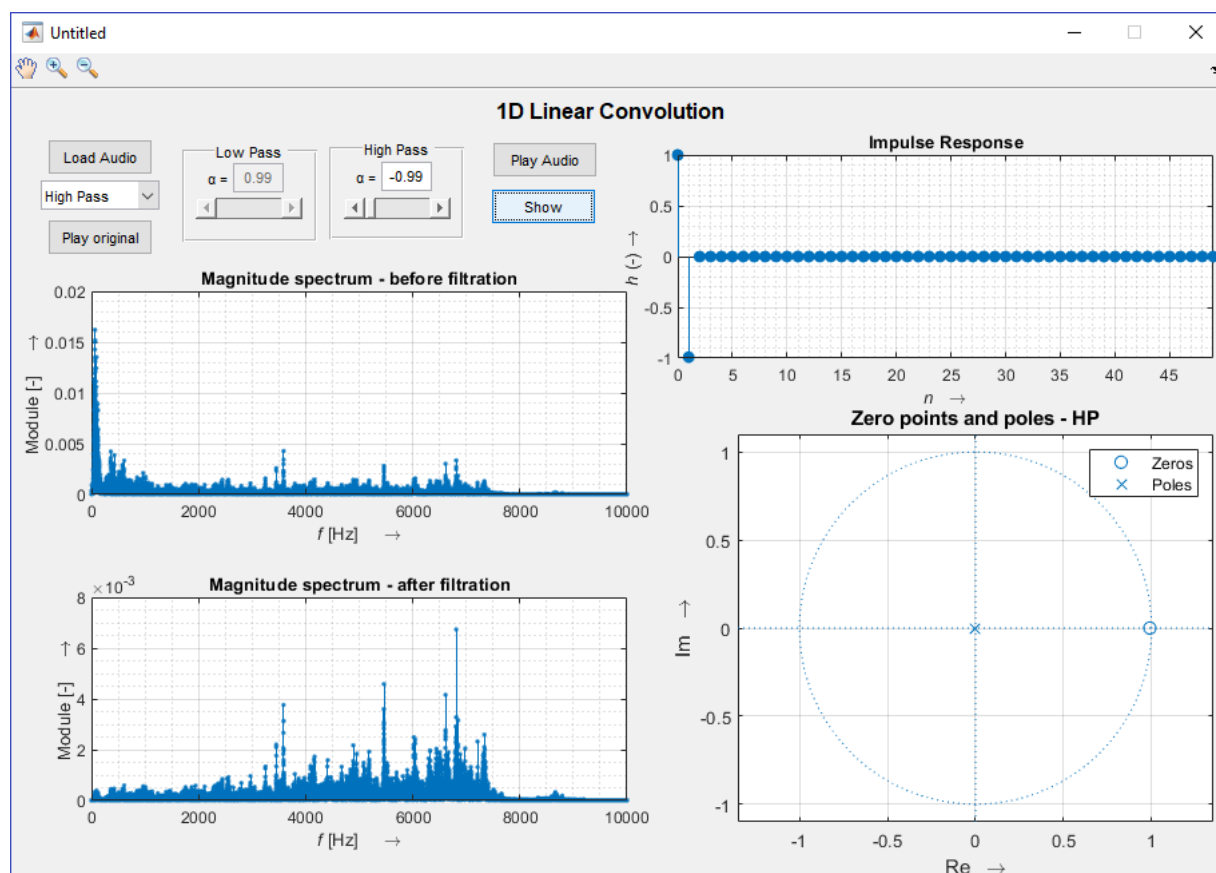
Obr. A.1: Efekt ECHO

A.2 Změna časového měřítka



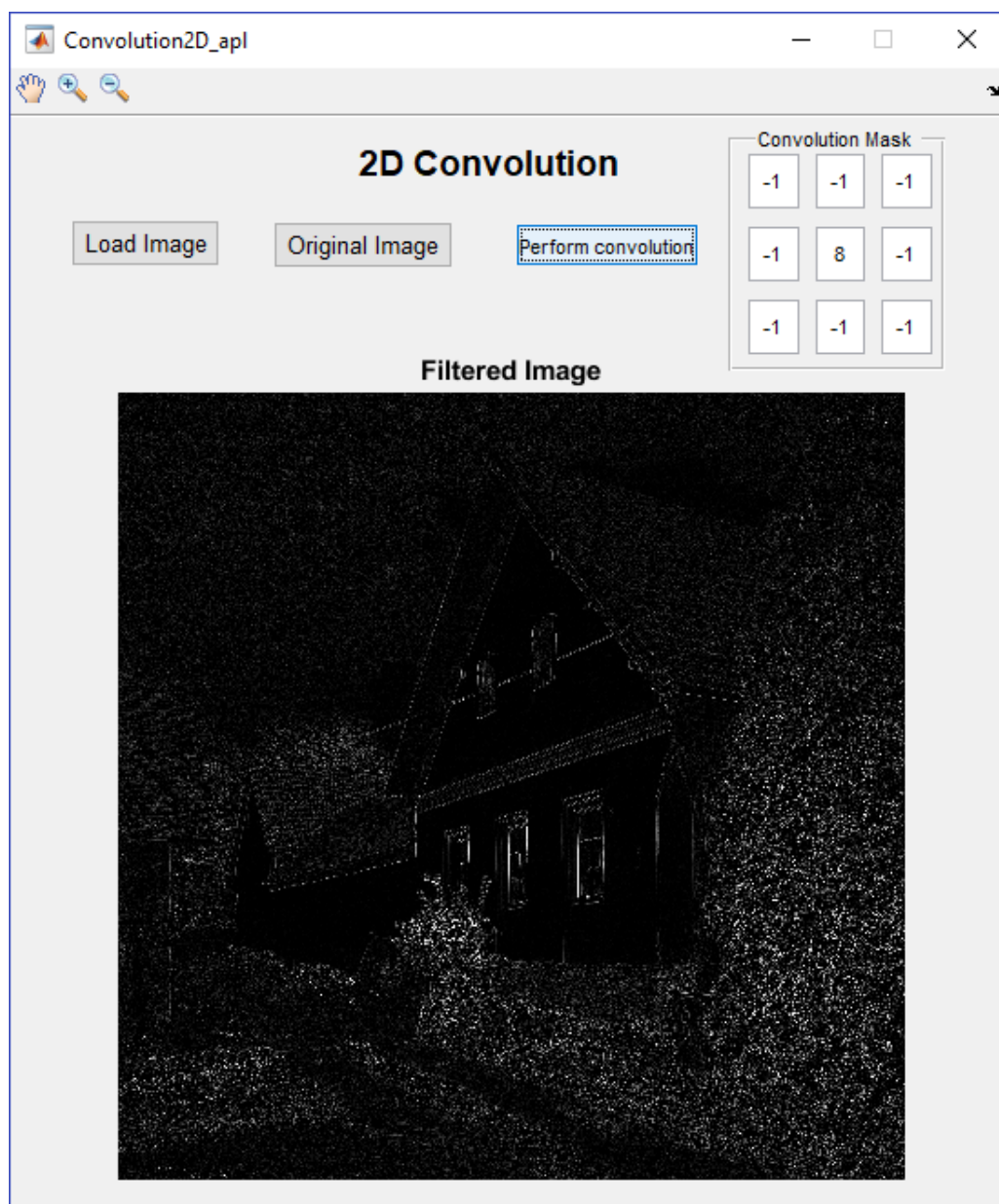
Obr. A.2: Časová komprese

A.3 1D lineární konvoluce



Obr. A.3: 1D lineární konvoluce

A.4 Konvoluce 2D



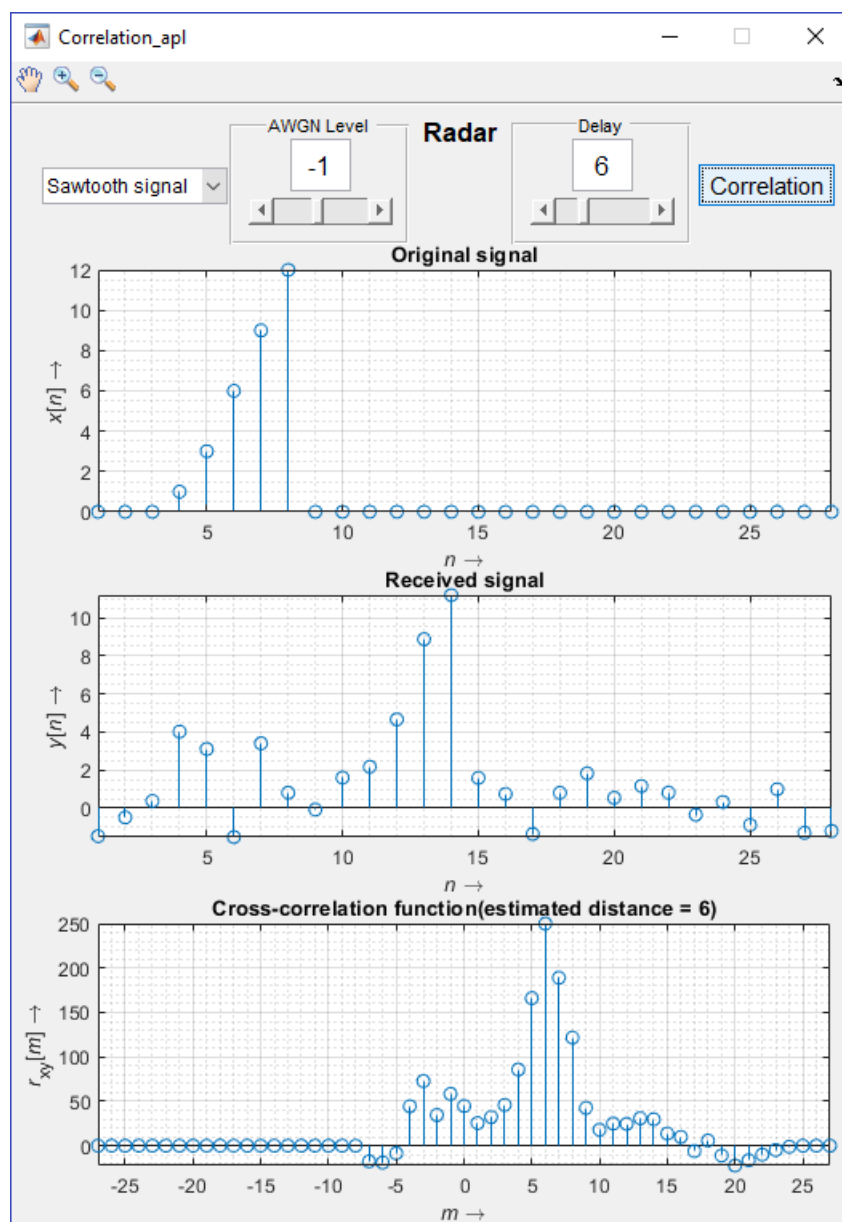
Obr. A.4: 2D konvoluce (hranový detektor)

