VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV AUTOMATIZACE A MĚŘÍCÍ TECHNIKY

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION
DEPARTMENT OF CONTROL AND INSTRUMENTATION

REGULACE S POUŽITÍM REKONSTRUKTORU STAVU

CONTROL OF DYNAMIC SYSTEMS WITH STATE RECONSTRUCTOR

DIPLOMOVÁ PRÁCE
MASTER´S THESIS

AUTOR PRÁCE — Bc. JAN PETRÁK
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE — prof. Ing. PETR VAVŘÍN, DrSc.
SUPERVISOR

BRNO 2009

TATO STRÁNKA JE POUZE V TIŠTĚNÉ FORMĚ

Vysoké učení technické v Brně

Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií

Ústav automatizace a měřící techniky

Regulace s použitím rekonstruktoru stavu

Téma

Specializace: Kybernetika, automatizace a měření

Student: Jan Petrák

Vedoucí práce: prof. Ing. Petr Vavřín, DrSc..

ABSTRAKT:

Předmětem této diplomové práce je regulace s použitím rekonstruktoru stavu. Rekonstruktor stavu je modelový systém, nahrazující reálnou soustavu. Náhrada je prováděna z důvodu rekonstrukce stavových proměnných, které v reálném systému nemusí existovat, nebo které nelze dosažitelnými prostředky zjistit. Následně jsou tyto zrekonstruované stavy využity k stavové regulaci celého uzavřeného regulačního obvodu. Celá práce je zhotovena v čistě teoretické rovině s použitím matematicko – experimentálních metod. Experimenty neboli modelování na matematických modelech reálné soustavy a rekonstruktoru, jsou prováděny v programu Matlab – Simulink V závěru je zhodnocen průběh práce a možnosti aplikace rekonstruktoru.

KLÍČOVÁ SLOVA: Zpětnovazební regulace, rekonstruktor stavu, rozložení pólů

Brno University of Technology

Faculty of Electrical Engineering and Communication

Department of Control, Measurement and Instrumentation

Control of Dynamic Systems with State Reconstructor

Thesis

Specialisation of study:	Cybernetics, Control and Measurement
Student:	Jan Petrák
Supervisor:	prof. Ing. Petr Vavřín, DrSc.

ABSTRACT:

The aim of this thesis is regulation (control) through the use of a state reconstructor. The state reconstructor is a model system substituting the real system. The substitution will be performed because of a reconstruction of the status parametres (variables), which in a real system might not be present or which cannot be determined by the help of available means. Consequently these reconstructured states are used by the state regulation of the whole closed regulation circuit. The whole work has been completed considering a purely theoretical point of view by using mathematical – experimental methods. Experiments or modelling on mathematical models of a real system and reconstructor are performed in the Matlab – Simulink software. In the conclusion part the process of the work and the possible applications of the reconstructor have been evaluated

KEY WORDS: Feedback control, State rekonstructor, Pole configuration

Bibliografická citace

PETRÁK, J. *Regulace s použitím rekonstruktoru stavu.* Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2009. 62 s. Vedoucí diplomové práce prof. Ing. Petr Vavřín, DrSc.

P r o h l á š e n í

„Prohlašuji, že svou diplomovou práci na téma Regulace s použitím rekonstruktoru stavu jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené diplomové práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této diplomové práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb."

V Brně dne :   Podpis:

P o d ě k o v á n í

Děkuji panu prof. Vavřínovi, že mi „napsal" diplomovou práci.

V Brně dne :   Podpis:

OBSAH

1. **ÚVOD……………………………………………………………………….10**
2. **NÁVRH REKONSTRUKTORU…………………………………………….12**
   2.1 NÁVRH MODELU SOUSTAVY……………………………………..…12
   2.2 NÁVRH REKONSTRUKTORU S OHLEDEM NA VZNIK PORUCH……………………………………………………………….15
      2.2.1 Optimální nastavení rekonstruktoru 1……………….……...17
      2.2.2 Optimální nastavení rekonstruktoru 2…………….…..…...27
   2.3 NÁVRH REKONSTRUKTORU S OHLEDEM NA NENULOVÉ POČÁTEČNÍ PODMÍNKY……………….……..35
3. **MOŽNOSTI STAVOVÉ REGULACE S VYUŽITÍM REKONSTRUKTORU NIŽŠÍHO ŘÁDU…………………………..……41**
   3.1 NÁVRH REDUKOVÁNÉHO REKONSTRUKTORU………….…..…41
   3.2 NÁVRH OMEZENÉHO STAVOVÉHO REGULÁTORU…...……..47
   3.3 MOŽNOSTI OMEZENÉ STAVOVÉ REGULACE………….…..…48
   3.4. STAVOVÁ REGULACE S VYUŽITÍM REKONSTRUKTORU NIŽŠÍHO ŘÁDU…………………………………………………52
   3.5 POUŽITELNOST REDUKOVANÉHO REKONSTRUKTORU PŘI STAVOVÉ REGULÁCI……………………………...……..57
4. **ZÁVĚR……………………………………………………………...……60**
5. **POUŽITÁ LITERATURA………………………………………...……62**

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek č. 1: Blokové znázornění soustavy a rekonstruktoru s působícími signály……………………………………………………………..10
Obrázek č. 2: Využití zrekonstuovaných stavových proměnných k následné stavové regulaci……………………………………………………..11
Obrázek č. 3: Stavové schéma soustavy…………………………………........12
Obrázek č. 4: Stavové schéma modelu soustavy……………………………………13
Obrázek č. 5: Stavový diagram soustavy ve tvaru přímého programování…………14
Obrázek č.6: Stavový diagram modelu soustavy ve tvaru přímého programování………………………………………………………………15
Obrázek č.7: Situace mezi soustavou a modelem při rozdílných maticích B a B_m…………………………………………………………16
Obrázek č.8: Stavové schéma rekonstruktoru……………………………...…17
Obrázek č. 9: Stavový diagram rekonstruktoru ve tvaru přímého programování……………………………………………………….....18
Obrázek č. 10: Grafický záznam průběhu odchylky výstupů $e_y(t)$…………….......21
Obrázek č. 11: Blokové schéma s odchylkami stavových proměnných $\dot{e}_1(t)$, $\dot{e}_2(t)$, $\dot{e}_3(t)$, $\dot{e}_4(t)$………………………………...……23
Obrázek č. 12: Grafické srovnání průběhu stavových proměnných $\dot{x}_1(t)$ a $\dot{x}_{1m}(t)$…………………………………………………23
Obrázek č. 13: Grafické srovnání průběhu stavových proměnných $\dot{x}_2(t)$ a $\dot{x}_{2m}(t)$……………………………….………………...24
Obrázek č. 14: Grafický záznam průběhu odchylek stavových proměnných $\dot{e}_1(t)$, $\dot{e}_2(t)$……………………………….…………......24
Obrázek č. 15: Grafické srovnání průběhu stavových proměnných $\dot{x}_3(t)$ a $\dot{x}_{3m}(t)$…………………………………..…….. 25
Obrázek č. 16: Grafické srovnání průběhu stavových proměnných $\dot{x}_4(t)$ a $\dot{x}_{4m}(t)$……………………………….…......26
Obrázek č. 17: Grafický záznam průběhu odchylek stavových proměnných $\dot{e}_3(t)$, $\dot{e}_4(t)$………………………………………….....26

Obrázek č. 18: Grafický záznam průběhu odchylky výstupů $e_y(t)$……………..….28

Obrázek č. 19: Grafické srovnání průběhu stavových proměnných $\dot{x_1}(t)$ a $\dot{x_{1m}}(t)$……………………………………………………….…….29

Obrázek č. 20: Grafické srovnání průběhu stavových proměnných $\dot{x_2}(t)$ a $\dot{x_{2m}}(t)$……………………………………………………….…….30

Obrázek č. 21: Grafický záznam průběhu odchylek stavových proměnných $\dot{e}_1(t)$, $\dot{e}_2(t)$…………………………………………………………..….30

Obrázek č. 22: Grafické srovnání průběhu stavových proměnných $\dot{x_3}(t)$ a $\dot{x_{3m}}(t)$ ...……………………….................................31

Obrázek č. 23: Grafické srovnání průběhu stavových proměnných $\dot{x_4}(t)$ a $\dot{x_{4m}}(t)$………………………………………………………..….32

Obrázek č. 24: Grafický záznam průběhu odchylek stavových proměnných $\dot{e}_3(t)$, $\dot{e}_4(t)$……………………………………………………...……32

Obrázek č. 25: Rozmístění pólů soustavy (modře) a oblast pólů rekonstruktoru ve FCHvKR………………………………………………………...……..34

Obrázek č. 26: Stavový diagram soustavy s nenulovými počátečními podmínkami……………………………………………………………36

Obrázek č. 27: Průběh výstupních signálů $y_{1-4}(t)$ podle různých počátečních podmínek………………………………………………………...…..37

Obrázek č. 28: Blokové schéma s odchylkami stavových proměnných $\dot{e_1}(t)$, $\dot{e_2}(t)$, $\dot{e_3}(t)$, $\dot{e_4}(t)$……………….………………………….38

Obrázek č.29: Průběh odchylky výstupních signálů $\boldsymbol{e_y(t)}$ při působení nenulových počátečních podmínek……………………………...…..39

Obrázek č. 30: Průběh odchylek stavových proměnných $\dot{e_1}(t)$, $\dot{e_2}(t)$, při působení nenulových počátečních podmínek………………….39

Obrázek č. 31: Průběh odchylek stavových proměnných $\dot{e_3}(t)$, $\dot{e_4}(t)$, při působení nenulových počátečních podmínek……………...……40

Obrázek č. 32: Stavové schéma soustavy v zapojení s redukovaným rekonstruktorem……………………………………………...……..43

Obrázek č. 33: Grafické srovnání průběhu stavových proměnných $\dot{x}_1(t)$ a $\dot{x}_{1m}(t)$..44
Obrázek č. 34: Grafické srovnání průběhu stavových proměnných $\dot{x}_2(t)$ a $\dot{x}_{2m}(t)$..45
Obrázek č. 35: Grafický záznam průběhu odchylek stavových proměnných $\dot{e}_1(t)$, $\dot{e}_2(t)$..45
Obrázek č. 36: Stavové schéma soustavy v zapojení s redukovaným rekonstruktorem a omezeným stavovým regulátorem..................47
Obrázek č. 37: Rozložení pólů charakteristického polynomu v závislosti na změně konstant stavového regulátoru..............................49
Obrázek č. 38: Rozložení pólů charakteristického polynomu s reálnými kořeny v závislosti na volbě konstant stavového regulátoru v FCHvKR…...50
Obrázek č. 39: Grafické porovnání výstupů soustavy $y_s(t)$ bez a s optimálně navrženým stavovým regulátorem $y_{s+SR}(t)$..........................51
Obrázek č. 40: Stavové schéma soustavy v zapojení s rekonstruktorem a stavovým regulátorem s konkrétními hodnotami k_0, k_1, k_2........53
Obrázek č. 41: Průběh nestabilního výstupu $y_{S+SR+R}(t)$..............................54
Obrázek č. 42: Srovnání průběhů výstupu ze soustavy bez stavové regulace $y_s(t)$ a se stavovou regulací a rekonstruktérem $y_{S+SR+R}(t)$...................56
Obrázek č. 43: Srovnání průběhů výstupu ze soustavy bez stavové regulace s P regulátorem $y_s(t)$ a se stavovou regulací $y_{s+SR+R}(t)$.................57
Obrázek č.44: Porovnání výstupních signálů $y(t)$, je-li $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t) = 0$ (zeleně) a $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t) \neq 0$ (modře)..58
Obrázek č.45: Grafický průběh rozdílu mezi výstupy při $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t) \neq 0$ a $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t) = 0$..59

SEZNAM TABULEK

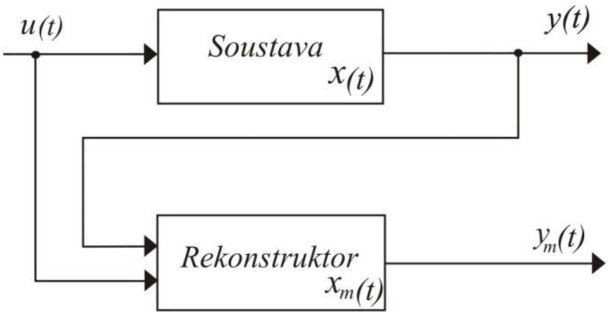
Tabulka č. 1: Výčet pólů konkrétních polynomů.......................................50

SEZNAM ZKRATEK

Zkratka/Symbol	Význam
URO	Uzavřený regulační obvod
ORO	Otevřený regulační obvod
FCHvKR	Frekvenční charakteristika v komplexní rovině

1. ÚVOD

Problém řešený v této práci, vychází ze snahy zjistit neměřitelné stavové proměnné uvnitř regulované soustavy. Ty posléze využít k stavové regulaci. K tomu nám poslouží rekonstruktor (pozorovatel) stavových proměnných soustavy. Rekonstruktor je dynamický člen, využívající měřitelné vstupní a výstupní veličiny soustavy.

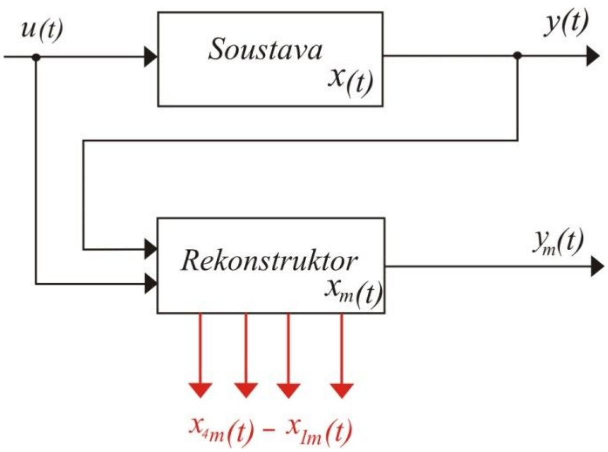


Obrázek č. 1: Blokové znázornění soustavy a rekonstruktoru s působícími signály.

Rekonstruktor musí být navržen tak, aby zrekonstruované stavové proměnné byly totožné se skutečnými stavovými proměnnými soustavy. Soustava může mít n stavových proměnných $x_1(t)$, $x_2(t)$…$x_n(t)$, které jsou obsažené ve stavovém vektoru $\boldsymbol{x}(t)$. Rekonstruktor nám tyto stavové proměnné soustavy nahradí stavovými proměnnými rekonstruktoru $x_{1m}(t)$, $x_{2m}(t)$, …$x_{nm}(t)$, obsažené ve vektoru $\boldsymbol{x_m}(t)$ Návrh rekonstruktoru musíme přizpůsobit tak, aby bylo dosaženo co možná největší shody mezi $\boldsymbol{x}(t)$ a $\boldsymbol{x_m}(t)$, v ideálním případě $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x_m}(t)$.

Rád bych chtěl zmínit skutečnost, že namodelované stavové proměnné uvnitř rekonstruktoru se v zásadě mohou značně rozcházet se stavovými proměnnými uvnitř reálné soustavy, i když mají oba systémy (soustava a rekonstruktor) totožný matematický popis. Je to dáno především rozdílnými vstupními signály, známé i neznámé působení poruch (především na soustavu) s nenulovými počátečními podmínkami $x_1(0)$, $x_2(0)$ … $x_n(0)$, u jednotlivých integrátorů soustavy. Proto je třeba návrhu rekonstruktoru věnovat zvýšenou péči, která by zahrnovala potlačení

těchto faktorů na minimum. Získané zrekonstruované stavové proměnné dále využijeme k stavové regulaci celého regulačního obvodu.



Obrázek č. 2: Využití zrekonstuovaných stavových proměnných k následné stavové regulaci.

2. NÁVRH REKONSTRUKTORU

2.1 NÁVRH MODELU SOUSTAVY

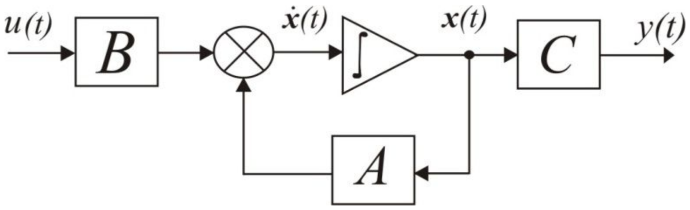
Návrh rekonstruktoru začíná návrhem modelu soustavy. Je-li soustava n - tého řádu navrhneme model soustavy také n - tého řádu. S jeho pomocí lze modelovat všechny stavové proměnné soustavy, které nelze jinak změřit. Z matematického popisu ve formě diferenciálních rovnic jsme schopni sestavit stavové rovnice soustavy s maticemi, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$. Matici $\boldsymbol{D}$ - přímých vazeb ze vstupu na výstup neuvažujeme.

Stavové rovnice soustavy:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \tag{2}$$

Libovolnou soustavu lze znázornit blokových schématem



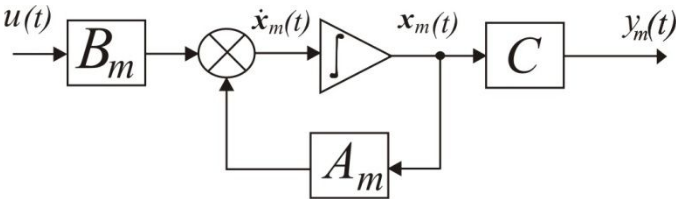
Obrázek č. 3: Stavové schéma soustavy.

Model k této soustavě musí být navržen tak, aby modelové stavové proměnné byly totožné se stavovými proměnnými soustavy. Toho dosáhneme jedině tehdy, pokud matice modelu. $\boldsymbol{A_m} = \boldsymbol{A}$ Matici $\boldsymbol{C_m}$ je vhodné volit rovno $\boldsymbol{C}$. $\boldsymbol{C_m} = \boldsymbol{C}$. Shodu můžeme také vyjádřit rovností přenosů $F_s(p) = F_m(p)$

Stavové rovnice modelu.

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{m}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{u}(t) \tag{3}$$

$$\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{m}}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{m}}(t) \tag{4}$$



Obrázek č. 4: Stavové schéma modelu soustavy.

Blokové schéma modelu obsahuje vstupní matici $\boldsymbol{B_m}$. Matice $\boldsymbol{B_m}$ nemusí být vždy shodná s maticí $\boldsymbol{B}$, nyní však předpokládejme, že $\boldsymbol{B_m} = \boldsymbol{B}$. Je-li $\boldsymbol{A_m} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B_m} = \boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{C_m} = \boldsymbol{C}$, vytvořili jsme totožný systém (model) jako je soustava. Vektor stavových proměnných soustavy $\boldsymbol{x}(t)$ odpovídá vektoru stavových proměnných modelu $\boldsymbol{x_m}(t)$.

$$\text{Vektor } \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x_m}(t) = \begin{pmatrix} x_{1m}(t) \\ x_{2m}(t) \\ x_{3m}(t) \\ x_{4m}(t) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Soustavu máme zadanou ve formě operátorového přenosu $F_s(p)$. Navrhneme model s totožnými stavovými proměnnými Vyjádříme si konkrétní matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A_m}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B_m}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{C_m}$.

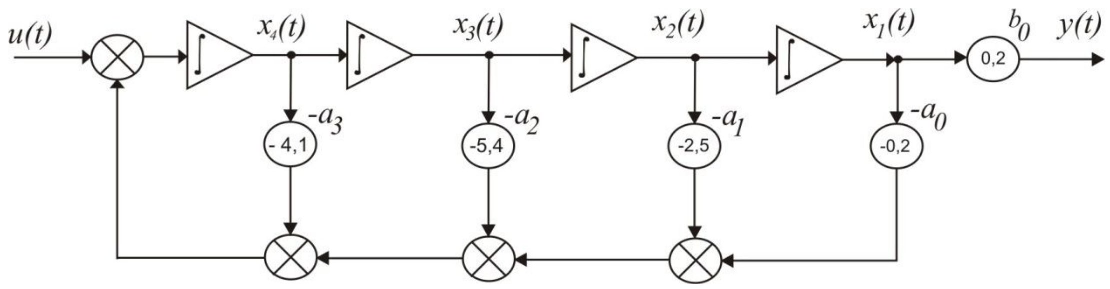
$$F_S(p) = \frac{1}{(10p+1)(p+1)^2(0.5p+1)} = \frac{0.2}{p^4 + 4.1p^3 + 5.4p^2 + 2.5p + 0.2} \tag{6}$$

$$F_S(p) = \frac{0.2}{p^4 + a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0} \tag{7}$$

$$b_0 = 0.2, \quad a_0 = 0.2, \quad a_1 = 2.5, \quad a_2 = 5.4, \quad a_3 = 4.1$$

Matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ zjistíme převodem přenosu $F_s(p)$ na stavový popis s využitím přímého programování (Frobeniův kanonický tvar).

Blokové schéma zadané soustavy ve tvaru přímého programování bude následující.



Obrázek č. 5: Stavový diagram soustavy ve tvaru přímého programování.

pozn.: u jednotlivých integrátorů neuvažujeme působení počátečních podmínek tzn.
$x_4(0) = x_3(0) = x_2(0) = x_1(0) = 0$

Vyjádříme matice ***A***, ***B***, ***C***

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.2 & -2.5 & -5.4 & -4.1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{C} = (0.2 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

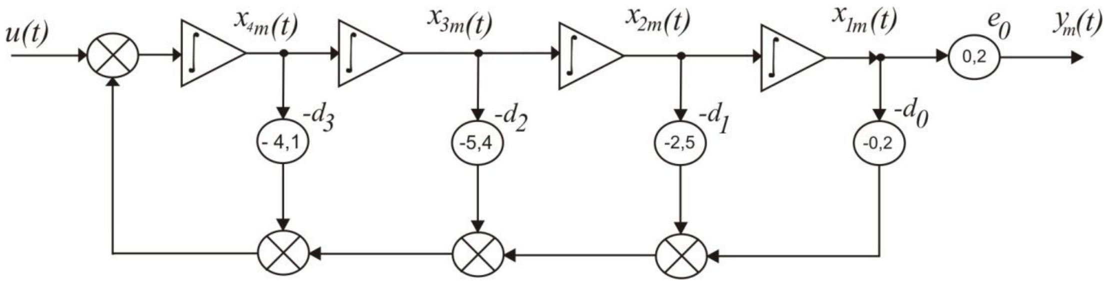
Nyní máme konkrétní soustavu s maticemi ***A***, ***B***, ***C***.

