VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

VÝPOČET TLAKOVÉ SÍLY NA PLOŠE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE JIŘÍ STEJSKAL

AUTHOR

BRNO 2008

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

INSTITUTE OF MATHEMATICS

VÝPOČET TLAKOVÉ SÍLY NA PLOŠE

COMPUTATION OF COMPRESSION FORCE ON SURFACE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE JIŘÍ STEJSKAL

AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE doc. RNDr. LIBOR ČERMÁK, CSc.

SUPERVISOR

BRNO 2008

Abstrakt
V technických aplikacích bývá často potřeba určit výsledné zatížení působící na plochu vlivem tlakové síly. Cílem této práce je naznačit jednu z možností, jak v tomto případě postupovat, je-li zadána plocha buď explicitně, nebo souřadnicemi některých svých bodů.

První odstavec definuje obecně plochu. Ve druhém odstavci je naznačena teorie Bézierových ploch, kterými zadanou plochu interpolujeme. V další části jsou uvedeny potřebné vzorce pro výpočet plošného integrálu. V poslední části je popsán postup výpočtu výsledného zatížení, který je zpracován v programu MATLAB a také tři konkrétní příklady.

Summary
In technical computing we often need to find the resulting load on surface caused by the compression force. The aim of this thesis is to suggest one of the possible approaches to do so if the surface is given explicitly or by the coordinates of some of it's points.

In the first section, the mathematical definition of the surface with some of it's important properties is mentioned. There is a basic theory of Bézier surfaces, which form the main part of this thesis in the second part. Further on, some results from the theory of surface integrals are mentioned. The last section describes the whole algorithm of computing the resulting load together with the MATLAB program which is added to this thesis. Three examples are given at the end.

klíčová slova
Bézierova plocha, plošný integrál

key words
Bézier surface, surface integral

STEJSKAL, J.: *Výpočet tlakové síly na ploše*, Brno, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2008 (37 stran). Vedoucí bakalářské práce doc. RNDr. Libor Čermák, CSc.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Výpočet tlakové síly na ploše* vypracoval samostatně pod vedením doc. RNDr. Libora Čermáka, CSc. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Jiří Stejskal

Děkuji svému školiteli doc. RNDr. Liboru Čermákovi, CSc. za vedení mé bakalářské práce a cenné rady při jejím zpracování.

Jiří Stejskal

Obsah

1 Úvod **10**

2 Plochy **11**

2.1 Definice a základní vlastnosti 11

2.2 Tečná rovina plochy 12

3 Bézierovy plochy **14**

3.1 Afinní zobrazení 14

3.2 Algoritmus de Casteljau 16

3.3 Bernsteinův tvar Bézierovy křivky 18

3.4 Zobecnění na Bézierovu plochu 20

3.5 Derivace Bézierovy plochy 23

4 Plošný integrál **25**

5 Postup výpočtu **27**

5.1 Aproximace plochy 27

5.2 Výpočet integrálu 29

5.3 Příklady 31

6 Závěr **36**

1 Úvod

Jedním z hlavních důvodů vzniku matematiky byla snaha lidí popsat nějakým způsobem děje probíhající kolem nich. Z této snahy vzešla mimo jiné i vědní disciplína zabývající se popisem pohybu reálných těles – *mechanika těles.*

V technických aplikacích bývá často zapotřebí určit výsledné zatížení od tlakové síly působicí na plochu. Cílem této práce je naznačit jednu z možností postupu při řešení tohoto problému, je-li zadána plocha buď explicitně, nebo souřadnicemi některých svých bodů.

Je-li dána plocha parametricky, je interpolována Bézierovou plochou. Další možností, kterou uvažujeme, je zadání plochy pomocí souřadnic některých jejích bodů. V tomto případě je těmito body proložena Bézierova plocha metodou nejmenších čtverců.

V prvním odstavci je definována plocha a některé její základní vlastnosti. Jádro této práce tvoří druhý odstavec, kde je naznačena teorie Bézierových křivek a hlavně ploch spolu s některými výsledky potřebnými pro výpočet výsledného zatížení. V další části jsou uvedeny vzorce pro výpočet plošného integrálu, pomocí kterého výsledné zatížení počítáme. V poslední části je popsán postup výpočtu při řešení tohoto problému v MATLABu a řešení tří konkrétních příkladů.

2 Plochy

Vzhledem k tomu, že cílem této práce je numerický výpočet tlakové síly na ploše, je zapotřebí nejprve zavést definici této plochy, některé její vlastnosti a základní předpoklady, které musí splňovat, aby bylo možné sílu vypočítat, tzn. počítat plošný integrál přes tuto plochu. Zejména se pak budeme zabývat Bézierovými plochami, jelikož těmito budeme danou plochu nahrazovat.

2.1 Definice a základní vlastnosti

Plochou v $\mathbb{R}^m$ rozumíme množinu bodů popsanou pomocí libovolného spojitého zobrazení $\Gamma : M \to \mathbb{R}^m$, kde $M \subset \mathbb{R}^2$ je souvislá množina s neprázdným vnitřkem.

Dále uvažujme plochu

$$\mathbf{\Gamma}(\xi_1, \xi_2) = [\Gamma_1(\xi_1, \xi_2), \Gamma_2(\xi_1, \xi_2), \dots, \Gamma_m(\xi_1, \xi_2)] \,, \tag{1}$$

kde $\xi_1, \xi_2 \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, Ω je souvislá množina s neprázdným vnitřkem, které se říká *referenční oblast*. Tento zápis představuje parametrické vyjádření plochy s paramtery ξ_1, ξ_2.

Příklad 2.1. Známou plochou je například jednotková sféra v $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} x = \Gamma_1(\xi_1, \xi_2) &= \cos \xi_1 \sin \xi_2 \,, \\ y = \Gamma_2(\xi_1, \xi_2) &= \sin \xi_1 \sin \xi_2 \,, \\ z = \Gamma_3(\xi_1, \xi_2) &= \cos \xi_2 \,, \end{aligned}$$

kde $\xi_1 \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $\xi_2 \in \langle 0, \pi \rangle$, tj. $\Omega = \langle 0, 2\pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle$. □

Je-li zobrazení $\mathbf{\Gamma}$ třídy C^k ve všech svých složkách (existují derivace všech složek $\mathbf{\Gamma}$ až do řádu k a jsou spojité), je také plocha třídy C^k. Dále potom řekneme, že plocha je *regulární v bodě* $A \in \Omega$, jestliže je $\mathbf{\Gamma}$ regulární v bodě A jako funkce $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$, tzn. že matice

$$J(A) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Gamma_1}{\partial \xi_1}(A) & \dfrac{\partial \Gamma_1}{\partial \xi_2}(A) \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \Gamma_m}{\partial \xi_1}(A) & \dfrac{\partial \Gamma_m}{\partial \xi_2}(A) \end{pmatrix} \tag{2}$$

má hodnost 2, z čehož plyne, že existuje alespoň jeden minor 2. řádu, který je nenulový. Matice ve vztahu (2) se nazývá *Jacobiho matice* zobrazení $\mathbf{\Gamma}$. Podmínka regularity nám zaručí, že plocha nedegeneruje na křivku nebo na bod, a také že nebude mít žádné *singulární body* (body, kde hodnost $J(A) < 2$).

V dalším budeme předpokládat, že $m = 3$. Protože pro regularitu plochy stačí, aby existoval alespoň jeden minor řádu 2, který je nenulový, můžeme podmínku regularity v bodě A zapsat takto

$$J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \neq 0\,, \tag{3}$$

kde

$$J_x = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \xi_1}(A) & \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \xi_2}(A) \\ \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \xi_1}(A) & \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \xi_2}(A) \end{vmatrix}, \; J_y = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \xi_1}(A) & \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \xi_2}(A) \\ \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \xi_1}(A) & \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \xi_2}(A) \end{vmatrix}, \; J_z = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \xi_1}(A) & \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \xi_2}(A) \\ \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \xi_1}(A) & \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \xi_2}(A) \end{vmatrix}.$$

Plocha je regulární na oblasti Ω, jestliže je regulární v každém bodě této oblasti.

2.2 Tečná rovina plochy

Zvolíme-li nyní pevně parametr $\xi_2 = \xi_{2,0}$, dostaneme výraz $\mathbf{\Gamma}(\xi_1,\xi_{2,0})$, což je vyjádření křivky na ploše. Tato křivka se nazývá ξ_1-křivka. Analogicky, zvolíme-li pevné $\xi_1 = \xi_{1,0}$, dostaneme křivku na ploše $\mathbf{\Gamma}(\xi_{1,0},\xi_2)$, která se nazývá ξ_2-křivka.

V bodě $\mathbf{\Gamma}(\xi_{1,0},\xi_{2,0})$ je tečný vektor k ploše ve směru ξ_1-křivky dán vztahem

$$\mathbf{\Gamma}_{\xi_1} = \left[\frac{\partial \Gamma_1(\xi_{1,0},\xi_{2,0})}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \Gamma_2(\xi_{1,0},\xi_{2,0})}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \Gamma_3(\xi_{1,0},\xi_{2,0})}{\partial \xi_1}\right],$$

a podobně tečný vektor k ploše ve směru ξ_2-křivky

$$\mathbf{\Gamma}_{\xi_2} = \left[\frac{\partial \Gamma_1(\xi_{1,0},\xi_{2,0})}{\partial \xi_2}, \frac{\partial \Gamma_2(\xi_{1,0},\xi_{2,0})}{\partial \xi_2}, \frac{\partial \Gamma_3(\xi_{1,0},\xi_{2,0})}{\partial \xi_2}\right].$$

Abychom dostali tečný vektor k ploše v libovolném směru, uvažujme obecnou křivku $\gamma : J \to \mathbb{R}^2$, kde $J \subset \mathbb{R}$ takovou, že $\gamma(J) \subset \Omega$. Je tedy

$$\boldsymbol{\gamma}(\tau) = [\gamma_1(\tau), \gamma_2(\tau)]\,, \qquad \tau \in J\,,$$

parametrická křivka. Zobrazení $\mathbf{\Gamma} \circ \boldsymbol{\gamma}$ určuje křivku na ploše. Zvolme libovolný regulární bod $A = [a_1, a_2, a_3]$ plochy $\mathbf{\Gamma}$ a křivku na ploše procházející bodem A, tzn. že pro nějaké $\tau_0 \in J$ platí

$$\mathbf{\Gamma} \circ \boldsymbol{\gamma}(\tau_0) = A\,,$$

což je složené zobrazení, které je možno zapsat také jako

$$\Big[\Gamma_1\big(\gamma_1(\tau), \gamma_2(\tau)\big), \Gamma_2\big(\gamma_1(\tau), \gamma_2(\tau)\big), \Gamma_3\big(\gamma_1(\tau), \gamma_2(\tau)\big)\Big]_{\tau=\tau_0} = [a_1, a_2, a_3]\,. \tag{4}$$