A.5 2D filtrace



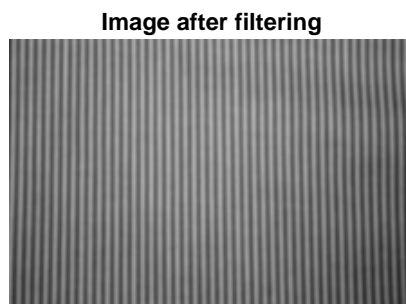
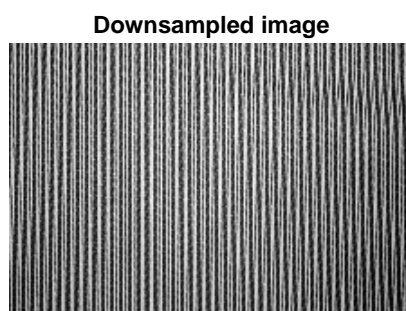
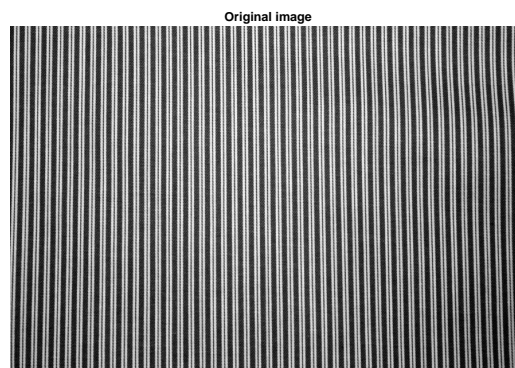
Obr. A.5: 2D filtrace