K soustavě s přenosem $F_s(p)$ vytvoříme model s přenosem $F_m(p)$.

$$F_m(p) = \frac{1}{(10p+1)(p+1)^2(0.5p+1)} = \frac{0.2}{p^4 + 4.1p^3 + 5.4p^2 + 2.5p + 0.2} \tag{9}$$

$d_0 = 0.2, \quad d_1 = 2.5, \quad d_2 = 5.4, \quad d_3 = 4.1, \quad e_0 = 0.2$

Schéma modelu ve tvaru přímého programování.



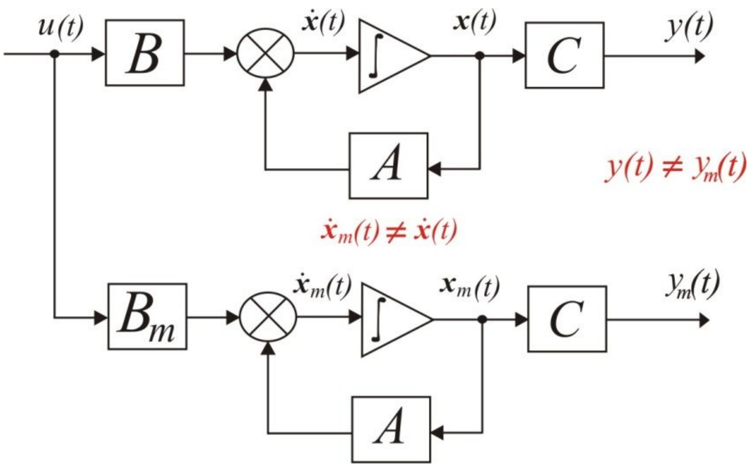
Obrázek č. 6: Stavový diagram modelu soustavy ve tvaru přímého programování.

Matice modelu budou totožné s maticemi soustavy $\boldsymbol{A_m} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B_m} = \boldsymbol{B}$ i $\boldsymbol{C_m} = \boldsymbol{C}$, viz rovnice č. 8

2.2 NÁVRH REKONSTRUKTORU S OHLEDEM NA VZNIK PORUCH

Soustavu i model soustavy připojíme paralelně do regulačního obvodu. Pokud $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B_m}$ stavové proměnné modelu $\boldsymbol{x_m}(t)$ odpovídají stavovým proměnným soustavy $\boldsymbol{x}(t)$. Tento stav je ovšem značně zidealizovaný. Na soustavu v reálném prostředí působí mnoho poruch, které nelze změřit a zohlednit je při vytváření modelu soustavy. Lze pouze odhadnout jejich možný výskyt a případný vliv na rekonstrukci stavů. Musíme tedy v každém případě uvažovat rozdílnost vstupních matic $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B_m}$.

Důsledkem toho se změní stavové proměnné uvnitř soustavy $\boldsymbol{x}(t)$, které není model schopen postihnout. Výstup soustavy $y(t)$ se rovněž změní a již neodpovídá výstupu z modelu $y_m(t)$. Vznikne rozdíl mezi stavovými proměnnými soustavy $\boldsymbol{x}(t)$ a rekonstruktoru $\boldsymbol{x_m}(t)$. $\boldsymbol{e_x}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x_m}(t)$. Rozdíl mezi výstupem soustavy $y(t)$ a modelu $y_m(t)$ označíme $e_y(t) = y(t) - y_m(t)$.



Obrázek č. 7: Situace mezi soustavou a modelem při rozdílných maticích B a B_m.

$$\boldsymbol{e_x}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x_m}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) - x_{1m}(t) \\ x_2(t) - x_{2m}(t) \\ x_3(t) - x_{3m}(t) \\ x_4(t) - x_{4m}(t) \end{pmatrix} \tag{10}$$

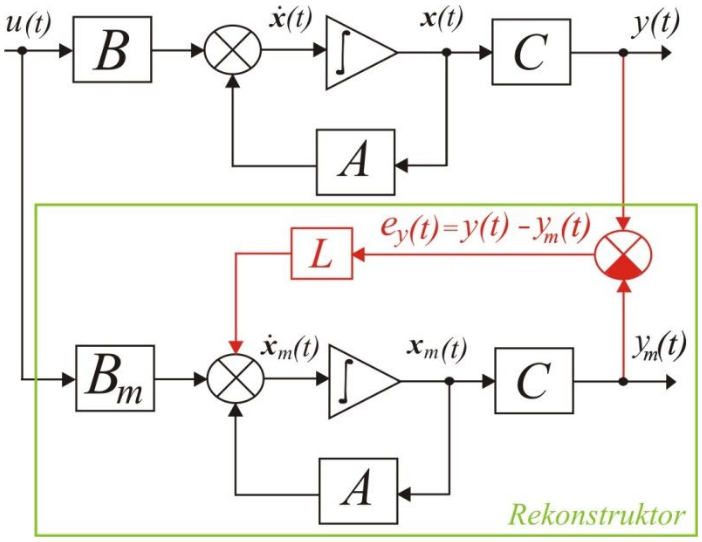
Jelikož stavové proměnné $x_1(t)$ a $x_{1m}(t)$ jsou de facto výstupy ze soustavy a rekonstruktoru $y(t) = \boldsymbol{C}x_1(t)$ a $y_m(t) = \boldsymbol{C}x_{1m}(t)$, budeme se zabývat derivacemi stavových proměnných a derivací jejich odchylek spolu s odchylkou výstupů $e_y(t)$.

$$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t) = \dot{\boldsymbol{x}}(t) - \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{m}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{e}_1(t) \\ \dot{e}_2(t) \\ \dot{e}_3(t) \\ \dot{e}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) - \dot{x}_{1m}(t) \\ \dot{x}_2(t) - \dot{x}_{2m}(t) \\ \dot{x}_3(t) - \dot{x}_{3m}(t) \\ \dot{x}_4(t) - \dot{x}_{4m}(t) \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$e_y(t) = y(t) - y_m(t)$$

Není-li $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t)$ a $e_y(t)$ rovno nule, nemůžeme si být jisti použitelností zrekonstruovaných stavových proměnných a musíme nejprve docílit vyšší shody mezi stavovými proměnnými a mezi výstupy. Z tohoto důvodu je obvod na obrázku č.8 rozšířen o matici $\boldsymbol{L}$, která vytváří zpětnou vazbu od odchylky výstupů $e_y(t)$. Model soustavy rozšířený o zpětnou vazbu s maticí $\boldsymbol{L}$ se nazývá rekonstruktor.

Rekonstruktor je schopen docílit vyšší shody, rekonstruovaných stavových proměnných se skutečnými, tzn. $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t) = \min$ a odchylky výstupu $e_y(t) = \min$, vhodnou volbou matice $\boldsymbol{L}$. Jak optimálně nastavit matici $\boldsymbol{L}$ je předmětem další kapitoly.



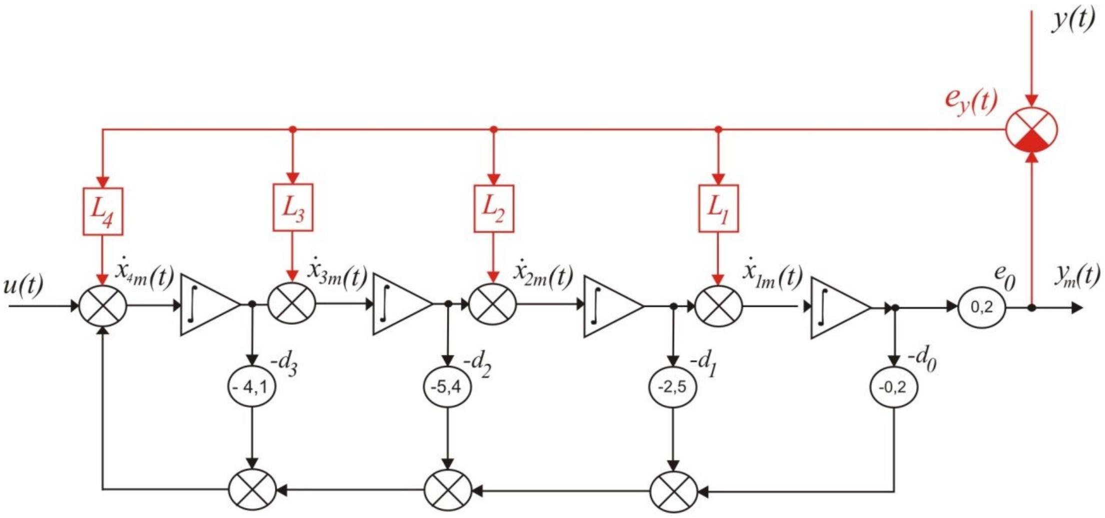
Obrázek č. 8: Stavové schéma rekonstruktoru.

2.2.1 Optimální nastavení Rekonstruktoru 1

Návrh, nastavení či seřízení identického rekonstruktoru s ohledem na zvolenou soustavu se provádí modifikací matice $\boldsymbol{L}$, vytvářející zpětnou vazbu od odchylky výstupů $e_y(t)$. Pro systémy s jedním výstupem bude matice $\boldsymbol{L}$, sloupcový vektor, s počtem řádků odpovídající počtu stavových proměnných rekonstruktoru. Pro rekonstruktor čtvrtého řádu:

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Jednotlivý složky L_1, L_2, L_3, L_4 vektoru L jsou v rekonstruktoru připojeny dle obrázku č. 9.



Obrázek č. 9: Stavový diagram rekonstruktoru ve tvaru přímého programování.

Jak tedy zjistit optimální hodnoty vektoru $\boldsymbol{L}$? Víme, že chceme dosáhnout minimálního hodnoty $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t)$ a minimální odchylky $e_y(t)$, co možná v nejkratším čase. Zatím však nevíme co všechno způsobí vektor $\boldsymbol{L}$.

Vektor $\boldsymbol{L}$ nám zajišťuje změnu dynamických vlastností identického rekonstruktoru, tzn., že lze jeho prostřednictvím měnit rychlost konvergence stavových proměnných definovaných vektorem $\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{m}}(t)$ k nule [2].

Stavové proměnné rekonstruktoru $\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{m}}(t)$ jsou obsažené ve stavových rovnicích rekonstruktoru.

Stavové rovnice soustavy

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \tag{13}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \tag{14}$$

Stavové rovnice rekonstruktoru

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{m}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{m}}(t) + \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{L}(y(t) - y_m(t)) \tag{15}$$

$$\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{m}}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{m}}(t) \tag{16}$$

Abychom zjistili jak nám L ovlivní $\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{(t)}$, DD sestavíme rovnici pro odchylku stavových proměnných $\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{(t)}$.

$$\boldsymbol{e_x}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x_m}(t) \tag{17}$$

Derivace

$$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t) = \dot{\boldsymbol{x}}(t) - \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{m}}(t) \tag{18}$$

Dosadíme-li za $\boldsymbol{x}(t)$ rovnici č.13 a za $\boldsymbol{x_m}(t)$ rovnici č.15.

$$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{Ax}(t) + \boldsymbol{Bu}(t) - \boldsymbol{Ax_m}(t) - \boldsymbol{B_m u}(t) - \boldsymbol{L}(y(t) - y_m(t)) \tag{19}$$

Je-li $y(t) - y_m(t) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x_m}(t))$

Po úpravách

$$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})\boldsymbol{e_x}(t) + (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B_m})\boldsymbol{u}(t) \tag{20}$$

Dynamické vlastnosti odchylek $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t)$ jsou dány maticí $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})$. Vektor $\boldsymbol{L}$ nám tedy ovlivní dynamiku v souladu s rovnicí č.20. $\boldsymbol{L}$ zvolíme tak, aby $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t)$ konvergovala rychleji k nule než $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$, jejichž dynamické vlastnosti jsou dány maticí $\boldsymbol{A}$. Čím rychleji dosáhne $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t)$ nulové hodnoty, tím dříve budou zrekonstruované stavy $\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{m}}(t)$ odpovídat skutečným stavovým proměnný soustavy $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ $\Rightarrow$ vyšší shoda průběhů $\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{m}}(t)$ a $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$. Toho docílíme, pokud vlastní čísla matice $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})$, budou více vlevo než vlastní čísla matice $\boldsymbol{A}$ [2].

Vlastní čísla zadané matice $\boldsymbol{A}$ dle rovnice č.9

$$\det(p\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = p^4 + 4.1p^3 + 5.4p^2 + 2.5p + 1 \tag{22}$$

$$\Rightarrow p_{1,2} = -1, p_3 = -0.1,\ p_4 = -2$$

Vypočítáme hodnoty $\boldsymbol{L}$ tak, aby vlastní čísla matice $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC}$ odpovídaly p_1, p_2, p_3, $p_4 = -1$. Těmto vlastním číslům odpovídají určité dynamické vlastnosti $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t)$, které si dále popíšeme a zhodnotíme. Výpočet konkrétních hodnot $\boldsymbol{L}$ odpovídá řešení rovnice č.23.

$$\det\big(p\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})\big) = (p+1)^4 \tag{23}$$

$$p^4 + (4.1 + 0.2L_1)p^3 + \begin{pmatrix} 5.4 + 0.82L_1 + \\ 0.2L_2 \end{pmatrix} p^2 + \begin{pmatrix} 2.5 + 1.08L_1 \\ +0.82L_2 + 0.2L_3 \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} 0.2 + 0.5L_1 + 1.08L_2 + \\ 0.82L_3 + 0.2L_4 \end{pmatrix} = p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1 \quad (24)$$

$$\Rightarrow L_1 = -0.5,\ L_2 = 5.05,\ L_3 = -10.505,\ L_4 = 21.05.$$

$$L = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 5.05 \\ -10.5 \\ 21.05 \end{pmatrix} \quad (25)$$

Průběhy odchylek mezi stavovými proměnnými soustavy a rekonstruktoru $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t)$ a $e_y(t)$, lze vykreslit jako výsledek simulace celého zapojení v programu Matlab-Simulink. Přenosy odchylek $F_{\dot{e}_1}(p)$, $F_{\dot{e}_2}(p)$, $F_{\dot{e}_3}(p)$, $F_{\dot{e}_4}(p)$ vypočítáme pomocí blokové algebry a operátorový přenos $F_{e_y}(p)$, odchylky výstupu $e_y(t)$, vypočítáme ze stavových rovnic č.25 a č.26. Postup je obdobný jako u stanovení přenosu $F(p)$ klasických SISO soustav definovaných stavovými rovnicemi pro $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ a $y(t)$.

$$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t) = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}}(t) + (B - B_m)u(t) \quad (25)$$

$$e_y(t) = y(t) - y_m(t) \Rightarrow e_y(t) = \boldsymbol{C}(x(t) - x_m(t)) \quad (26)$$

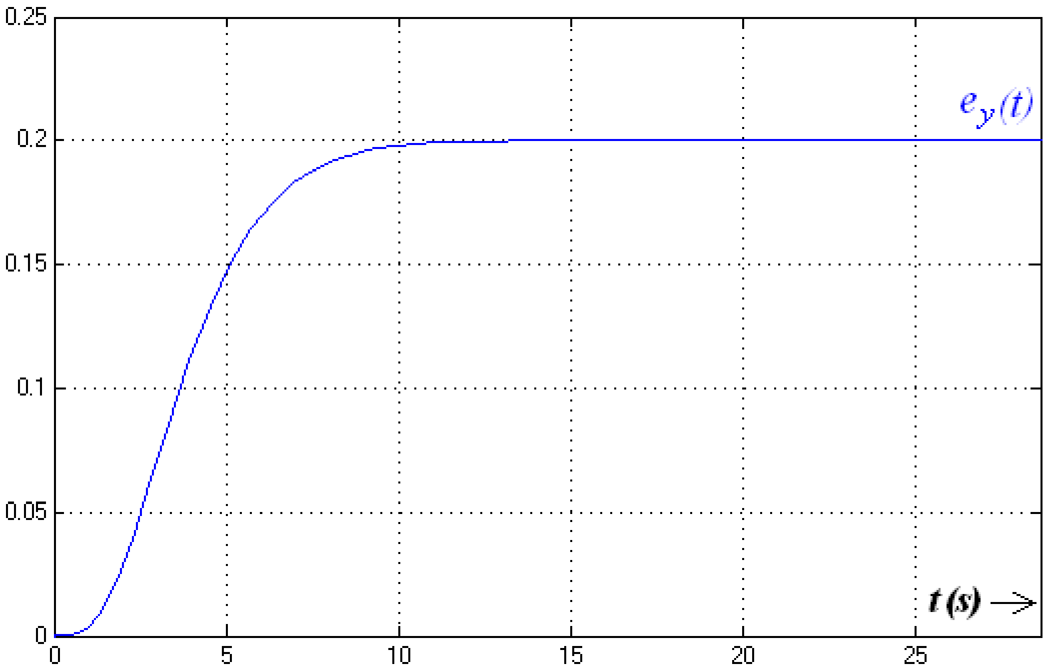
$$F_{e_y}(p) = \boldsymbol{C}\frac{1}{det\left(p\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})\right)} adj\left(p\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})\right)(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B_m}) \quad (27)$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.2 & -2.5 & -5.4 & -4.1 \end{pmatrix} \ L = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 5.05 \\ -10.5 \\ 21.05 \end{pmatrix} \ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ \boldsymbol{B_m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

V krátkosti se pozastavíme nad volbou matic ***B*** a ***B**$_m$*. Již bylo řečeno, že odchylka mezi výstupy $e_y(t)$ či stavovými proměnnými $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t)$ vzniká, jeli $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}_m$. Tuto skutečnost nám „ilustruje“ vztah pro operátorový přenos č. 27. Pokud ***B*** - ***B**$_m$* = 0, tzn. obě matice jsou stejné, bude operátorový přenos odchylky $F_{e_y}(p) = 0$, tedy $e_y(t) = 0$. Budeme předpokládat, že na vstupu do soustavy působí pouze porucha $v(t) = 1$. Na rekonstruktor nepůsobí poruchy ani žádné vstupní signály. V takovémto případě je ***B*** a ***B**$_m$* dle vztahu č.28. Dále se budeme zabývat i možností vzniku nenulových počátečních podmínek u jednotlivých integrátorů soustavy $x(0) \neq 0$. Přenos odchylky výstupů po dosazení konkrétních matic bude roven:

$$F_{e_y}(p) = \frac{0.2}{p^4 + 4p^3 + 6p^2 + 4p + 1} = \frac{0.2}{(p+1)^4} \tag{29}$$

S využitím simulací celého obvodu v programu Matlab – Simulink, včetně působení poruchy do soustavy $v(t) = 1$, vykreslíme průběh odchylky $e_y(t)$.



Obrázek č. 10: Grafický záznam průběhu odchylky výstupů $e_y(t)$.

Z grafického záznamu $e_y(t)$ je pro nás nejdůležitější ustálená hodnota. $e_y(t=\infty)=0.2$. Porucha vstupující do soustavy $v(t)=1$. Výstup z rekonstruktoru $y_m(t)$ při takto nastavené matici $\boldsymbol{L}$, dosáhne ustálené hodnoty $y_m(t=\infty)=0.8$. Relativní chyba rekonstrukce δ_{ym} výstupu $y_m(t=\infty)$ k skutečné hodnotě $y(t=\infty)$ $\delta_{ym}=\frac{e_y}{y}=\left(\frac{0.2}{1}\right)\cdot 100\%=20\%$.

