

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

NAMÁHÁNÍ NOSNÍKU JEŘÁBOVÉ DRÁHY

LOADING OF THE CRANE-RUNWAY GIRDER

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

DUŠAN VRBKA

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

DOC. ING. MIROSLAV SUCHÁNEK, CSC.

BRNO 2009

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2008/2009

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Dušan Vrbka

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Namáhání nosníku jeřábové dráhy

v anglickém jazyce:

Loading of the crane-runway girder

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Rešeršní a výpočtová studie vyšetřování namáhání nosníku při pojezdu zatížení s využitím metod prosté pružnosti, řešení vzorových úloh

Cíle bakalářské práce:

Získání praktických zkušeností, vyvození a zobecnění závěrů plynoucích z řešení vzorových úloh

Seznam odborné literatury:

1. Janíček P., Ondráček E., Vrbka J., Burša J.: Mechanika těles - Pružnost a pevnost I, VUT Brno, FSI, 2004
2. Gere J.M., Timoshenko S.P.: Mechanics of Materials, Chapman & Hall, 1991
3. Höschl C.: Pružnost a pevnost ve strojírenství, SNTL Praha, 1971

Vedoucí bakalářské práce: doc. Ing. Miroslav Suchánek, CSc.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2008/2009.

V Brně, dne 21.10.2008

L.S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
Ředitel ústavu

doc. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zabývá analýzou výsledných vnitřních účinků v nosníku jeřábové dráhy v závislosti na poloze pohybujícího se zatížení a počtu podpor. V úvodu jsou představena možná zatížení nosníku jeřábové dráhy z nichž dominantním zatížením jsou síly od kol pojezdu jeřábového mostu. Nejdříve jsme si pro několik poloh zatěžujících sil (v prvním poli, v prvním a ve druhém poli a ve druhém poli) určili možná nebezpečná místa. V těchto místech, v nichž se nacházejí lokální extrémy (v podporách a v místech zatěžujících sil jež jsou závislé na parametru p) budeme vyšetřovat průběh extrémních VVÚ v závislosti na poloze zatěžujících sil parametru p . V našem případě uvažujeme pouze maximální ohybové momenty. Pro samotné řešení jsme použili výpočetní software MAPLE. Jeho velkou výhodou je schopnost analytického řešení matematických problémů. Postup řešení a výpočet jsme demonstrovali na případě nosníku uloženého na třech podporách. V závěru práce jsou prezentovány výsledky řešení, ukázány závislosti maximálních ohybových momentů na volbě počtu podpor, rozteče podpor l a vzdálenosti zatěžujících sil d . Z těchto výpočtů byly odvozeny závislosti využitelné pro určení optimálních rozměrů jeřábové dráhy a pojezdu mostu jeřábu s cílem snížit maximální ohybové namáhání nosníku jeřábové dráhy.

Klíčová slova

Jeřáb, jeřábová dráha, jeřábový most, výsledné vnitřní účinky, ohybový moment, průběh maximálních ohybových momentů, nebezpečná místa

Abstract

The main purpose of this bachelor project is to solve Loading of the crane-runway girder. First of all, we located the possible dangerous places where we solved the running of Shear and moment diagrams which depends on distance of loading forces p from the beginning of the crane-runway. For the mathematic solutions, we used specialized software MAPLE. The main advantage of this software is the ability of the analytic analysis. We introduced the method of the solving the crane-runway girder on three supports. The final part shows the main results and highlights the most strained parts with suggestions for decrease loading level of strained parts.

Key words

Crane, crane-runway girder, crane bridge, Shear and moment diagrams, moment of flexion, running of maximum bending moment, dangerous places

Bibliografická citace

VRBKA D., Namáhání nosníku jeřábové dráhy, Brno, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2009, 66 stran, s vedoucím bakalářské práce doc. Ing. Miroslavem Suchánkem CSc.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Namáhání nosníku jeřábové dráhy tvořil samostatně pod vedením doc. Ing. Miroslava Suchánka CSc. a s využitím svých znalostí a zdrojů literatury jež jsou v této práci uvedeny.

.....
Dušan Vrbka

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce panu doc. Ing. Miroslavu Suchánkovi CSc za jeho cenné rady a podmětné připomínky kterými přispěl k dokončení této práce.

Obsah

1	Úvod.....	10
2	Zatížení nosníku jeřábové dráhy dle literatury [3]:	10
2.1	Statické zatížení	10
2.1.1	Statické zatížení-stálé od vlastní hmotnosti.....	10
2.1.2	Statické zatížení-nahodilé od vlastní hmotnosti.....	11
2.1.3	Statické zatížení proměnné - od setrvačných sil	11
2.2	Dynamické zatížení.....	12
2.2.1	Dynamické zatížení svislé	12
2.2.2	Dynamické zatížení příčné.....	13
2.3	Zatížení od teploty	13
3	Analýza problému:.....	14
4	Cíl	15
5	Předpoklady pro řešení úlohy.....	15
6	Volba metody řešení	16
6.1	Volba značení	20
7	Realizace procesu řešení	20
7.1	Použitý software	23
7.2	Rozdělení výpočtu	23
7.3	Volba hodnot	23
7.4	Ukázka výpočtu	24
7.4.1	Poloha zatěžujících sil v prvním poli pro polohu $0 \leq p \leq 9$	24
7.4.1.1	Statické podmínky rovnováhy.....	24
7.4.1.2	Deformační podmínka $W_b = 0$	24
7.4.2	Poloha mezi 1.a 2. polem pro polohu $9 \leq p \leq 10$	29
7.4.2.1	Statické podmínky rovnováhy.....	29
7.4.2.2	Deformační podmínka $W_b = 0$	30
7.4.3	Poloha zatěžujících sil ve druhém poli pro polohu $10 \leq p \leq 19$	35
7.4.3.1	Statické podmínky rovnováhy.....	35
7.4.3.2	Deformační podmínka $W_b = 0$	36
8	Prezentace výsledků řešení:	44
8.1	Nosník na dvou podporách.....	44
8.2	Nosník na třech podporách.....	45
8.3	Nosník na čtyřech podporách	45
8.4	Nosník na pěti podporách.....	46
8.5	Nosník na šesti podporách.....	47
8.6	Závislost maximálních hodnot ohybových momentů na počtu podpor	49
8.6.1	Závislost maximálního ohybového momentu M_{oa2} na počtu podpor nosníku.....	49
8.6.2	Závislost velikosti ohybového momentu M_{oa1} pro polohu zatížení nad prvním až třetím polem	50
8.6.3	Závislost poměrné změny δ maximálního ohybového momentu M_{oa} pro zatížené druhého pole nosníku oproti prvnímu zatíženému poli v závislosti na počtu podpor n	51
8.6.4	Závislost velikosti maximálních ohybových momentů v místech podpor B, C, D, G pro první zatížené pole nosníku	52
8.7	Závislost maximálních ohybových momentů pro extrémní řezy na rozteči podpor l.	53
8.7.1	Závislost maximálního ohybového momentu M_{oa} v místě zatěžující první síly v 1. 2. a ve 3. poli na rozteči podpor l.....	55