A.6 Korelace



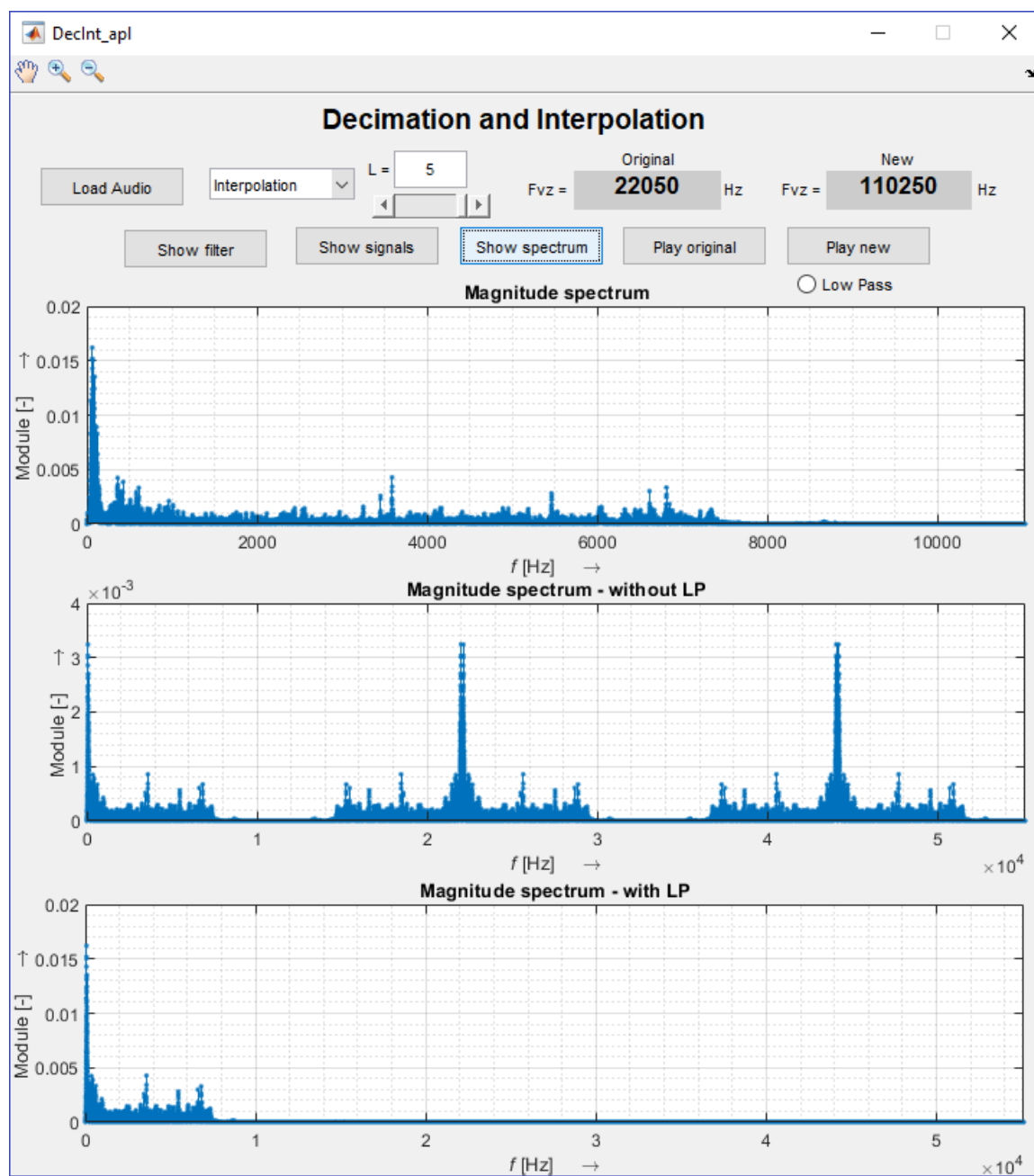
Obr. A.6: Korelace signálů

A.7 Moire efekt



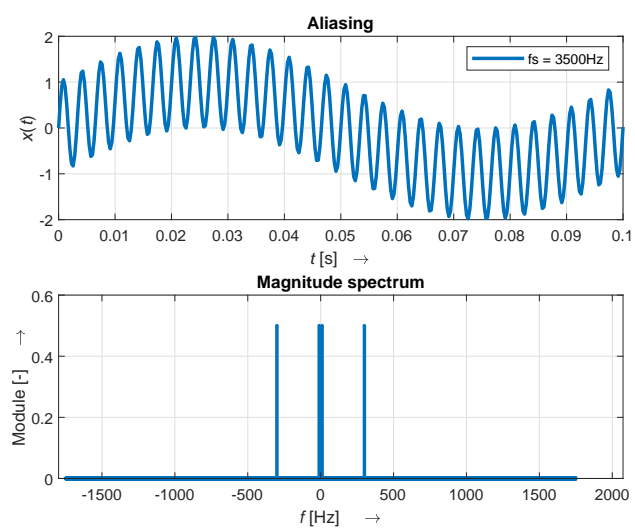
Obr. A.7: Moire efekt

A.8 Změna vzorkovacího kmitočtu

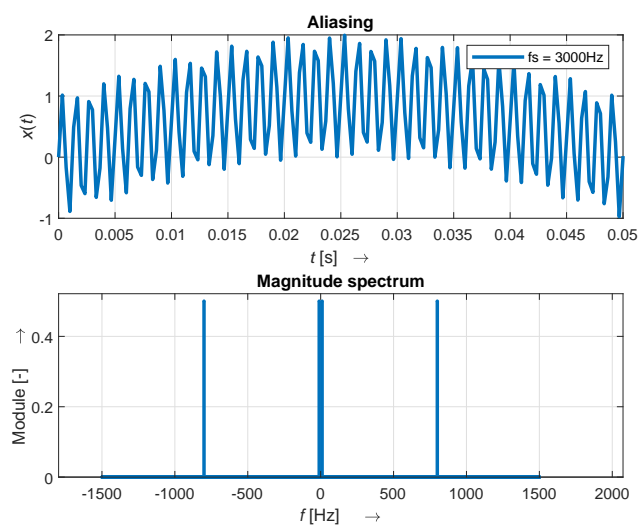


Obr. A.8: Změna vzorkovacího kmitočtu – nadvzorkování

A.9 Aliasing

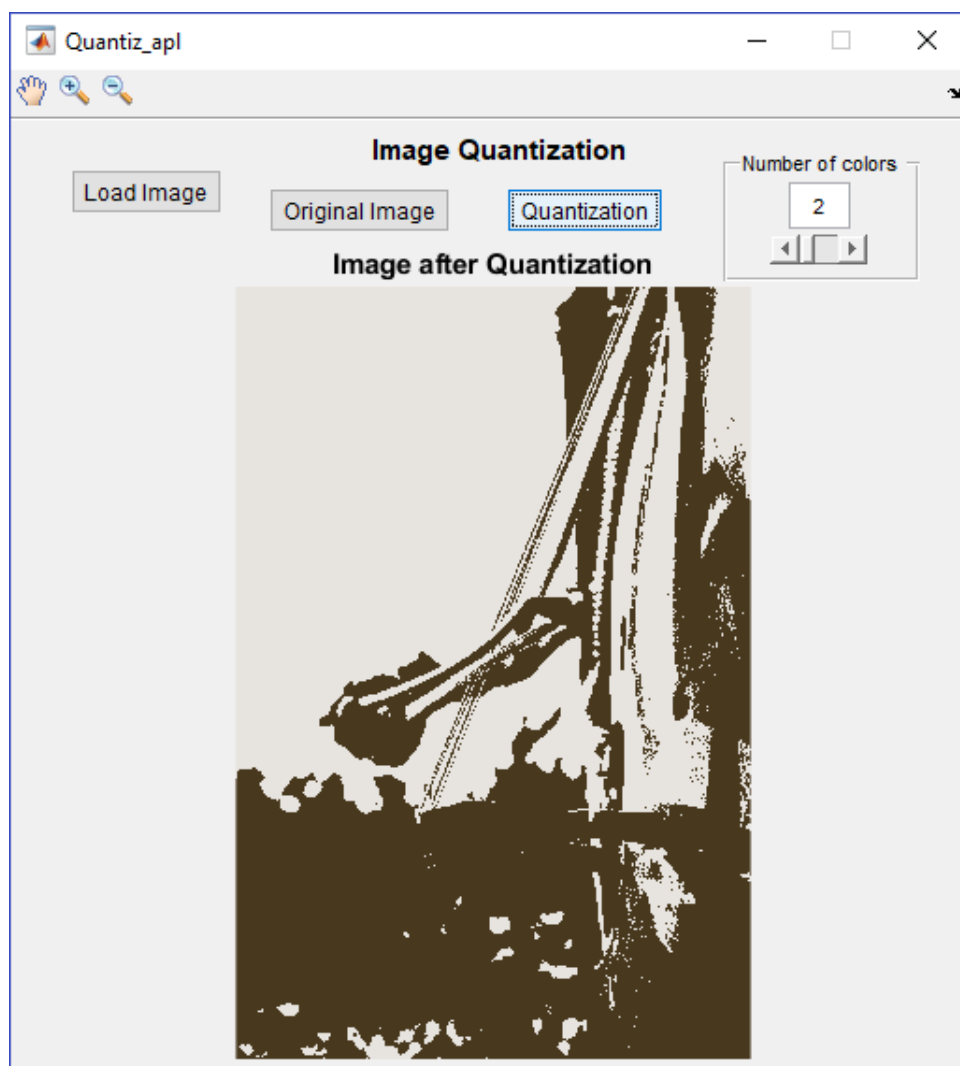


Obr. A.9: Aliasing – Nyquistův teorém splněn



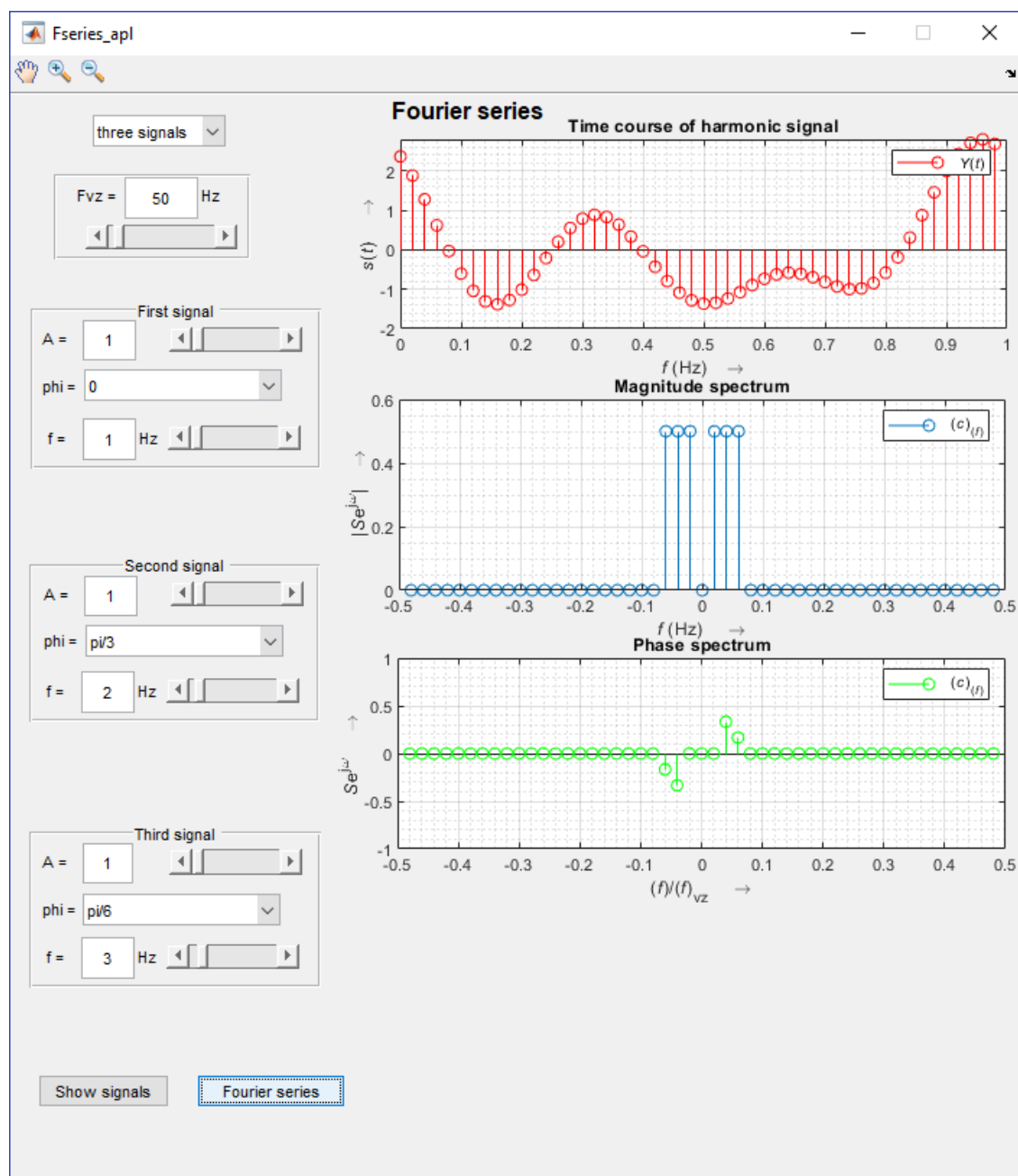
Obr. A.10: Aliasing – Nyquistův teorém nesplněn

A.10 Kvantizace



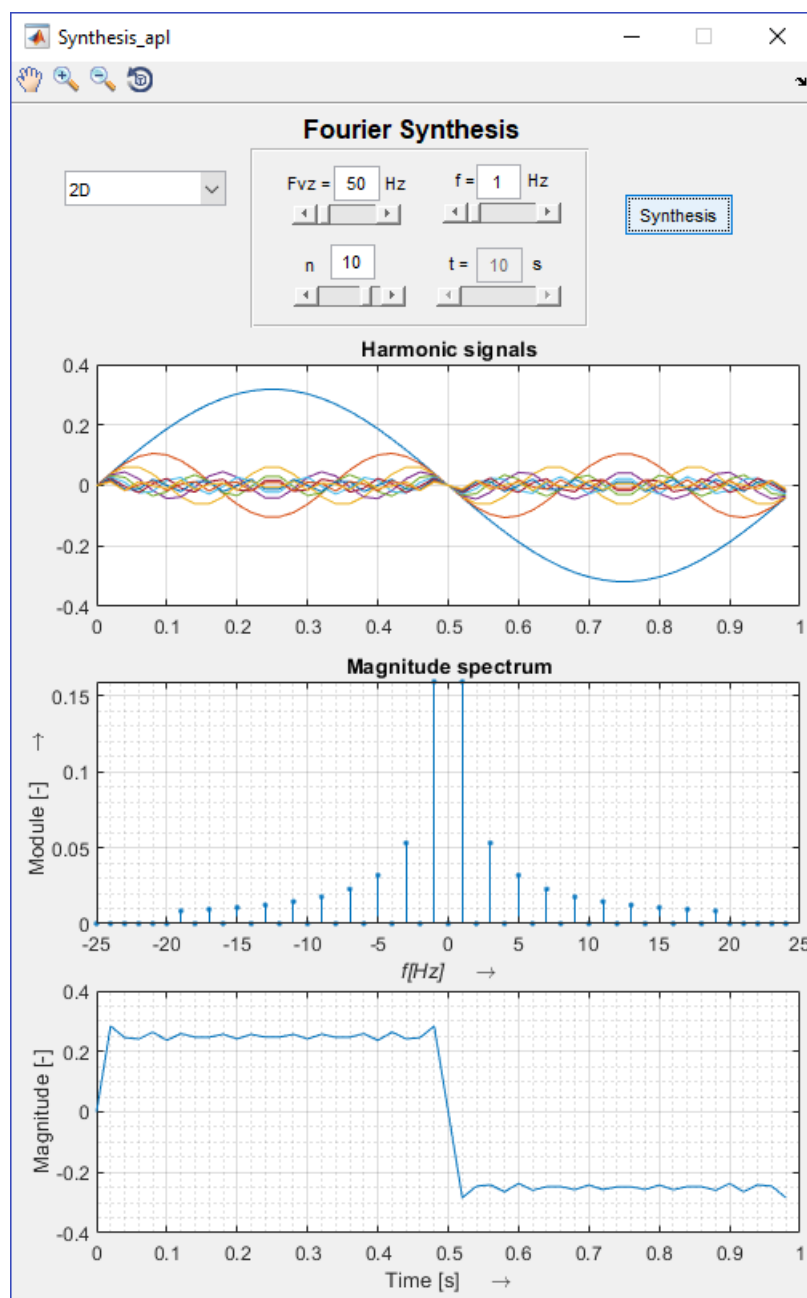
Obr. A.11: Kvantování obrazového souboru