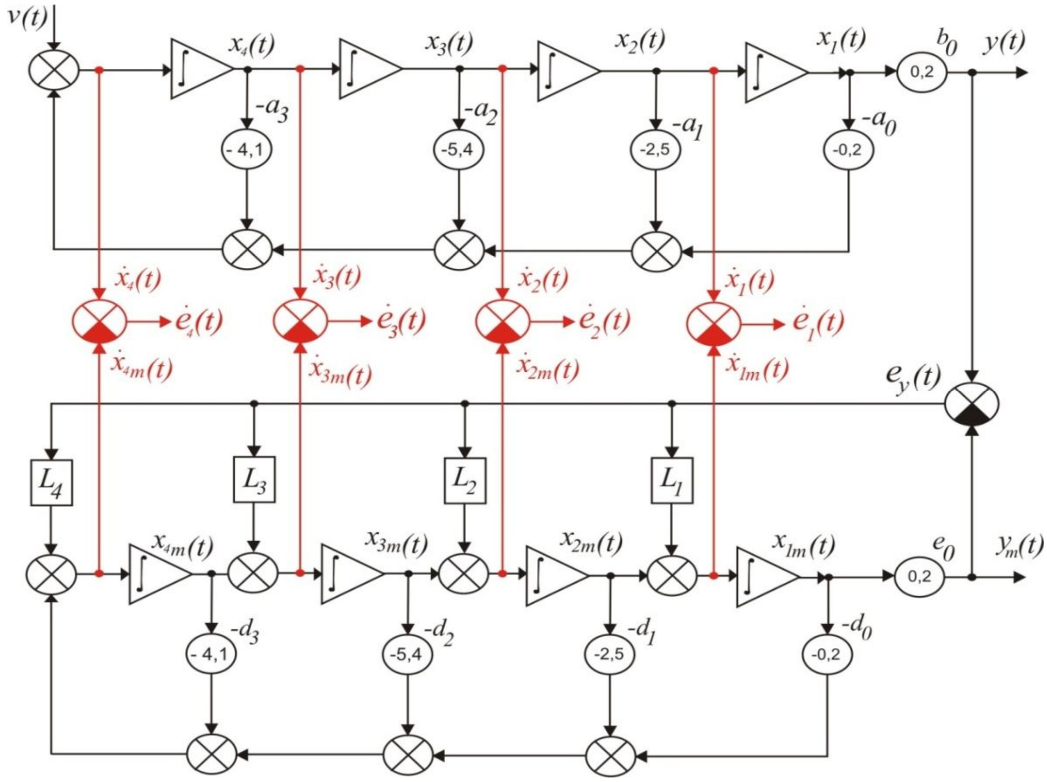
Vypočítáme operátorové přenosy odchylek stavových proměnných $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t)$, $F_{\dot{e}_1}(p)$, $F_{\dot{e}_2}(p)$, $F_{\dot{e}_3}(p)$, $F_{\dot{e}_4}(p)$.

$$\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t)=\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{m}}(t)=\begin{pmatrix}\dot{e}_1(t)\\ \dot{e}_2(t)\\ \dot{e}_3(t)\\ \dot{e}_4(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)-\dot{x}_{1m}(t)\\ \dot{x}_2(t)-\dot{x}_{2m}(t)\\ \dot{x}_3(t)-\dot{x}_{3m}(t)\\ \dot{x}_4(t)-\dot{x}_{4m}(t)\end{pmatrix} \tag{30}$$

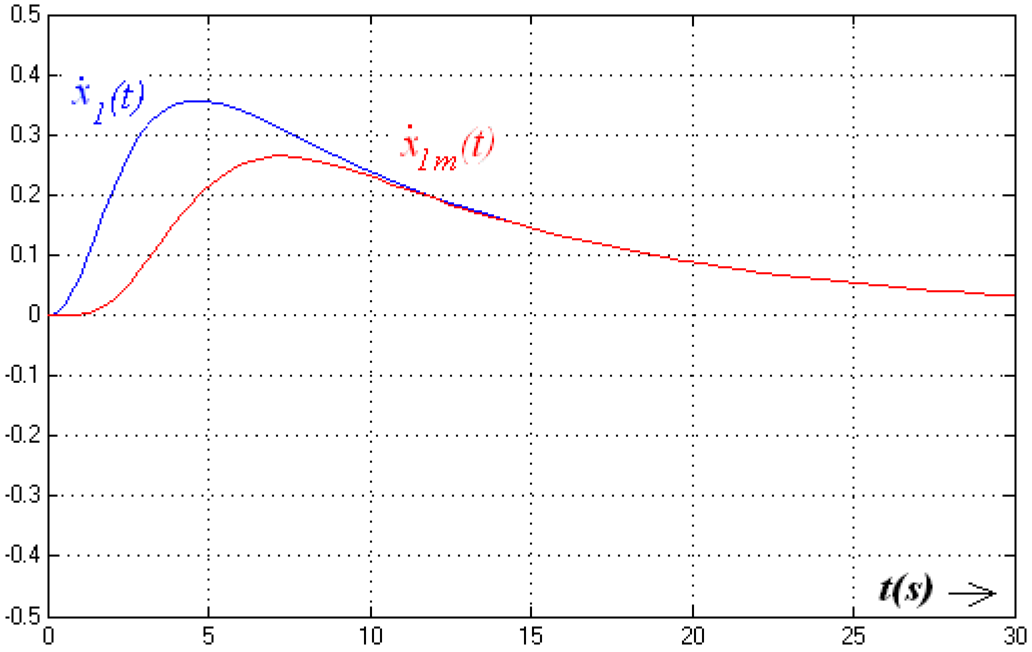
$$F_{\dot{e}_1}(p)=F_{\dot{x}_1}(p)-F_{\dot{x}_{1m}}(p) \qquad F_{\dot{e}_2}(p)=F_{\dot{x}_2}(p)-F_{\dot{x}_{2m}}(p) \qquad (31)\quad(32)$$

$$F_{\dot{e}_3}(p)=F_{\dot{x}_3}(p)-F_{\dot{x}_{3m}}(p) \qquad F_{\dot{e}_4}(p)=F_{\dot{x}_4}(p)-F_{\dot{x}_{4m}}(p) \qquad (33)\quad(34)$$

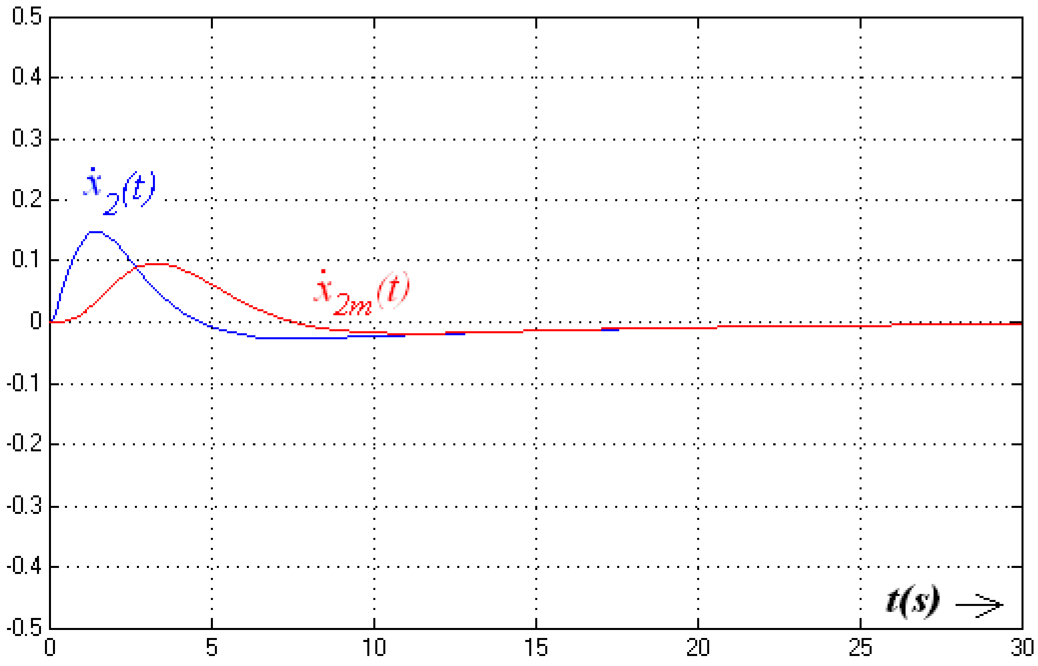
Odchylky stavových proměnných $\dot{e}_1(t)$, $\dot{e}_2(t)$, $\dot{e}_3(t)$, $\dot{e}_4(t)$, jsou znázorněny na obrázku č.11.



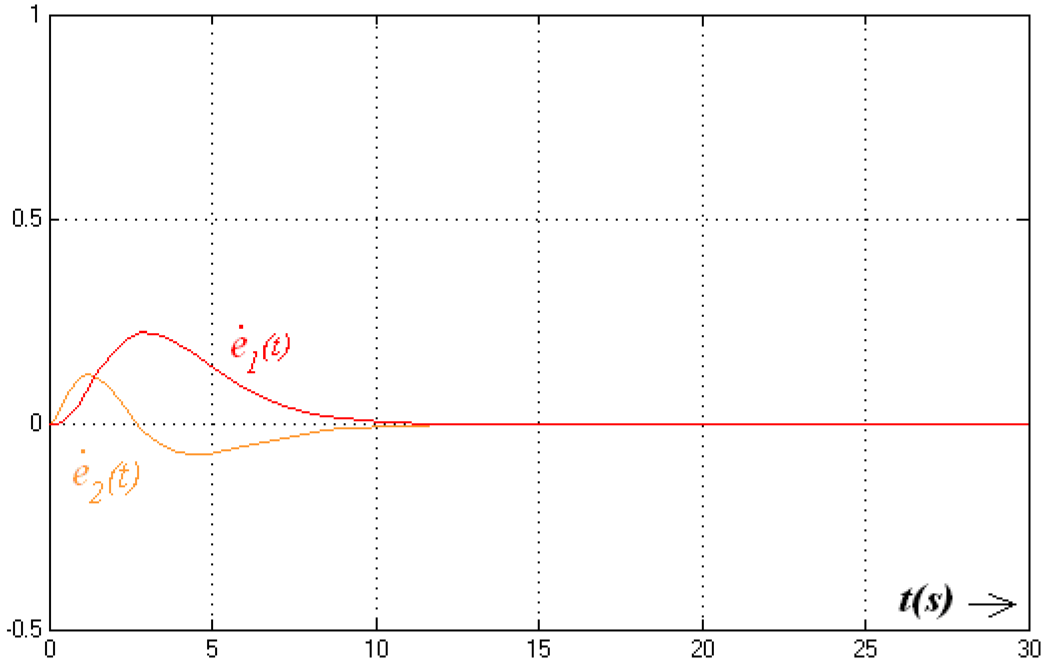
Obrázek č. 11: Blokové schéma s odchylkami stavových proměnných $\dot{e}_1(t)$, $\dot{e}_2(t)$, $\dot{e}_3(t)$, $\dot{e}_4(t)$.



Obrázek č. 12: Grafické srovnání průběhu stavových proměnných $\dot{x}_1(t)$ a $\dot{x}_{1m}(t)$.



Obrázek č. 13: Grafické srovnání průběhu stavových proměnných $\dot{x}_2(t)$ a $\dot{x}_{2m}(t)$.

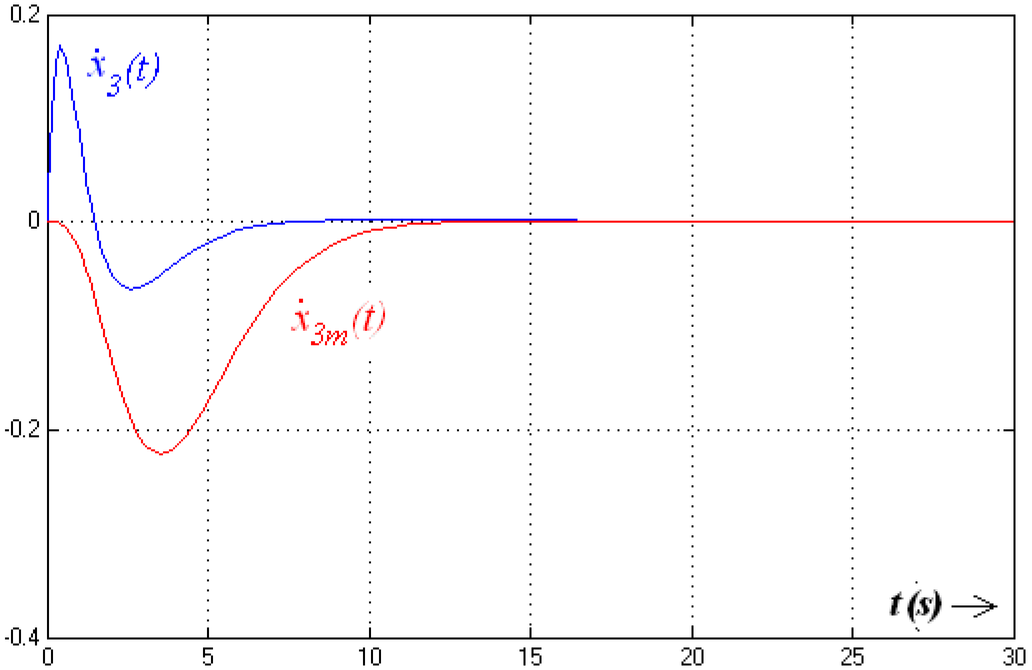


Obrázek č. 14: Grafický záznam průběhu odchylek stavových proměnných $\dot{e}_1(t), \dot{e}_2(t)$.

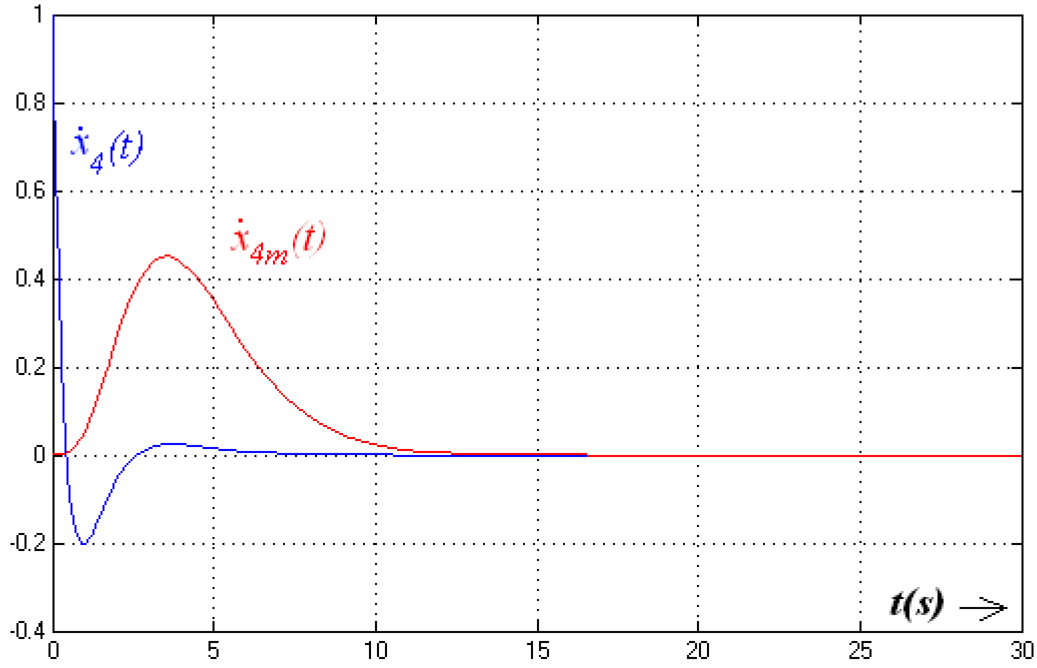
K výpočtu přenosů využijeme Masonovo – pravidlo.

$$F_{\dot{e}_1}(p) = \frac{p(p+2i)\big(p+(1\pm 0.1i)\big)(p+0.1)}{\left(\begin{matrix}\big(p+(2.42\pm 0.5i)\big)\big(p+(1.51\pm 1.03i)\big)\big(p+(0.21\pm i)\big)\\ \big(p+(0.07\pm 0.07i)\big)\end{matrix}\right)} \qquad (32)$$

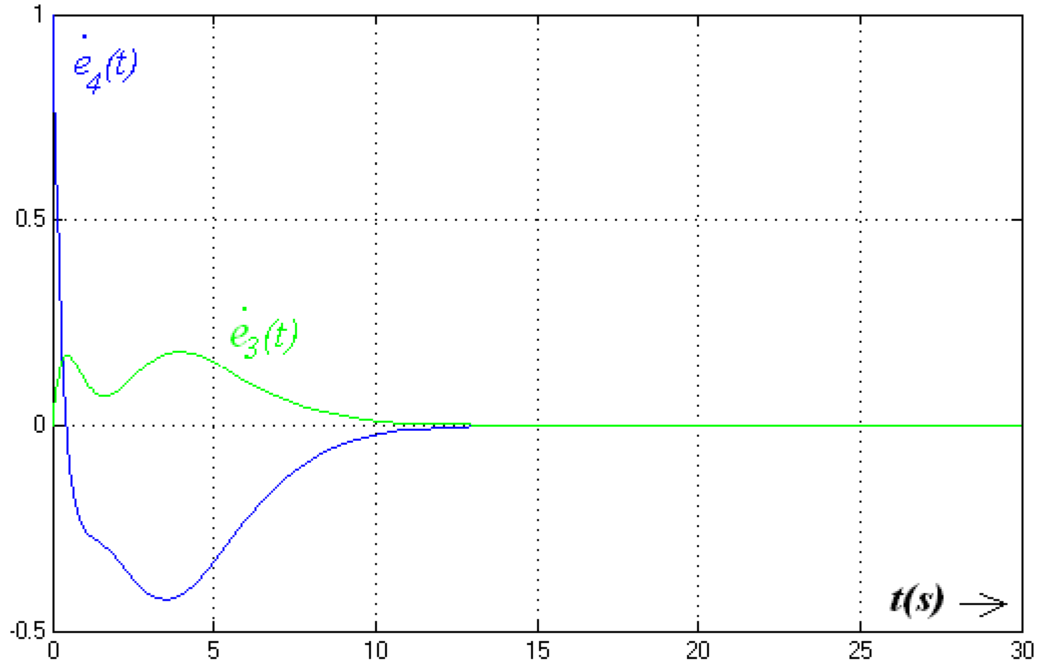
$$F_{\dot{e}_2}(p) = \frac{p(p+2)\big(p+(1\pm 0.1i)\big)(p+0.1)(p-0.1)}{\left(\begin{matrix}\big(p+(2.42\pm 0.5i)\big)\big(p+(1.51\pm 1.03i)\big)\big(p+(0.21\pm i)\big)\\ \big(p+(0.07\pm 0.07i)\big)\end{matrix}\right)} \qquad (33)$$



Obrázek č. 15: Grafické srovnání průběhu stavových proměnných $\dot{x}_3(t)$ a $\dot{x}_{3m}(t)$.



Obrázek č. 16: Grafické srovnání průběhu stavových proměnných $\dot{x}_4(t)$ a $\dot{x}_{4m}(t)$.



Obrázek č. 17: Grafický záznam průběhu odchylek stavových proměnných $\dot{e}_3(t)$, $\dot{e}_4(t)$.

$$F_{\dot{e}_3}(p) = \frac{p(p+2i)\big(p-(0.05\pm 1i)\big)(p+0.97)(p+1)(p+0.1)}{\begin{pmatrix}\big(p+(2.42\pm 0.5i)\big)\big(p+(1.51\pm 1.03i)\big)\big(p+(0.21\pm i)\big)\\ \big(p+(0.07\pm 0.07i)\big)\end{pmatrix}} \quad (34)$$

$$F_{\dot{e}_4}(p) = \frac{p(p+2)\big(p+(0.47\pm 1.33i)\big)(p+0.1)(p+1)^2(p-1.05)}{\begin{pmatrix}\big(p+(2.42\pm 0.5i)\big)\big(p+(1.51\pm 1.03i)\big)\big(p+(0.21\pm i)\big)\\ \big(p+(0.07\pm 0.07i)\big)\end{pmatrix}} \quad (35)$$

Grafický záznam $\dot{e}_1(t)$, $\dot{e}_2(t)$, $\dot{e}_3(t), \dot{e}_4(t)$, získaný simulací v programu Matlab –Simulink, vypovídá o „správnosti“ rekonstrukce stavových proměnných. Odchylky stavových proměnných s časem konvergují k nule. Nejmenší rozdíly, jsou mezi stavovými proměnnými $\dot{x_2}(t)$ a $\dot{x}_{2m}(t)$, $\dot{x_1}(t)$ a $\dot{x}_{1m}(t)$, jejichž průběhy jsou podobné, ovšem s výraznými rozdíly v amplitudách. Odchylka $\dot{e}_4(t)$, mezi stavovými průběhy $\dot{x_4}(t)$ a $\dot{x}_{4m}(t)$ je značná, průběhy se neshodují ani tvarem, viz obrázek č. 16.

Mám-li zhodnotit míru shody zrekonstruovaných stavových proměnných při působení poruchy $v(t) = 1$ na vstupu do soustavy, s přihlédnutím na požadavek konkrétních dynamických vlastností odvislých od vlastních čísel rekonstruktoru p_1, p_2, $p_3, p_4 = -1$ matice ***A-LC***, musím zkonstatovat, že odchylky $e_y(t)$, $\dot{e}_1(t)$, $\dot{e}_2(t)$, $\dot{e}_3(t)$, $\dot{e}_4(t)$ jsou natolik výrazné, že zrekonstruované stavové proměnné $\dot{x}_{1m}(t)$, $\dot{x}_{2m}(t)$, $\dot{x}_{3m}(t)$, $\dot{x}_{4m}(t)$, případně i $y_m(t)$ neodpovídají skutečným stavových proměnným soustavy a nelze je využít v stavové regulaci. Dříve je potřeba docílit vyšší shody a určit do jaké míry je rekonstruktor (v případě působení poruchy na vstupu do soustavy) „použitelný“.

2.2.2 Optimální nastavení rekonstruktoru 2

V předchozí kapitole jsme volbou matice $\boldsymbol{L}$ ovlivnili dynamiku $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t)$ tzn. rychlost konvergence chyby pozorování k nule. Rychlost ovlivňuje vzájemná poloha

vlastních čísel matice ***A-LC*** a matice A. Zkusíme proto zvolit jiná vlastní čísla matice ***A-LC*** než $p_1, p_2, p_3, p_4 = -1$. Zvolíme je více vlevo od počátku FCHvKR.

$$p_1, p_2, p_3, p_4 = -2 \quad \Rightarrow (p+2)^4 = det\big(p\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{LC})\big) \tag{36}$$

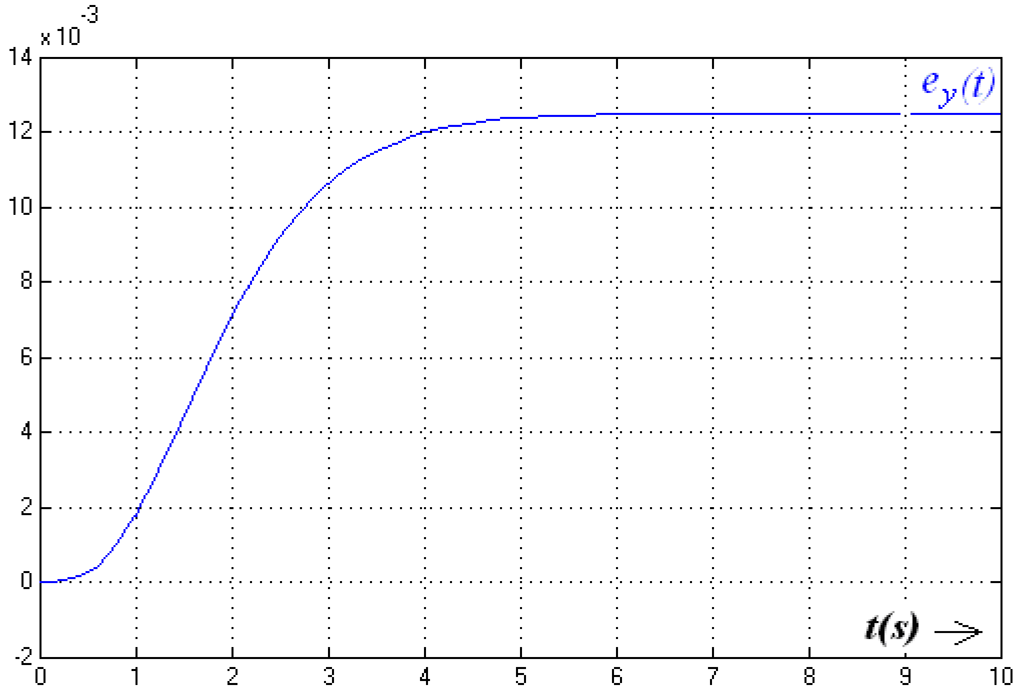
Z rovnice č. 36 vypočítáme nové hodnoty vektoru ***L***

$$L = \begin{pmatrix} 19.5 \\ 13.05 \\ -11.3 \\ 6.13 \end{pmatrix} \tag{37}$$

Opět vypočítáme přenos odchylky $F_{e_y}(p)$dle rovnice č.27.

$$F_{e_y}(p) = \frac{0.2}{p^4 + 8p^3 + 24p^2 + 32p + 16} = \frac{0.2}{(p+2)^4} \tag{38}$$

Průběh odchylky $e_y(t)$ znázorňuje obrázek č.18.