Tečný vektor ke křivce v bodě A získáme derivováním (4) podle τ

$$(\mathbf{\Gamma} \circ \boldsymbol{\gamma})'_{\tau=\tau_0} = [\Gamma'_{1\xi_1}\gamma'_1 + \Gamma'_{1\xi_2}\gamma'_2,\; \Gamma'_{2\xi_1}\gamma'_1 + \Gamma'_{2\xi_2}\gamma'_2,\; \Gamma'_{3\xi_1}\gamma'_1 + \Gamma'_{3\xi_2}\gamma'_2]_{\tau=\tau_0}\,. \tag{5}$$

Z regularity plochy v bodě A plyne, že vektory $\mathbf{\Gamma}'_{\xi_1} = [\Gamma'_{1\xi_1}, \Gamma'_{2\xi_1}, \Gamma'_{3\xi_1}]$ a $\mathbf{\Gamma}'_{\xi_2} = [\Gamma'_{1\xi_2}, \Gamma'_{2\xi_2}, \Gamma'_{3\xi_3}]$ jsou lineárně nezávislé. Tečný vektor v bodě A lze tedy napsat jako lineární kombinaci těchto dvou vektorů:

$$(\mathbf{\Gamma} \circ \boldsymbol{\gamma})'_{\tau=\tau_0} = [\gamma'_1 \mathbf{\Gamma}'_{\xi_1} + \gamma'_2 \mathbf{\Gamma}'_{\xi_2}]_{\tau=\tau_0} \,. \tag{6}$$

Jelikož křivka $\boldsymbol{\gamma}(\tau)$ byla vybrána libovolně, pouze procházela bodem A, lze říci, že tečný vektor ke křivce je i tečným vektorem plochy. Všechny tečné vektory v bodě A tvoří vektorový prostor dimenze 2. Potom

$$A,\, \mathbf{\Gamma}'_{\xi_1}(A),\, \mathbf{\Gamma}'_{\xi_2}(A) \tag{7}$$

určují tzv. *tečnou rovinu* plochy v bodě A.

Vynásobíme-li $\mathbf{\Gamma}'_{\xi_1}(A)$ a $\mathbf{\Gamma}'_{\xi_2}(A)$ vektorově, dostaneme vektor kolmý na tečnou rovinu. Platí tedy, že

$$\mathbf{n}(A) = \frac{\mathbf{\Gamma}'_{\xi_1}(A) \times \mathbf{\Gamma}'_{\xi_2}(A)}{\|\mathbf{\Gamma}'_{\xi_1}(A) \times \mathbf{\Gamma}'_{\xi_2}(A)\|_2} \tag{8}$$

je jednotkový normálový vektor plochy v bodě A. Ve vztahu (8) značí $\|\cdot\|_2$ dvojkovou normu. To znamená, že $\|\mathbf{\Gamma}'_{\xi_1}(A) \times \mathbf{\Gamma}'_{\xi_2}(A)\|_2$ je délka vektoru.

Dostali jsme tak jednotkový normálový vektor plochy v regulárním bodě A. Je-li plocha $\mathbf{\Gamma}(\xi_1,\xi_2)$ regulární ve všech bodech oblasti Ω, jsme schopni určit normálové vektory ve všech těchto bodech. Dostáváme tak *jednotkové normálové vektorové pole* plochy $\mathbf{\Gamma}$, které můžeme chápat jako zobrazení

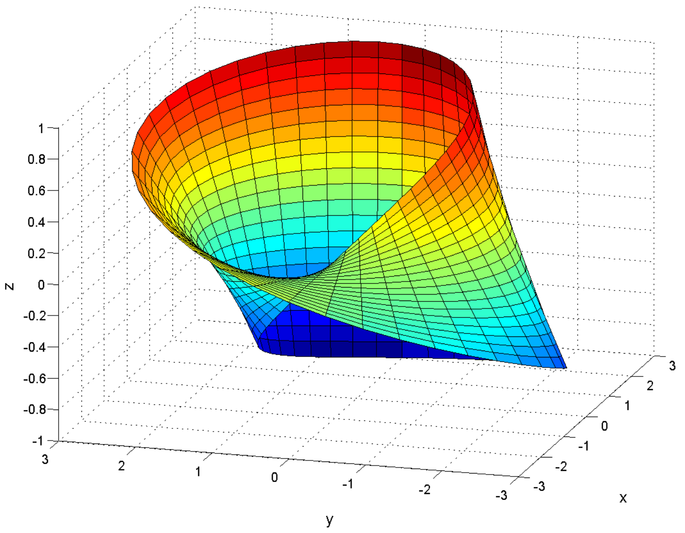
$$\mathbf{n}: \underset{\text{body}}{\mathbb{R}^3} \to \underset{\text{vektory}}{\mathbb{R}^3}\,,$$

které každému bodu plochy přiřadí normálu. Je vidět, že normálové pole můžeme orientovat dvěma směry. Problém by nastal jedině tehdy, kdyby jeden směr přecházel v druhý. Existuje-li na ploše uzavřená regulární křivka $\boldsymbol{\gamma}$, podél které libovolné spojité normálové pole přechází od $\mathbf{n}$ k $-\mathbf{n}$, nazveme plochu *neorientovatelnou.* Jinak se plocha nazývá *orientovatelná.*

Příklad 2.2. Příkladem neorientovatelné plochy je například tzv. Möbiův list, který je dán rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= 2\cos\xi_1 + \xi_2 \sin\tfrac{\xi_1}{2}\cos\xi_1\,,\\ y &= 2\sin\xi_1 + \xi_2 \sin\tfrac{\xi_1}{2}\sin\xi_1\,,\\ z &= \xi_2\cos\tfrac{\xi_1}{2}\,, \end{aligned}$$

kde $\xi_1 \in \langle 0,2\pi\rangle$, $\xi_2 \in \langle -1,1\rangle$. Z obr. (1) je vidět, že normála se skutečně převrací od $\mathbf{n}$ k $-\mathbf{n}$. $\square$



Obrázek 1: Möbiův list

3 Bézierovy plochy

Bézierovy křivky a plochy vyvinuli nezávisle na sobě P. Bézier pro Renault a (o trošku dříve) P. de Casteljau pro Citröen. Práce druhého jmenovaného nebyla zveřejněna až do roku 1975, a proto celá tato teorie křivek a ploch nese Bézierovo jméno.

Pro účely této práce budou využívány pouze plochy, avšak vzhledem k tomu, že Bézierova plocha je přirozeným zobecněním Bézierovy křivky a je to také v souladu s historickým vývojem celé teorie, zavedeme nejprve Bézierovu křivku a následně ji zobecníme na plochu. Výsledky uvedené v tomto odstavci a mnohem více o Bézierových plochách lze nalézt například v [1].

3.1 Afinní zobrazení

K základním operacím s body patří tzv. *barycentrické kombinace.* Nejprve tedy zavedeme afinní zobrazení pomocí barycentrických kombinací.

Mějme body $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^3$, $j = 1, \ldots, n$. Řekneme, že bod $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ je barycentrickou kombinací bodů $\mathbf{a}_j$, $j = 1, \ldots, n$, jestliže

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{a}_j \,,$$

kde

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1 \,.$$

Zde α_j, $j = 1, \ldots, n$, jsou *barycentrické souřadnice.*

Definice 3.1. Zobrazení $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ se nazývá *afinní zobrazení*, jestliže pro každé

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbf{a}_j \,; \qquad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1, \;\; \mathbf{x},\, \mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^3 \,,$$

platí

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \Phi(\mathbf{a}_j) \,. \tag{9}$$

Jinými slovy platí, že afinní zobrazení zanechává barycentrické kombinace invariantní.

Velmi často se používá afinní zobrazení typu

$$\Phi(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v} \,, \tag{10}$$

kde $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]$ je bod, A je matice typu 3×3 a $\mathbf{v}$ je vektor z $\mathbb{R}^3$. Snadno se ukáže, že (10) je skutečně afinní zobrazení

$$\begin{aligned} \Phi\Big(\sum \alpha_j \mathbf{a}_j\Big) \;&=\; A\Big(\sum \alpha_j \mathbf{a}_j\Big) + \mathbf{v} = \sum \alpha_j A\mathbf{a}_j + \sum \alpha_j \mathbf{v} = \sum \alpha_j (Aa_j + \mathbf{v}) = \\ &= \sum \alpha_j \Phi(\mathbf{a}_j) \,. \end{aligned}$$

Chceme-li nyní například rotovat s bodem $\mathbf{x}$ kolem osy z, stačí položit

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Lineární interpolace. Nechť $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ jsou dva různé body v $\mathbb{R}^3$. Je zřejmé, že množina bodů daná vztahem

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b} \,, \qquad t \in \mathbb{R} \,, \tag{11}$$

je přímka procházející body $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Pro $t = 0$ se dostaneme do bodu $\mathbf{a}$, pro $t = 1$ do bodu $\mathbf{b}$. Pro případ $0 \le t \le 1$ leží bod $\mathbf{x}$ mezi body $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Rovnice (11) představuje barycentrickou kombinaci bodů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Ta stejná kombinace platí pro body 0, τ, 1 v $\mathbb{R}$: $\tau = (1-t)\cdot 0 + t \cdot 1$, takže τ je spojeno s 0 a 1 stejnou kombinací jako $\mathbf{x}$ s $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Podle definice afinního zobrazení je tedy lineární interpolace afinní zobrazení z $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.

Z (11) také ihned vyplývá, že lineární interpolace je *afinně invariantní*, tzn., že když $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je afinní zobrazení, pak platí následující rovnost

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi\Big((1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}\Big) = (1-t)\Phi(\mathbf{a}) + t\Phi(\mathbf{b}) \,.$$

To se dá chápat také tak, že je jedno, jestli nejprve transformujeme body $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a pak je interpolujeme, nebo interpolujeme $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ a výsledek transformujeme.