8.7.2	Závislost maximálního ohybového momentu v místech podpor $M_{o(b,c,d)}$ pro polohu zatěžujících sil v prvním poli na rozteči podpor l	56
8.7.3	Závislost maximálního ohybového momentu M_{oa} na rozteči podpor $l = (4-10)m$ pro polohu zatěžujících sil v prvním až třetím poli.....	57
8.8	Závislost maxim ohybových momentů na rozteči zatěžujících sil	58
8.8.1	Závislost maximálního momentu M_{oa} pro zatěžující síly v prvním poli na rozteči zatěžujících sil d	60
8.8.2	Závislost maximálního momentu M_{ob} na rozteči zatěžujících sil d v místě podpory B pro zatěžující síly v prvním poli.....	60
8.8.3	Závislost maximálního momentu M_{ob} na rozteči zatěžujících sil d v místě podpory B pro zatěžující síly v prvním poli i druhém poli.....	61
8.9	Posouvající síly a ohybové momenty.....	62
9	Závěr	62
10	Seznam použitých veličin.....	64
11	Seznam obrázků.....	65
12	Seznam grafů.....	65
13	Použitá literatura.....	66

1 Úvod

Mostový jeřáb na Obr.1 sestává z mostu jeřábu, který svými pojezdovými koly spočívá na nosníku jeřábové dráhy. Nosník je uložen na podporách nesených buď konstrukcí haly nebo samostatné konstrukcí. Na mostu jeřábu pojíždí kočka jeřábu ve směru kolmém na jeřábovou dráhu. Podélným pojezdem mostu a příčným pojezdem jeřábové kočky je možné zvedat břemena v libovolném místě ohraničeném jeřábovou dráhou a krajními polohami mostu jeřábu např. v dílnách a montážních halách nebo skladech.



Obr. 1 Mostový jeřáb

2 Zatížení nosníku jeřábové dráhy dle literatury [3]:

2.1 Statické zatížení

2.1.1 Statické zatížení-stálé od vlastní hmotnosti

Je dáno vlastní hmotnosti nosníku jeřábové dráhy včetně kolejnice a má charakter spojitého zatížení. Další statické zatížení od vlastní hmotnosti mostu jeřábu je zahrnuto v zatěžujících silách od pojezdu mostu (dvojice sil v osách kol pojezdu). Rozdělení tohoto zatížení na jednotlivé nosníky jeřábové dráhy záleží na poloze těžiště mostu. Těžiště vlastního mostu jeřábu (bez jeřábové kočky) má stálou polohu, proto se zatížení na levý nebo pravý nosník jeřábové dráhy nemění.nemění.

2.1.2 Statické zatížení-nahodilé od vlastní hmotnosti

Je dáno vlastní hmotností kočky jeřábu a zavěšeného břemene. Je zahrnuto v zatěžujících silách od pojezdu mostu. Na velikost těchto zatěžujících sil působících na levý nebo pravý nosník jeřábové dráhy má vliv poloha kočky na mostě jeřábu. Poloha těžiště kočky se vzhledem k jeřábové dráze mění. Hmotnost kočky je stálá, hmotnost břemene se mění od 0 do maxima. Pro určení velikosti zatížení nosníku jeřábové dráhy od hmotnosti kočky a břemene se má uvažovat krajní poloha kočky u jeřábové dráhy.

Při výpočtu zatěžujících sil se v praxi využívá vyrovnávací součinitel podle ČSN 270310 tak, že zjištěné vnitřní zatěžující účinky mostu jeřábu určené z nahodilého zatížení kočkou a břemenem se vynásobí vyrovnávacím součinitelem ϕ podle ČSN 27 0310 viz.tab.2 [3]

Skupina jeřábů		Vyrovnávací součinitel ϕ
Provoz	označení	
Lehký	I	1,2
Střední	II	1,4
Těžký	III	1,6
Velmi těžký	IV	1,9

Tab.1

2.1.3 Statické zatížení proměnné - od setrvačných sil

Vznikají od zrychleného či zpomaleného pohybu jednotlivých částí jeřábu a břemene. Setrvačné síly se za běžného provozu mostového jeřábu vyskytují:

- Při zrychlování či brzdění pojezdu celého jeřábu po jeřábové dráze. Tyto síly působí na jeřábovou dráhu na horní ploše kolejnice rovnoběžně s osou nosníku jeřábové dráhy. Při uvažování těchto sil je třeba mít na paměti, že výslednice setrvačných sil prochází těžištěm jeřábu. Velikost těchto sil je dána celkovou hmotností jeřábu včetně břemene a maximálním zrychlením při rozjezdu nebo zpoždění při brzdění. Protože tyto osově síly se na kolejnice jeřábové dráhy přenášejí pojezdovými koly jejich maximální velikost je daná maximální třecí silou:

$$F_{AX \max} = \frac{i}{n} \cdot F_{NJ} \cdot f \quad (1)$$

kde: $F_{AX \max}$ maximální osová síla kterou přenesé kolo na kolejnici
 F_{NJ} tíhová síla od celého jeřábu včetně břemene
 f Součinitel tření mezi kolem a kolejnicí
 i počet hnaných/brzděných kol
 n celkový počet kol pojezdu

- Při zrychlování či brzdění při pojezdu jeřábové kočky po mostu jeřábu. Tyto síly působí na jeřábovou dráhu příčnou silou, která se na kolejnici přenáší nákolky pojezdových kol mostu jeřábu. Při uvažování těchto sil je třeba mít na paměti, že výslednice setrvačných sil prochází těžištěm pojíždějící jeřábové kočky s břemenem. Velikost těchto sil je dána hmotností kočky a břemene a maximálním zrychlením při rozjezdu nebo zpžděním při brzdění. Protože tyto osově síly se na kolejnici mostu přenášejí pojezdovými koly jeřábové kočky jejich maximální velikost je daná výrazem:

$$F_{BX \max} = \frac{i}{n} \cdot F_{NK} \cdot f \quad (2)$$

kde: F_{B-MAX} maximální osová síla kterou přenese kolo na kolejnici
 F_{NK} normálná síla od kočky jeřábu včetně břemene
 i počet hnaných/brzděných kol
 n celkový počet kol pojezdu

- Při zrychlování při zvedání a při zpomalování při spouštění břemene působí na jeřábovou dráhu svislými silami. Ty se na kolejnici přenáší společně se zatěžujícími silami od hmotnosti jeřábu a břemene koly pojezdu mostu. Velikost těchto přídavných sil záleží na hmotnosti zvedaného břemene a na jeho zrychlení či zpomalení. Rozložení této setrvačné síly od břemene do nositelek zatěžujících sil od kol pojezdu mostu na nosník dráhy jeřábu záleží na okamžité poloze kočky na mostu jeřábu a uvažuje se pro krajní polohu kočky u jeřábové dráhy. V praxi se výpočtově zahrnuje u mostových jeřábů vliv setrvačných sil společně s nahodilým zatížením použitím součinitele ϕ podle ČSN 27 0310 viz.tab.2 [3]