A.11 Fourierova řada



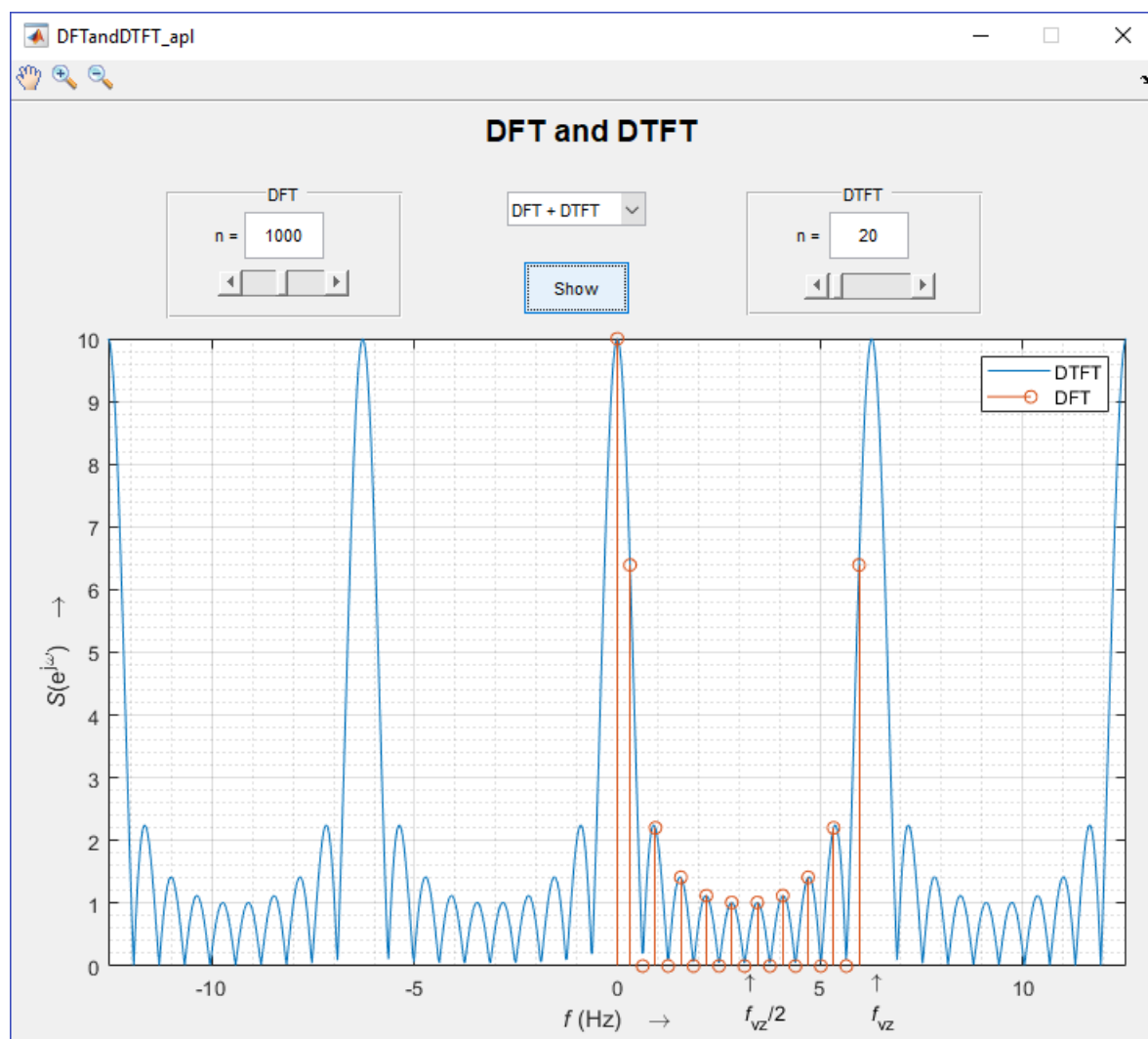
Obr. A.12: Fourierova řada

A.12 Fourierova řada – syntéza signálů



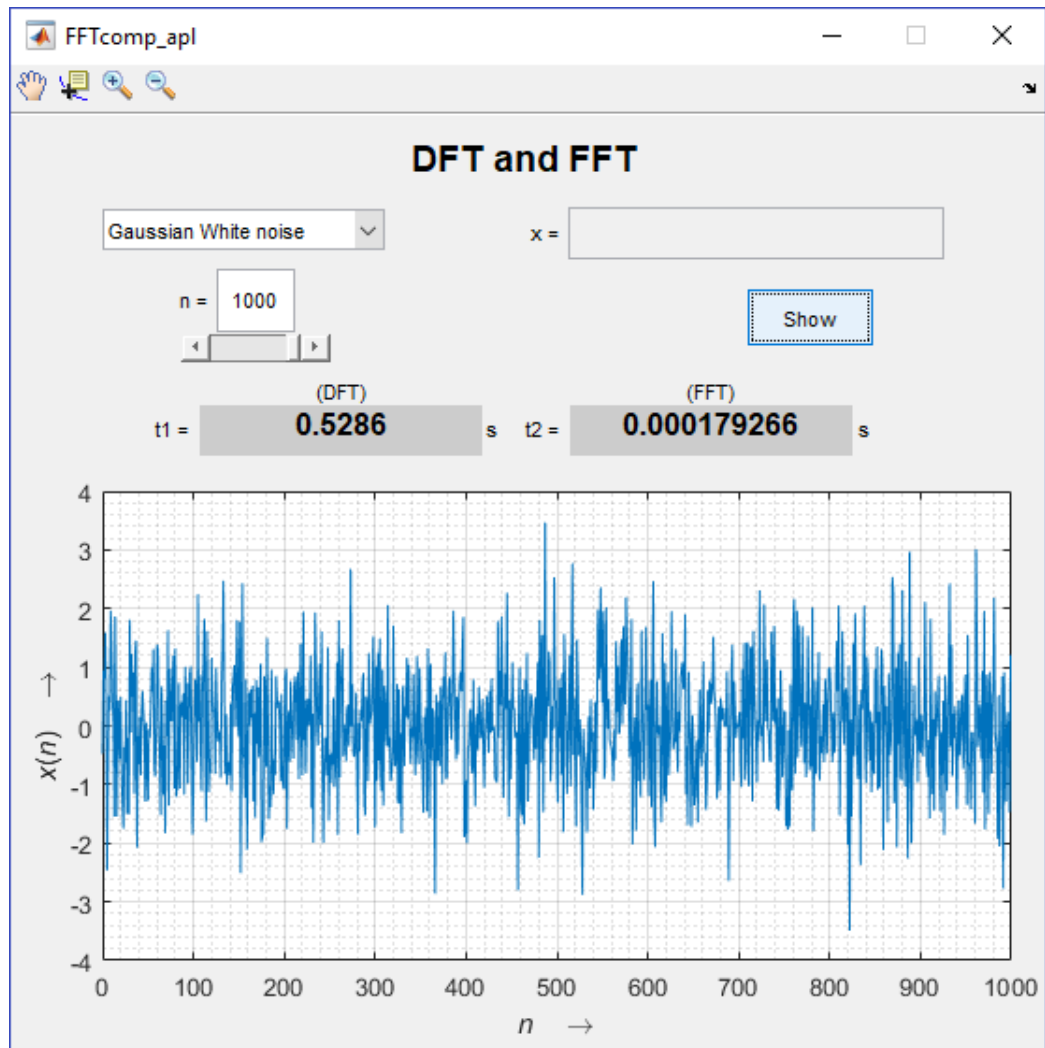
Obr. A.13: Fourierova řada – syntéza signálů