Podobně se dá také mluvit o *po částech lineární interpolaci*. Nechť $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^3$ jsou body v prostoru. Jestliže interpolujeme každou dvojici $\mathbf{b}_i$, $\mathbf{b}_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n$, dostaneme po částech lineární interpolant bodů $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ tvořící polygon. Důležitou vlastností po částech lineární interpolace je fakt, že je *afinně invariantní.*

3.2 Algoritmus de Casteljau

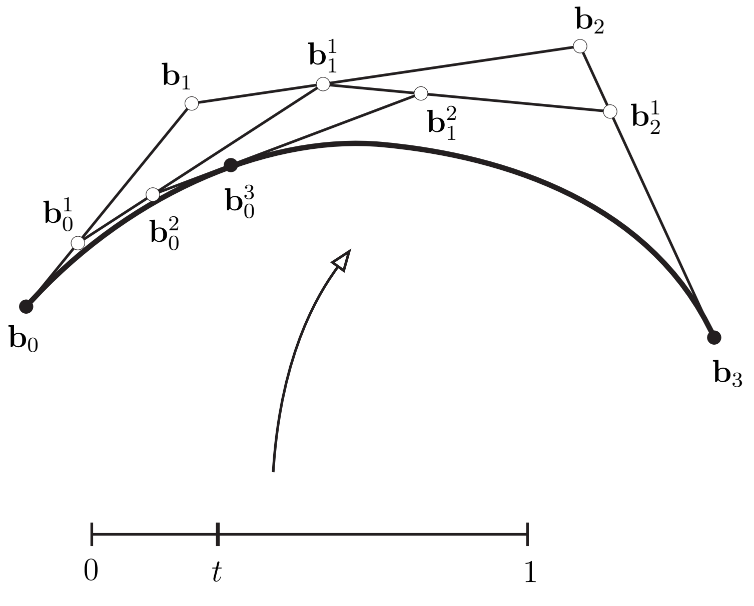
Zde popíšeme jeden z nejzákladnějších algoritmů teorie křivek a ploch. Právě tímto algoritmem začal de Casteljau v roce 1959 svoji práci, která byla ovšem publikována až v roce 1975. Teprve v té době se jeho jméno stalo známým.

Mějme body $\mathbf{b}_0, \ldots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}$ a $t \in \langle 0, 1\rangle$. Položme

$$\mathbf{b}_i^r(t) = (1-t)\mathbf{b}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t)\,, \qquad \begin{array}{l} r = 1, \ldots, n\,, \\ i = 0, \ldots, n-r\,, \end{array} \tag{12}$$

a $\mathbf{b}_i^0(t) = \mathbf{b}_i$. Potom bod $\mathbf{b}_0^n(t)$ je bod s parametrem t na Bézierově křivce $\mathbf{b}^n$, tj. $\mathbf{b}^n = \mathbf{b}_0^n(t)$.

Polygon tvořený body $\mathbf{b}_i$, $i = 0, \ldots, n$, je tzv. Bézierův nebo také řídicí polygon. Stejně tak samotné body $\mathbf{b}_i$, $i = 0, \ldots, n$, se nazývají Bézierovy nebo také řídicí body.



Obrázek 2: Algoritmus de Casteljau

Někdy se také píše $\mathbf{b}^n(t) = \mathcal{B}[\mathbf{b}_0, \ldots, \mathbf{b}_n; t] = \mathcal{B}\mathbf{P}$. Tento zápis definuje $\mathcal{B}$ jako lineární operátor, který každému řídicímu polygonu přiřazuje Bézierovu křivku. Ří-

káme, že křivka $\mathcal{B}[\mathbf{b}_0,\ldots,\mathbf{b}_n;t]$ je Bézierovou aproximací řídicího polygonu. Obrázek (2) znázorňuje kubický případ.

Pro přehledné znázornění algoritmu se pomocné body $\mathbf{b}_i^r$ zapisují do trojúhelníkového pole, tzv. de Casteljauova schématu. Zde je kubický případ

$$\begin{array}{llll}\mathbf{b}_0 & & & \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0^1 & & \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1^1 & \mathbf{b}_0^2 & \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2^1 & \mathbf{b}_1^2 & \mathbf{b}_0^3\end{array}$$

Z algoritmu de Casteljau přímo vyplývají některé vlastnosti Bézierových křivek:

Afinní invariance. Je velmi důležitou vlastností Bézierových křivek, jelikož při kreslení objektů velmi často požadujeme, aby bylo možné je posouvat, otáčet, měnit měřítko atd. To tedy znamená, že nezáleží na tom, jestli nejprve spočteme bod $\mathbf{b}^n(t)$ a pak na něj aplikujeme afinní zobrazení, nebo nejprve aplikujeme afinní zobrazení na řídicí polygon a teprve pak vypočteme bod $\mathbf{b}^n(t)$. Výsledek je totožný. To může být velmi užitečné, chceme-li například spočítat velké množství bodů, ve druhém případě nemusíme aplikovat afinní zobrazení na každý bod, ale stačí je aplikovat pouze na řídicí polygon.

Afinní invariance je přímý důsledek algoritmu de Casteljau. Algoritmus se skládá z opakované lineární interpolace, která je afinně invariantní, to znamená, že i konečný počet těchto interpolací je afinně invariantní.

Invariance vůči afinní transformaci parametru. V některých situacích můžeme požadovat, aby byla křivka definována nad obecným intervalem $\langle a,b\rangle$. Bézierova křivka je definována nad intervalem $\langle 0,1\rangle$, není to ale nezbytné. Stačí zavést transformaci

$$t = \frac{u-a}{b-a}\,.$$

Skutečně, dosadíme-li za $u = a$, dostaneme krajní bod 0. Jestliže dosadíme $u = b$, dostaneme krajní bod 1. Odpovídající algoritmus je pak tvaru

$$\mathbf{b}_i^r(u) = \frac{b-u}{b-a}\mathbf{b}_i^{r-1}(u) + \frac{u-a}{b-a}\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(u)\,.$$

Tranformace z intervalu $\langle 0,1\rangle$ na interval $\langle a,b\rangle$ je afinní zobrazení. Můžeme tedy říct, že Bézierovy křivky jsou invariantní vůči afinní transformaci parametru.

Interpolace koncových bodů. Snadno se ověří a z obrázku (2) je vidět, že Bézierova křivka prochází body $\mathbf{b}_0$ a $\mathbf{b}_n$. Máme tedy $\mathbf{b}^n(0) = \mathbf{b}_0$ a $\mathbf{b}^n(1) = \mathbf{b}_n$.

Modelování Bézierových křivek. Při pohledu na Bézierovu křivku je vidět, že jakýmsi způsobem kopíruje tvar řídicího polygonu. Je to právě tato vlastnost, která dělá z Bézierových křivek tak mocný násroj při interaktivním modelování. Uživatel zadává body řídicího polygonu a sleduje, jak jej křivka kopíruje. Je-li třeba změnit tvar křivky, stačí posouvat body řídicího polygonu, dokud nemá křivka požadovaný tvar.

3.3 Bernsteinův tvar Bézierovy křivky

Bézierovy křivky mohou být definovány rekurzivně, jak jsme viděli v předcházejícím odstavci. Takhle je také poprvé de Casteljau objevil. Často je ale mnohem výhodnější mít jejich explicitní vyjádření. Ukážeme, že se dají velmi elegantně vyjádřit pomocí takzvaných Bernsteinových polynomů.

Bernsteinovy polynomy

Bernsteinovy polynomy řádu n jsou definovány jako

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}\,,$$

kde

$$\binom{n}{i} = \begin{cases} \dfrac{n!}{i!(n-i)!} & \text{pro } 0 \le i \le n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}\,.$$

Nežli ukážeme, že Bézierova křivka se dá definovat také pomocí Bernsteinových polynomů, podíváme se na některé jejich vlastnosti. Jedna z nich je ta, že splňují následnující rekurzi

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)\,, \tag{13}$$

kde

$$B_0^0(t) \equiv 1 \tag{14}$$

a

$$B_j^n(t) \equiv 0 \qquad \text{pro } j \notin \{0, \ldots, n\}\,. \tag{15}$$

Důkaz.

$$\begin{aligned} (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) &= (1-t)\binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-1-i} + \\ &\quad + \binom{n-1}{i-1} t^{i-1} (1-t)^{n-1-i+1} = \\ &= \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-i} + \binom{n-1}{i-1} t^i (1-t)^{n-i} = \\ &= \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}\right] t^i (1-t)^{n-i} = \\ &= \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = B_i^n(t)\,. \end{aligned}$$

□

Další důležitou vlastností je tato

$$\sum_{j=0}^{n} B_j^n(t) = 1\,. \tag{16}$$

Důkaz. S pomocí binomické věty dostáváme

$$1 = [t + (1-t)]^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} B_j^n(t)\,.$$

□

Nyní se konečně dostáváme k tomu, proč jsou Bernsteinovy polynomy tak důležité pro konstrukci Bézierovy křivky. Pomocné body algoritmu de Casteljau $\mathbf{b}_i^r$ mohou být vyjádřeny pomocí Bernsteinových polynomů jako

$$\mathbf{b}_i^r(t) = \sum_{j=0}^{r} \mathbf{b}_{i+j} B_j^r(t)\,, \qquad \begin{array}{l} r \in \{0, \ldots, n\}\,, \\ i \in \{0, \ldots, n-r\}\,. \end{array} \tag{17}$$

Z rovnice (17) je přímo vidět, jak pomocné body algoritmu závisí na daných řídicích bodech. Při pohledu na obrázek (2) vidíme, že například bod $\mathbf{b}_1^2$ leží na Bézierově křivce určené řídicími body $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$.

Dokážeme tedy (17) indukcí. Pro $r = 0$ vztah zřejmě platí. Předpokládejme, že platí pro $r := r - 1$. Platí také rekurze (12). Z indukčního předpokladu vyplývá, že

$$\mathbf{b}_i^{r-1}(t) = \sum_{j=0}^{r-1} \mathbf{b}_{i+j} B_j^{r-1}(t) = \sum_{j=i}^{i+r-1} \mathbf{b}_j B_{j-i}^{r-1}(t)\,,$$

a stejně tak

$$\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t) = \sum_{j=0}^{r-1} \mathbf{b}_{i+j+1} B_j^{r-1}(t) = \sum_{j=i+1}^{i+r} \mathbf{b}_j B_{j-i-1}^{r-1}(t)\,.$$

Po dosazení do (12) tak dostáváme

$$\mathbf{b}_i^r(t) = (1-t) \sum_{j=i}^{i+r-1} \mathbf{b}_j B_{j-i}^{r-1}(t) + t \sum_{j=i+1}^{i+r} \mathbf{b}_j B_{j-i-1}^{r-1}(t)\,.$$

Použitím vztahu (15) můžeme poslední rovnici následovně přeindexovat

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i^r(t) &= (1-t) \sum_{j=i}^{i+r} \mathbf{b}_j B_{j-i}^{r-1}(t) + t \sum_{j=i}^{i+r} \mathbf{b}_j B_{j-i-1}^{r-1}(t) = \\ &= \sum_{j=i}^{i+r} \mathbf{b}_j \Big[(1-t) B_{j-i}^{r-1}(t) + t B_{j-i-1}^{r-1}(t)\Big]\,. \end{aligned}$$

Nyní už stačí jen použít rekurzi (13)

$$\mathbf{b}_i^r(t) = \sum_{j=i}^{i+r} \mathbf{b}_j B_{j-i}^r(t)$$

a přeindexovat

$$\mathbf{b}_i^r(t) = \sum_{j=0}^{r} \mathbf{b}_{j+i} B_j^r(t)\,.$$

Tím je důkaz hotov.