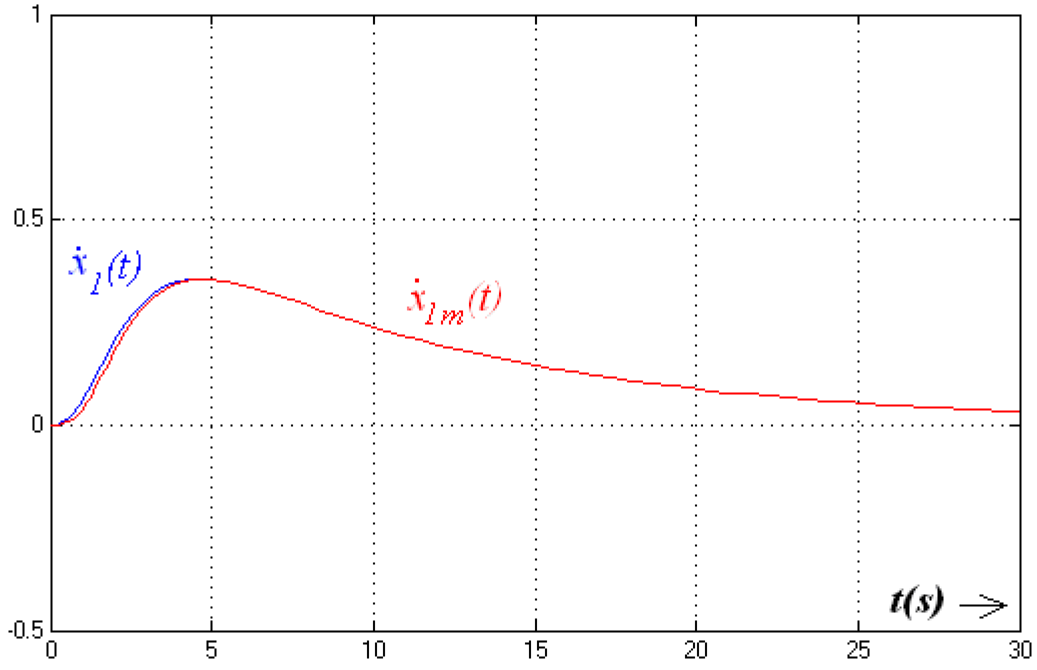
Obrázek č. 18: Grafický záznam průběhu odchylky výstupů $e_y(t)$.

Z grafického záznamu $e_y(t)$ vidíme podstatné snížení trvalé ustálené odchylky mezi výstupy $y(t)$ a $y_m(t)$ na hodnotu $e_y(t=\infty)=0.0125$. Tuto hodnotu lze vypočíst z přenosu $F_{e_y}(p)$ dle rovnice č.38 pro limitní stav $t \to \infty \Longrightarrow p \to 0$.

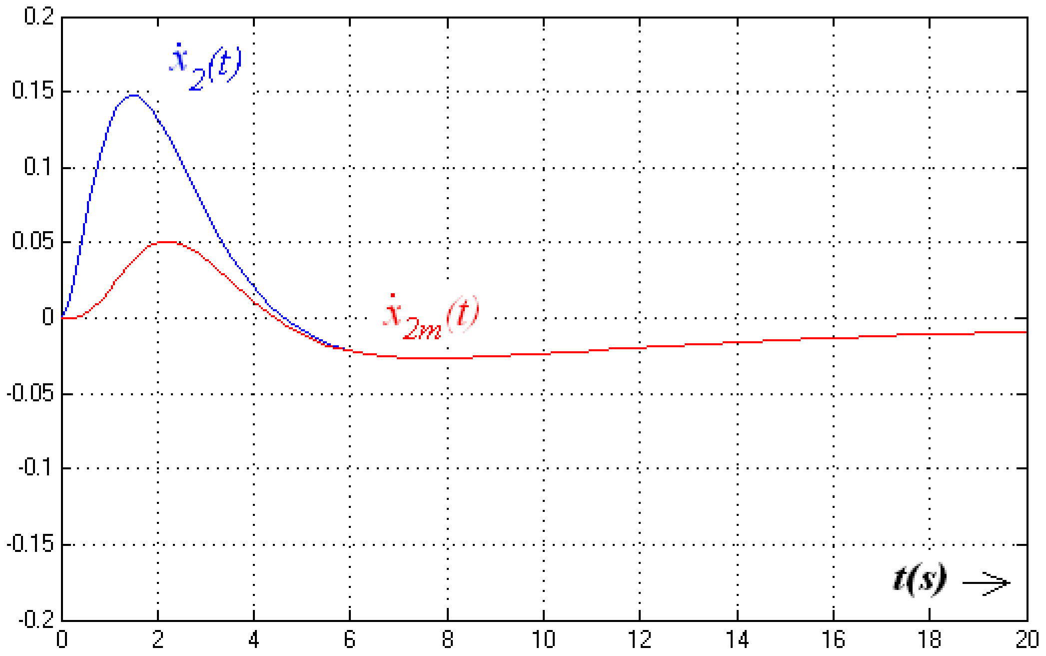
$$F_{e_y}(p) = \frac{0.2}{p^4+8p^3+24p^2+32p+16} \qquad \lim_{p\to 0} F_{e_y}(p) = \frac{0.2}{16} = 0.0125 \tag{39}$$

Relativní chyba rekonstrukce δ_{ym} výstupu $y_m(t=\infty)$ k skutečné hodnotě $y(t=\infty)$ $\delta_{ym} = \frac{e_y}{y} = (0.0125/1)\cdot 100\% = 1.25\%$. Chyba rekonstrukce tedy dosahuje přibližně setiny skutečné hodnoty $y(t)$.

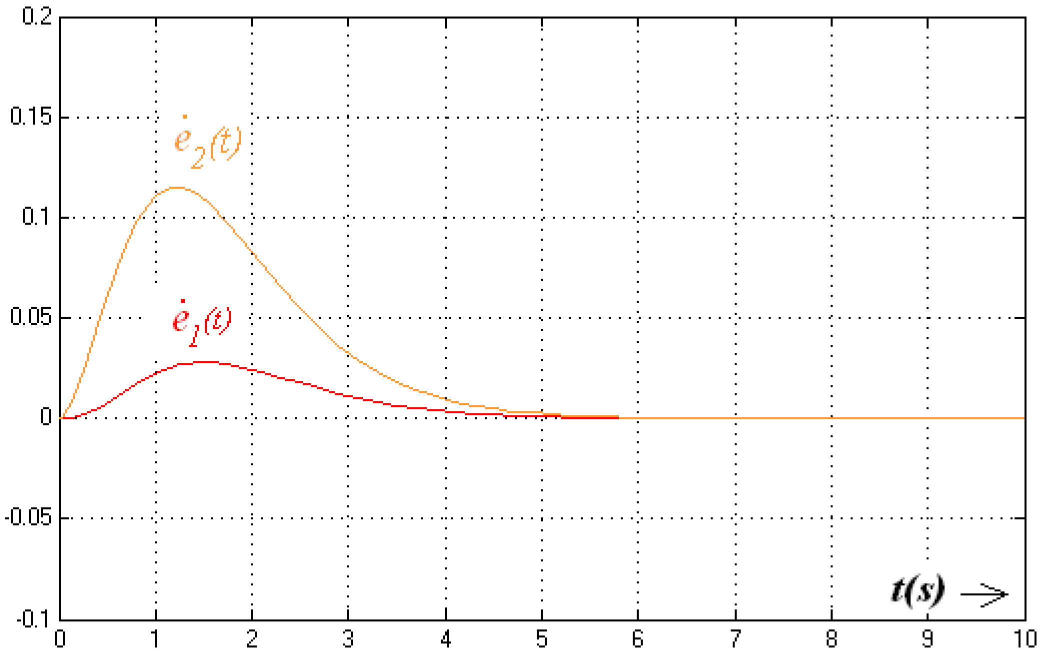
Vypočítáme přenosy odchylek $F_{\dot{e}_1}(p)$, $F_{\dot{e}_2}(p)$, $F_{\dot{e}_3}(p)$, $F_{\dot{e}_4}(p)$ pomocí Masonova pravidla



Obrázek č. 19: Grafické srovnání průběhu stavových proměnných $\dot{x}_1(t)$ a $\dot{x}_{1m}(t)$.



Obrázek č. 20: Grafické srovnání průběhu stavových proměnných $\dot{x_2}(t)$ a $\dot{x_{2m}}(t)$.

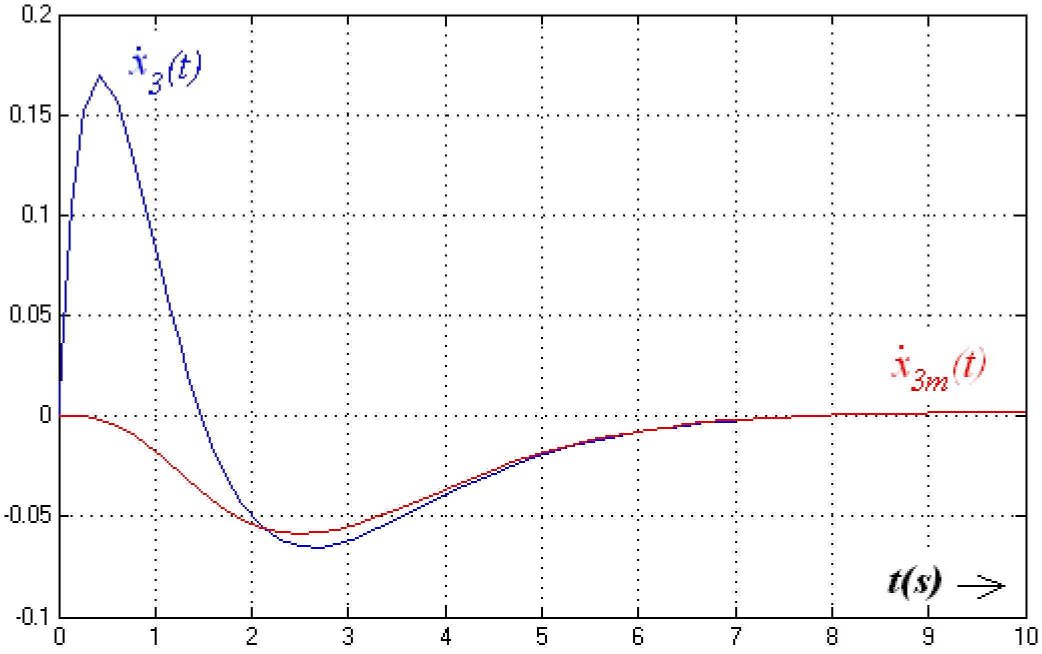


Obrázek č. 21: Grafický záznam průběhu odchylek stavových proměnných $\dot{e}_1(t), \dot{e}_2(t)$.

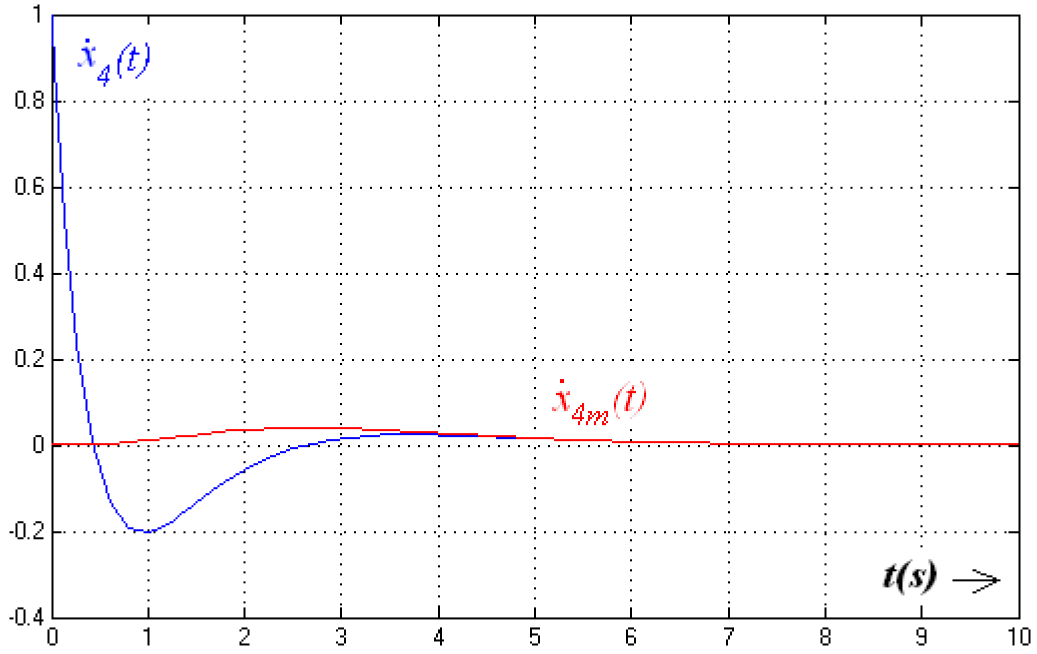
Přenosy odchylek $F_{\dot{e}_1}(p)$, $F_{\dot{e}_2}(p)$.

$$F_{\dot{e}_1}(p) = \frac{p(p+1.84)(p+1.54)\big(p+(0.36\pm 0.1i)\big)}{\left(\begin{array}{c}\big(p+(2.46\pm 0.5i)\big)\big(p+(1.53\pm 0.62i)\big)\big(p+(0.9\pm 0.23i)\big)\\ (p+0.1)(p+2.23)\end{array}\right)} \quad (39)$$

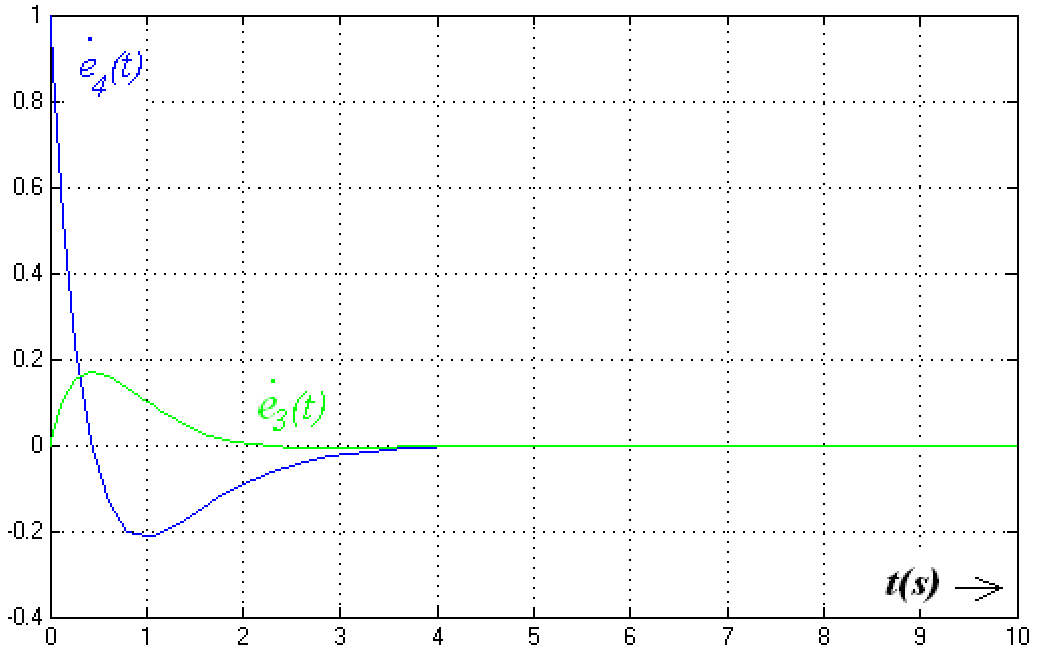
$$F_{\dot{e}_2}(p) = \frac{p(p+3.87)(p+2.11)\big(p+(0.95\pm 0.26i)\big)(p+0.09)}{\left(\begin{array}{c}\big(p+(2.46\pm 0.5i)\big)\big(p+(1.53\pm 0.62i)\big)\big(p+(0.9\pm 0.23i)\big)\\ (p+0.1)(p+2.23)\end{array}\right)} \quad (40)$$



Obrázek č. 22: Grafické srovnání průběhu stavových proměnných $\dot{x}_3(t)$ a $\dot{x}_{3m}(t)$.



Obrázek č. 23: Grafické srovnání průběhu stavových proměnných $\dot{x_4}(t)$ a $\dot{x_{4m}}(t)$.



Obrázek č. 24: Grafický záznam průběhu odchylek stavových proměnných $\dot{e}_3(t)$, $\dot{e}_4(t)$.

Přenosy odchylek $F_{\dot{e}_3}(p)$, $F_{\dot{e}_4}(p)$.

$$F_{\dot{e}_3}(p) = \frac{p(p+2.9)(p+2.38)\big(p+(1.02\pm 0.53i)(p+0.56)(p+0.1)\big)}{\left(\begin{matrix}\big(p+(2.46\pm 0.5i)\big)\big(p+(1.53\pm 0.62i)\big)\big(p+(0.9\pm 0.23i)\big)\\ (p+0.1)(p+2.23)\end{matrix}\right)} \quad (42)$$

$$F_{\dot{e}_4}(p) = \frac{\left(\begin{matrix}p\big(p+(2.5\pm 0.39i)\big)\\ (p+0.78)\big(p+(1.3\pm 0.43i)(p-0.48)(p+0.1)\big)\end{matrix}\right)}{\left(\begin{matrix}\big(p+(2.46\pm 0.5i)\big)\big(p+(1.53\pm 0.62i)\big)\big(p+(0.9\pm 0.23i)\big)\\ (p+0.1)(p+2.23)\end{matrix}\right)} \quad (43)$$

Porovnáním výsledků z předchozích kapitol zjistíme, že zrekonstruované stavové proměnné při druhém návrhu, tj. při volbě vlastních čísel rekonstruktoru p_1, p_2, p_3, $p_4 = -2$, více odpovídaly stavovým proměnným soustavy. Postup návrhu rekonstruktoru lze obecně shrnout do následujících podmínek

První podmínkou optimálního návrhu rekonstruktoru je, aby odchylka $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t)$, konvergovala k nule rychleji než $\boldsymbol{x}(t)$. Toto docílíme, pokud zvolíme vlastní čísla rekonstruktoru více vlevo než vlastní čísla soustavy [3] $\Longrightarrow$ poloha vlastních čísel soustavy nám výrazně omezuje možnosti volby dynamiky rekonstruktoru.

Druhou podmínkou je, aby průběh odchylky $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t)$ byl nekmitavý. Podmínku splníme, zvolíme-li vlastní čísla rekonstruktoru reálná záporná.

Splnění těchto dvou podmínek nám podstatně zúží možnosti volby vektoru $\boldsymbol{L}$. Situaci si můžeme znázornit na rozložení pólů charakteristického polynomu soustavy a možnostmi volby pólů charakteristického polynomu rekonstruktoru ve frekvenční charakteristice v komplexní rovině.