2.2 Dynamické zatížení

2.2.1 Dynamické zatížení svislé

Vznikají rázy od přejezdu mostu po stycích kolejnic. Tuto skutečnost ve výpočtech zohledňujeme dynamickým součinitelem ϵ podle ČSN 27 0310. Je závislý na druhu styku kolejnic a na rychlosti pohybu jeřábu po dráze viz. tab.2 [3]

Kolejnice se styky	Kolejnice bez styku Nebo se styky svařovanými	Dynamický součinitel
Pojížděcí rychlost jeřábu [m/s]		ϵ
$\leq 1,0$	$\leq 1,5$	1.1
>1.0	>1.5	1.2

Tab 2

Dalším dynamickým zatížením je náhlá změna zatěžujících sil od břemene, která vznikne při položení břemene na zem nebo pozvednutí břemene ze země. Jeho velikost je daná hmotností břemene a rychlostí pozvednutí.

2.2.2 Dynamické zatížení příčné

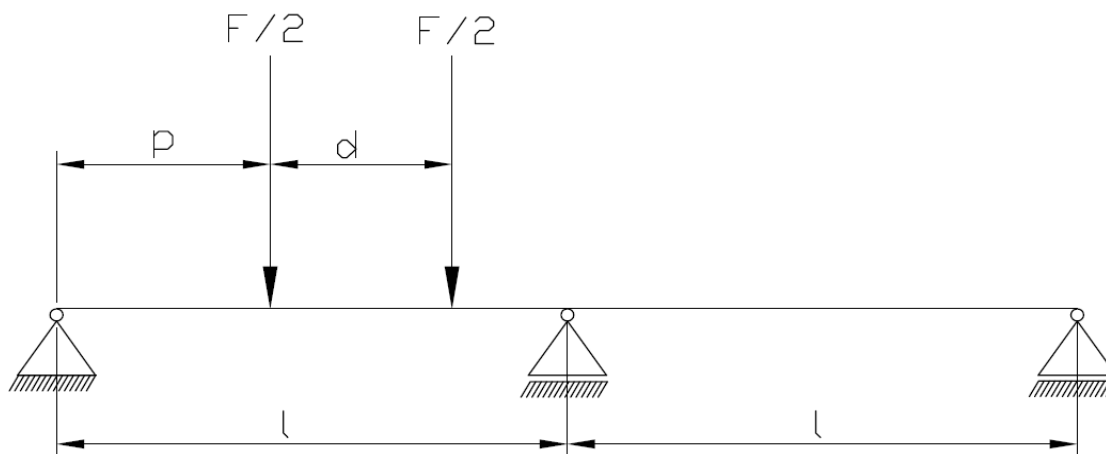
Při pojezdu mostu vznikající rázy od bočních nerovností kolejnic. Působí sil od těchto rázů je kolmo na pohyb mostu ve vrchní části kolejnice. Je-li účinek bočních rázů menší než účinek od setrvačných sil od rozjezdu či brzdění kočky na mostu jeřábu, není potřeba s nimi počítat.

Při pojezdu mostu po jeřábové dráze mohou vznikat rázy od jeho přičení. Je to v podstatě jev kdy jedna strana předbíhá, resp. zaostává za druhou. Stává se to v případě kdy jeřábová kočka s břemenem je na jednom konci jeřábového mostu. Vlivem většího odporu kol, na více zatížené straně mostu, dojde k rozdílnému zkrutu levého a pravého hřídele jež spojuje převodovku s koly pojezdu mostu. Most jeřábu se začne přičít (méně zatížená strana začne být vpředu). Ve snaze o eliminování tohoto jevu se pohonná soustava umísťuje doprostřed délky mostu. Délka spojujících hřídelí je tak stejná a kratší a tím i tužší. Spojovací hřídele pohonu kol musí být dostatečně tuhé.

2.3 Zatížení od teploty

U jeřábů pracujících na volném prostranství kde nejsou chráněny před slunečním zářením se vlivem teplotních změn může deformovat část jeřábové konstrukce oproti částem ve stínu a tím mohou vznikat tepelná pnutí. Je také potřeba přihlídnout k umožnění volné teplotní deformace ocelových částí.

3 Analýza problému:



Obr. 2 Schéma zatížení nosníku jeřábové dráhy

Na Obr.2 je schéma zatížení nosníku jeřábové dráhy od jeřábového mostu. Dvě zatěžující síly od kol pojezdu jeřábového mostu jsou síly označené $F/2$ s konstantní roztečí d . Poloha první zatěžující síly $F/2$ od levé krajní podpory nosníku jeřábové dráhy je označena p , a poloha druhé síly je $p+d$. Jeřábová dráha je podepřena stejně vzdálenými podporami o roztečích l .

Nosník jeřábové dráhy je většinou (pro více než dvě podpory) staticky neurčitý nosník na více podporách. Pro řešení nosníku musíme určit stupeň statické neurčitosti podle výrazu:

$$s = n - 2 \quad (3)$$

Kde: s stupeň statické neurčitosti nosníku
 n počet podpor nosníku

Pro dvě podpory je uložení staticky určité. Pro staticky určitý nosník z podmínek statické rovnováhy určíme síly v podporách a potom již řešíme výsledné vnitřní účinky (dále jen VVÚ). Průběhy VVÚ určujeme vždy pro takové úseky nosníku, kde je průběh ohybového momentu, respektive posouvající síly, funkcí spojitou a hladkou. Pro více než dvě podpory je nosník staticky neurčitý a stupeň statické neurčitosti určený podle uvedeného výrazu se vlastně rovná počtu vnitřních podpor nosníku. Pro řešení staticky neurčitého nosníku sestavíme rovnice statické rovnováhy: silovou $\Sigma F_x = 0$ a momentovou $\Sigma M_y = 0$ a tolik deformačních podmínek, kolikrát je nosník staticky neurčitý.

Zatížení je realizováno diskrétními silami. Průběh posouvajících sil je po délce nosníku konstantní se skokovými změnami v místech zatěžujících sil a podpor. Průběh momentů je lineární s maximy v místech skokových změn posouvajících sil to je v místech působících zatěžujících sil $F/2$ a sil v reakcích. Proto předpokládáme, že možné nebezpečné řezy nosníku jsou právě v těchto místech. V dalším již budeme sledovat jak se ohybové momenty v těchto kritických místech budou měnit v závislosti na p .

V průběhu ohybových momentů v uvedených kritických místech v závislosti na poloze zatěžujících sil p hledáme lokální extrémy těchto momentů. Tím určujeme polohu p pro tyto extrémy a jejich velikosti. Největší z těchto momentů jsou potom rozhodující pro dimenzování nosníku jeřábové dráhy.