Největší důležitost ze vztahu (17) má případ $r = n$. V tomto případě odpovídající pomocné body algoritmu de Casteljau leží přímo na Bézierově křivce a jsou dány vztahem

$$\mathbf{b}^n(t) = \mathbf{b}_0^n(t) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{b}_j B_j^n(t)\,, \tag{18}$$

což je vyjádření Bézierovy křivky pomocí Bernsteinových polynomů.

Z algoritmu de Casteljau jsme byli schopni vyvodit některé vlastnosti Bézierových křivek. Tyto vlastnosti přirozeně vyplývají také z explicitního vyjádření pomocí Bernsteinových polynomů.

Afinní invariance. Víme, že barycentrické kombinace jsou afinně invariantní. Protože platí (16), je vyjádření křivky pomocí Bernsteinových polynomů barycentrickou kombinací, z čehož vyplývá, že je afinně invariantní.

Invariance vůči afinní transformaci parametru. Tuto vlastnost můžeme zapsat algebraicky jako

$$\sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i B_i^n\left(\frac{u-a}{b-a}\right)\,.$$

Interpolace koncových bodů. Tato vlastnost je přímým důsledkem vztahů

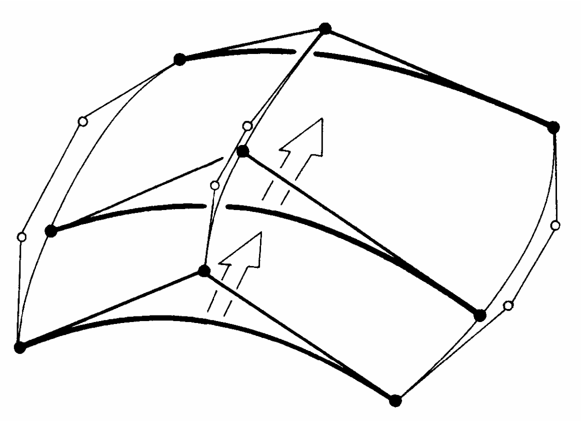
$$B_i^n(0) = \delta_{i,0}, \qquad B_i^n(1) = \delta_{i,n}\,,$$

kde $\delta_{i,j}$ je Kroneckerovo delta.

3.4 Zobecnění na Bézierovu plochu

Základem tohoto zobecnění křivky na plochu je jakási intuitivní představa plochy v prostoru: *plocha je vytvořena křivkou, která se pohybuje v prostoru a mění při tom svůj tvar.*

Pokusme se tuto představu formalizovat. Nejdříve předpokládejme, že pohybující se křivka je Bézierova křivka stupně n. V libovolném čase je tato křivka určena



Obrázek 3: Plocha vznikající posouváním Bézierovy křivky v prostoru

svými řídicími body. Každý z těchto řídicích bodů se v prostoru pohybuje také po křivce. Dále předpokládejme, že křivky, po kterých se řídicí body pohybují, jsou také Bézierovy křivky a navíc všechny stejného stupně m. Představu dává obrázek (3).

Nechť je tedy počáteční křivka Bézierova křivka stupně n:

$$\mathbf{b}^n(\xi_1) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}_i B_i^n(\xi_1)\,.$$

Každý z řídicích bodů $\mathbf{b}_i$ se pohybuje po Bézierově křivce řádu m

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i(\xi_2) = \sum_{j=0}^{m} \mathbf{b}_{i,j} B_j^m(\xi_2)\,.$$

Když spojíme dohromady poslední dvě rovnice, dostaneme bod ležící na Bézierově ploše jako

$$\mathbf{b}^{n,m}(\xi_1,\xi_2) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \mathbf{b}_{i,j} B_i^n(\xi_1) B_j^m(\xi_2)\,, \tag{19}$$

kde body $\mathbf{b}_{i,j}$, $i = 0,\ldots,n$, $j = 0,\ldots,m$, tvoří tzv. *řídicí síť* Bézierovy plochy, pomocí které se plocha modeluje, viz obr. (4).

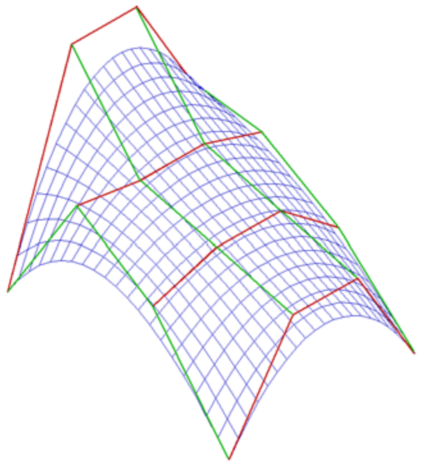
Vztah (19) je parametrickým vyjádřením Bézierovy plochy pomocí Bernsteinových polynomů s parametry ξ_1,ξ_2. Tuto plochu jsme obdrželi pohybem isoparametrické křivky $\mathbf{b}^{n,m}(\xi_1,0)$ v prostoru. Platí, že libovolná isoparametrická křivka $\mathbf{b}^{n,m}(\xi_1,\xi_2 = konst)$ je Bézierova křivka stupně n v ξ_1, její řídicí body ale neleží na kontrolní síti plochy. Podobně můžeme říci, že každá isoparametrická křivka $\mathbf{b}^{n,m}(\xi_1 = konst,\xi_2)$ je Bézierova křivka stupně m v ξ_2.

Rovnice (19) se dá velmi elegantně zapsat také v maticové formě jako

$$\mathbf{b}^{n,m}(\xi_1,\xi_2) = \begin{pmatrix} B_0^n(\xi_1) & \ldots & B_n^n(\xi_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{0,0} & \ldots & \mathbf{b}_{0,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{b}_{n,0} & \ldots & \mathbf{b}_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_0^m(\xi_2) \\ \vdots \\ B_m^m(\xi_2) \end{pmatrix}, \tag{20}$$

což se dá snadno ověřit provedením maticového násobení.

Jako počáteční křivka pro konstrukci Bézierovy plochy mohla být použita libovolná z okrajových křivek této plochy. Z konstrukce je vidět, že tyto okrajové křivky jsou určeny vždy okrajovými body řídicího polygonu.



Obrázek 4: Příklad Bézierovy plochy s řídicí sítí

Bézierova plocha má velmi podobné vlastnosti jako Bézierova křivka. Většina z těchto vlastností přímo vyplývá z vlastností křivek.

Afinní invariance. Vztah (19) je barycentrickou kombinací, protože platí

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} B_i^n B_j^m = 1\,.$$

Z toho vyplývá, že Bézierova plocha je afinně invariantní.

Okrajové křivky Okrajové křivky plochy $\mathbf{b}^{n,m}$ jsou Bézierovy křivky. Jejich řídicí body jsou určeny okrajovými polygony řídicí sítě. Z toho vyplývá, a z obrázku (4) je vidět, že čtyři rohové body řídicí sítě jsou také body Bézierovy plochy.

Ještě poznamenejme, že i Bézierovu plochu lze zavést ekvivalentně pomocí algoritmu de Casteljau. Ten spočívá podobně jako u křivky v opakované bilineární interpolaci.

3.5 Derivace Bézierovy plochy

Nejprve se podívejme, jak vypadá derivace Bernsteinových polynomů

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B_i^n(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\binom{n}{i}t^i(1-t)^{n-i} = \\ &= \frac{in!}{i!(n-i)!}t^{i-1}(1-t)^{n-i} - \frac{(n-i)n!}{i!(n-i)!}t^i(1-t)^{n-i-1} = \\ &= \frac{n(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!}t^{i-1}(1-t)^{n-i} - \frac{n(n-1)!}{i!(n-i-1)!}t^i(1-t)^{n-i-1} = \\ &= n\Big[B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)\Big] .\end{aligned}$$

Dostáváme tak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B_i^n(t) = n\Big[B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)\Big] . \tag{21}$$

Teď už máme vše připraveno pro derivaci Bézierovy plochy. Derivujme nejprve podle ξ_1

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1}\mathbf{b}^{n,m}(\xi_1,\xi_2) = \frac{\partial}{\partial \xi_1}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\mathbf{b}_{i,j}B_i^n(\xi_1)B_j^m(\xi_2) = \sum_{j=0}^{m}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_1}\sum_{i=0}^{n}\mathbf{b}_{i,j}B_i^n(\xi_1)\right]B_j^m(\xi_2) .$$

Po dosazení (21) dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1}\mathbf{b}^{n,m}(\xi_1,\xi_2) = \sum_{j=0}^{m}\left[n\sum_{i=0}^{n}\Big[B_{i-1}^{n-1}(\xi_1) - B_i^{n-1}(\xi_1)\Big]\mathbf{b}_{i,j}\right]B_j^m(\xi_2) .$$

S použitím (15) můžeme poslední rovnici takto přepsat

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1}\mathbf{b}^{n,m}(\xi_1,\xi_2) = \sum_{j=0}^{m}\left[n\sum_{i=1}^{n}B_{i-1}^{n-1}(\xi_1)\mathbf{b}_{i,j} - n\sum_{i=0}^{n-1}B_i^{n-1}(\xi_1)\mathbf{b}_{i,j}\right]B_j^m(\xi_2) .$$

U první sumy v hranaté závorce teď tranformujeme její index

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1}\mathbf{b}^{n,m}(\xi_1,\xi_2) = \sum_{j=0}^{m}\left[n\sum_{i=0}^{n-1}B_i^{n-1}(\xi_1)\mathbf{b}_{i+1,j} - n\sum_{i=0}^{n-1}B_i^{n-1}(\xi_1)\mathbf{b}_{i,j}\right]B_j^m(\xi_2) .$$

Teď nám nic nebrání spojit obě sumy dohromady

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1}\mathbf{b}^{n,m}(\xi_1,\xi_2) = \sum_{j=0}^{m}\left[n\sum_{i=0}^{n-1}\Big[\mathbf{b}_{i+1,j} - \mathbf{b}_{i,j}\Big]B_i^{n-1}(\xi_1)\right]B_j^m(\xi_2) .$$

Dostáváme tak vztah pro derivaci Bézierovy plochy podle ξ_1

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1}\mathbf{b}^{n,m}(\xi_1,\xi_2) = n\sum_{j=0}^{m}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\Big[\mathbf{b}_{i+1,j} - \mathbf{b}_{i,j}\Big]B_i^{n-1}(\xi_1)\right]B_j^m(\xi_2) . \tag{22}$$

Zcela analogicky je možné odvodit derivaci plochy podle ξ_2

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2}\mathbf{b}^{n,m}(\xi_1,\xi_2) = m\sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{m-1}\Big[\mathbf{b}_{i,j+1}-\mathbf{b}_{i,j}\Big]B_j^{m-1}(\xi_2)\right]B_i^n(\xi_1)\,. \tag{23}$$

Tyto formule mohou být zjednodušeny zavedením takzvaných *operátorů dopředné diference* Δ, definovaných vztahem

$$\begin{aligned}\Delta^{1,0}\mathbf{b}_{i,j} &= \mathbf{b}_{i+1,j}-\mathbf{b}_{i,j}\,,\\ \Delta^{0,1}\mathbf{b}_{i,j} &= \mathbf{b}_{i,j+1}-\mathbf{b}_{i,j}\,.\end{aligned}$$

Zde horní indexy u Δ pouze říkají, jestli se jedná o dopřednou diferenci v i nebo v j. Pomocí operátorů dopředné diference můžeme přepsat vztahy (22) a (23) následovně

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1}\mathbf{b}^{n,m}(\xi_1,\xi_2) = n\sum_{j=0}^{m}\left[\sum_{i=0}^{n-1}\Delta^{1,0}\mathbf{b}_{i,j}B_i^{n-1}(\xi_1)\right]B_j^m(\xi_2)\,. \tag{24}$$

A analogicky

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2}\mathbf{b}^{n,m}(\xi_1,\xi_2) = m\sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{m-1}\Delta^{0,1}\mathbf{b}_{i,j}B_j^{m-1}(\xi_2)\right]B_i^n(\xi_1)\,. \tag{25}$$

Derivace Bézierovy plochy je tedy jiná Bézierova plocha, kterou dostaneme pomocí originální řídicí sítě.