Charakteristický polynom soustavy

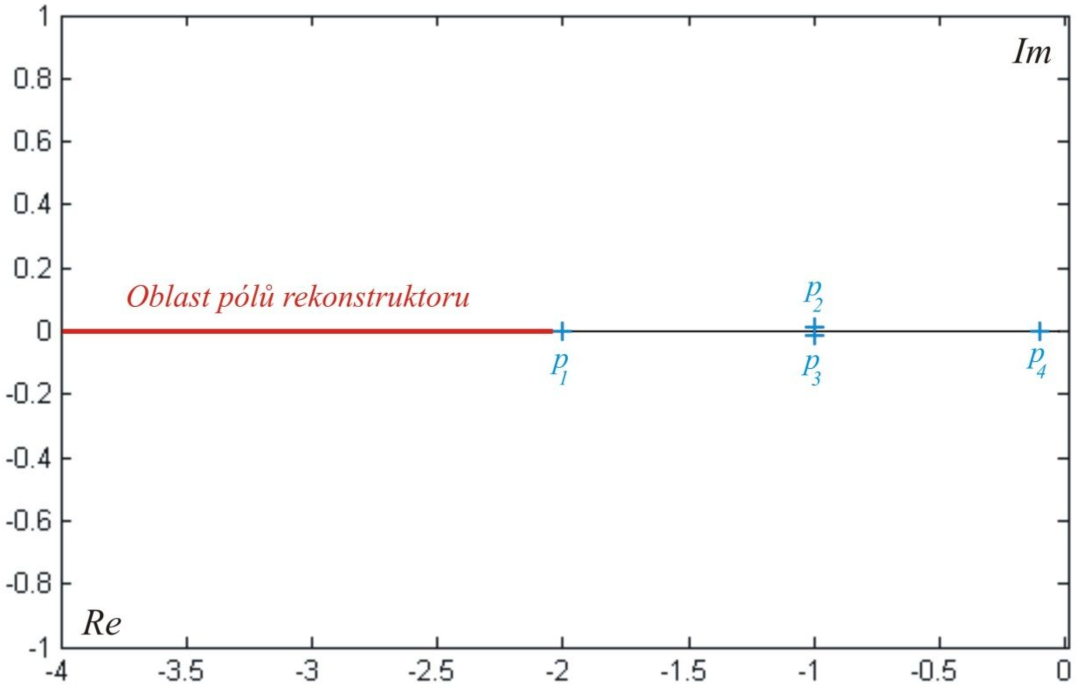
$$(10p+1)(p+1)^2(0.5p+1) = p^4 + 4.1p^3 + 5.4p^2 + 2.5p + 0.2 \quad (44)$$

Póly: $p_2, p_3 = -1,\ p_1 = -0.1,\ p_4 = -2$

Charakteristický polynom rekonstruktoru

$$p^4 + (4.1 + 0.2L_1)p^3 + \begin{pmatrix} 5.4 + 0.82L_1 + \\ 0.2L_2 \end{pmatrix} p^2 + \begin{pmatrix} 2.5 + 1.08L_1 + \\ 0.82L_2 + 0.2L_3 \end{pmatrix} p + \begin{pmatrix} 0.2 + 0.5L_1 + 1.08L_2 + \\ 0.82L_3 + 0.2L_4 \end{pmatrix} \quad (45)$$

Póly: $p_1, p_2, p_3, p_4 = var.$ dle konkrétních hodnot L_1, L_2, L_3, L_4.



Obrázek č. 25: Rozmístění pólů soustavy (modře) a oblast pólů rekonstruktoru ve FCHvKR.

Do oblasti vyznačené červeně je nejlepší umístit póly rekonstruktoru. Tím splníme výše uvedené podmínky. Póly lze umístit i více vlevo od počátku souřadných os např. $p_1, p_2, p_3, p_4 = -5$, ovšem za cenu příliš vysokých hodnot L_1, L_2, L_3, L_4, např. pro $p_1, p_2, p_3, p_4 = -5$ bude $L_1 = 79.5$, $L_2 = 397.5$, $L_3 = 1660.7$, $L_4 = -0.0067$.

Rekonstruktor by měl dále zajistit, aby $e_y(t = \infty) = 0$. V našem zapojení toto není možné, jelikož čitatel přenosu odchylky $F_{e_y}(p)$ neobsahuje operátor „*p*“. viz limitní vztah dle rovnice č. 46

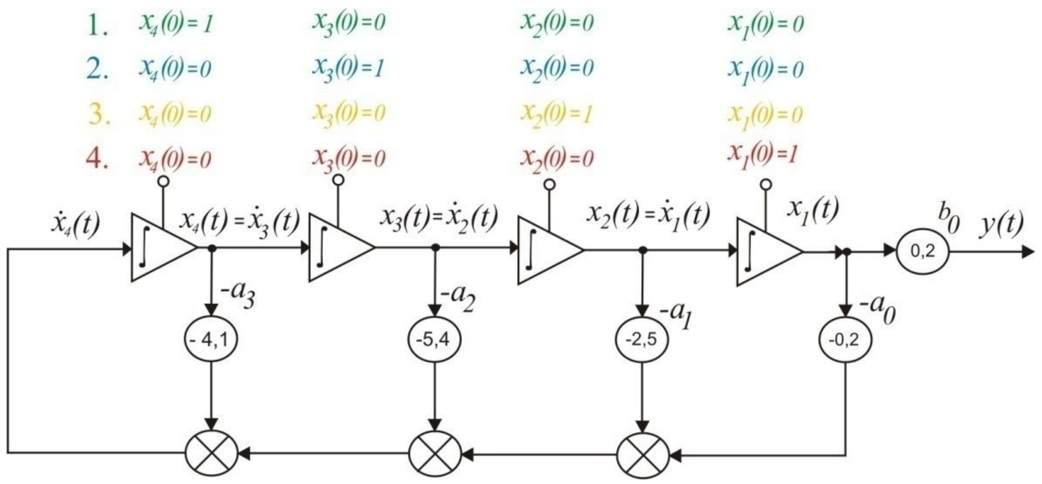
$$\lim_{p\to 0} F_{e_y}(p) = \frac{0.2}{16} = 0.0125 \quad (46)$$

Museli bychom k rekonstruktoru přidat nezavazbený integrátor, nejlépe sériově k bloku L_4. Toto ošetření ovšem není nutné, jelikož výstup ze soustavy $y(t)$ je měřitelný a nemusíme ho tedy rekonstruovat výstupem z rekonstruktoru $y_m(t)$.

2.3 NÁVRH REKONSTRUKTORU S OHLEDEM NA NENULOVÉ POČÁTEČNÍ PODMÍNKY

Reálné soustavy s určitým počtem integrátorů mohou v některých případech uchovávat určité množství energie. Zásobená energie může mít mnoho podob např. Potencionální energie kapalin v soustavě spojitých nádob, elektrická energie nahromaděná v kondenzátorech ve formě elektrického náboje, či tlaková energie nahromaděná v kompresorech. Tato zásobená energie představuje nenulové počáteční podmínky, které mohou mít vliv na regulaci celého obvodu nebo v našem případě vliv na odchylky mezi stavovými proměnnými. Proto je třeba zjistit jejich vliv a případně přizpůsobit návrh rekonstruktoru.

Jelikož nejsme schopni měřit stavové proměnné, nemůžeme zjistit ani velikost počátečních podmínek. Můžeme pouze odhadnout jejich rozsah hodnot, máme-li k dispozici fyzikální parametry integrátorů, např: reálný kondenzátor pojme pouze určité množství elektrického náboje. Nenulové počáteční podmínky tedy zahrneme do modelu soustavy. Budeme předpokládat působení nenulových počátečních podmínek ve čtyřech různých možnostech, vždy pouze u jednoho z integrátorů viz obrázek č.26.



Obrázek č. 26: Stavový diagram soustavy s nenulovými počátečními podmínkami.

Přirozenou odezvu soustavy vyjádřenou přenosem $Y(p)$ na nenulové počáteční podmínky určíme z diferenciální rovnice soustavy.

$$y^4(t) + 4.1y'''(t) + 5.4y''(t) + 2.5y'(t) + 0.2y(t) = 0 \tag{47}$$

Laplaceův obraz výstupu vypočítáme dle rovnice č.48

$$L\left\{\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right\} = p^n Y(p) - [p^{n-1}y(0) + p^{n-2}y'(0) + \cdots y^{n-1}(0)] \tag{48}$$

$\Downarrow$

$$\begin{gathered} p^4Y(p) - [p^3y(0) + p^2y'(0) + py''(0) + y'''(0)] + \\ 4.1p^3Y(p) - 4.1[p^2y(0) + py'(0) + y''(0)] + \\ 5.4p^2Y(p) - 5.4[py(0) + y'(0)] + \\ 2.5pY(p) - 2.5y(0) + \\ 0.2Y(p) = 0 \end{gathered} \tag{49}$$

$\Downarrow$

$$Y(p) = \frac{\begin{gathered}[p^3y(0) + p^2y'(0) + py''(0) + y'''(0)] + \\ 4.1[p^2y(0) + py'(0) + y''(0)] + \\ 5.4[py(0) + y'(0)] + 2.5y(0)\end{gathered}}{p^4 + 4.1p^3 + 5.4p^2 + 2.5p + 0.2} \tag{50}$$

výraz $Y(p)$ vyjádříme v závislosti na $x_1(0), x_2(0),\ x_3(0), x_4(0)$.

$$Y(p) = \frac{\begin{array}{c}[p^3 x_1(0) + p^2 x_2(0) + p x_3(0) + x_4(0)] + \\ 4.1[p^2 x_1(0) + p x_2(0) + x_3(0)] + \\ 5.4[p x_1(0) + x_2(0)] + 2.5 x_1(0)\end{array}}{p^4 + 4.1p^3 + 5.4p^2 + 2.5p + 0.2} \qquad (51)$$

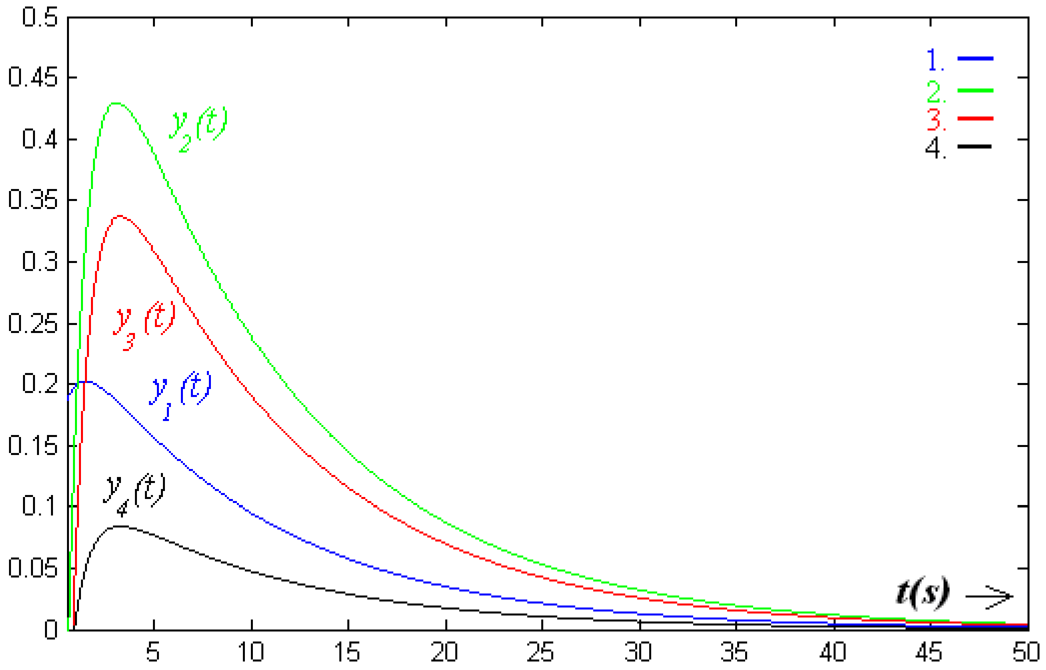
Dosazením konkrétních hodnot 1. $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0,\ x_3(0) = 0,\ x_4(0) = 0$

2. $x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 1, x_3(0) = 0,\ x_4(0) = 0$

3. $x_1(0) = 0,\ \ x_2(0) = 0, x_3(0) = 1, x_4(0) = 0$

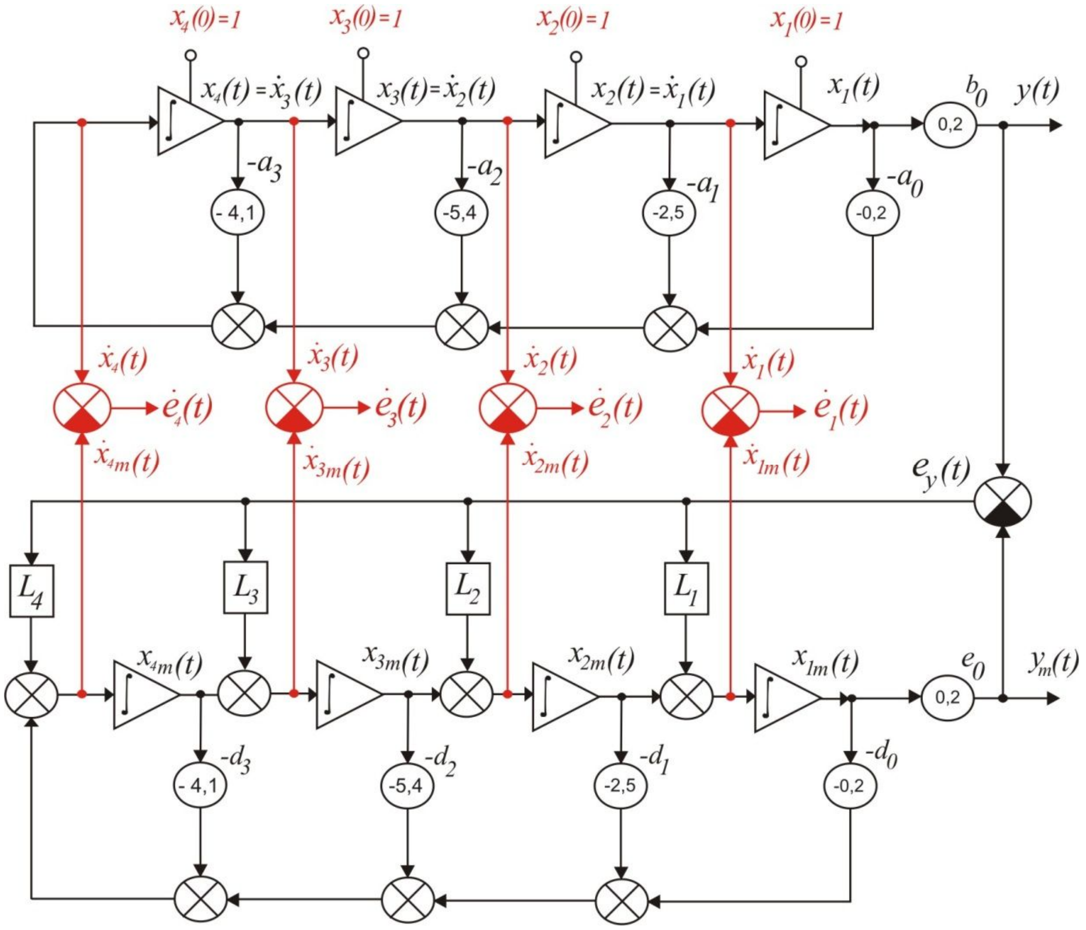
4. $x_1(0) = 0,\ \ x_2(0) = 0, x_3(0) = 0, x_4(0) = 1$

získáme obrazy výstupu $Y_1(p), Y_2(p), Y_3(p), Y_4(p)$. Jednotlivé průběhy $y_1(t), y_2(t)$, $y_3(t),\ y_4(t)$, vypočítáme zpětnou Laplaceovou transformací z obrazu výstupu $Y(p)$ rozloženého na parciální zlomky. viz soubor. Grafické průběhy $y_{1-4}(t)$ jsou znázorněné na obr. č.27.



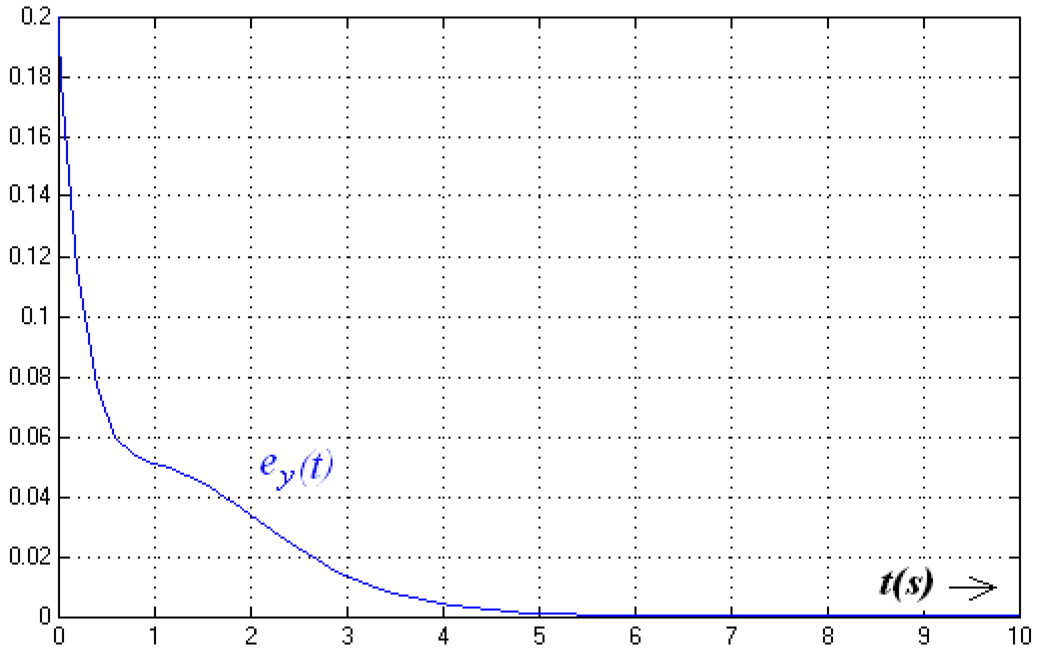
Obrázek č. 27: Průběh výstupních signálů $y_{1-4}(t)$ podle různých počátečních podmínek.

K zjištění důsledků na změnu odchylky výstupu $\boldsymbol{e_y(t)}$ a odchylky stavových proměnných $\boldsymbol{\dot{e}_x(t)}$, připojíme k soustavě rekonstruktor dle obr. č 28. Zapojení je totožné jako v předchozí kapitole, ovšem bez působení poruchy na vstupu $\boldsymbol{v(t)}$. Nyní budeme předpokládat působení nenulových počátečních podmínek u všech integrátorů $\boldsymbol{x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 1}$.

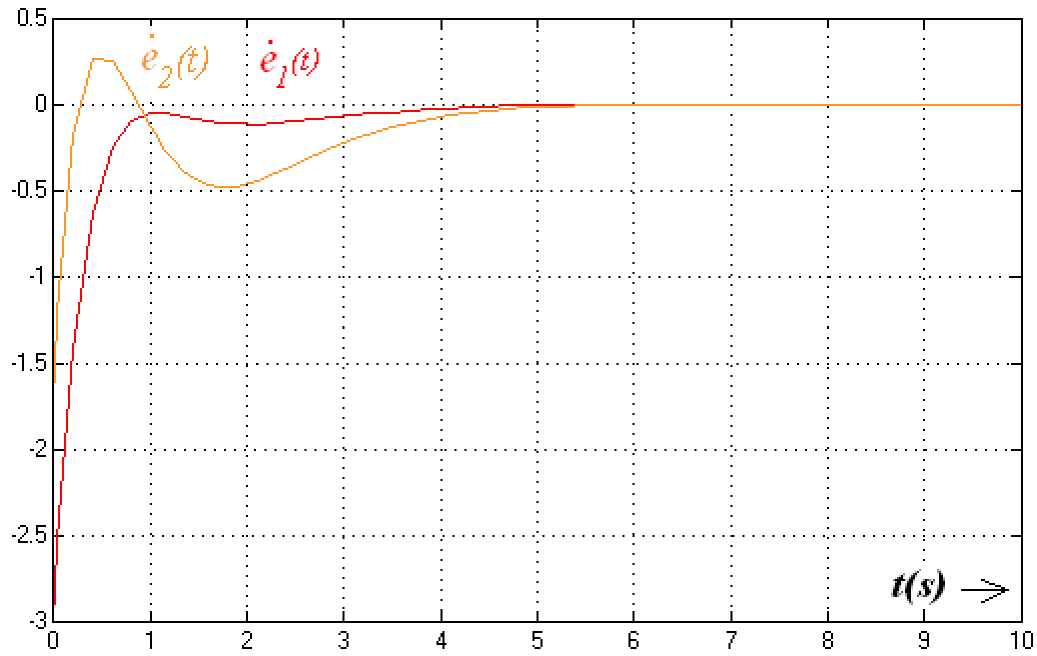


Obrázek č. 28: Blokové schéma s odchylkami stavových proměnných $\dot{e}_1(t)$, $\dot{e}_2(t)$, $\dot{e}_3(t)$, $\dot{e}_4(t)$.

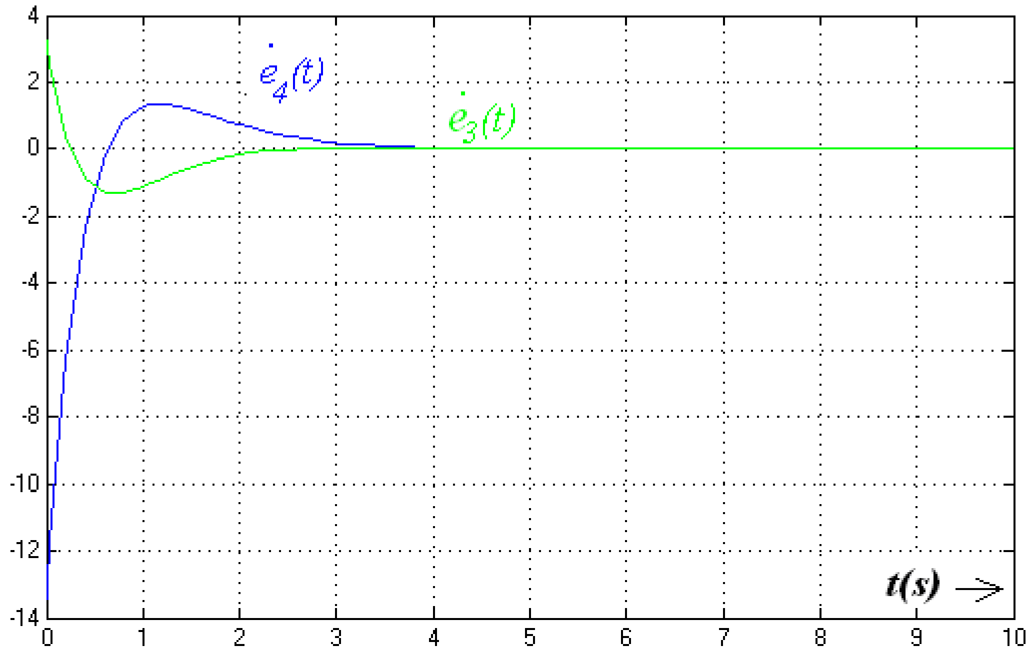
Průběhy odchylek $\boldsymbol{e_y}(t)$ a $\boldsymbol{\dot{e}_x}(t)$ zjistíme pomocí simulace v programu Matlab – Simulink



Obrázek č.29: Průběh odchylky výstupních signálů $\boldsymbol{e_y}(t)$ při působení nenulových počátečních podmínek.