A.13 Vzťah DFT a DTFT



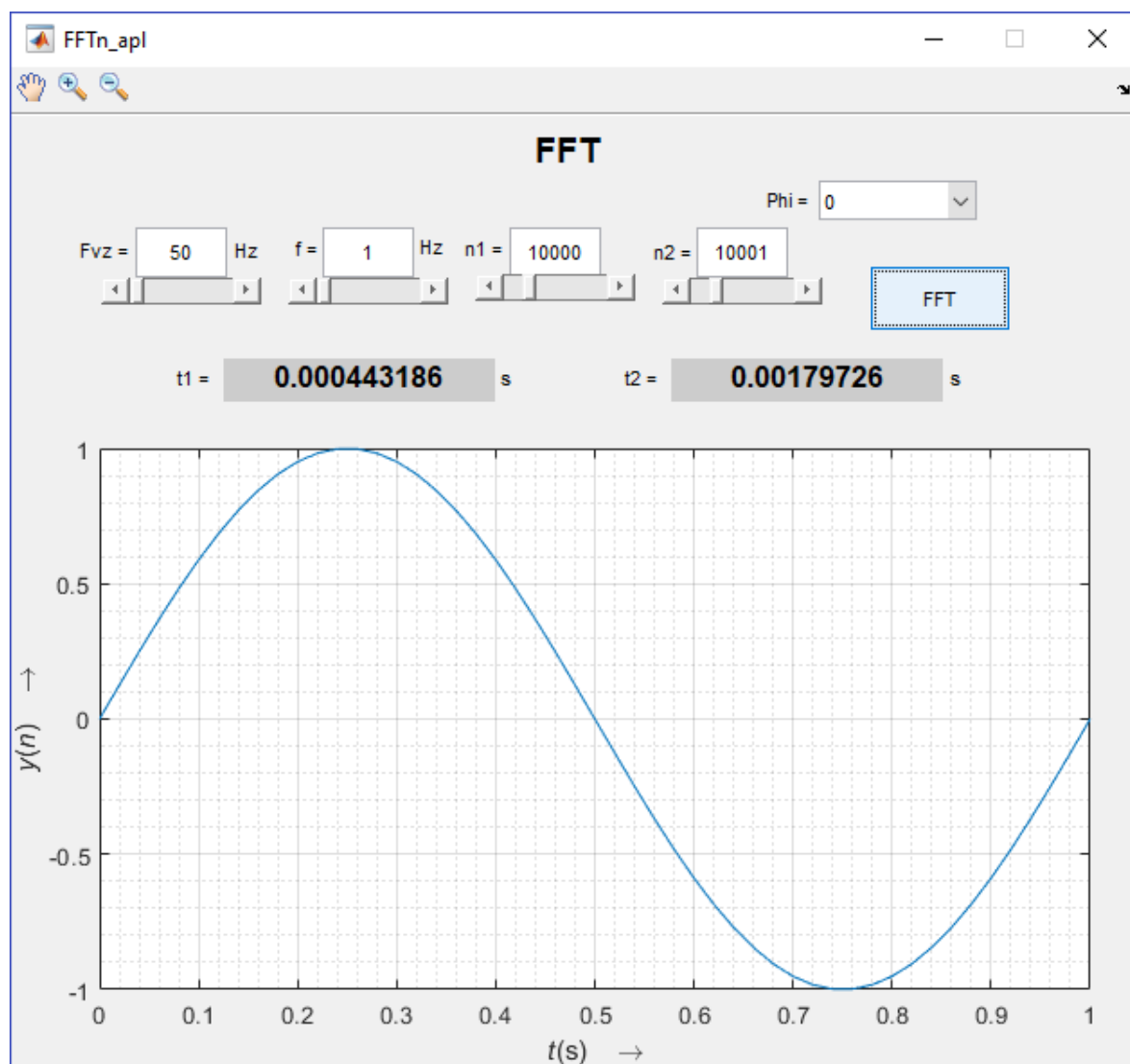
Obr. A.14: Vzťah DFT a DTFT

A.14 Vzťah DFT a FFT



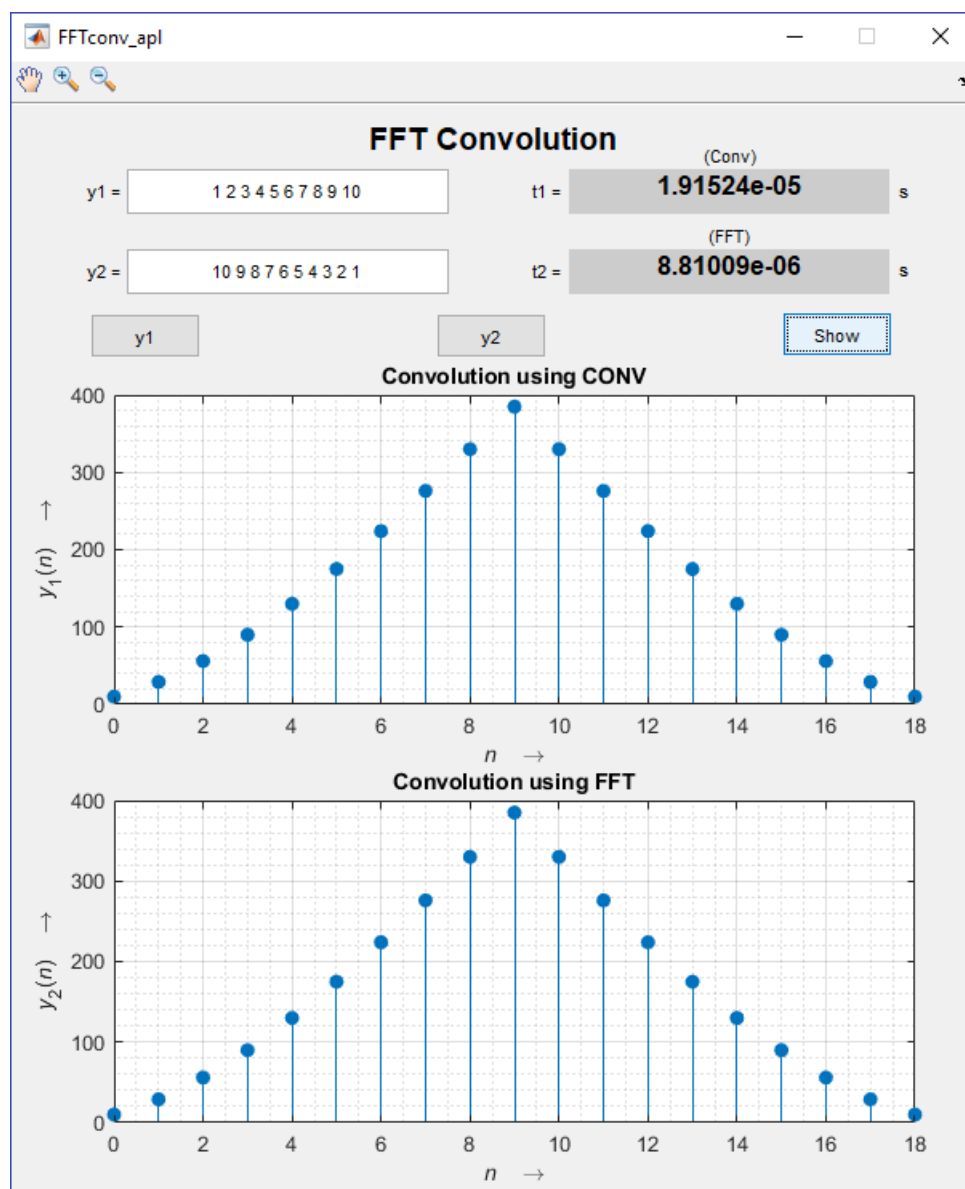
Obr. A.15: Vzťah DFT a FFT

A.15 Rychlá Fourierova transformace



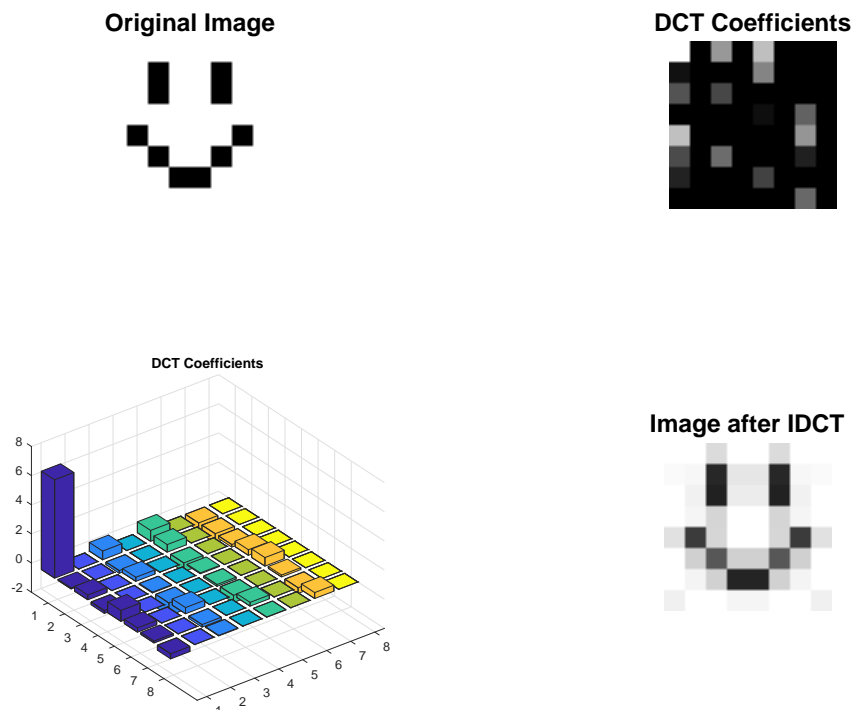
Obr. A.16: FFT

A.16 Rychlá Fourierova transformace – konvoluce



Obr. A.17: Výpočet konvoluce signálů

A.17 Diskrétní kosinová transformace



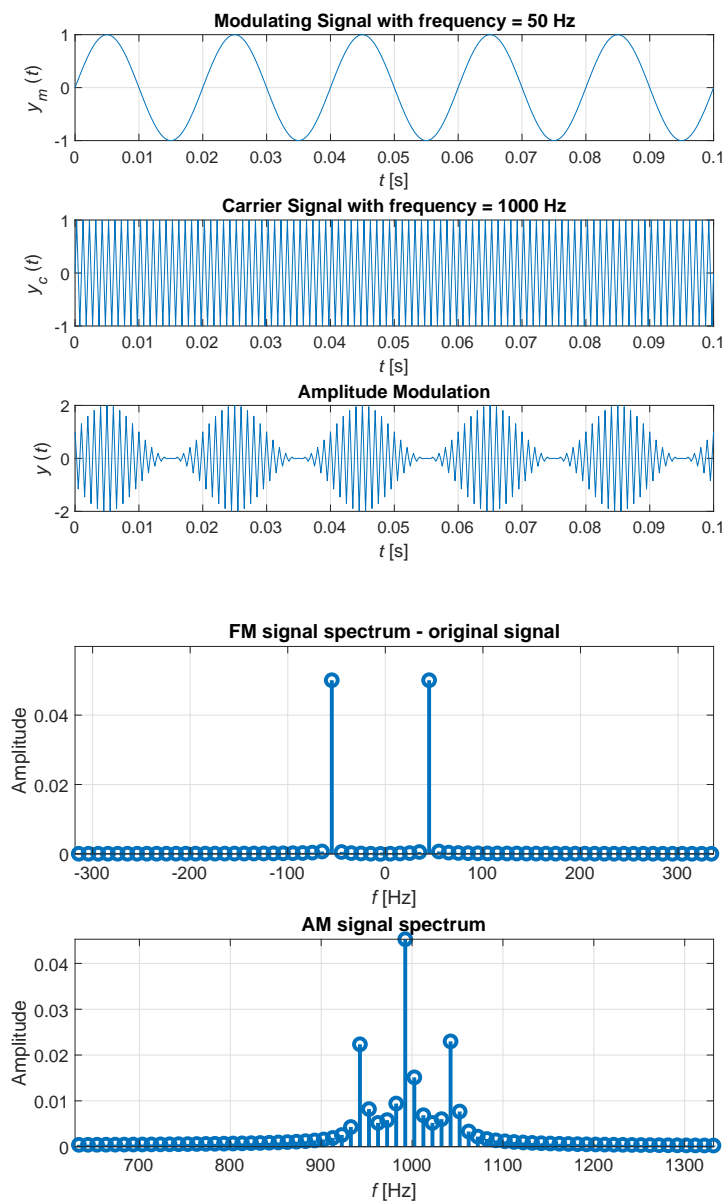
Obr. A.18: Diskrétní kosinová transformace

Cílem operace je vytvořit z matice na sobě závislých hodnot novou matici na sobě nezávislých hodnot. Probíhá přesun z prostorové oblasti do oblasti frekvenční. Dochází k vytvoření matice frekvenčních koeficientů, kde velikost prvního koeficientu představuje střední hodnotu. Směrem k poslednímu prvku matice DCT jednotlivé koeficienty představují zastoupení vyšších harmonických složek signálu.

Posléze dochází ke kvantování frekvenčních koeficientů. Matice DCT je dělena kvantizační maticí (zde je možnost kódovat menším počtem bitů). Následným zaokrouhlením a prahováním (koeficienty, které jsou blízké nule se nepřenášejí) hodnot vzniká ztrátová komprese.