Vzorce pro derivace Bézierových ploch jsou při výpočtech velmi výhodné, neboť známe-li její řídicí body, jsme schopni velmi pohodlně určit přesné hodnoty derivace v libovolných bodech plochy.

Derivace vyšších řádů

Pro výpočet derivací vyšších řádu nejprve zobecněme operátor dopředné diference. *Operátor vícenásobné dopředné diference* definujme takto

$$\begin{aligned}\Delta^{r,0}\mathbf{b}_{i,j} &= \Delta^{r-1,0}\mathbf{b}_{i+1,j}-\Delta^{r-1,0}\mathbf{b}_{i,j}\,,\\ \Delta^{0,r}\mathbf{b}_{i,j} &= \Delta^{0,r-1}\mathbf{b}_{i,j+1}-\Delta^{0,r-1}\mathbf{b}_{i,j}\,.\end{aligned}$$

Uveďme pár příkladů

$$\begin{aligned}\Delta^{0,0}\mathbf{b}_{i,j} &= \mathbf{b}_{i,j}\,,\\ \Delta^{1,0}\mathbf{b}_{i,j} &= \mathbf{b}_{i+1,j}-\mathbf{b}_{i,j}\,,\\ \Delta^{2,0}\mathbf{b}_{i,j} &= \mathbf{b}_{i+2,j}-2\mathbf{b}_{i+1,j}+\mathbf{b}_{i,j}\,,\\ \Delta^{3,0}\mathbf{b}_{i,j} &= \mathbf{b}_{i+3,j}-3\mathbf{b}_{i+2,j}+3\mathbf{b}_{i+1,j}-\mathbf{b}_{i,j}\,.\end{aligned}$$

Vícenásobnou dopřednou diferenci můžeme potom zapsat takto

$$\Delta^{r,0}\mathbf{b}_{i,j} = \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^{r-k}\mathbf{b}_{i+k,j}\,.$$

Opakovaným derivováním lze ukázat, že platí

$$\frac{\partial^r}{\partial \xi_1^r}\mathbf{b}^{n,m}(\xi_1,\xi_2) = \frac{n!}{(n-r)!}\sum_{j=0}^{m}\left[\sum_{i=0}^{n-r}\Delta^{r,0}\mathbf{b}_{i,j}B_i^{n-r}(\xi_1)\right]B_j^m(\xi_2) \tag{26}$$

a

$$\frac{\partial^s}{\partial \xi_2^s}\mathbf{b}^{n,m}(\xi_1,\xi_2) = \frac{m!}{(m-s)!}\sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{m-s}\Delta^{0,s}\mathbf{b}_{i,j}B_j^{m-s}(\xi_2)\right]B_i^n(\xi_1)\,. \tag{27}$$

Lze také dokázat nejobecnější případ, tzv. smíšenou parciální derivaci

$$\frac{\partial^{r+s}}{\partial \xi_1^r \partial \xi_2^s}\mathbf{b}^{n,m}(\xi_1,\xi_2) = \frac{n!m!}{(n-r)!(m-s)!}\sum_{i=0}^{n-r}\sum_{j=0}^{m-s}\Delta^{r,s}\mathbf{b}_{i,j}B_i^{n-r}(\xi_1)B_j^{m-s}(\xi_2)\,. \tag{28}$$

4 Plošný integrál

K určení výsledné síly a momentu od tlakového zatížení na ploše budeme muset přes tuto plochu integrovat. V tomto odstavci proto uvedeme několik známých vztahů z teorie plošného integrálu, které budou použity pro výpočet hledané výsledné síly a momentu – viz například [4]. Dále uvedeme i některé další možnosti aplikace plošného integrálu.

Nechť je $\mathbf{\Gamma}(\xi_1, \xi_2)$ parametrická plocha s parametry ξ_1, ξ_2 v $\mathbb{R}^3$ – viz vztah (1). Nejdříve je potřeba zavést element plochy. Obsah rovinné oblasti M se vypočte jako

$$P(M) = \iint_M \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Obsah oblasti $\mathbf{\Gamma}(M)$ na ploše definujeme vztahem

$$P(\mathbf{\Gamma}(M)) = \iint_M \underbrace{\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2}_{\text{plošný element d}S}\,,$$

kde

$$\begin{aligned} E &= {\Gamma'}^2_{1\xi_1} + {\Gamma'}^2_{2\xi_1} + {\Gamma'}^2_{3\xi_1}\,,\\ F &= \Gamma'_{1\xi_1}\Gamma'_{1\xi_2} + \Gamma'_{2\xi_1}\Gamma'_{2\xi_2} + \Gamma'_{3\xi_1}\Gamma'_{3\xi_2}\,,\\ G &= {\Gamma'}^2_{1\xi_2} + {\Gamma'}^2_{2\xi_2} + {\Gamma'}^2_{3\xi_2}\,. \end{aligned} \tag{29}$$

Platí

$$\sqrt{EG-F^2} = \|\mathbf{\Gamma}'_{\xi_1} \times \mathbf{\Gamma}'_{\xi_2}\|_2\,.$$

Tato rovnice se snadno ověří pouhým rozepsáním a porovnáním obou stran. Pro plošný element dS tak dostáváme

$$\mathrm{d}S = \sqrt{EG-F^2} = \|\mathbf{\Gamma}'_{\xi_1} \times \mathbf{\Gamma}'_{\xi_2}\|_2\,. \tag{30}$$

Po definici elementu plochy máme vše připraveno pro zavedení plošného integrálu.

Definice 4.1. Nechť je $\mathbf{\Gamma}(\xi_1, \xi_2) = \Big[\Gamma_1(\xi_1, \xi_2), \Gamma_2(\xi_1, \xi_2), \Gamma_3(\xi_1, \xi_2)\Big]$, $\xi_1, \xi_2 \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, regulární plocha a $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ spojitá funkce. Potom předpisem

$$\iint\limits_{\mathbf{\Gamma}} f(x_1, x_2, x_3)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Omega} f\Big(\Gamma_1(\xi_1, \xi_2), \Gamma_2(\xi_1, \xi_2), \Gamma_3(\xi_1, \xi_2)\Big)\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2 \quad (31)$$

rozumíme *neorientovaný plošný integrál.*

Aplikace plošného integrálu. Plošný integrál má široké využití, jedním z nich je nakonec i výpočet výsledné síly od tlakového zatížení na ploše. Zde jsou některé další aplikace hojně používané ve fyzice.

- *Obsah plochy* vypočteme jako

$$P(\mathbf{\Gamma}) = \iint\limits_{\mathbf{\Gamma}} \mathrm{d}S\,.$$

- *Hmotnost plochy.* Je-li $\sigma(x, y, z)$ hustota, můžeme spočítat hmotnost plochy podle

$$m = \iint\limits_{\mathbf{\Gamma}} \sigma\,\mathrm{d}S\,.$$

- *Statické momenty plochy* se velmi často používají například v mechanice těles. Vypočteme je ze vztahů

$$S_{xy} = \iint\limits_{\mathbf{\Gamma}} z\sigma\,\mathrm{d}S\,,$$
$$S_{xz} = \iint\limits_{\mathbf{\Gamma}} y\sigma\,\mathrm{d}S\,,$$
$$S_{yz} = \iint\limits_{\mathbf{\Gamma}} x\sigma\,\mathrm{d}S\,.$$

- *Těžiště plochy* pak dostaneme pomocí statických momentů jako

$$\mathbf{T} = \left[\frac{S_{yz}}{m}, \frac{S_{xz}}{m}, \frac{S_{xy}}{m}\right]\,.$$

- *Momenty setrvačnosti plochy* opět nacházejí velké využití v mechanice těles. Jednotlivé momenty k souřadným osám x, y, z dostaneme z rovnic

$$J_x = \iint\limits_{\mathbf{\Gamma}} (y^2 + z^2)\sigma\,\mathrm{d}S\,,$$
$$J_y = \iint\limits_{\mathbf{\Gamma}} (x^2 + z^2)\sigma\,\mathrm{d}S\,,$$
$$J_z = \iint\limits_{\mathbf{\Gamma}} (x^2 + y^2)\sigma\,\mathrm{d}S\,.$$

5 Postup výpočtu

Zde se konečně dostáváme k meritu věci. Nejprve se podrobně podíváme na zadání celé úlohy.

Máme dánu plochu v prostoru

1. parametricky
2. naměřenými souřadnicemi některých bodů

a explicitně zadaný tlak $p(x_1, x_2, x_3)$, který na ploše působí. Cílem je nahradit tuto plochu Bézierovou plochou a určit výslednou sílu a výsledný moment od působícího tlakového zatížení numerickou integrací přes plochu. K tomuto účelu byl s výhodou použit MATLAB, ve kterém je celý postup naprogramován.