Obrázek č. 30: Průběh odchylek stavových proměnných $\dot{e}_1(t)$, $\dot{e}_2(t)$, při působení nenulových počátečních podmínek.



Obrázek č. 31: Průběh odchylek stavových proměnných $\dot{e}_3(t)$, $\dot{e}_4(t)$, při působení nenulových počátečních podmínek.

Z průběhu grafu $\boldsymbol{e}_y(t)$ vidíme, že v případě působení nenulových počátečních podmínek nevzniká trvalý rozdíl mezi výstupy, jak tomu bylo v případě působení poruchy $v(t) = 1$, kde $\boldsymbol{e}_y(t = \infty) = 0.0125$, proto $\boldsymbol{e}_y(t = \infty) = 0$. Odchylky stavových proměnných daných vektorem $\dot{\boldsymbol{e}}_x(t)$, rychle konvergují k nule, které dosáhnou do cca. 5ti. sekund. Působení nenulových počátečních podmínek proto nemá „trvalý dopad" na návrh rekonstruktoru, ale způsobuje pouze počáteční nenulovou odchylku mezi stavovými proměnnými $\dot{\boldsymbol{e}}_x(t)$**.**

Z toho lze usoudit, že návrh rekonstruktoru je třeba zohlednit zejména na předpokládané působení poruchových signálů $\boldsymbol{v}(t)$. Případným odchylkám $\dot{\boldsymbol{e}}_x(t)$ způsobené nenulovými počátečními podmínkami není třeba přizpůsobovat návrh rekonstruktoru.

3. MOŽNOSTI STAVOVÉ REGULACE S VYUŽITÍM REKONSTRUKTORU NIŽŠÍHO ŘÁDU

V této kapitole se budeme zabývat možnostmi, omezeními a použitelností stavové regulace, využívající stavové proměnné rekonstruktoru nižšího řádu než je řád soustavy. To povede k určitým úskalím vyplívajícím z transformace vícero stavových proměnných soustavy na menší počet rekonstruovaných stavových proměnných, které mohou být odlišné od svých vzorů. Návrh rekonstruktoru se omezí na zajištění shody rekonstruovaných stavových proměnných a stavových proměnných soustavy, bez působení poruch nebo nenulových počátečních podmínek. Více v následující podkapitole.

3.1 NÁVRH REDUKOVANÉHO REKONSTRUKTORU.

Navrhneme rekonstruktor druhého řádu s ohledem na zvolenou soustavu čtvrtého řádu, tak abychom mohli k stavové regulaci využít zrekonstruované stavové proměnné $\dot{x}_{1m}(t) = y'_m(t)$ a $\dot{x}_{2m}(t) = y''_m(t)$. Způsob návrhu bude obdobný jako v kapitole č.2. Nejprve navrhneme model soustavy (tělo rekonstruktoru) a následně optimálně zvolíme hodnoty vektoru L, který je tvořen dvěma prvky L_1, L_2, čímž vytvoříme redukovaný rekonstruktor.

$$L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \tag{52}$$

Přenos soustavy $F_s(p)$.

$$F_s(p) = \frac{1}{(10p+1)(p+1)^2(0.5p+1)} = \frac{0.2}{p^4 + 4.1p^3 + 5.4p^2 + 2.5p + 0.2} \tag{53}$$

$b_0 = 0.2, a_0 = 0.2, a_1 = 2.5, a_2 = 5.4, a_3 = 4.1$

Přenos modelu soustavy $F_m(p)$ očekáváme ve tvaru

$$F_m(p) = \frac{e_0}{p^2 + d_1 p + d_0} \tag{54}$$

V předchozí kapitole jsme navrhli přenos modelu $F_m(p)$, rovnající se přenosu soustavy $F_s(p)$, nyní musíme při návrhu postupovat jiným způsobem. Jelikož budeme následně modifikovat přenos rekonstruktoru pomocí konstant L_1, L_2, s kterými lze měnit charakteristický polynom druhého řádu takřka libovolně, není pro nás výchozí návrh charakteristického polynomu modelu nikterak svazující. Důležité je dodržet podmínku stability modelu a volbu pólů přenosu, tak aby byly reálné, nekmitavé. Volbu charakteristického polynomu provedeme v souladu s těmito podmínkami a také tak, aby matice modelu co nejvíce odpovídaly maticím původní soustavy.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.2 & -2.5 & -5.4 & -4.1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{55}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

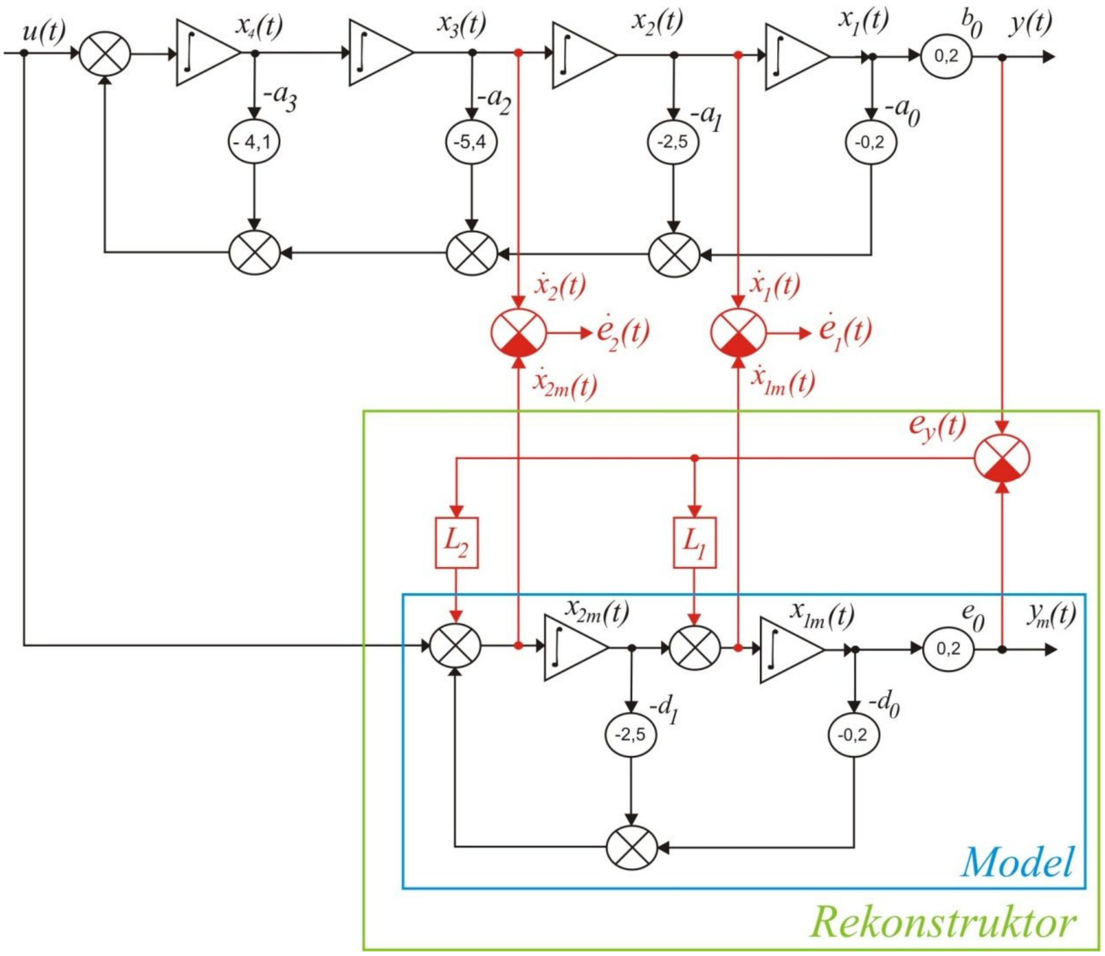
Model bude mít tyto matice

$$\boldsymbol{A_m} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.2 & -2.5 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B_m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{C_m} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \end{pmatrix} \tag{56}$$

Zvolíme $d_0 = a_0 = 0.2$, $d_1 = a_1 = 2.5$, $e_0 = c_0 = 0.2$.

$$F_m(p) = \frac{0.2}{p^2 + 2.5p + 0.2} = \frac{1}{(0.413p + 1)(12.05p + 1)} \tag{57}$$

K tomuto modelu připojíme konstanty L_1, L_2. Vznikne redukovaný rekonstruktor druhého řádu, který připojíme do obvodu společně se soustavou na společný vstup $u(t)$ dle obrázku č. 32.



Obrázek č. 32: Stavové schéma soustavy v zapojení s redukovaným rekonstruktorem.

Podobně jako v druhé kapitole navrhneme konstanty L_1, L_2 tak, aby vlastní čísla rekonstruktoru byla více vlevo než soustava. Tím docílíme toho, že odchylka $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t)$ bude konvergovat rychleji k nule než $\boldsymbol{x}(t)$. Zvolíme vlastní čísla, póly rekonstruktoru $p_{1,2} = -3$, a vypočítáme odpovídající L_1, L_2.

Výpočet charakteristické rovnice rekonstruktoru.

$$det\big(p\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A_m} - \boldsymbol{LC})\big) \quad \boldsymbol{A_m} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -0.2 & -2.5 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{C_m} = (0.2 \quad 0) \tag{58}$$

Kořeny charakteristické rovnice rekonstruktoru jsou libovolné dle L_1, L_2.

$$p^2 + (2.5 + 0.2L_1)p + (0.2 + 0.2L_1 + 0.2L_2) \tag{59}$$

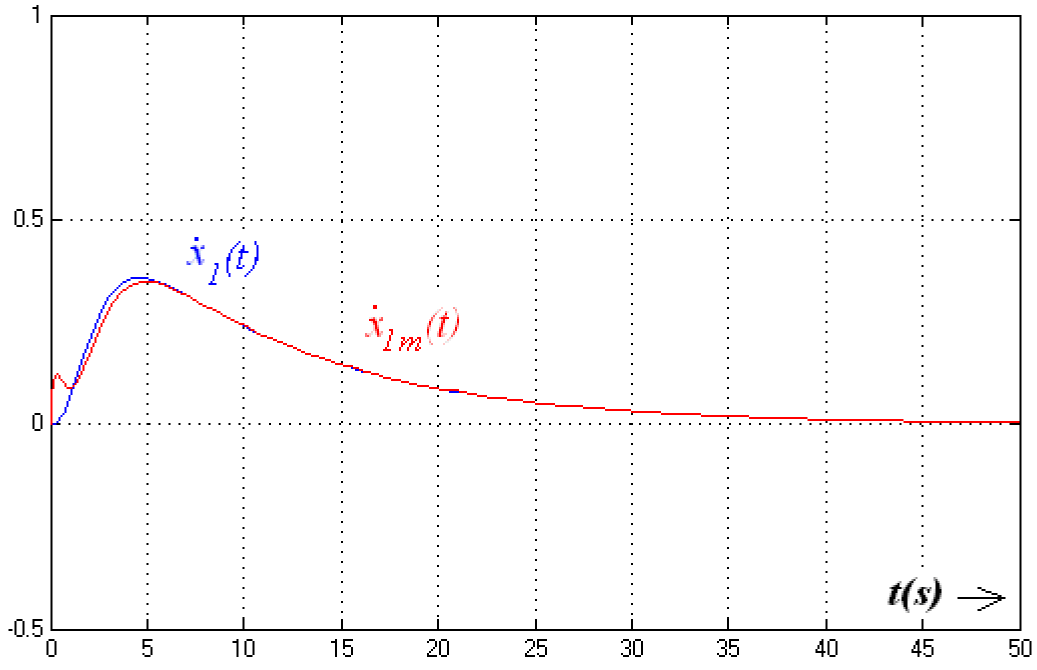
nebo lze z rovnosti požadované charakteristické rovnice určit L_1, L_2.

$$p^2 + (2.5 + 0.2L_1)p + (0.2 + 0.2L_1 + 0.2L_2) = p^2 + 6p + 9 \tag{60}$$

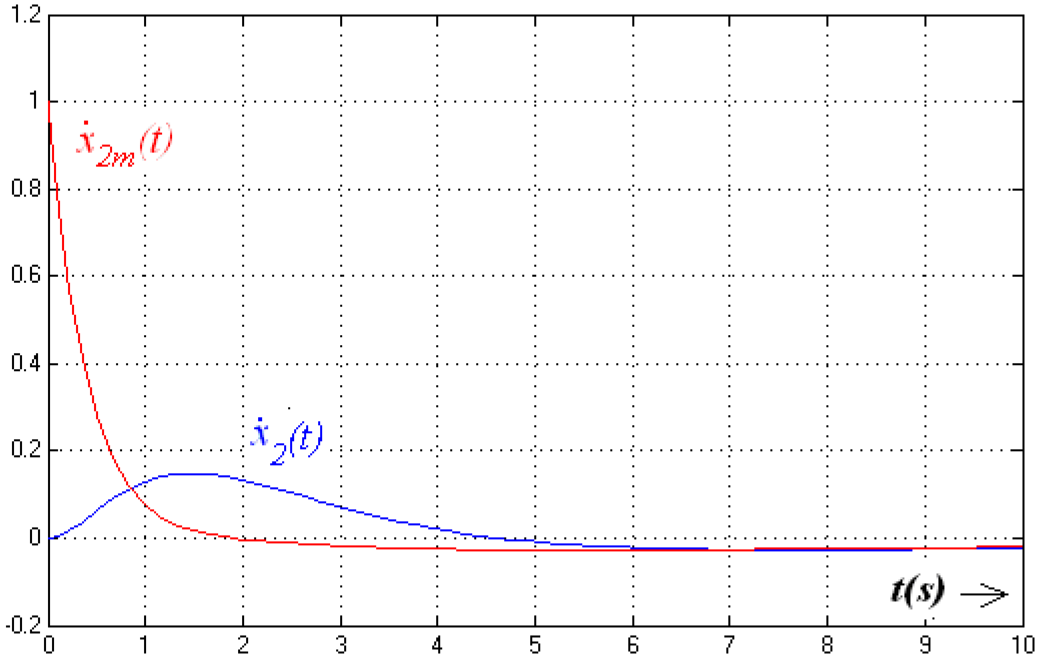
Rovnost nastává, je-li

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \tag{61}$$

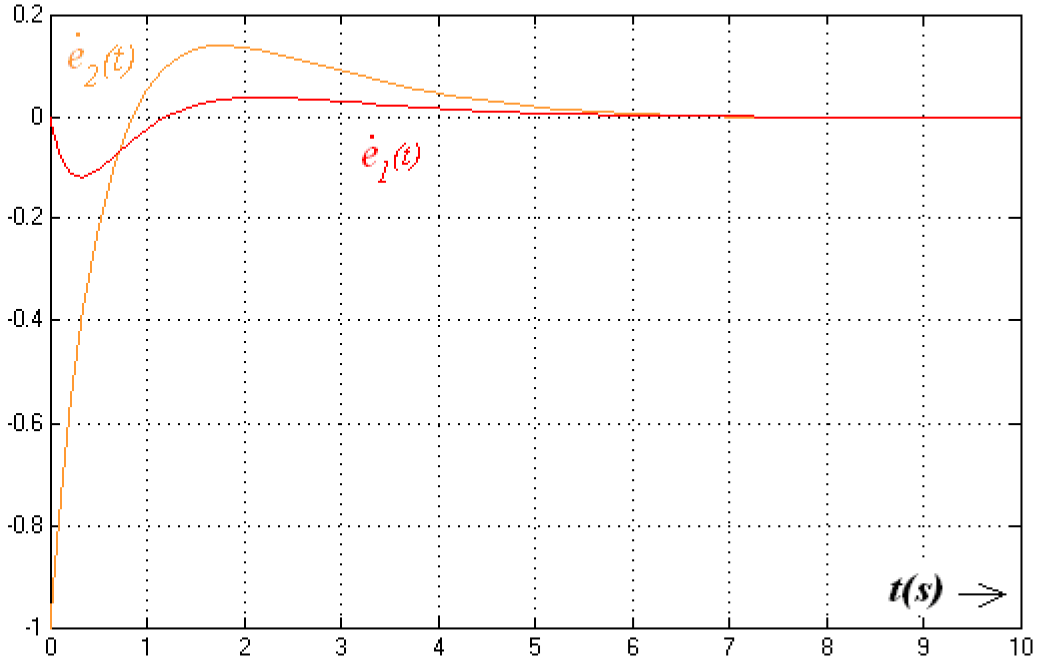
Pomocí blokové algebry zjistíme přenosy $F_{\dot{x}_{1m}}(p)$, $F_{\dot{x}_{2m}}(p)$, $F_{\dot{e}_1}(p)$, $F_{\dot{e}_2}(p)$ a v simulačním programu Matlab – Simulink provedeme simulaci, abychom mohli stanovit míru shody stavových proměnných $\dot{x}_{1m}(t)$, $\dot{x}_{2m}(t)$ Výstupy $y(t)$ a $y_m(t)$ se nemusíme zabývat, protože výstup $y(t)$ je měřitelný, a využitelný stavovým regulátorem. (neslouží nám už jako „měřítko“ vhodnosti rekonstrukce.)



Obrázek č. 33: Grafické srovnání průběhu stavových proměnných $\dot{x}_1(t)$ a $\dot{x}_{1m}(t)$.



Obrázek č. 34: Grafické srovnání průběhu stavových proměnných $\dot{x}_2(t)$ a $\dot{x}_{2m}(t)$.



Obrázek č. 35: Grafický záznam průběhu odchylek stavových proměnných $\dot{e}_1(t)$, $\dot{e}_2(t)$.

$$F_{\dot{e}_1}(p) = \frac{p^3(p+2)(p+0.1)(p+1)^2\big(p+(2.05 \pm 0.44i)\big)}{(p+3)^2(p+2)^2(p+1)^4(p+0.1)^2} \tag{62}$$

$$F_{\dot{e}_2}(p) = \frac{p(p+3.5)(p+2.03)\big(p+(0.99 \pm 0.15i)\big)(p+0.1)}{(p+3)^2(p+2)^2(p+1)^4(p+0.1)^2} \tag{63}$$

Máme-li shrnout míru úspěšnosti takto nastaveného rekonstruktoru, musím nejprve porovnat jednotlivé stavové proměnné.

Shoda $\dot{x}_{1m}(t)$ a $\dot{x}_1(t)$ je značná. Průběhy z obr. č.33 se téměř překrývají, vyjma malého zákmitu na začátku přechodového děje. Obě stavové proměnné s časem konvergují k nule. Průběh odchylky $\dot{e}_1(t)$ dosahuje maximální amplitudy $\dot{e}_{1max} = 0.12$. Pokud tuto hodnotu vztáhneme k maximální amplitudě $\dot{x}_{1max} = 0.36$ zjistíme, že dosahuje přibližně jedné třetiny $\dot{e}_{1max} = x_{1max}/3$. Velikost $\dot{e}_{1max}$ je způsobená počátečním překmitem, který rychle odezní a odchylka $\dot{e}_1(t)$ nadále konverguje k nule. Odchylka $\dot{e}_1(t)$ je vyjádřená přenosem $F_{\dot{e}_1}(p)$.

Odlišná situace je u průběhů stavových proměnných $\dot{x}_{2m}(t)$ a $\dot{x}_2(t)$. Situace je znázorněna na obr. č. 34. Průběhy jsou zcela odlišného charakteru. Zásadní rozdíl je v čase $t = 0s$, $\dot{x}_2(0) = 0$, kdežto $\dot{x}_{2m}(0) = 1$. Tento rozdíl je způsoben rozdílným řádem soustavy a rekonstruktoru, který není možno potlačit volbou vektoru $\boldsymbol{L}$. Průběhy s časem konvergují k nule. Odchylka $\dot{e}_2(t)$ je vyjádřena přenosem $F_{\dot{e}_1}(p)$.

V této podkapitole jsme navrhli rekonstruktor tak, abychom mohli využít zrekonstruované stavové proměnné k stavové regulaci. Velká shoda byla dosažena u stavové proměnné $\dot{x}_{1m}(t)$, menší shoda, vyplývající z odlišného řádu rekonstruktoru u stavové proměnné $\dot{x}_{2m}(t)$. I přesto jí v následující podkapitole použijeme k stavové regulaci celého obvodu.

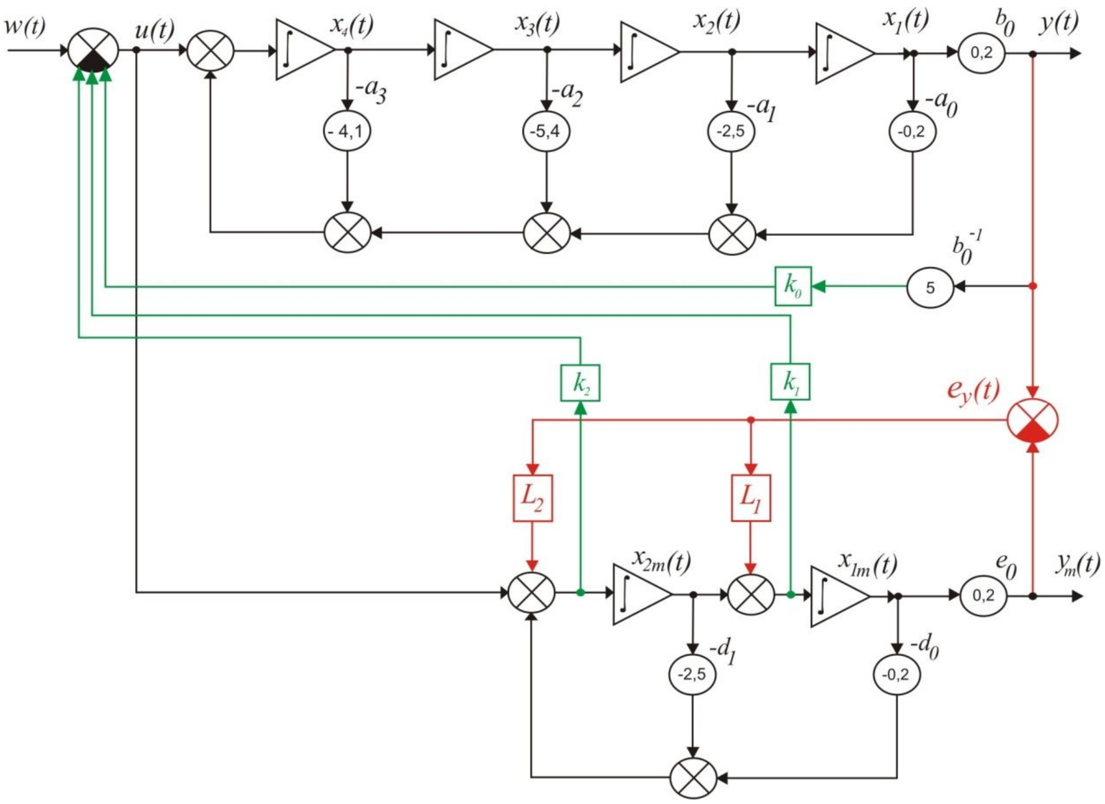
3.2 NÁVRH OMEZENÉHO STAVOVÉHO REGULÁTORU

V této kapitole přistoupíme k stavové regulaci soustavy s využitím zrekonstruovaných stavových proměnných $\dot{x}_{1m}(t)$, $\dot{x}_{2m}(t)$ a výstupu ze soustavy $y(t)$. Pokusíme se stanovit, do jaké míry nám ovlivní možnosti regulace nestejnost stavových proměnných.