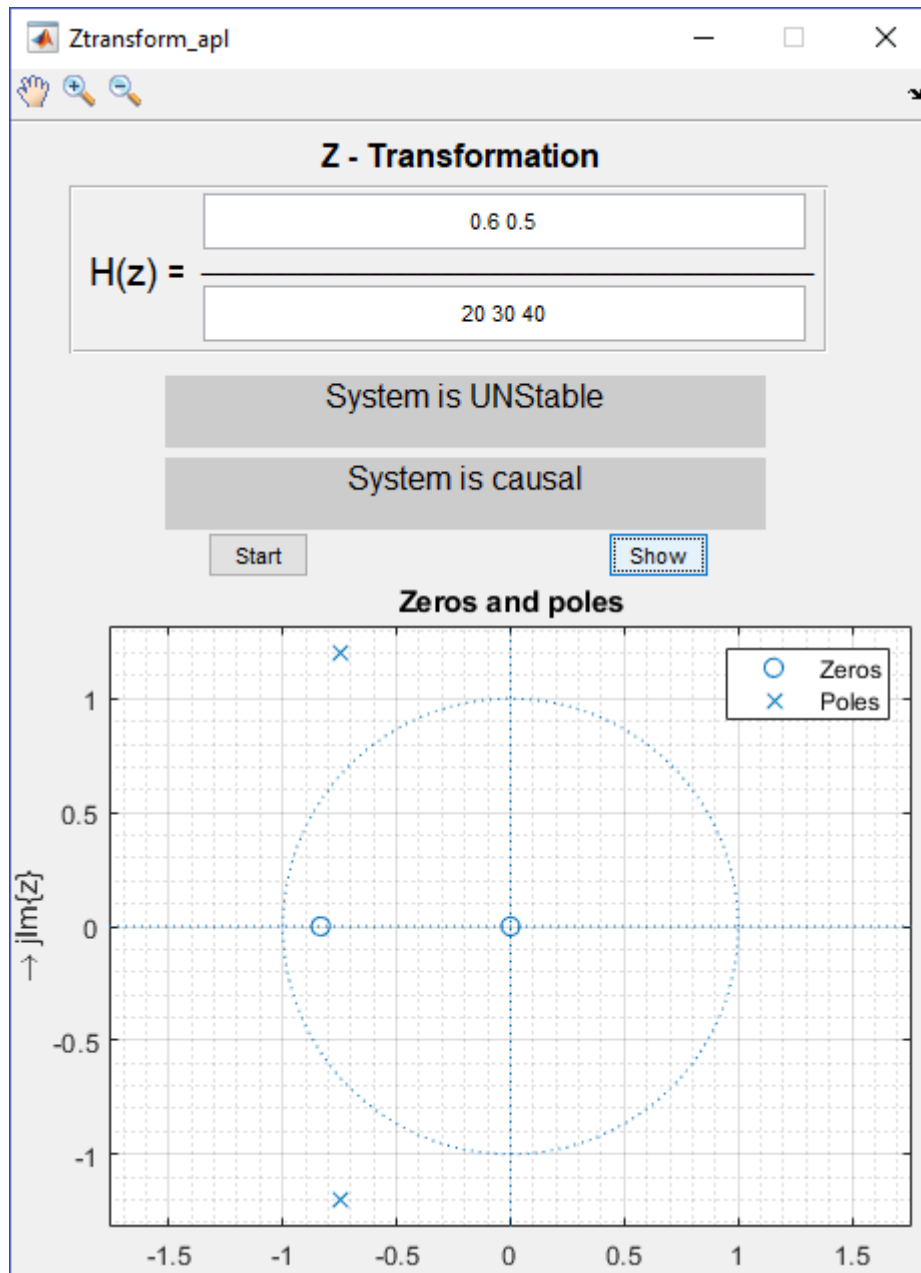
Zpětně přenášená data jsou v dekodéru roznásobena kvantizační maticí.

A.18 Modulate



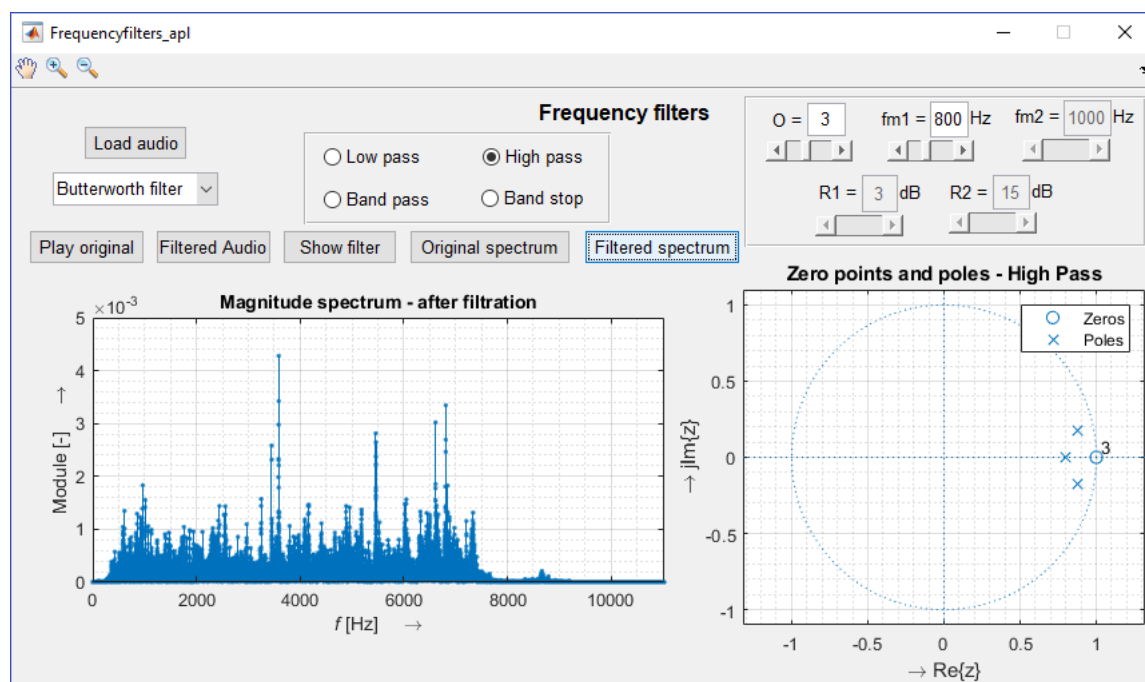
Obr. A.19: Amplitudová modulace – typ AM DSB-TC