5.1 Aproximace plochy

Máme tedy dánu parametrickou plochu $\boldsymbol{\Gamma}(\xi_1, \xi_2) = [\Gamma_1(\xi_1, \xi_2), \Gamma_2(\xi_1, \xi_2), \Gamma_3(\xi_1, \xi_2)]$ s parametry $\xi_1 \in \langle a_1, b_1 \rangle$ a $\xi_2 \in \langle a_2, b_2 \rangle$. K tomu, abychom ji mohli interpolovat Bézierovou plochou, potřebujeme nejprve transformovat její souřadnice $\xi_1, \xi_2 \in \Omega = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle$ tak, aby ležely v jednotkovém čtverci $\widehat{\Omega} = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$. Toho dosáhneme pomocí transformace

$$\hat{\xi}_i = a_i + (b_i - a_i)\xi_i\,, \qquad i = 1{,}2\,. \tag{32}$$

Abychom příliš nekomplikovali značení, budeme dále značit $\Omega \equiv \widehat{\Omega} = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$, $\xi_1 \equiv \hat{\xi}_1$, $\xi_2 \equiv \hat{\xi}_2$. Dostáváme tak plochu $\boldsymbol{\Gamma}(\xi_1, \xi_2)$, $\xi_1, \xi_2 \in \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$. Nyní potřebujeme určit body referenční oblasti Ω, ve kterých ji budeme interpolovat. Zvolme dělení

$$0 = \xi_1^0 < \xi_1^1 < \ldots < \xi_1^n = 1\,, \quad 0 = \xi_2^0 < \xi_2^1 < \ldots < \xi_2^m = 1$$

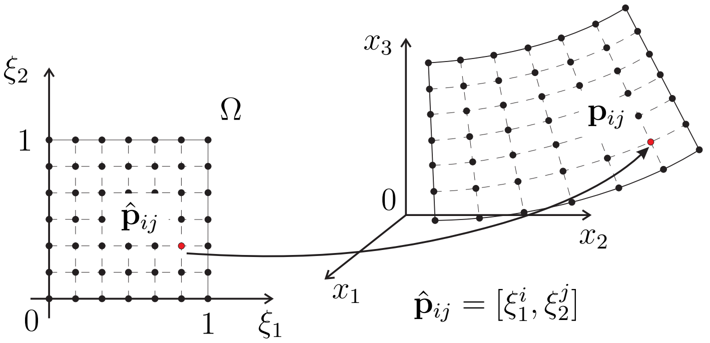
referenční oblasti Ω. Označme $\hat{\mathbf{p}}_{ij} = [\xi_1^i, \xi_2^j]$ a $\mathbf{p}_{ij} = [\Gamma_1(\xi_1^i, \xi_2^j), \Gamma_2(\xi_1^i, \xi_2^j), \Gamma_3(\xi_1^i, \xi_2^j)]$, $i = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, m$, viz obr. (5).

Interpolaci Bézierovou plochou zvolíme tak, aby bod Bézierovy plochy $\mathbf{b}^{n,m}(\xi_1^i, \xi_2^j)$ byl totožný s bodem $\mathbf{p}_{ij}$, tj. aby

$$\mathbf{b}^{n,m}(\xi_1^i, \xi_2^j) = \mathbf{p}_{ij}\,, \qquad i = 0, \ldots, n\,,\; j = 0, \ldots, m\,.$$

Rozepíšeme-li poslední rovnici, dostaneme soustavu lineárních rovnic

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} B_i^n(\xi_1^k) B_j^m(\xi_2^l) \mathbf{b}_{ij} = \mathbf{p}_{ij}\,;\; k = 0, \ldots, n\,,\; l = 0, \ldots, m\,, \tag{33}$$



Obrázek 5: Při interpolaci požadujeme $\mathbf{b}^{n,m}(\xi_1^i, \xi_2^j) = \mathbf{p}_{ij}$

kde neznámé jsou řídicí body $\mathbf{b}_{ij}$. Tato soustava se dá zapsat maticově ve tvaru

$$\mathbf{B}\mathbf{b} = \mathbf{p}\,. \tag{34}$$

Uvědomme si, že body $\mathbf{b}_{ij} = (b_{ij}^1, b_{ij}^2, b_{ij}^3)^T$ mají tři složky. Uspořádáme body $\mathbf{b}_{ij}$, $i = 0, \dots, n$, $j = 0, \dots, m$, do matice $\mathbf{b}$ takto

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{00} & \dots & \mathbf{b}_{n0} & \mathbf{b}_{01} & \dots & \mathbf{b}_{n1} & \dots & \mathbf{b}_{0m} & \dots & \mathbf{b}_{nm} \end{pmatrix}^T,$$

tedy

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_{00}^1 & \dots & b_{n0}^1 & b_{01}^1 & \dots & b_{n1}^1 & \dots & b_{0m}^1 & \dots & b_{nm}^1 \\ b_{00}^2 & \dots & b_{n0}^2 & b_{01}^2 & \dots & b_{n1}^2 & \dots & b_{0m}^2 & \dots & b_{nm}^2 \\ b_{00}^3 & \dots & b_{n0}^3 & b_{01}^3 & \dots & b_{n1}^3 & \dots & b_{0m}^3 & \dots & b_{nm}^3 \end{pmatrix}^T.$$

To znamená, že matice $\mathbf{b}$ má 3 sloupce a $(n+1)(m+1)$ řádků. Matici $\mathbf{p}$ sestavíme obdobně pomocí souřadnic $(p_{ij}^1, p_{ij}^2, p_{ij}^3)^T$ bodů $\mathbf{p}_{ij}$, takže $\mathbf{p}$ je opět matice se třemi sloupci $(n+1)(m+1)$ řádky. Když označíme

$$B_{ij}^{kl} = B_i^n(\xi_1^k) B_j^m(\xi_2^l)\,,$$

pak lze matici $\mathbf{B}$ soustavy rovnic (34) zapsat jako

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_{00}^{00} & \dots & B_{n0}^{00} & B_{01}^{00} & \dots & B_{n1}^{00} & \dots & B_{0m}^{00} & \dots & B_{nm}^{00} \\ B_{00}^{10} & \dots & B_{n0}^{10} & B_{01}^{10} & \dots & B_{n1}^{10} & \dots & B_{0m}^{10} & \dots & B_{nm}^{10} \\ \vdots \\ B_{00}^{n0} & \dots & B_{n0}^{n0} & B_{01}^{n0} & \dots & B_{n1}^{n0} & \dots & B_{0m}^{n0} & \dots & B_{nm}^{n0} \\ B_{00}^{01} & \dots & B_{n0}^{01} & B_{01}^{01} & \dots & B_{n1}^{01} & \dots & B_{0m}^{01} & \dots & B_{nm}^{01} \\ \vdots \\ B_{00}^{n1} & \dots & B_{n0}^{n1} & B_{01}^{n1} & \dots & B_{n1}^{n1} & \dots & B_{0m}^{n1} & \dots & B_{nm}^{n1} \\ \vdots \\ B_{00}^{0m} & \dots & B_{n0}^{0m} & B_{01}^{0m} & \dots & B_{n1}^{0m} & \dots & B_{0m}^{0m} & \dots & B_{nm}^{0m} \\ \vdots \\ B_{00}^{nm} & \dots & B_{n0}^{nm} & B_{01}^{nm} & \dots & B_{n1}^{nm} & \dots & B_{0m}^{nm} & \dots & B_{nm}^{nm} \end{pmatrix}.$$

Na první pohled se zdá, že vytvoření matice $\mathbf{B}$ může být poměrně složité, avšak lze ji snadno vytvořit pomocí tzv. *Kroneckerova součinu*. Je-li matice $\mathbf{A}$ typu (m,n) a $\mathbf{B}$ matice typu (p,q), pak Kroneckerův součin $\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ je matice typu (mp, nq) určená předpisem

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & & & \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{pmatrix}, \tag{35}$$

viz například [7].

Vytvoříme-li matice

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} B_0^n(\xi_1^0) & \dots & B_n^n(\xi_1^0) \\ \vdots & & \\ B_0^n(\xi_1^n) & \dots & B_n^n(\xi_1^n) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} B_0^m(\xi_2^0) & \dots & B_n^m(\xi_2^0) \\ \vdots & & \\ B_0^m(\xi_2^m) & \dots & B_m^m(\xi_2^m) \end{pmatrix}$$

a provedeme Kroneckerův součin $\mathbf{B}_2 \otimes \mathbf{B}_1$, dostaneme přesně matici $\mathbf{B}$. Platí tedy

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_2 \otimes \mathbf{B}_1.$$

Jestliže máme vytvořeny matice $\mathbf{B}_1$ a $\mathbf{B}_2$, lze v MATLABu matici $\mathbf{B}$ vytvořit velice snadno pomocí příkazu

```
B = kron(B2,B1)
```

Soustavu lineárních rovnic (34) vyřešíme jednoduchým příkazem

```
b = B\p
```

Dostáváme tak řídicí body Bézierovy plochy.

Jinou možností sestaveného programu přiloženého k této práci je výpočet řídicích bodů pomocí programu *Prokládání*. V tomto případě se nejedná o interpolaci, ale o proložení zadaných bodů Bézierovou plochou metodou nejmenších čtverců. Možnosti a ovládání programu *Prokládání* viz [8].

5.2 Výpočet integrálu

Na plochu působí zatížení od tlaku $p(x_1, x_2, x_3)$. Podle [3] výslednou sílu od tohoto zatížení vypočteme ze vztahu

$$\mathbf{F} = -\iint_S \mathbf{n}\, p \,\mathrm{d}S \tag{36}$$

a výsledný moment získáme z rovnice

$$\mathbf{M} = -\iint\limits_S (\mathbf{x} \times \mathbf{n})\, p \;\mathrm{d}S\,. \tag{37}$$

Znaménka mínus v posledních dvou rovnicích souvisí pouze s orientací normály plochy. Orientujeme-li normálu proti působení tlakové síly, musí být před integrálem mínus. Těžiště plochy vypočteme jako

$$\mathbf{T} = \frac{\iint_S \mathbf{x}\,\mathrm{d}S}{\iint_S \mathrm{d}S}\,. \tag{38}$$

Integrovat budeme numericky pomocí součinové *Gaussovy-Legendrovy-Lobattovovy formule* (dále GLL-formule), která je tvaru

$$\iint\limits_{\widehat{\Omega}} w(\xi_1, \xi_2)\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 \approx \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \varrho_i^n \varrho_j^m w(u_i^n, u_j^m)\,, \tag{39}$$

viz například [7]. Tato formule je řádu $2n-1$ v proměnné ξ_1 a řádu $2m-1$ v proměnné ξ_2, což znamená, že integruje přesně polynomy stupně $2n-1$ v ξ_1 a $2m-1$ v ξ_2. Ve vztahu (39) je $\widehat{\Omega} = \langle -1{,}1\rangle \times \langle -1{,}1\rangle$, $u_0^n = -1$, $u_n^n = 1$ a u_i^n, $i = 1,\ldots,n-1$, jsou kořeny $P_n'(x)$, kde $P_n(x)$*je Legendrův polynom* stupně n. Stejně tak $u_0^m = -1$, $u_m^m = 1$ a u_j^m, $j = 1,\ldots,m-1$, jsou kořeny $P_m'(x)$, kde $P_m(x)$ je Legendrův polynom stupně m.