Stavový regulátor tvoří vektor $\boldsymbol{K}$, obsahující složky k_0, k_1, k_2, k_3. Jelikož nerekonstruujeme stavovou proměnnou $\dot{x}_{3m}(t) \Longrightarrow k_3 = 0$.

$$\boldsymbol{K} = (k_0 \quad k_1 \quad k_2 \quad 0) \tag{64}$$

Stavový regulátor je připojen na vstup do obvodu, dle obrázku č.36.



Obrázek č. 36: Stavové schéma soustavy v zapojení s redukovaným rekonstruktorem a omezeným stavovým regulátorem.

Stavový regulátor na obrázku je doplněn o blok b_0^{-1}, protože stavový regulátor je přiveden na vektor stavových proměnných a nikoliv na výstup $y(t)$.

3.3 MOŽNOSTI OMEZENÉ STAVOVÉ REGULACE

Dynamické vlastnosti soustavy lze ovlivnit prostřednictvím omezené stavové regulace v souladu s možnostmi změny charakteristického polynomu soustavy + stavový regulátor. Abychom si ukázali možnosti omezené stavové regulace, budeme pro jednoduchost předpokládat $\dot{x}_{1m}(t) = \dot{x}_1(t)$, $\dot{x}_{2m}(t) = \dot{x}_2(t)$. $y(t) = y_m(t)$. V následující kapitole potom využijeme „skutečné“ zrekonstruované stavové proměnné $\dot{x}_{1m}(t)$ a $\dot{x}_{2m}(t)$ viz kapitola 3.1, abychom zjistili, jak nám zrekonstruované stavové proměnné ovlivní stavovou regulaci.

Stavové rovnice

Stavové rovnice soustavy + stavový regulátor

$$\dot{x}(t) = [\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK}]x(t) + \boldsymbol{B}w(t) \quad (65)$$

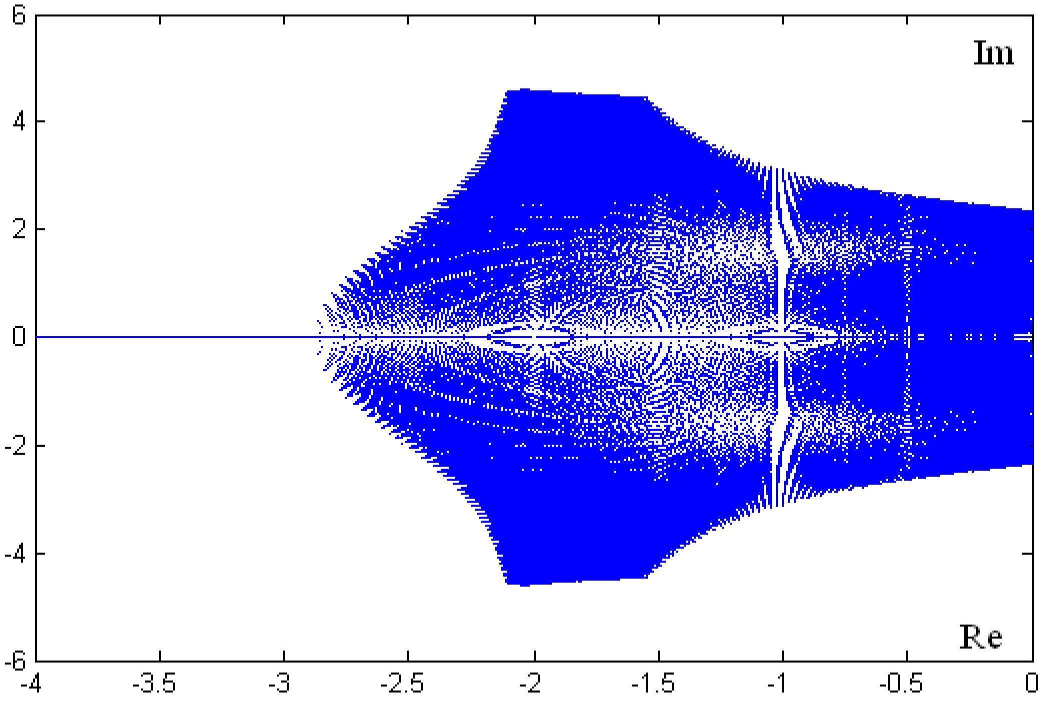
$$y(t) = \boldsymbol{C}x(t) \quad (66)$$

Dynamické vlastnosti jsou dány maticí $[\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK}]$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.2 & -2.5 & -5.4 & -4.1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad K = (k_0 \quad k_1 \quad k_2 \quad 0) \quad (67)$$

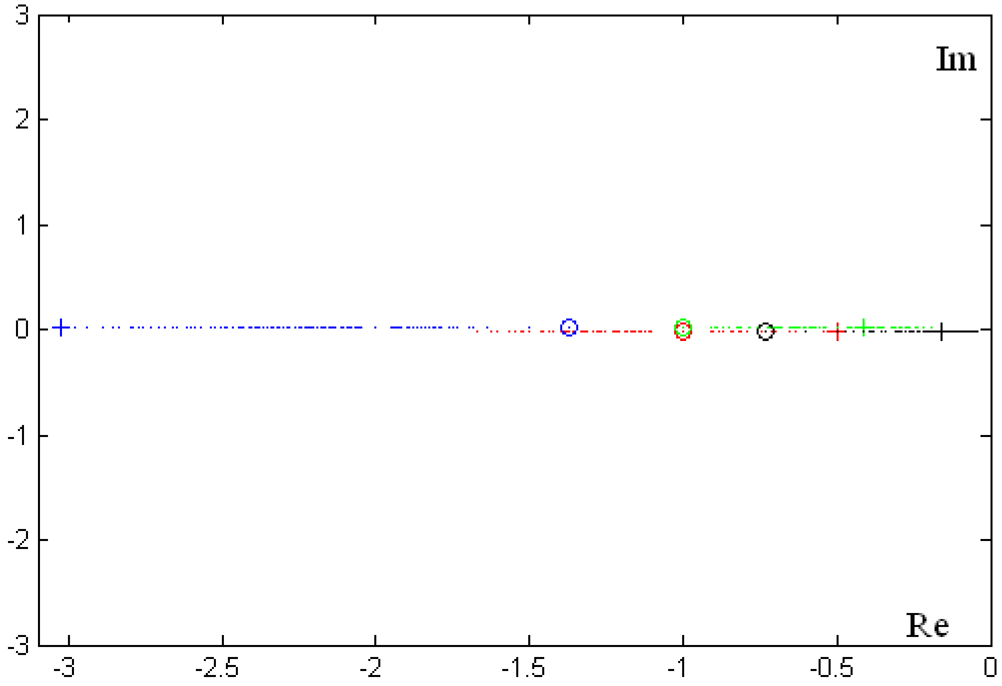
$$det\big(p\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})\big) = p^4 + 4.1p^3 + (5.4 + k_2)p^2 + (2.5 + k_1)p + 0.2 + k_0 \quad (68)$$

Možné rozložení pólů charakteristické rovnice pro $k_2 \in (-5.4\,;20\rangle$, $k_1 \in (-2.5\,;20\rangle$, $k_0 \in (-0.2\,;20\rangle$ je znázorněno na obrázku č.37, který je vytvořen algoritmem v programovém prostředí Matlab. Zdrojový kód obsahuje rozlozeni_polu.m přiložený k diplomové práci.



Obrázek č. 37: Rozložení pólů charakteristického polynomu v závislosti na změně konstant stavového regulátoru.

Z rozložení pólu charakteristického polynomu je zřejmé, že změna koeficientů a_0, a_1 a a_2 (nelze pozměnit koeficient a_3) způsobuje přesun pólů zejména do imaginární části. Nelze příliš ovlivnit posun pólů po reálné ose do konkrétních bodů. Každý z pólů se vlivem této změny přesune nejvýše o ±1 na reálné ose. Situaci znázorňuje obrázek č.38, na kterém je vykreslena čtveřice reálných pólů charakteristických polynomů s různými koeficienty a_0, a_1 a a_2. Charakteristické polynomy s minimálně jedním komplexně sdruženým pólem nejsou vykresleny. Situace je znázorněna na obrázku č. 38



Obrázek č. 38: Rozložení pólů charakteristického polynomu s reálnými kořeny v závislosti na volbě konstant stavového regulátoru v FCHvKR.

$k_2, k_1, k_0 = var.$	**Kořeny, póly charakteristického polynomu**			
	+	+	+	+
$p^4 + 4.1p^3 + 3.6p^2 + 1.1p + 0.1$	-3.02	-0.5	-0.413	-0.16
	O	O	O	O
$p^4 + 4.1p^3 + 6.2p^2 + 4.1p + 1$	-1.37	-1	-1	-0.73

Tabulka č. 1: Výčet pólů konkrétních polynomů.

Tabulka č. 1 udává charakteristický polynom s nejmenšími a největšími koeficienty a_0, a_1, a_2, a_3, jejichž kořeny jsou pouze reálné pro zvolené intervaly k_2, k_1, k_0. Mezi těmito polynomy je mnoho jiných s různým rozložením pólů dle obrázku č.38, který byl vytvořen programovou rutinou matematického programu Matlab. Zdrojový kód obsahuje rozlozeni_realnych_polu.m přiložený k diplomové práci. Chceme-li dosáhnout lepších dynamických vlastností, zvolíme takový charakteristický polynom, který bude mít dominantní póly více vlevo než má soustava s nejdominantnějšími póly $p_1 = -0.1$, $p_2, p_3 = -1$. Navíc chceme, aby $y(t \to \infty) =$

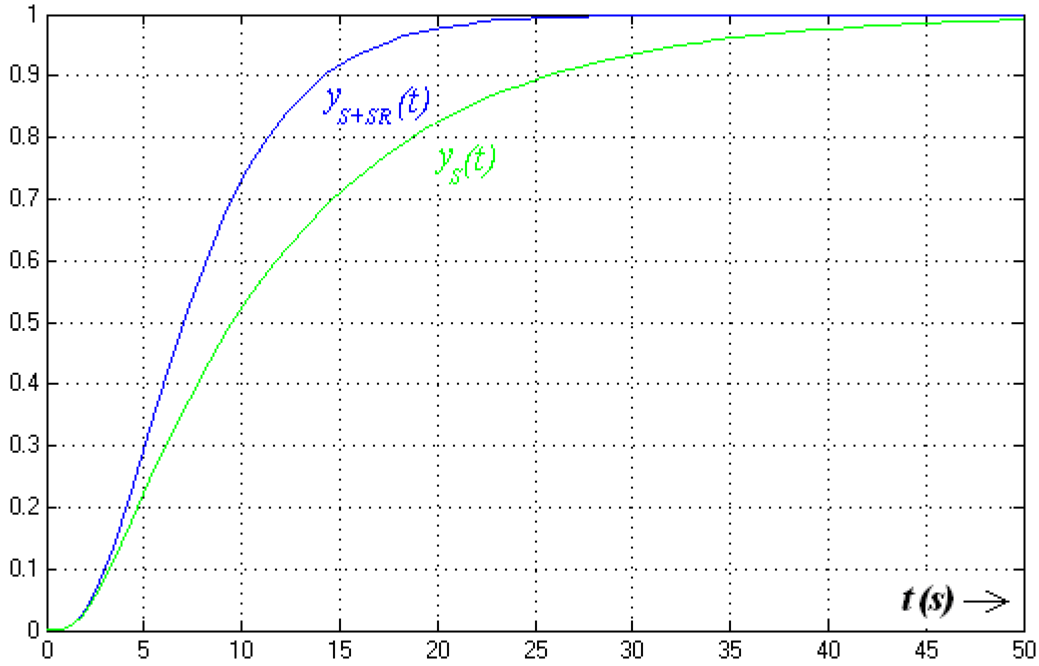
1. $\Longrightarrow$ je-li $b_0 = 0.2$, $a_0 = 0.2$. Výběr odpovídajícího polynomu lze provést programově s použitím jednoduché podmínky typu if-else s parametrem polohy dominantního pólu. Jako nejvhodnější se zdá být charakteristický polynom $p^4 + 4.1p^3 + 4.2p^2 + 1.6p + 0.2$ s póly $p_1 = -2.79$, $p_2 = -0.55$, $p_3 = -0.5$, $p_4 = -0.26$. Vektor $\boldsymbol{K}$ je v takovémto případě roven.

$$\boldsymbol{K} = (0 \quad -0.9 \quad -1.2 \quad 0) \tag{69}$$

Porovnáme dynamické vlastnosti soustavy s přenosem $F_s(p)$ dle rovnice č. 6 a vlastnosti celku soustava + stavový regulátor (S+SR) s přenosem $F_{S+SR}(p)$ dle rovnice č. 70.

$$F_{S+SR}(p) = \frac{1}{(0.36p+1)(1.83p+1)(2p+1)(3.85p+1)} \tag{70}$$

$$F_{S+SR}(p) = \frac{0.2}{p^4 + 4.1p^3 + 4.2p^2 + 1.6p + 0.2} \tag{71}$$



Obrázek č. 39: Grafické porovnání výstupů soustavy $y_s(t)$ bez a s optimálně navrženým stavovým regulátorem $y_{s+SR}(t)$.

Z obrázku č. 39 vidíme, že přesun dominantních pólů více vlevo od počátku FCHvKR, přinesl rychlejší odezvu na přechodový děj, přičemž byl zachován nekmitavý charakter výstupního signálu.

3.4 STAVOVÁ REGULACE S VYUŽITÍM REKONSTRUKTORU NIŽŠÍHO ŘÁDU.

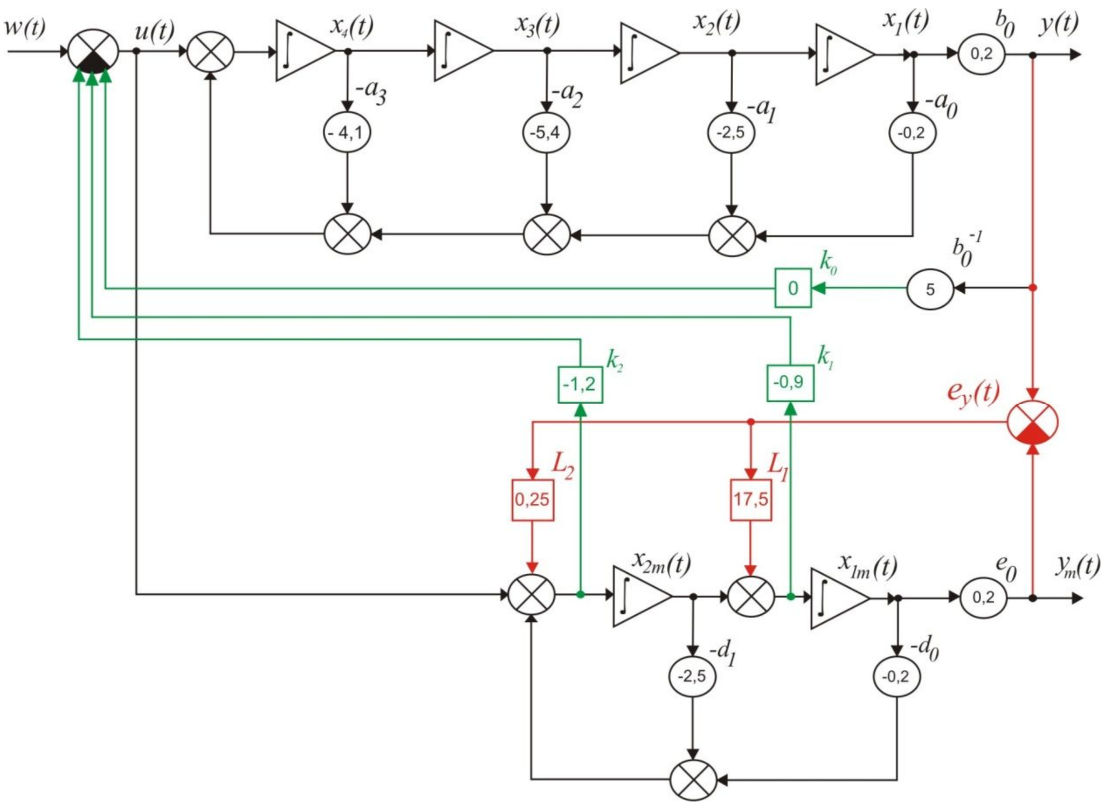
V předchozí kapitole byl optimálně (v souladu s možnostmi omezené stavové regulace) navržen regulátor bez použití rekonstruktoru. Nyní ho připojíme k rekonstruktoru a využijeme zrekonstruované stavové proměnné $\dot{x}_{1m}(t)$ a $\dot{x}_{2m}(t)$, které se liší od stavových proměnných odchylkou $\dot{e}_1(t)$ a $\dot{e}_2(t)$. Porovnáním výsledků z této a předchozí kapitoly, bychom měli být schopni stanovit použitelnost zrekonstruovaných stavových proměnných, výhody a nevýhody omezené stavové regulace s využitím rekonstruktoru.

Vektor ***K*** a vektor ***L***, byly v předchozích kapitolách navrženy takto:

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} 0 & -0.9 & -1.2 & 0 \end{pmatrix} \tag{72}$$

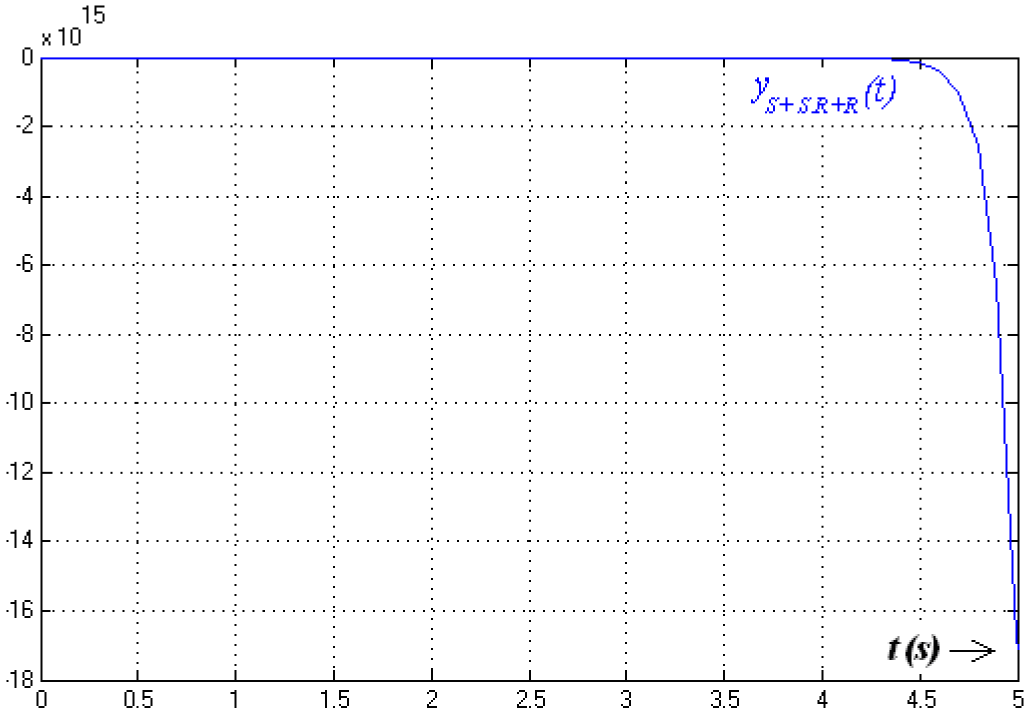
$$L = \begin{pmatrix} 17.5 \\ 0.25 \end{pmatrix} \tag{73}$$

Blokové schéma zapojení je znázorněno na následujícím obrázku



Obrázek č. 40: Stavové schéma soustavy v zapojení s redukovaným rekonstruktorem a stavovým regulátorem s konkrétními hodnotami k_0, k_1, k_2.

Pokud provedeme simulaci obvodu dle zapojení z obrázku č. 40 v simulačním programu Matlab – Simulink zjistíme, že výstup $y_{S+SR+R}(t)$ je nestabilní, což dokazuje obr. č. 41.



Obrázek č. 41: Průběh nestabilního výstupu $y_{S+SR+R}(t)$.