4 Cíl

Na nosníku zatíženém diskrétními zatěžujícími silami pod koly pojezdu jeřábu budeme vyšetřovat průběh výsledných vnitřních účinků v nebezpečných místech nosníku v závislosti na poloze zatěžujících sil p vzhledem k počáteční podpoře.

Současně posoudíme:

- Vliv počtu podpor při konstantní rozteči zatěžujících sil a rozteči podpor na maximální ohybový moment v řezu nosníku
- Vliv rozteče podpor při konstantním počtu podpor a rozteči zatěžujících sil na maximální ohybový moment v řezu nosníku
- Vliv rozteče zatěžujících sil při konstantní rozteči a počtu podpor na maximální ohybový moment v řezu nosníku

5 Předpoklady pro řešení úlohy

Předpokladem našeho výpočtu je:

- Výpočtový model nosníku jeřábové dráhy splňuje prutové předpoklady
 - geometrické
 - vazbové a zatěžovací
 - deformační
 - napjatostní

proto můžeme použít vztahy odvozené v teorii prutů [1].

- Jsou uvažovány pouze zatížení svislými silami od kol pojezdu mostu jeřábu. Nejsou uvažovány žádné síly působící v ose nosníku např. síly setrvačné od pojezdu mostu jeřábu ani síly působící napříč nosníku od setrvačných sil pojezdu kočky. Vzhledem k tomu, že i ve výpočtu dle ČSN se řada zatížení odvozuje od statického zatížení opravnými součiniteli lze toto zanedbání považovat za přijatelné.
- Neuvažují se zatížení od vlastní hmotnosti nosníku jeřábové dráhy. Vlastní hmotnost ostatních částí jeřábu je zahrnuta do zatěžující síly.
- Předpokládáme, že vliv smykového napětí u nosníku jeřábové dráhy můžeme zanedbat protože příčný rozměr nosníku je mnohem menší než rozteč podpor (vzdálenost mezi podporami). V závěru se navíc pokusíme ukázat, že pro všechny polohy pojezdu p mostu po jeřábové dráze je v místě maximálního ohybového momentu minimum v průběhu posouvající síly. O vlivu posouvající síly rozhoduje také tvar průřezu nosníku.
- U podpor předpokládáme, že jedna krajní podpora je rotační a ostatní jsou obecné.

6 Volba metody řešení

Prověřili jsme možnosti řešení daného problému v systému MAPLE na jehož základě jsme zvolili integrální přístup.

U nosníku na dvou podporách Obr.3a, který je uložen staticky určitě, určíme z rovnic statické rovnováhy:

$$\sum F_z = 0, \sum M_y = 0 \quad (4)$$

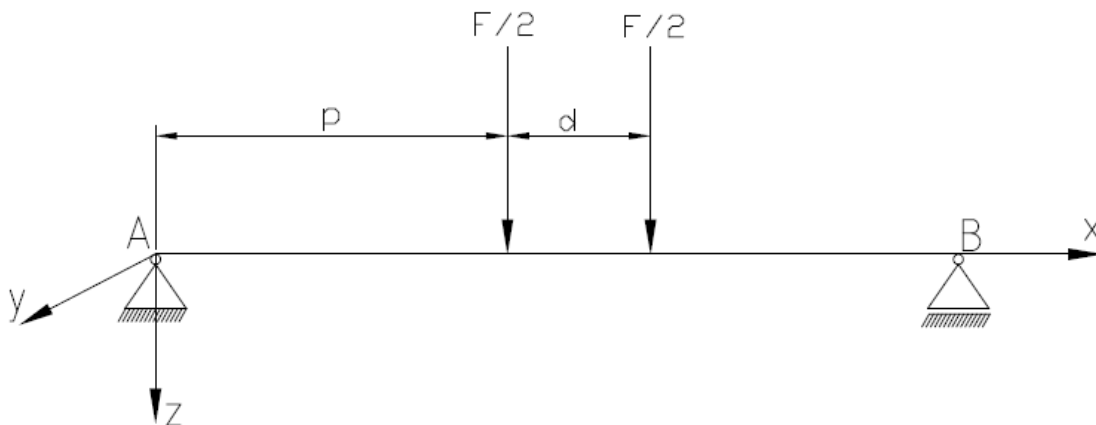
(pro rovinnou úlohu) neznámé síly v podporách R_A , R_B .

(Z důvodu výhodnosti pro řešení v programu Maple jsem označil síly v reakcích R místo obvyklého F)

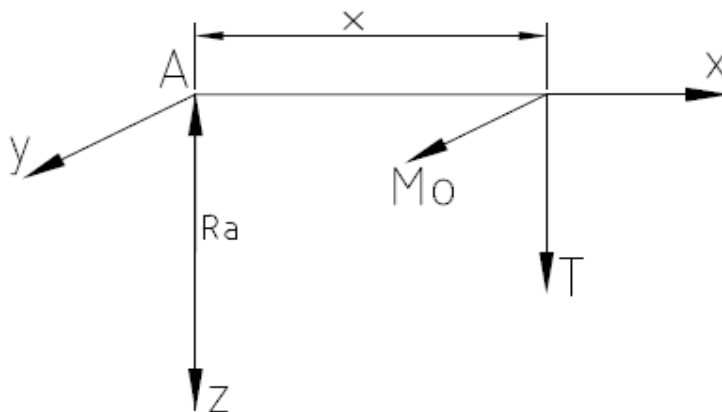
V obecném řezu zavedeme vnitřní účinky dle Obr.3b. a z rovnováhy sil působících na uvolněnou část určíme VVÚ