Legendrův polynom $P_n(x)$ stupně n je definován rekurzí

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ (k+1)P_{k+1}(x) &= (2k+1)xP_k(x) - kP_{k+1}(x), \quad k \geq 1\,. \end{aligned}$$

Pro uzly u_i^n, $i = 0,\ldots,n$, platí

$$-1 = u_0^n < u_1^n < \ldots < u_n^n = 1\,.$$

Ve vztahu (39) jsou ϱ_i^n *koeficienty* GLL-formule, které získáme ze vztahu

$$\varrho_i^n = \frac{1}{n(n+1)}\frac{1}{[P_n(u_i)]^2}, \quad i = 0,\ldots,n\,.$$

Abychom mohli použít GLL formuli, je nutné tranformovat meze daného integrálu tak, abychom integrovali od -1 do 1. Protože v případě Bézierovy plochy jsou $\xi_1, \xi_2 \in \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$, je ze vztahu (31) vidět, že v případě integrace přes Bézierovu plochu dostáváme plošný integrál v mezích od 0 do 1. Tento integrál transformujeme následovně

$$\int_0^1 f(\xi)\mathrm{d}\xi = \left\| \begin{array}{l} \xi = \frac{1}{2}(t+1) \\ \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}\mathrm{d}t \end{array} \right\| = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{t+1}{2}\right)\mathrm{d}t \approx \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \varrho_k^n f(\frac{u_k^n+1}{2}) = \sum_{k=0}^{n} \tilde{\varrho}_k^n f(\tilde{u}_k^n),$$

kde $\tilde{\varrho}_k^n = \frac{1}{2}\varrho_k^n$ a $\tilde{u}_k^n = \frac{1}{2}(u_k^n+1)$. Pomocí této transformace pak dostáváme pro dvojný integrál v mezích od 0 do 1 formuli

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 \hat{\mathbf{f}}(\xi_1,\xi_2)\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 \approx \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} \tilde{\varrho}_k^n \tilde{\varrho}_l^m \hat{\mathbf{f}}(\tilde{u}_k^n, \tilde{u}_l^m)\,. \tag{40}$$

Chceme-li pak například spočítat první složku výsledné síly, dostaneme

$$-\iint_{\Omega} p n_1\,\mathrm{d}S = -\int_0^1\!\!\int_0^1 \underbrace{\hat{p}(\xi_1,\xi_2)\hat{n}_1(\xi_1,\xi_2)\sqrt{(EG-F^2)(\xi_1,\xi_2)}}_{\hat{f}(\xi_1,\xi_2)}\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2\,,$$

kde

$$\hat{p}(\xi_1,\xi_2) = p\Big(\Gamma_1(\xi_1,\xi_2), \Gamma_2(\xi_1,\xi_2), \Gamma_1(\xi_3,\xi_2)\Big)$$

a

$$\hat{n}_1(\xi_1,\xi_2) = n_1\Big(\Gamma_1(\xi_1,\xi_2), \Gamma_2(\xi_1,\xi_2), \Gamma_1(\xi_3,\xi_2)\Big)\,.$$

Zde je potřeba spočítat hodnoty funkce $\hat{f}(\xi_1,\xi_2)$ v bodech dělení $\tilde{u}_k^n$, $\tilde{u}_l^m$, $k = 0,\ldots,n$, $l = 0,\ldots,m$, referenční oblasti Ω. K tomu se použijí vzorce (29) a vzorce pro derivaci Bézierovy plochy (22) a (23). Složky vektoru normály $\mathbf{n}(\xi_1,\xi_2)$ vypočteme užitím (8), (22) a (23). Tyto výpočty provádí funkce `vyslednice.m`. Zcela analogicky se postupuje při výpočtu ostatních složek výsledné síly, výsledného momentu a těžiště plochy.

5.3 Příklady

Podívejme se na některé jednoduché příklady, na kterých ověříme, že přiložený program pracuje správně.

Příklad 5.1. Navážeme na příklad (2.1) z prvního odstavce. Spočítáme výslednou sílu a moment, které působí na horní polovinu jednotkové sféry za předpokladu, že všude působí tlak $p(x_1,x_2,x_3) = 1$. Máme tedy zadanou plochu

$$\begin{aligned} x_1 &= \Gamma_1(\xi_1,\xi_2) = \cos\xi_1 \sin\xi_2\,,\\ x_2 &= \Gamma_2(\xi_1,\xi_2) = \sin\xi_1 \sin\xi_2\,,\\ x_3 &= \Gamma_3(\xi_1,\xi_2) = \cos\xi_2\,, \end{aligned} \tag{41}$$

$\xi_1 \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $\xi_2 \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ a tlak $p = 1$.

Nejprve si vyjádřeme vztahy (36) a (37) pro sílu a moment do složek

$$\begin{aligned} F_1 &= -\iint_{\mathbf{\Gamma}} p\, n_1\,\mathrm{d}S\,,\\ F_2 &= -\iint_{\mathbf{\Gamma}} p\, n_2\,\mathrm{d}S\,,\\ F_3 &= -\iint_{\mathbf{\Gamma}} p\, n_3\,\mathrm{d}S\,. \end{aligned} \tag{42}$$

Provedením vektorového součinu v (37) dostaneme pro jednotlivé složky

$$\begin{aligned} M_1 &= -\iint\limits_{\mathbf{\Gamma}} (x_2\, n_3 - x_3\, n_2)\, p \, \mathrm{d}S\,, \\ M_2 &= -\iint\limits_{\mathbf{\Gamma}} (x_3\, n_1 - x_1\, n_3)\, p \, \mathrm{d}S\,, \\ M_3 &= -\iint\limits_{\mathbf{\Gamma}} (x_1\, n_2 - x_2\, n_1)\, p \, \mathrm{d}S\,. \end{aligned} \tag{43}$$

Vypočteme derivace složek plochy $\Gamma'_{1\xi_1}$, $\Gamma'_{2\xi_1}$, $\Gamma'_{3\xi_1}$ a $\Gamma'_{1\xi_2}$, $\Gamma'_{2\xi_2}$, $\Gamma'_{3\xi_2}$. Dosadíme do (29), následně do (30) a obdržíme

$$\mathrm{d}S = \sqrt{EG - F^2} = \|\mathbf{\Gamma}'_{\xi_1} \times \mathbf{\Gamma}'_{\xi_2}\|_2 = \sin \xi_2\,. \tag{44}$$

Z rovnice (8) je vidět, že složky normály dostaneme pomocí

$$n_1 = \frac{\begin{vmatrix} \Gamma'_{2\xi_1} & \Gamma'_{3\xi_1} \\ \Gamma'_{2\xi_2} & \Gamma'_{3\xi_2} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}\,, \quad n_2 = \frac{\begin{vmatrix} \Gamma'_{3\xi_1} & \Gamma'_{1\xi_1} \\ \Gamma'_{3\xi_2} & \Gamma'_{1\xi_2} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}\,, \quad n_3 = \frac{\begin{vmatrix} \Gamma'_{1\xi_1} & \Gamma'_{2\xi_1} \\ \Gamma'_{1\xi_2} & \Gamma'_{2\xi_2} \end{vmatrix}}{\sqrt{EG - F^2}}\,. \tag{45}$$

Dosazením a výpočtem máme

$$\mathbf{n} = [-\cos \xi_1 \sin \xi_2,\ -\sin \xi_1 \sin \xi_2,\ -\cos \xi_2]\,, \tag{46}$$

odkud je vidět, že normála je orientována „dovnitř" sféry. Ve změně orientace normály „ven" ze sféry nám nic nebrání

$$\mathbf{n} = [\cos \xi_1 \sin \xi_2,\ \sin \xi_1 \sin \xi_2,\ \cos \xi_2]\,. \tag{47}$$

Teď už zbývá pouze použít vztah (31) a dosadit do něj. Ukážeme si to na výpočtu první složky výsledného momentu

$$M_1 = -\iint\limits_{\mathbf{\Gamma}} (x_2\, n_3 - x_3\, n_2)\, p \, \mathrm{d}S = -\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\Gamma_2\, n_3 - \Gamma_3\, n_2) \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}\xi_2 \, \mathrm{d}\xi_1\,, \tag{48}$$

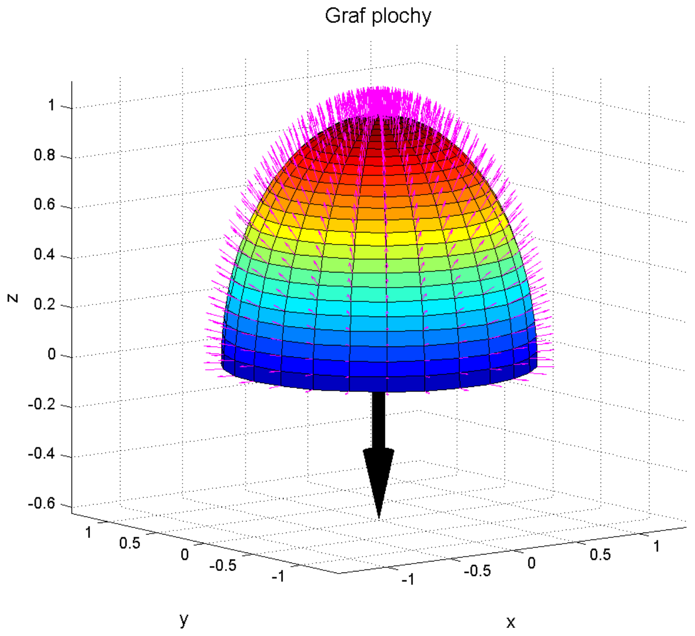
kde za Γ_2, Γ_3 dosazujeme z (41), za n_2, n_3 z (45) a za $\sqrt{EG - F^2}$ z (44). Zcela analogicky postupujeme i ve výpočtu ostatních složek momentu, síly a těžiště.

Analytickým výpočtem obdržíme

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \left[0\ ,\ 0\ , -\pi\right]\,, \\ \mathbf{M} &= \left[0\ ,\ 0\ ,\ 0\right]\,, \\ \mathbf{T} &= \left[0\ ,\ 0\ ,\ \tfrac{1}{2}\right]\,. \end{aligned} \tag{49}$$

Vzhledem k symetrii polokulové plochy vychází jediná nenulová složka výsledné síly ve směru osy x_3. Výsledný moment vyšel jako nulový vektor proto, že je počítán k počátku soustavy souřadnic a také díky symetrii plochy.

Když jsme k výpočtu použili přiložený program `vyslednicegui.m`, obdrželi jsme totožné výsledky zatížené nepatrnou numerickou chybou.