A.19 Transformace Z



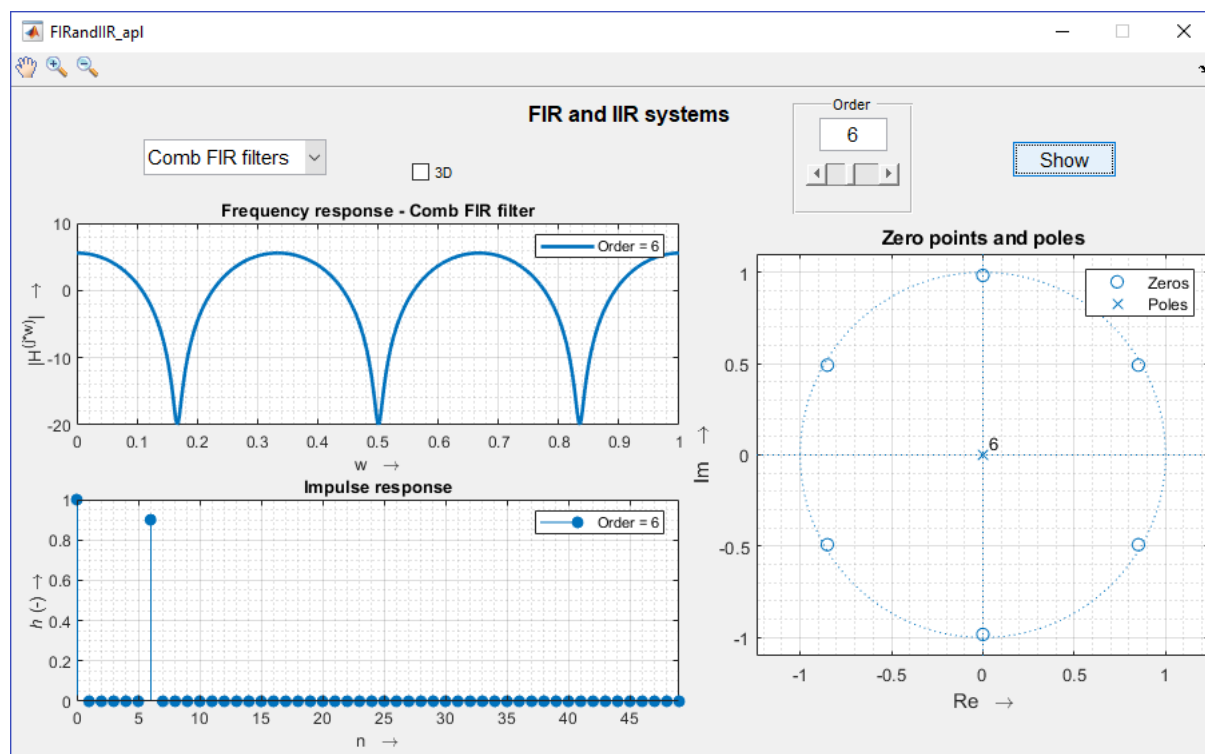
Obr. A.20: Transformace Z

A.20 Kmitočtové filtry



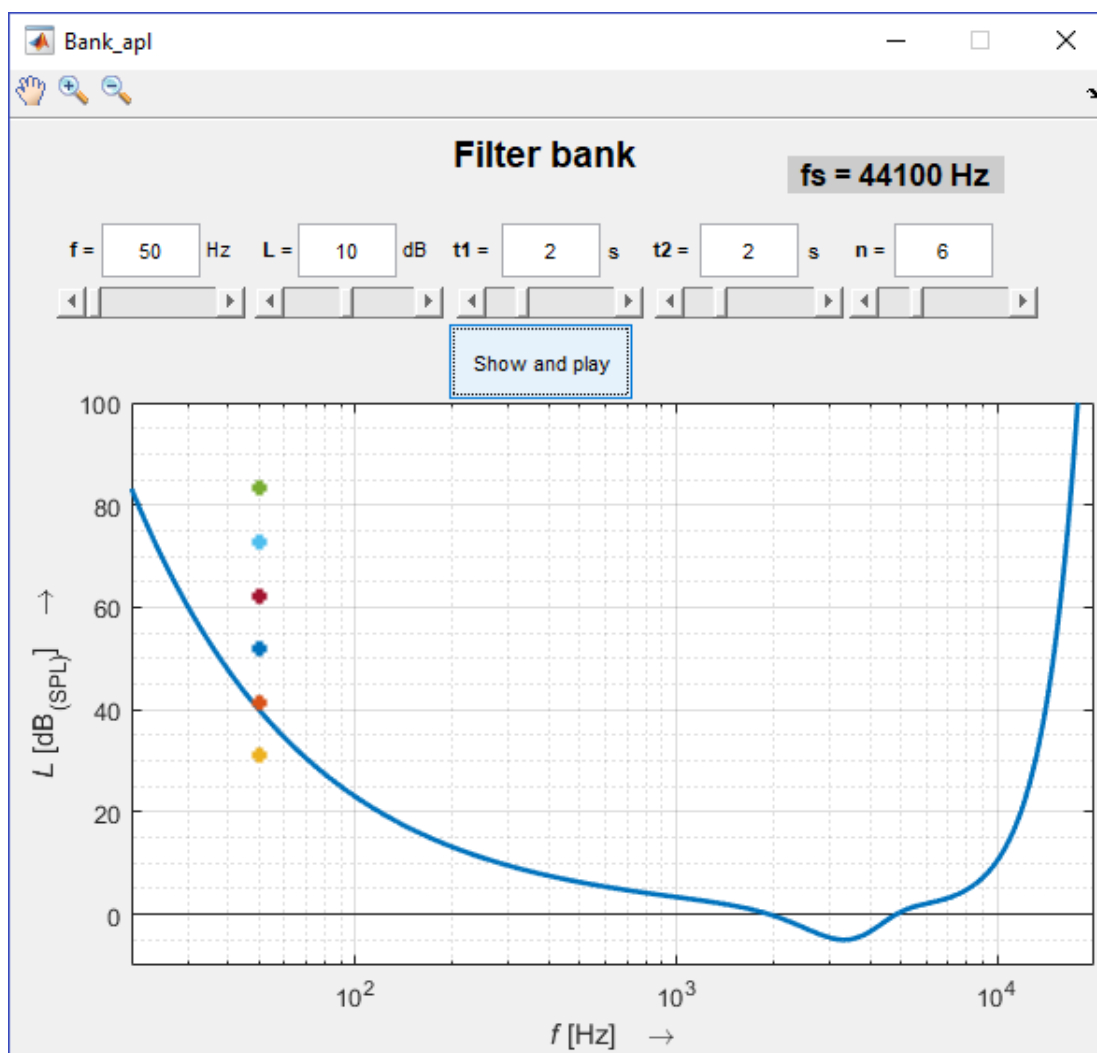
Obr. A.21: Kmitové filtry

A.21 Číslicové filtry



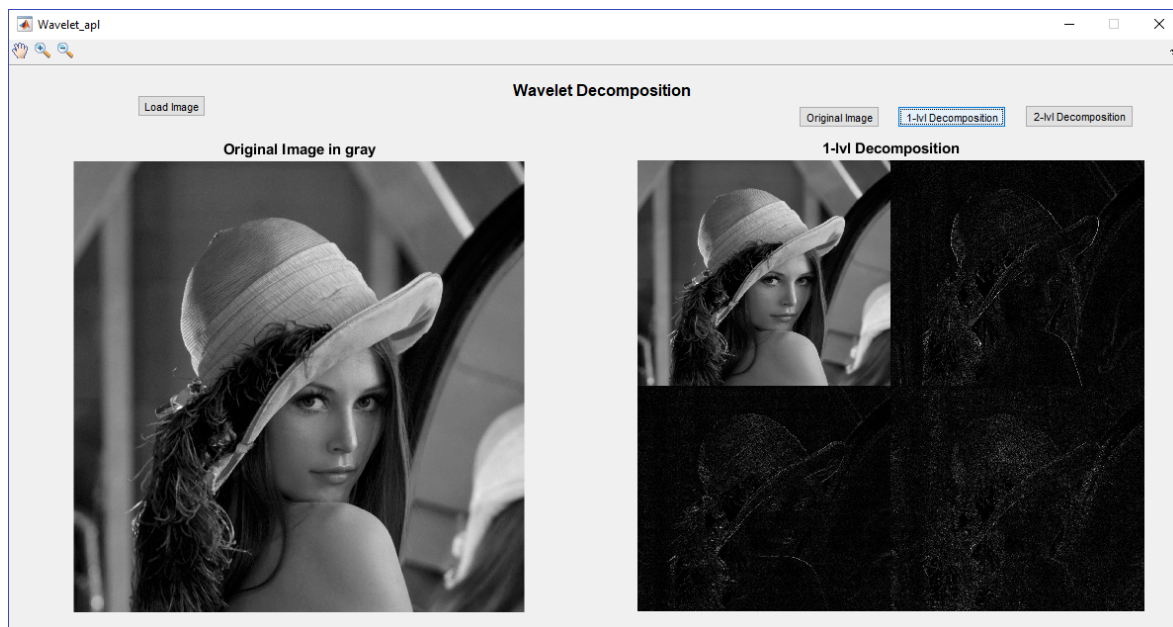
Obr. A.22: Číslicové filtry – hřebenový FIR filtr

A.22 Banka číslicových filtrů



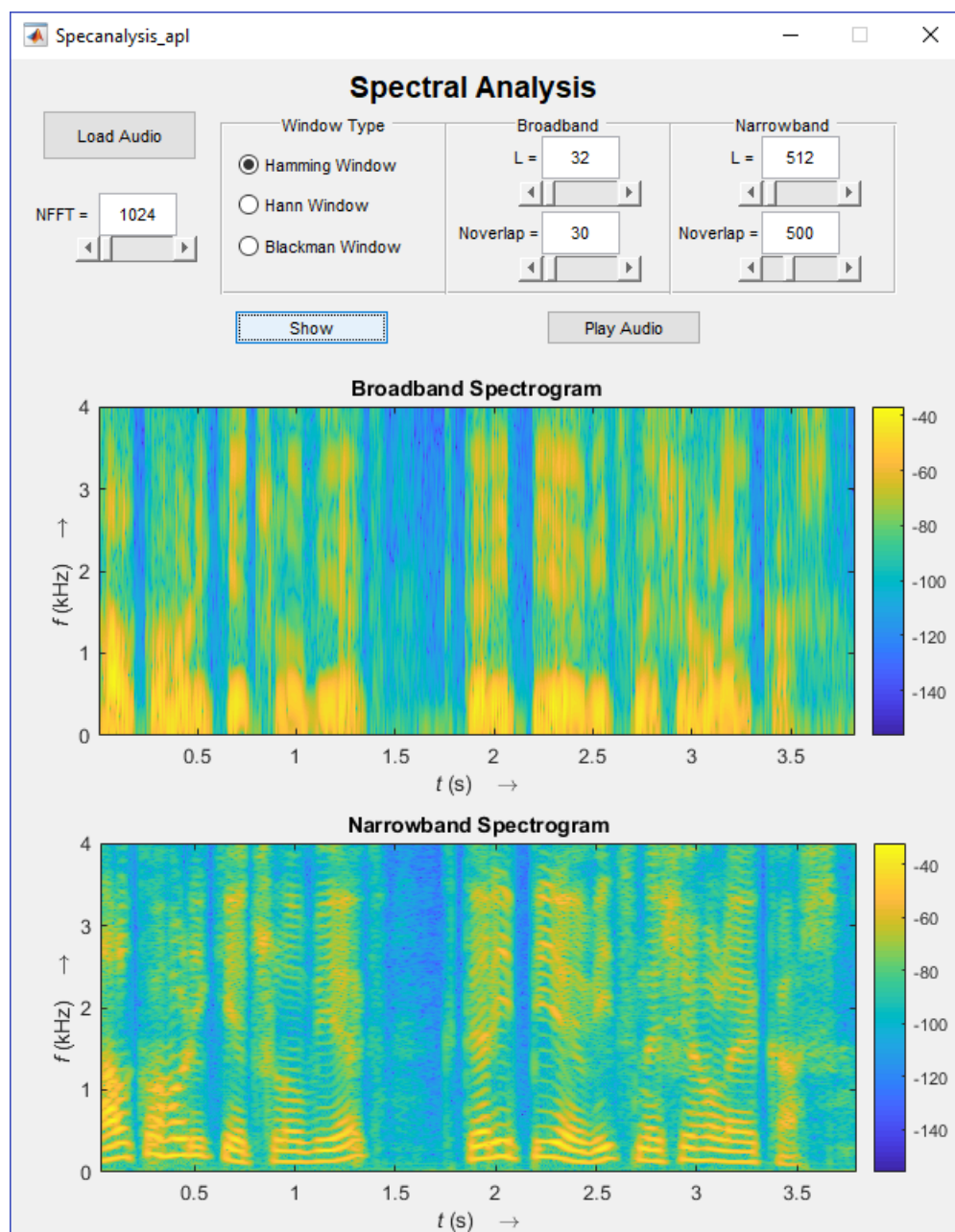
Obr. A.23: Banka číslicových filtrů – test sluchu

A.23 Vlnková transformace



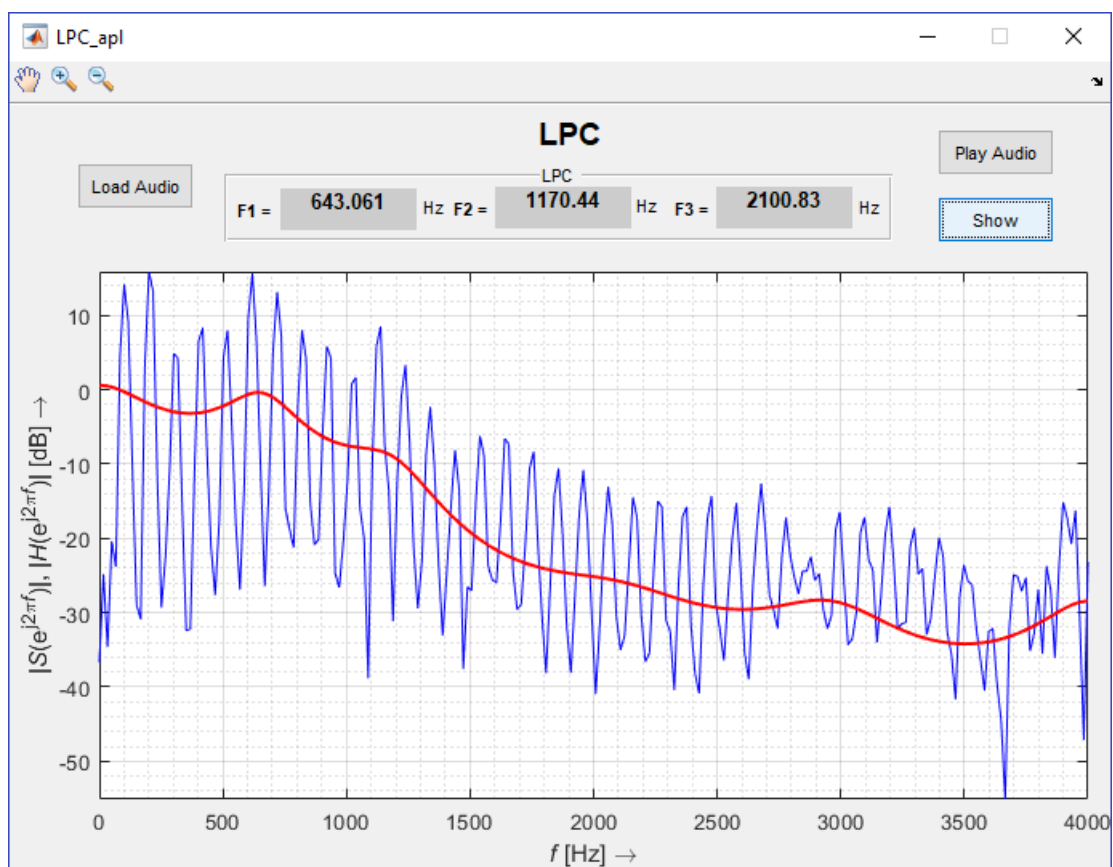
Obr. A.24: Vlnková transformace – komprese obrazového souboru