$$R_A - T = 0 \Rightarrow T = R_A \quad (5)$$

$$R_A \cdot x - M_o = 0 \Rightarrow M_o = R_A \cdot x \quad (6)$$

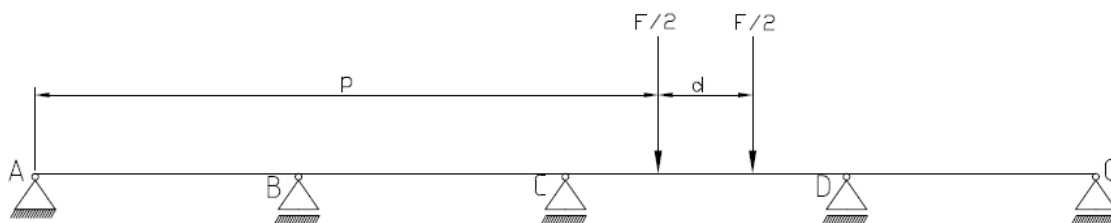


Obr. 3a Nosník na dvou podporách

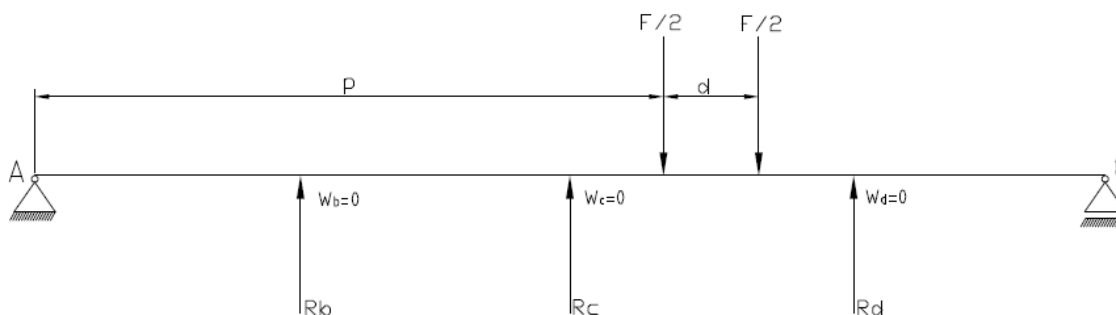


Obr.3b Uvolnění pro vyšetřování výsledných vnitřních účinků

U staticky neurčitých nosníků provedeme částečné uvolnění na úroveň statické určitosti. V místech uvolněných vnitřních podpor zavedeme stykové síly a definujeme vazebné deformační podmínky Viz. Obr.4a a Obr.4b.



Obr. 4a Staticky neurčitě uložený nosník s pěti podporami



Obr. 4b Částečně uvolněný nosník

Stupeň statické neurčitosti:

$$s = n - 2$$

kde:

s.....stupeň statické neurčitosti nosníku

n.....počet podpor nosníku

Uložení nosníku s pěti podporami je (podle výše zmíněného vzorce $s = 5 - 2 = 3$) třikrát staticky neurčitě a proto musíme formulovat 3 deformační podmínky.

V našem případě jsme provedli uvolnění 3 vnitřních podpor a napsali jsme 3 deformační podmínky. Vyjádřením, že deformace nosníku v místě uvolněných podpor je stejná jako u podepřeného nosníku:

$$w_b = 0 \quad (7)$$

$$w_c = 0 \quad (8)$$

$$w_d = 0 \quad (9)$$

Pro vyjádření deformačních podmínek použijeme Castiglianovy věty. Posuv v místě nahrazených podpor lze vyjádřit jako parciální derivace energie napjatosti podle síly již jsme nahradily danou podporu. Její obecné matematické vyjádření pro sílu R zní:

$$w = \frac{\partial W}{\partial F} = \int_{\gamma} \frac{M_0}{E \cdot J} \cdot \frac{\partial M_0}{\partial R} dx = 0 \quad (10)$$

Nyní máme k řešení reakcí dvě rovnice statické rovnováhy $\sum F_z = 0, \sum M_y = 0$

Tři deformační podmínky vyřešíme s použitím Castiglianovy věty

$$w_b = \frac{\partial W}{\partial F} = \int_{\gamma} \frac{M_0}{E \cdot J} \cdot \frac{\partial M_0}{\partial R_b} dx = 0 \quad (11)$$

$$w_c = \frac{\partial W}{\partial F} = \int_{\gamma} \frac{M_0}{E \cdot J} \cdot \frac{\partial M_0}{\partial R_c} dx = 0 \quad (12)$$

$$w_d = \frac{\partial W}{\partial F} = \int_{\gamma} \frac{M_0}{E \cdot J} \cdot \frac{\partial M_0}{\partial R_d} dx = 0 \quad (13)$$

Protože předpokládáme nosník ze stejného materiálu a konstantního průřezu je možno ve výpočtech eliminovat modul pružnosti (Youngův modul) a osový kvadratický moment průřezu. Celou rovnici vynásobíme součinem $E \cdot J$, takže jsme poté počítali se vztahem:

$$w_b = \int M_0 \cdot \frac{\partial M_0}{\partial R_b} dx = 0 \quad (14)$$

$$w_c = \int M_0 \cdot \frac{\partial M_0}{\partial R_c} dx = 0 \quad (15)$$

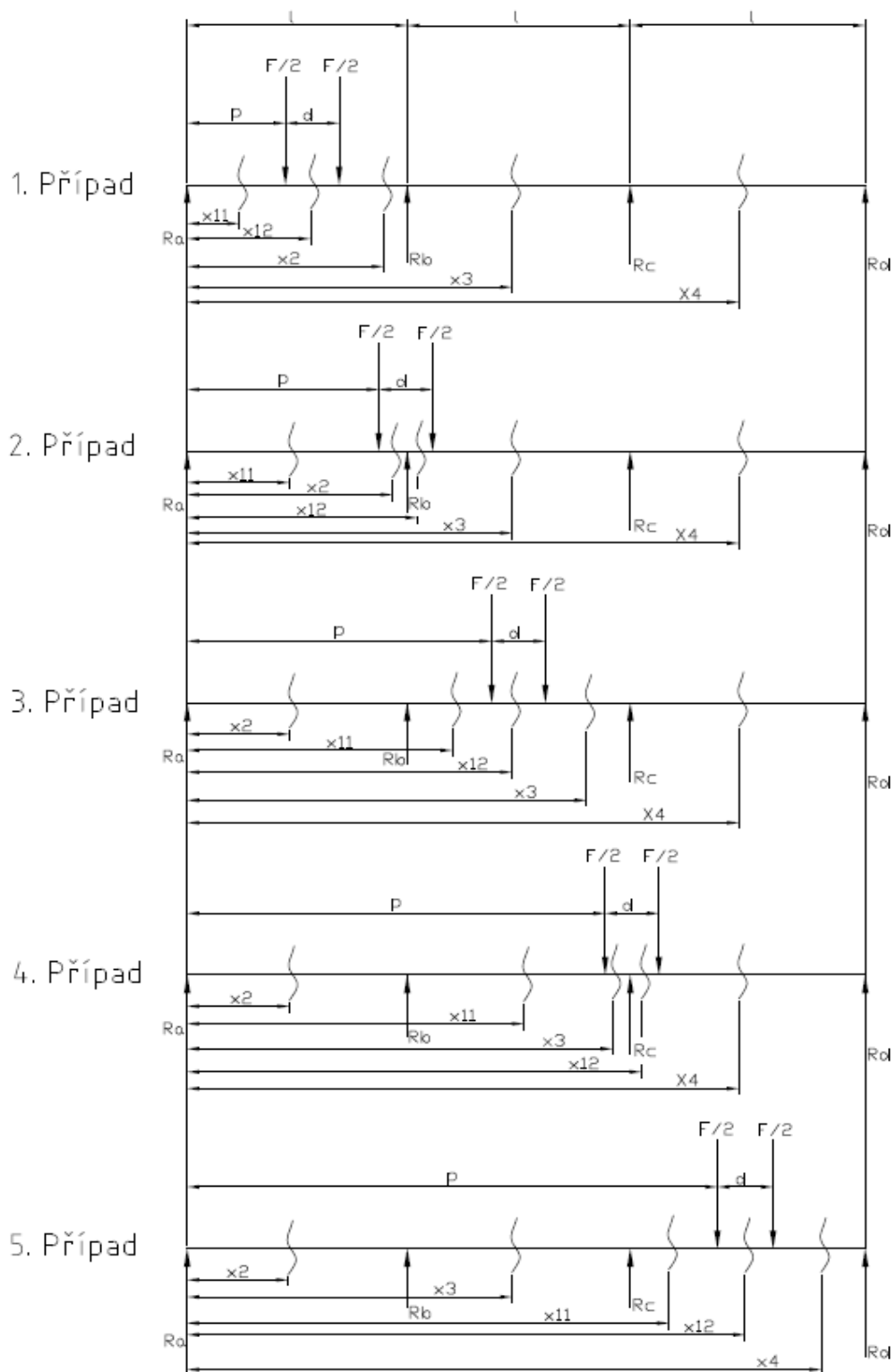
$$w_d = \int M_0 \cdot \frac{\partial M_0}{\partial R_d} dx = 0 \quad (16)$$