Obrázek 6: Jednotková polokulová plocha

Grafický výstup programu je na obrázku (6), kde šipka znázorňuje výslednou sílu umístěnou do těžiště plochy. Na obrázku (6) je také vidět jednotkové normálové pole orientované „ven" z plochy. □

PŘÍKLAD 5.2. V tomto příkladu budeme uvažovat plochu danou rovnicemi

$$\begin{aligned} x_1 &= \Gamma_1(\xi_1, \xi_2) = \xi_1\,, \\ x_2 &= \Gamma_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_2\,, \\ x_3 &= \Gamma_3(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^2 - \xi_2^2\,, \end{aligned} \tag{50}$$

kde $\xi_1 \in \langle -2, 2\rangle$ a $\xi_2 \in \langle 0, 3\rangle$. Tato plocha je rovnicemi (50) pevně svázána se souřadným systémem. Představme si, že počátek souřadného systému leží sedm metrů pod vodní hladinou. Pak na tuto plochu působí v každém jejím bodě hydrostatický tlak $p_h(x_1, x_2, x_3)$, který je dán vztahem

$$p_h = p_0 + h\varrho g\,, \tag{51}$$

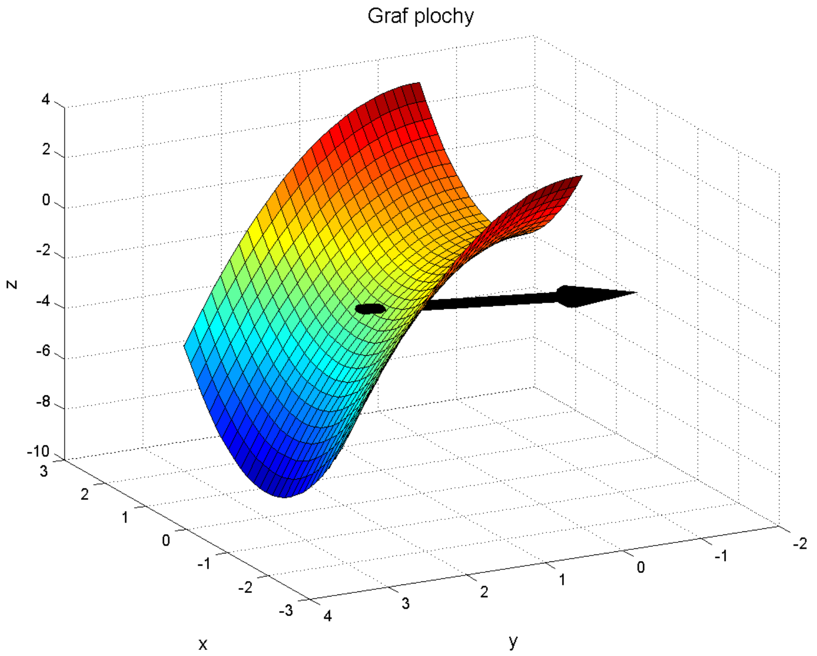
kde p_0 je tlak na hladině, h hloubka pod hladinou, ϱ je hustota vody a g je tíhové zrychlení. Tlak na hladině budeme uvažovat atmosferický, který je přibližně roven $10^5\,\mathrm{Pa}$, hustota vody bude přibližně rovna $1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ a tíhové zrychlení $g \approx 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Dále předpokládejme, že plocha je pod hladinou pevně uložena a tlaková síla působí pouze na „vrchní" stranu plochy.

Funkci p_h definujeme jako

$$p_h(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} p_0 & \text{pro } x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \in \langle 7, \infty) , \\ p_0 + (7 - x_3)\, \varrho\, g & \text{jinak} . \end{cases} \tag{52}$$

Poněvadž se celá plocha nachází pod vodní hladinou, ve výpočtu použijeme pouze $p_h = p_0 + (7 - x_3)\, \varrho\, g$. Analytickým výpočtem podobným tomu v příkladu (5.1) obdržíme tyto výsledky

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \left[0 \ ; \ -3{,}9505 \cdot 10^6 \ ; -1{,}1402 \cdot 10^6\right] , \\ \mathbf{M} &= \left[-1{,}7371 \cdot 10^7 \ ; \ 0 \ ; \ 0\right] , \\ \mathbf{T} &= \left[0 \ ; \ 1.7747 \ ; \ -2{,}3313\right] . \end{aligned} \tag{53}$$



Obrázek 7: Plocha a výsledná síla

Při použití přiloženého programu opět dostáváme totožné výsledky. Na obrázku (7) je znázorněna plocha a výsledná síla. □

Příklad 5.3. Podívejme se ještě na případ, kdy plocha není zadána explicitně, ale pouze souřadnicemi některých svých bodů. Tento případ se nejvíce blíží skutečnosti, neboť umíme-li popsat plochu analyticky jako v předchozích dvou příkladech, není třeba počítat výsledné zatížení numericky. Ovšem v praktických výpočtech jen málokdy umíme plochu popsat analyticky, je proto nezbytné použít numerické výpočty.

Máme tedy dány souřadnice bodů plochy - viz tabulka (1). K proložení Bézierovy plochy těmito body použijeme program *Prokládání* (jeho ovládání viz [8]), jehož výstupem jsou řídicí body proložené Bézierovy plochy.

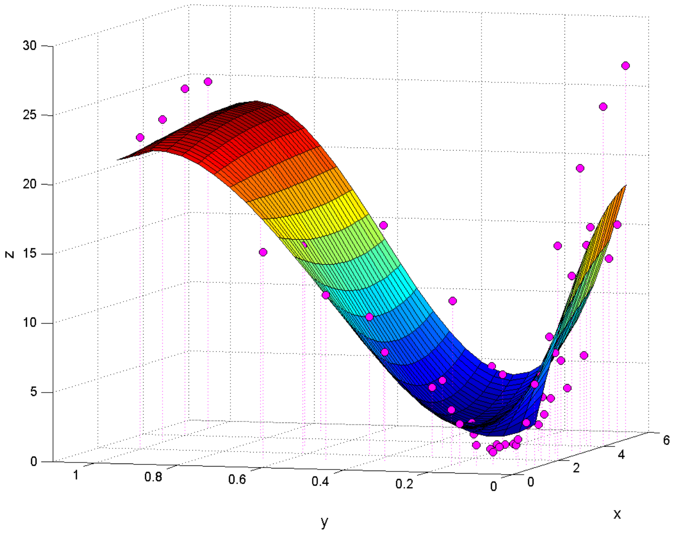
x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
1	0	6	2	0	15.5	3	0	20.6	4	0	24.5	5	0	27
1	0.02	3.2	2	0.02	8.9	3	0.02	12.8	4	0.03	15.8	5	0.02	15.5
1	0.04	2	2	0.04	6.1	3	0.06	7.2	4	0.04	14.5	5	0.04	13
1	0.1	1	2	0.1	1	3	0.1	2	4	0.1	6.1	5	0.1	6
1	0.14	1.5	2	0.14	0.83	3	0.16	0.56	4	0.14	2.2	5	0.14	3.6
1	0.18	3	2	0.16	0.67	3	0.18	0.5	4	0.18	1.4	5	0.18	2.8
1	0.2	4	2	0.2	1.7	3	0.2	0.5	4	0.2	1.8	5	0.2	2.9
1	0.36	8	2	0.3	5	3	0.33	5	4	0.24	5	5	0.32	5
1	0.5	12	2	0.45	10	3	0.26	2	4	0.36	10.2	5	0.58	15
1	0.65	15	2	0.61	15	3	0.66	15	4	0.82	20	5	0.73	19.3
			2	1	22.5	3	1	23.3	4	1	25	5	1	25

Tabulka 1: Tabulka naměřených souřadnic bodů

Tento výpočet je možné provést přímo z přiloženého programu zaškrtnutím políčka použít prokládání. Řídicími body máme tedy určenu Bézierovu plochu a můžeme vypočítat výsledné zatížení na plochu. Zvolme tlak $p(x_1, x_2, x_3) = 1$. Výsledné zatížení plochy je tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \left[1{,}6459\ ;\ 34{,}7845\ ;{-4}\right], \\ \mathbf{M} &= \left[-553{,}2140\ ;\ 28{,}9235\ ;\ 84{,}1037\right], \\ \mathbf{T} &= \left[3{,}1507\ ;\ 0{,}4341\ ;\ 12{,}1080\right]. \end{aligned} \tag{54}$$

Na obrázku (8) je znázorněna Bézierova plocha spolu s body, kterými je proložena.



Obrázek 8: Bézierova plocha proložená danými body

Vidíme, že plocha těmito body neprochází. To proto, že byla vypočtena metodou nejmenších čtverců. □

6 Závěr

Jedna z možných aplikací matematiky je také výpočet tlakové síly na ploše. Nastínili jsme jednu z možností, jak tento problém řešit.

Nejprve byla naznačena obecná teorie ploch. Byly zavedeny důležité pojmy jako tečná rovina a normála plochy, které jsou zapotřebí k výpočtu výsledného zatížení. Zejména byly pak popsány Bézierovy plochy, pomocí kterých jsme zadanou plochu interpolovali, spolu s některými důležitými vlastnostmi těchto ploch. Také výsledky z teorie plošného integrálu jsou velmi důležité pro výpočet výsledného zatížení plochy od tlakové síly.

Byl řešen modelový příklad, kdy jsme měli plochu zadanou analyticky, nahradili jsme ji Bézierovou plochou a numerickou integrací jsme počítali výslednou sílu a výsledný moment působící na tuto plochu od tlakového zatížení, přičemž jsme předpokládali, že tlak je zadán explicitně. Uvažovali jsme také případ, kdy je plocha určena experimentálně pomocí souřadnic některých jejích bodů. V tomto případě jsme tyto body aproximovali Bézierovou plochou metodou nejmenších čtverců.

Na závěr byly spočítány některé modelové příklady jednak analyticky, jednak pomocí programu zpracovaného v MATLABu, ve kterém je celý postup řešení naprogramován. Viděli jsme, že numerickým výpočtem výsledného zatížení lze dosáhnout uspokojívých výsledků.

Reference

[1] FARIN, G., *Curves and surfaces for CAGD: A practical guide.* Fifth edition. Academic Press, London, 2002.

[2] YAMAGUCHI, F., *Curves and Surfaces in Computer Aided Geometric Design.* Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[3] BRDIČKA, M, SAMEK, L., SOPKO, B., *Mechanika kontinua.* Academia, Praha, 2000.

[4] REKTORYS, K. *Přehled užité matematiky I.* Nakladatelství Prometheus, Praha, 1995.

[5] MARTIŠEK, D., *Matematické principy grafických systémů.* Littera, Brno, 2002.

[6] ČERMÁK, L. *Numerické metody II.* CERM, Brno, 2004.

[7] DEVILLE, M. O., FISCHER, P. F., MUND, E. H. *High Order Methods for Incompressible Fluid Flow.* Cambridge University Press, 2002.

[8] HABÁN, V., KARČ, P., *Prokládání bodů v 3D prostoru Bézierovou plochou.* Brno, 2002. 10 s. Technická zpráva na FSI VUT v Brně, Energetický ústav, Odbor fluidního inženýrství Victora Kaplana. Číslo dokumentu VUT-EU-QR-47-02.