A.24 Krátkodobá spektrální analýza



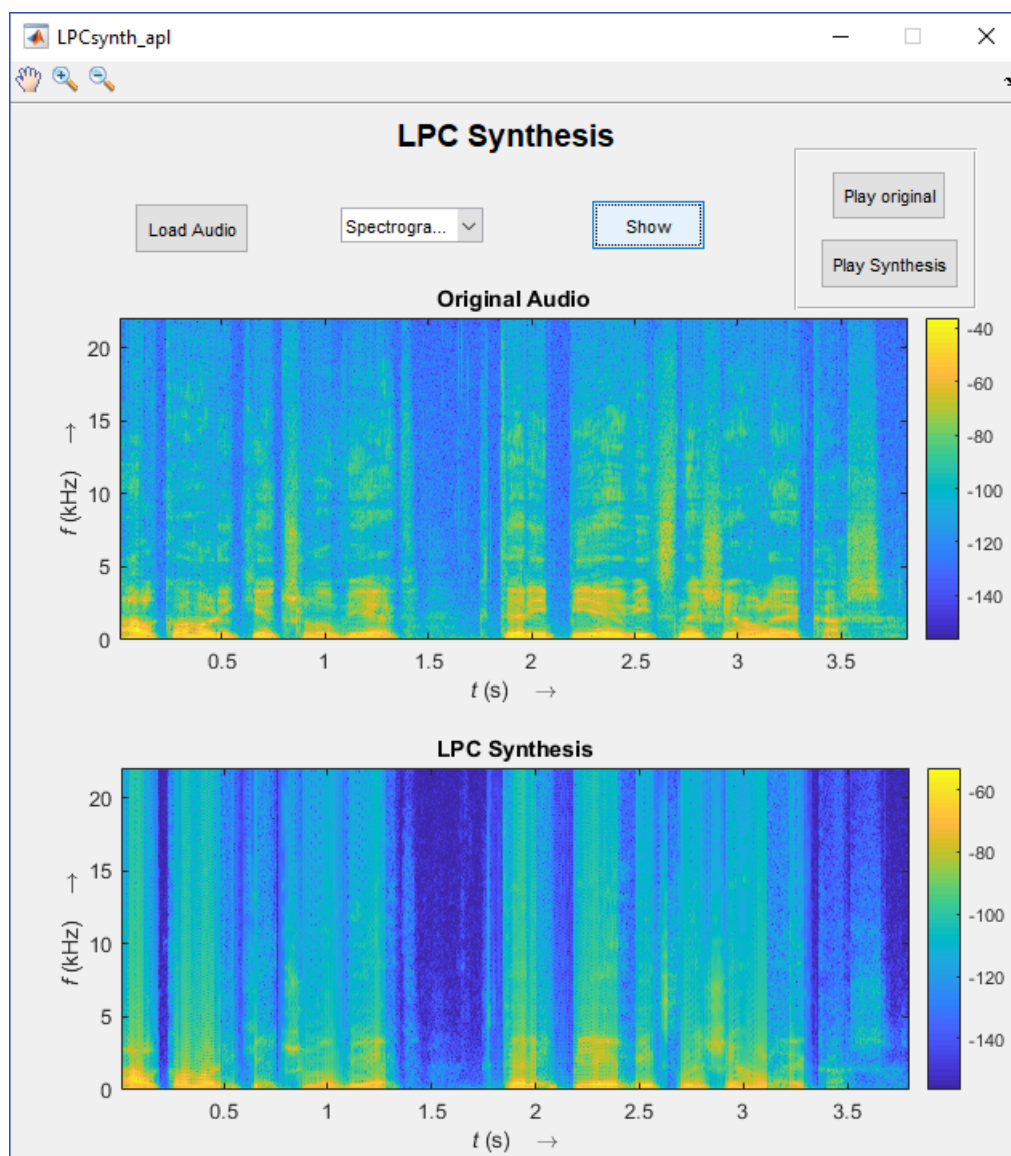
Obr. A.25: Krátkodobá spektrální analýza

A.25 Lineární predikční analýza



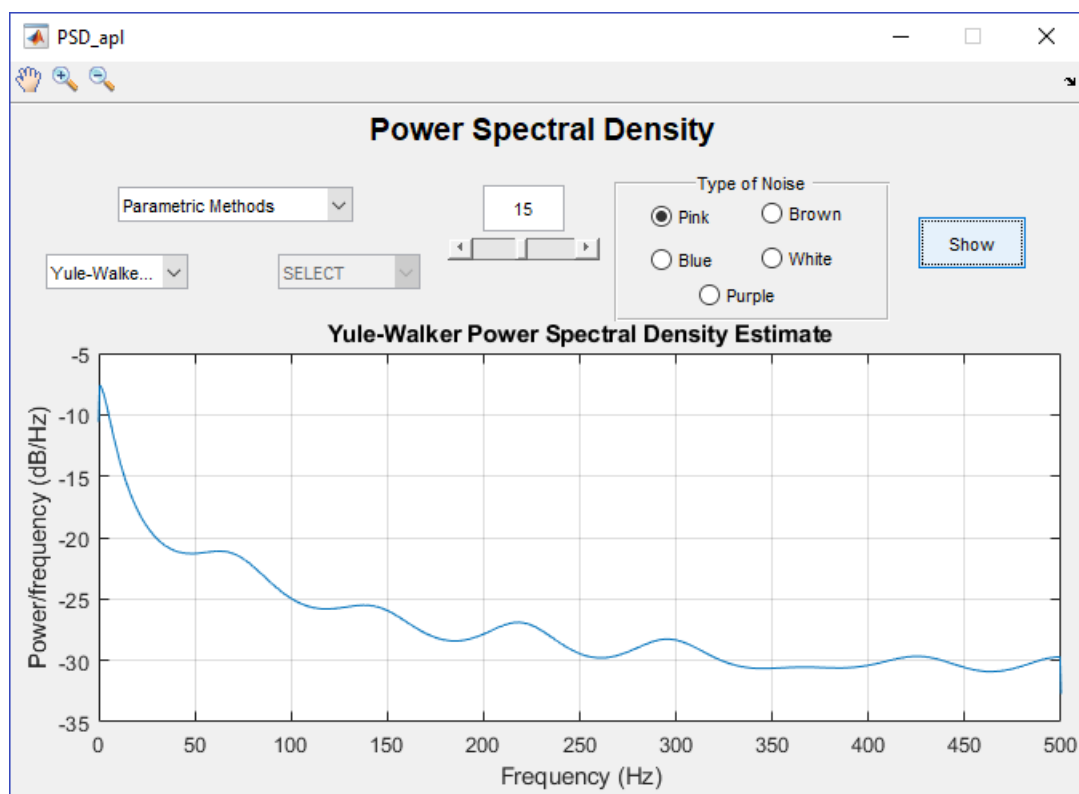
Obr. A.26: Lineární predikční analýza

A.26 Lineární predikční syntéza



Obr. A.27: Lineární predikční syntéza

A.27 Spektrální výkonová hustota



Obr. A.28: Spektrální výkonová hustota

B Obsah přiloženého CD

Přiložené CD obsahuje soubory, které byly vytvořeny v rámci diplomové práce. Jedná se o soubory *.mat a *.fig, které obsahují skripty a funkce potřebné pro správnou funkci jednotlivých ukázek. Tyto soubory se nacházejí ve složce **Aplikace**, kde jsou jednotlivé vytvořené aplikace řazeny do složek včetně testovacích souborů.

Funkčnost jednotlivých aplikací byla testovaná v prostředí Matlab R2018a.

```
/ ..... kořenový adresář přiloženého CD
├── Aplikace ..... aplikace
│   ├── Posun + čas
│   │   ├── Echo
│   │   └── Timescale
│   ├── Konvoluce
│   │   ├── 1D lineární konvoluce
│   │   └── 2D konvoluce
│   ├── Korelace
│   ├── Fourierova řada
│   │   ├── Fourierova řada
│   │   └── Fourierova syntéza
│   ├── Aliasing + vzorkování
│   │   ├── Aliasing
│   │   └── Moire effect
│   ├── Kvantování
│   ├── DFT
│   ├── FFT
│   │   ├── DFT a FFT
│   │   ├── FFT_konvoluce
│   │   └── FFT_n
│   ├── DCT
│   ├── Modulace
│   ├── Transformace Z
│   ├── Kmitočtové filtry
│   ├── FIR a IIR systémy
│   ├── 2D filtrace
│   ├── Změna vzorkovacího kmitočtu
│   ├── Banka filtrů
│   ├── Vlnková transformace
│   ├── Krátkodobá spektrální analýza
│   ├── Lineární predikční analýza
│   │   ├── LPC
│   │   └── LPC syntéza
│   └── Výkonová spektrální hustota
└── xhanza03DP.pdf ..... šablona práce
```