Průběh VVÚ vyšetřujeme pro každou významnou polohu zvlášť. Tedy pro polohu, kdy je most v prvním poli, pak přímo nad podporou, ve druhém poli atd. viz. Obr. 5. To proto, že VVÚ jsou po částech spojitě a hladké.

V následujícím obrázku (Obr.5) je určeno jak budeme označovat jednotlivé veličiny:

- Řezy jsou označeny podle souřadnice x
- x...polohy řezů.
- Indexy jsou k nim přiřazovány následovně:
 - x_{11} ...poloha řezu vlevo od první zatěžující síly
 - x_{12} ...poloha řezu vlevo od druhé zatěžující síly
 - $x_2 \dots x_n$ poloha řezu ke druhé až poslední podpoře-n
- l...rozteč podpor (konstantní) l = konst pro daný případ
- d...rozteč zatěžujících sil (konstantní) d = konst pro daný případ
- parametr p udává polohu zatěžujících sil. Nabývá následujících hodnot (podle toho ve kterém úseku se zatěžující síly právě nacházejí viz obr.5:
 - 1. případ: $0 \leq p \leq (l-d)$ poloha zat. sil nad prvním polem...index zatížení...1
 - 2. případ: $(l-d) \leq p \leq l$ poloha zat. sil nad podporou B..... index zatížení...2
 - 3. případ: $l \leq p \leq (2l-d)$ poloha zat. sil nad druhým polem..index zatížení...3
 - 4. případ: $(2l-d) \leq p \leq 2l$ poloha zat. sil nad podporou C...index zatížení...4
 - 5. případ: $2l \leq p \leq (3l-d)$ poloha zat. sil nad třetím polem...index zatížení...5
- Zatěžující síly mají označení $\frac{F}{2}$

- $R_a, R_b, R_c, R_d, \dots$ jsou síly v příslušných podporách. Další volba indexů je R_g, R_h, R_k a R_m .



Obr. 5 Značení při určování VVÚ

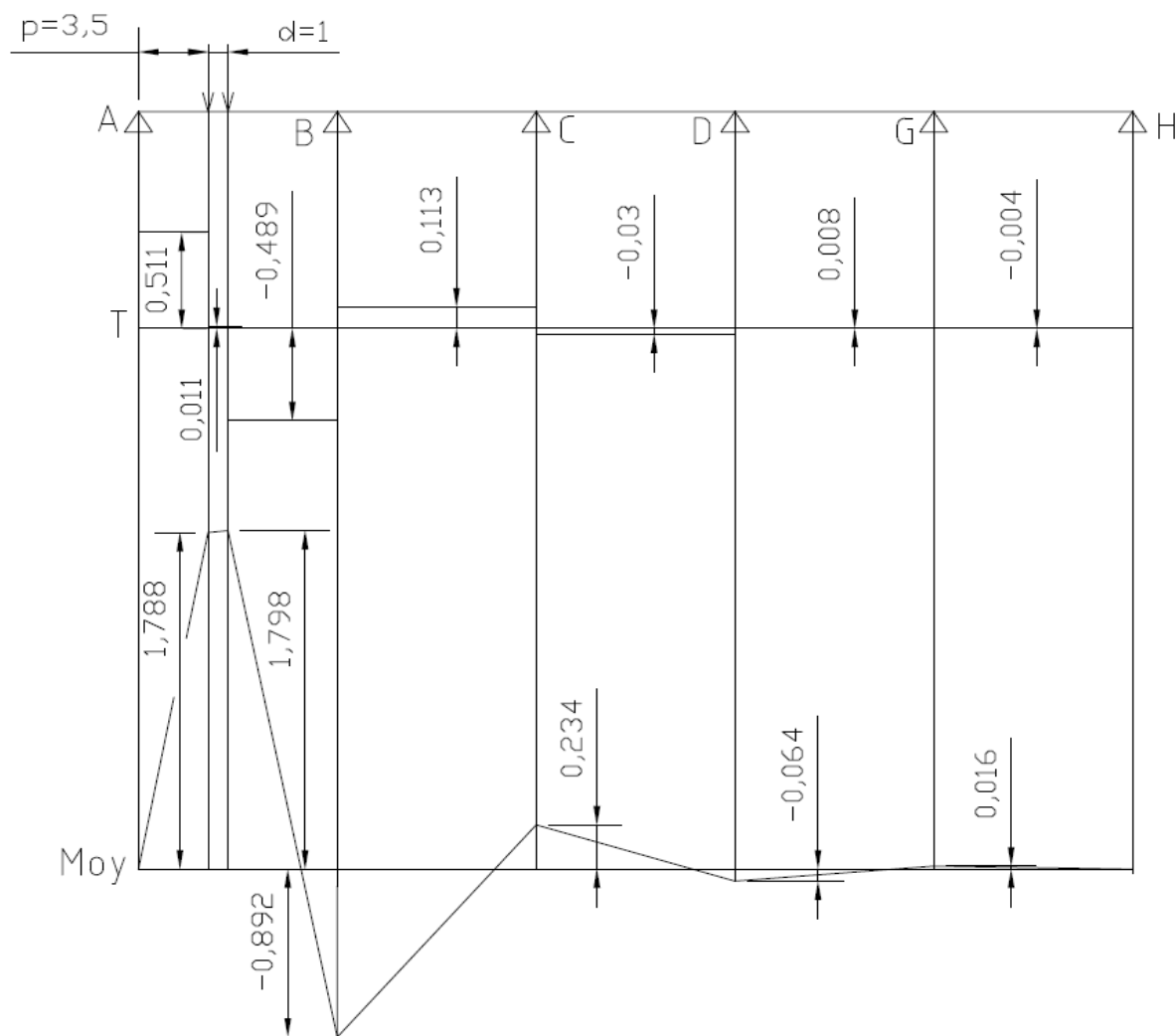
6.1 Volba značení

Kvůli snadnější orientaci při výpočtech v systému MAPLE jsme si dovolili změnit zavedené značení některých veličin např:

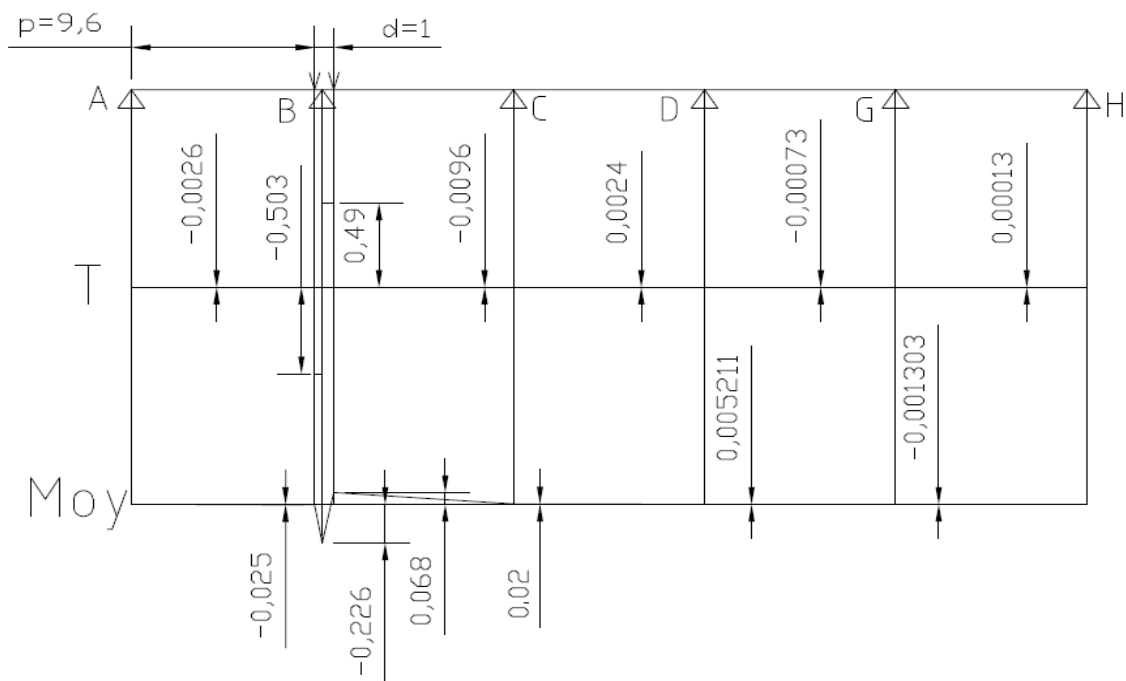
- Označení sil v podporách místo F_A , F_B , F_C ...jsme použili R_A , R_B , R_C
- U označování podpor jsme vynechali některá písmena z abecedního pořadí

7 Realizace procesu řešení

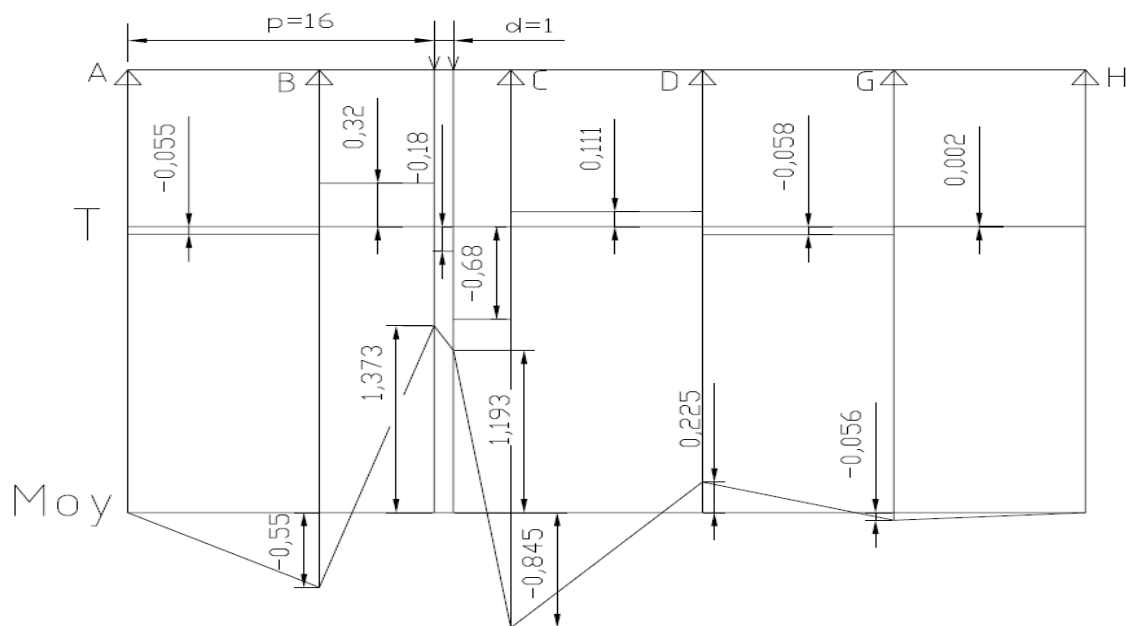
Abychom lépe ukázali kde se nacházejí nebezpečná místa v průběhu VVÚ a také pokud je zatížení na začátku nosníku, VVÚ na jeho konci jsou nepatrné, zvolili jsme nosník uložený na šesti podporách.



Obr. 6 Průběh posouvajících sil a ohybových momentů pro polohu zatěžujících sil v prvním poli jeřábové dráhy



Obr. 7 Průběh posouvajících sil a ohybových momentů pro polohu zatěžujících sil mezi prvním a druhým polem jeřábové dráhy (druhá podpora je mezi zatěžujícími silami)



Obr. 8 Průběh posouvajících sil a ohybových momentů pro polohu zatěžujících sil ve druhém poli jeřábové dráhy

Z obrázků průběhů ohybových momentů je zřejmé, že nebezpečná místa jsou v místech vnějších zatěžujících sil $F/2$ nebo podpor B, C, D, G, kde ohybový moment dosahuje svých lokálních extrémů.

Proto výpočet průběhu maximálních ohybových momentů v závislosti na poloze p zatěžujících sil provádíme pouze pro ohybové momenty v nebezpečných místech. Tyto momenty nadále označujeme:

M_{oa1} ohybový moment v místě první zatěžující síly $F/2$
 M_{oa2} ohybový moment v místě druhé zatěžující síly $F/2$
 $M_{ob}; M_{oc};$ ohybové momenty v místech vnitřních podpor nosníku.