Nestabilita, kterou soustava s připojeným stavovým regulátorem a omezeným rekonstruktorem vykazuje, je způsobena nestabilní stavovou proměnnou $\dot{x}_{2m}(t)$. Tato nestabilita je způsobena nesprávným nastavením stavového regulátoru. Z jmenovatele přenosu $F_{\dot{X}_{2m}}(p) = \dot{X}_{2m}(p)/W(p)$ je zřejmé, že $\dot{x}_{2m}(t)$ bude nestabilní je-li $k_2 < -1$. Přenos $F_{\dot{X}_{2m}}(p)$ je vypočítán pro stavový regulátor $K = (0 \quad 0 \quad k_2 \quad 0)$, z důvodu zjednodušení výpočtu.

$$F_{\dot{X}_{2m}}(p) = \frac{\dot{X}_{2m}(p)}{W(p)} = \frac{p^6 + 7.6p^5 + 19.75p^4 + 21.4p^3 + 9p^2 + 0.7p}{\begin{pmatrix} (1 + k_2)p^6 + (10.1 + 4.1k_2)p^5 + \\ (39 + 5.4k_2)p^4 + (71.8 + 2.5k_2)p^3 + \\ (63.8 + 0.25k_2)p^2 + 23.7p + 1.8 \end{pmatrix}} \quad (74)$$

Z tohoto důvodu je třeba volit konstantu stavového regulátoru $k_2 > -1$, nejlépe $k_2 > 0$. Na konstantu k_1 se tato podmínka nevztahuje, což může být způsobeno tím průběh $\dot{x}_{1m}(t)$ má podobný charakter jako $\dot{x}_1(t)$ viz obrázek č.33 oproti charakteru

průběhu $\dot{x}_{2m}(t)$ a $\dot{x}_2(t)$ viz obrázek č.34 a je proto možné zvolit hodnotu $k_1 > -a_1$ za předpokladu minimálního vlivu $\dot{e}_1(t)$. Důležité je zmínit skutečnost, že při zkusmém návrhu omezeného stavového regulátoru s **identickým** rekonstruktorem použitým v kapitole 2, za předpokladu $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t) \neq 0$, tento problém nevznikl.

Přistoupíme tedy k novému návrhu omezeného stavového regulátoru, tak aby $k_2 > 0$, $k_1 > 0$. Opět budeme upravovat charakteristický polynom

$$p^4 + 4.1p^3 + (5.4 + k_2)p^2 + (2.5 + k_1)p + 0.2 + k_0 \qquad (75)$$

Konstanty stavového regulátoru volíme z intervalu $k_2 \in (0\,;15\rangle$, $k_1 \in (0\,;15\rangle$ $k_0 \in (-0.2\,;15\rangle$. Požadujeme rychlejší odezvu na přechodný děj a amplitudu výstupního signálu $y(t)$ shodnou s amplitudou vstupního signálu $w(t)$, v našem případě tak, aby $y(t \to \infty) = 1 \Longrightarrow$ je-li $b_0 = 0.2$, $a_0 = 0.2$. Změna dvou koeficientů a_2 a a_1 je-li $k_2 \in (0\,;15\rangle$ a $k_1 \in (0\,;15\rangle$ nepřináší žádné zásadní zlepšení dynamických vlastnosti. Dominantní pól $p_1 = 0.1$ nelze posunout dále od počátku komplexní roviny. V těchto intervalech konstant k_1 a k_2 nelze dosáhnout toho, aby všechny póly byly bez imaginární složky, která způsobuje kmitavost odezvy. Proto je potřeba změnit koeficient a_0 pomocí konstanty k_0 i za cenu snížení amplitudy výstupního signálu $y(t)$. Změnou těchto tří koeficientů lze lépe měnit rozložení pólů, ale nelze zajistit, aby všechny póly byly pouze reálné. Postačuje však, aby byly reálné pouze dominantní póly, které nejvíce ovlivňují vlastnosti soustavy. Ostatní póly mohou mít imaginární složku, aniž by to výrazně ovlivnilo kmitavost výstupu $y(t)$. Vhodný polynom lze vybrat z celého výčtu ostatních algoritmem v programu Matlab. S ohledem na velikost výstupního signálu $y(t)$ (co možná největší ustálená hodnota $y(t = \infty)$ a dynamické vlastnosti (dominantní pól nejvíce vlevo) byl vybrán tento polynom $p^4 + 4.1p^3 + 8.5p^2 + 3.5p + 0.4$ s póly $p_1 = -0.22$, $p_2 = -0.27$, $p_{3,4} = -1.807 \pm 1.85i$.

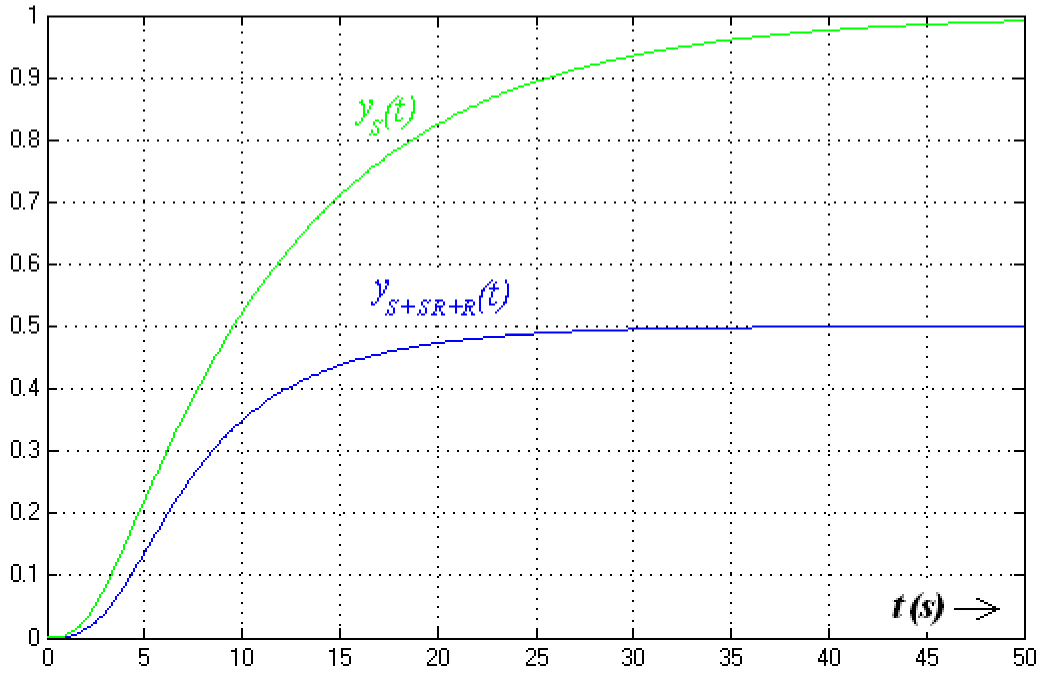
Stavový regulátor je roven

$$\boldsymbol{K} = (0.2 \quad 1 \quad 3.1 \quad 0) \tag{76}$$

Přenos celku Soustava + Stavový Regulátor + Rekonstruktor

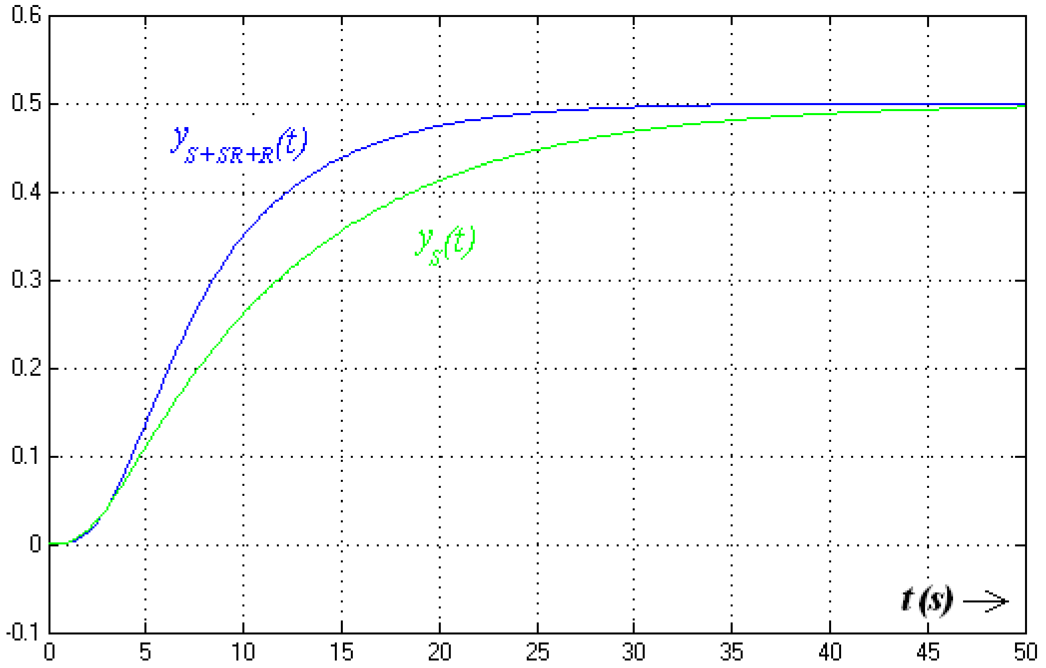
$$F_{S+SR+R}(p) = \frac{0.2}{p^4 + 4.1p^3 + 8.5p^2 + 3.5p + 0.4} \tag{77}$$

Dynamické vlastnosti můžeme lépe porovnat z průběhu $y_s(t)$ a $y_{S+SR+R}(t)$.



Obrázek č. 42: Srovnání průběhů výstupu ze soustavy bez stavové regulace $y_s(t)$ a se stavovou regulací a rekonstruktérem $y_{S+SR+R}(t)$.

Z obrázku č.42 vidíme, že modrý průběh vykazuje rychlejší odezvu na přechodový děj než odezva soustavy $y_s(t)$. Jeho ustálená hodnota je, ale poloviční oproti $y_s(t)$, což může být značná nevýhoda. Do ORO před soustavu s přenosem $F_S(p)$ (bez rekonstruktoru a stavového regulátoru) zkusmo přiřadíme P regulátor se zesílením $K = 0.5$, abychom mohli lépe porovnat průběhy $y_s(t)$ a $y_{S+SR+R}(t)$. viz obrázek. č.43



Obrázek č. 43: Srovnání průběhů výstupu ze soustavy bez stavové regulace s P regulátorem $y_s(t)$ a se stavovou regulací $y_{S+SR+R}(t)$.

Z obrázku je patrné, že odezva na přechodný děj se urychlila, aniž by se zvýšila kmitavost obvodu i v případě, že komplexně sdružený pól $p_{3,4} = -1.807 \pm 1.85i$ obsahuje imaginární složku.

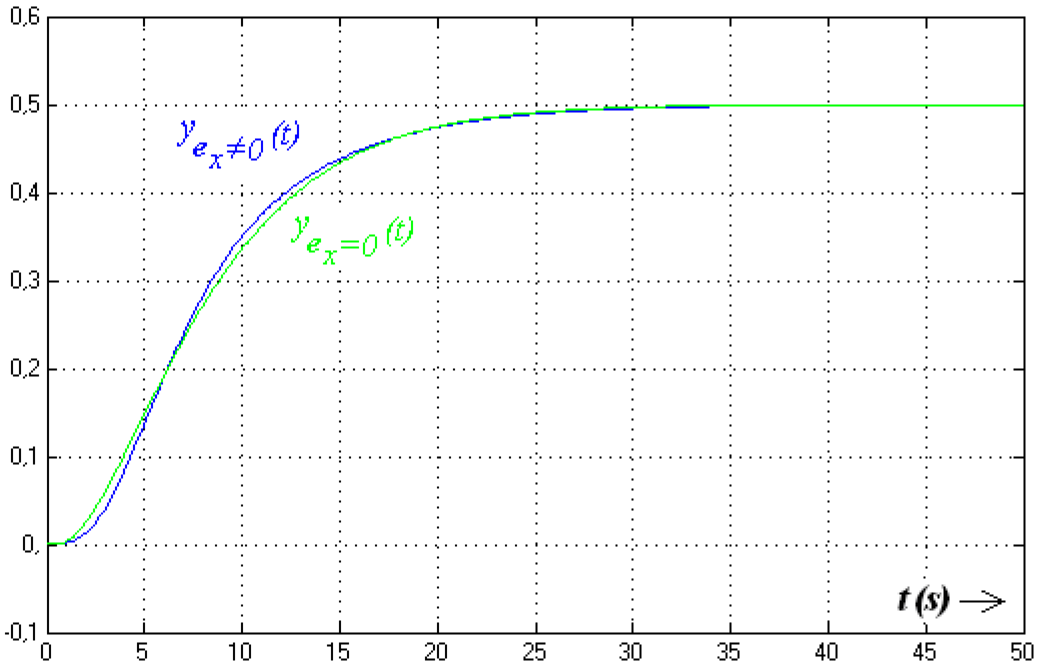
3.5 POUŽITELNOST REDUKOVANÉHO REKONSTRUKTORU PŘI STAVOVÉ REGULACI.

V této kapitole zhodnotíme použitelnosti zrekonstruovaných stavových proměnných $\dot{x}_{1m}(t)$ a $\dot{x}_{2m}(t)$ při návrhu stavového regulátoru.

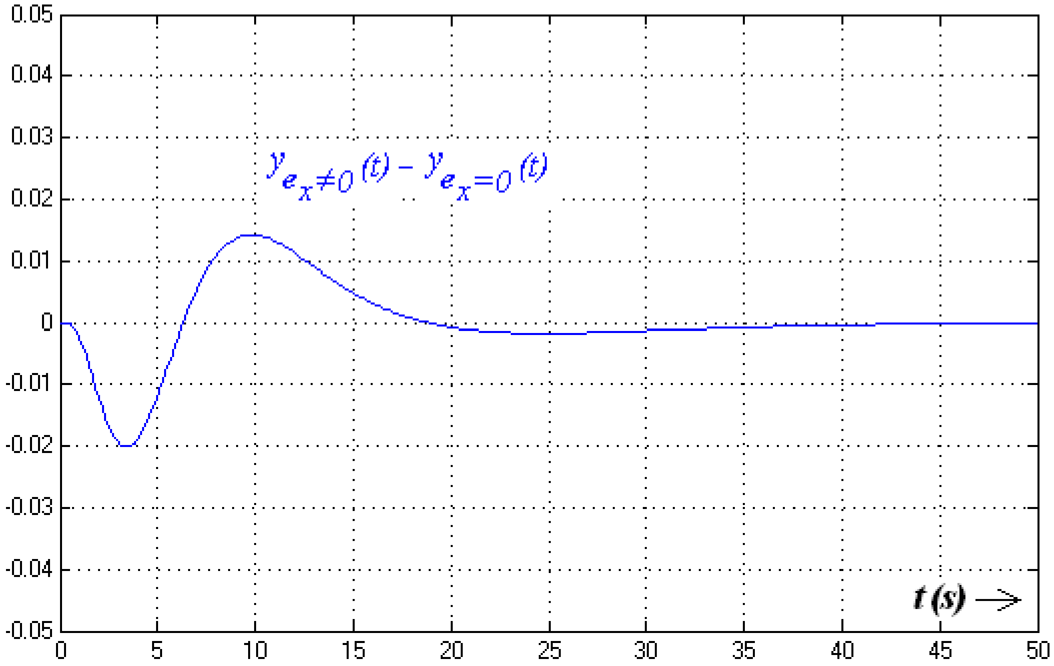
V kapitole 3.3. jsme navrhli stavový regulátor s přihlédnutím na zidealizovanou skutečnost, že $\dot{x}_{1m}(t) = \dot{x}_1(t)$, $\dot{x}_{2m}(t) = \dot{x}_2(t)$, především proto, abychom zjistili možnosti omezené stavové regulace. Stavový regulátor byl navržen jako $\boldsymbol{K} = (0 \quad -0.9 \quad -1.2 \quad 0)$. V následující kapitole 3.4 bylo zjištěno, že nelze dosáhnout rovnosti stavových proměnných soustavy a rekonstruktoru $\Rightarrow$

$\dot{x}_{1m}(t)\dot{x}_1(t)$ a $\dot{x}_{2m}(t) \neq \dot{x}_2(t)$, vyplývající z transformace čtyř stavových proměnných soustavy na pouhé dvě stavové proměnné rekonstruktoru. Abychom zajistili stabilitu obvodu, museli jsme pozměnit návrh omezeného stavového regulátoru na $\boldsymbol{K} = (0.2 \quad 1 \quad 3.1 \quad 0)$. Tato volba si vyžádala omezení ve velikosti ustálené hodnoty na hodnotu $y(t = \infty) = w(t = \infty)/2$ a horší dynamické vlastnosti, než ty, které jsme si mohli „dovolit“ od stavového regulátoru $\boldsymbol{K} = (0 \quad -0.9 \quad -1.2 \quad 0)$. I přesto se podařilo do určité míry zlepšit dynamické vlastnosti soustavy, viz obrázek č. 43.

Vliv odchylek $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t) \neq 0$ na vlastnosti stavové regulace porovnáme z průběhů výstupního signálu s totožným stavovým regulátorem $\boldsymbol{K} = (0.2 \quad 1 \quad 3.1 \quad 0)$, jeli $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t) \neq 0$ a $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t) = 0$. Srovnání vystihuje obrázek č.44, na kterém jsou průběhy takřka totožné. Z toho lze usoudit, že vzniklé odchylky $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t) \neq 0$ způsobené použitím redukovaného rekonstruktoru popsané podrobněji v kapitole 3.1 jsou zanedbatelné, a lze je považovat za adekvátní náhradu využitelnou k stavové regulaci, v případě, že nelze měřit stavové proměnné soustavy.



Obrázek č.44: Porovnání výstupních signálů $y(t)$, je-li $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t) = 0$ (zeleně) a $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t) \neq 0$ (modře).



Obrázek č.45: Grafický průběh rozdílu mezi výstupy při $\dot{e}_x(t) \neq 0$ a $\dot{e}_x(t) = 0$.

4. ZÁVĚR

Diplomová práce je tematicky rozdělena na dvě části. První část zahrnuje kapitoly 1. Úvod a 2. Návrh rekonstruktoru, Druhá část kapitolu 3. Možnosti stavové regulace s využitím rekonstruktoru nižšího řádu.

První část je zaměřena na problematiku návrhu identického rekonstruktoru v případě, že nejsme schopni zjistit stavové proměnné soustavy a chceme ovlivnit dynamické vlastnosti soustavy s využitím stavového regulátoru. Snahou je zajistit shodu stavových proměnných rekonstruktoru a soustavy v případě, že na vstupu do soustavy působí poruchový signál nebo působí-li nenulové počáteční podmínky u jednotlivých integrátorů soustavy. Návrh rekonstruktoru vychází z obecného postupu uvedeného v [2] a [3] aplikovaného na konkrétní soustavu s přenosem $F_S(p)$. V případě optimálního návrhu rekonstruktoru s ohledem na působení poruchy na vstupu do soustavy bylo zjištěno a ověřeno s pomocí simulací v programu Matlab – Simulink, že optimální návrh rekonstruktoru musí splnit především tyto podmínky.

1. Rekonstruktor by měl mít lepší dynamické vlastnosti než soustava, tzn. póly rekonstruktoru více vlevo od počátku FCHvKR než póly soustavy z důvodu rychlejší konvergence odchylky $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t)$ k nule než stavových proměnných soustav $\boldsymbol{x}(t)$.
2. Požadavek na rekonstruktér je, aby průběh $y_m(t)$ byl nekmitavý. Tuto podmínku splníme, zvolíme-li póly rekonstruktoru reálné záporné.

Tyto dvě podmínky plně dostačují i v případě, že na soustavu působí nenulové počáteční podmínky. Jejich vliv na odchylku $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t)$ je pouze v počátcích přechodového děje a nezpůsobuje trvalé rozdíly mezi stavovými proměnnými $\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}(t)$. Z tohoto důvodu je výhodnější optimalizovat návrh rekonstruktoru s ohledem na možné působení poruch, které budou mít rozhodující vliv na rozdíly mezi stavovými proměnnými soustavy a rekonstruktoru a je třeba s nimi vždy při návrhu rekonstruktoru počítat. V našem případě je použití stavových proměnných rekonstruktoru vhodné ke stavové regulaci, coby náhrada za nezjistitelné stavové proměnné soustavy. Otázkou zůstává: Do jaké míry by byl rekonstruktor použitelný při uvažování jiných poruchových vlivů na soustavu?

V druhé části diplomové práce je rozebrána problematika návrhu rekonstruktoru nižšího řádu, jehož zrekonstruované stavové proměnné jsou využity k stavové regulaci obvodu. Rekonstruktor je navržen obdobným způsobem jako v první části práce, ale při návrhu se předpokládají výrazné odlišnosti zrekonstruovaných stavových proměnných z důvodu transformace více stavových proměnných soustavy na dvě zrekonstruované stavové proměnné rekonstruktoru. Bylo zjištěno, že tato transformace sebou přináší omezení při volbě stavového regulátoru, a tudíž omezené možnosti změny vlastností regulačního obvodu. Dále bylo zjištěno, že rozdíly mezi transformovanými stavovými proměnnými rekonstruktoru a soustavy nezpůsobují výraznější odlišnosti výstupního signálu ze soustavy (znázorněno na obrázku č.44, 45) a lze je využití za předpokladu omezených možností návrhu stavového regulátoru.

5. POUŽITÁ LITERATURA

[1] BLAHA, P – VAVŘIN, P. : *Řízení a regulace I.* Brno, 2005. Skriptum VUT, 136 str.

[2] ŠTECHA, J. : *Teorie dynamických systémů*. Praha, 2003. Skriptum ČVUT, 228 str.

[3] BLAHA, P.:*Stavový regulátor – stavová zpětná vazba, rekonstruktor stavu.* Brno 2005. Prezentace k přednáškám předmětu Teorie dynamických systémů VUT Brno. <ftp://des.feec.vutbr.cz>.

[4] BLAHA, P.:*Vnitřní popis dynamických systémů* Brno 2005. Prezentace k přednáškám předmětu Teorie dynamických systémů VUT Brno. <ftp://des.feec.vutbr.cz>.