Protože jak už jsme dříve uvedli, musíme celý výpočet provádět po takových úsecích, kde ohybové momenty a posouvající síly jsou funkce spojité a hladké budeme jednotlivé ohybové momenty označovat ještě indexy, které označují pro jakou polohu zatěžujících sil „ p “ byly tyto veličiny vypočteny. Celkový průběh ohybových momentů v nebezpečných místech potom sestavíme z jednotlivých úseků, kde tyto ohybové momenty tvoří spojitou a hladkou funkci

Používáme indexy, které jsou uvedeny v přehledu označování:

Příklad označení:

Obě zatěžující síly jsou v 1. poli

M_{oa11}moment v místě 1. zatěžující síly..... $0 \leq p \leq (l-d)$

M_{oa21}moment v místě 2. zatěžující síly..... $0 \leq p \leq (l-d)$

$M_{ob(c,d,g...)1}$moment v místě podpor B (C,D,G...), $0 \leq p \leq (l-d)$

Zatěžující síly jsou mezi prvním a druhým polem

M_{oa12}moment v místě 1. zatěžující síly..... $(l-d) \leq p \leq l$

M_{oa22}moment v místě 2. zatěžující síly..... $(l-d) \leq p \leq l$

$M_{ob(c,d,g...)2}$moment v místě podpor B (C,D,G...), $(l-d) \leq p \leq l$

Obě zatěžující síly jsou ve 2. poli

M_{oa13}moment v místě 1. zatěžující síly..... $l \leq p \leq (2l-d)$

M_{oa23}moment v místě 2. zatěžující síly..... $l \leq p \leq (2l-d)$

$M_{ob(c,d,g...)3}$moment v místě podpor B (C,D,G...), $l \leq p \leq (2l-d)$

Zatěžující síly jsou nad podporou C

M_{oa14}moment v místě 1. zatěžující síly..... $(2l-d) \leq p \leq 2l$

M_{oa24}moment v místě 2. zatěžující síly..... $(2l-d) \leq p \leq 2l$

$M_{ob(c,d,g...)4}$moment v místě podpor B (C,D,G...), $(2l-d) \leq p \leq 2l$

Obě zatěžující síly jsou ve 3. poli

M_{oa15}moment v místě 1. zatěžující síly..... $2l \leq p \leq (3l-d)$

M_{oa25}moment v místě 2. zatěžující síly..... $2l \leq p \leq (3l-d)$

$M_{ob(c,d,g...)5}$moment v místě podpor B (C,D,G...), $2l \leq p \leq (3l-d)$

7.1 Použitý software

K výpočtu jsme použili matematický software Maple 12. Využili jsme jeho schopnosti analytického řešení, což mi umožnilo přehledně zobrazit postup řešení.

7.2 Rozdělení výpočtu

Celý výpočet jsme pak prováděli tak, abychom mohli postupně srovnat vliv zvolených rozměrů nosníku l, d a počtu podpor na průběh ohybových momentů nosníku jeřábové dráhy v závislosti na poloze p

Provedeme výpočet nosníků s počtem podpor 2-8. Nosník se dvěma podporami je staticky určitý, ostatní jsou staticky neurčitě.

Ve výpočtu řešíme nosník po jednotlivých polohách zatěžujících sil, kdy průběh momentů je funkcí spojitou a hladkou. Určíme statické podmínky rovnováhy. Deformační podmínky vyřešíme s použitím Castiglianovy věty. Řešením soustavy rovnic určíme velikosti sil v podporách jako $R = f(p)$. Dále určíme ohybové momenty $Mo = f(p, x)$. Vzhledem k tomu, že chceme určit průběh ohybového momentu v kritických místech v závislosti na poloze zatěžujících sil p , dosadíme do průběhu momentů za souřadnice x odpovídající polohy kritických míst (polohu první síly $x_{11} = p$; polohu druhé síly $x_{12} = p + d$; polohu podpory B $x_2 = l$; polohu podpory C $x_3 = 2l$; polohu podpory D $x_4 = 3l$ a polohu podpory G $x_5 = 4l$ pro nosník se šesti podporami)

Potom pro proměnný parametr p v daném intervalu určíme průběh sil R v místech podpor nosníku.

A pro proměnný parametr p v daném intervalu určíme průběh ohybových momentů v nebezpečných místech.

Po vyřešení nosníku ve všech polohách zatěžujících sil sestavíme celkový průběh ohybového momentu v kritických místech v závislosti na poloze sil p v rozsahu $0 < p < [(n-1) \cdot l - d]$

7.3 Volba hodnot

Pro vykreslení průběhů jsme zvolili jednotkovou sílu $F = 1N$ jež působí celý pojezd mostu jeřábu na jeden nosník jeřábové dráhy. To znamená že každé kolo pojezdu působí na kolejnici jeřábové dráhy silou $F/2 = 0,5N$. Předpokladem pro uvedené hodnoty je rovnoměrné rozdělení zatížení na obě kola pojezdu. Vzdálenost zatěžujících sil $d = 1m$. Rozpětí podpor l má hodnotu $l = 10m$.

Ve skutečnosti síla zatěžující nosník jeřábové dráhy je nepoměrně malá. Pro určení průběhu ohybových momentů a reakcí nás nezajímá absolutní velikost, ale vzájemné porovnání velikosti ohybového momentu pro různé počty podpor n a polohu zatěžujících sil p .

V další části výpočtů jsme ještě posuzovali vliv změny rozpětí zatěžujících sil d a rozteče podpor l .

Vzájemná vzdálenost poloh zatěžujících sil d nabývala hodnot 0,5;1;2;3 pro nosník se šesti podporami.

Rozteč podpor jsme měnili $l = 4, 6, 8, 10$ pro nosník se šesti podporami

7.4 Ukázka výpočtu

V této kapitole ukážeme výpočet jeřábové dráhy se třemi podporami a osvětlíme některé kroky řešení. Je to případ kdy rozpětí mezi podporami $l = 10\text{m}$ a celková délka nosníku je $L = 2l = 20\text{m}$. Z výsledků řešení je zřejmý symetrický průběh maximálních momentů v závislosti na p . Z důvodu rozsáhlosti výpočtu pro více podpor jsem volil tuto minimální variantu.

7.4.1 Poloha zatěžujících sil v prvním poli pro polohu $0 \leq p \leq l$

7.4.1.1 Statické podmínky rovnováhy

Z rovnic statické rovnováhy sil a momentů vyjádříme závislost reakci R_a a R_c na R_b

$$st1 := -\frac{F}{2} \cdot p - \frac{F}{2} \cdot (p + d) + R_b \cdot l + R_c \cdot 2 \cdot l = 0$$

$$st2 := R_a + R_b + R_c - F = 0$$

$$st := \text{solve}(\{st1, st2\}, \{R_a, R_c\});$$

$$st := \left\{ R_a = -\frac{1}{4} \frac{2 R_b l + 2 F p + F d - 4 F l}{l}, R_c = \frac{1}{4} \frac{2 F p + F d - 2 R_b l}{l} \right\}$$

$$R_a := -\frac{1}{4} \frac{2 R_b l + 2 F p + F d - 4 F l}{l}$$

$$R_c := \frac{1}{4} \frac{2 F p + F d - 2 R_b l}{l}$$

7.4.1.2 Deformační podmínka $w_b = 0$

Vyjádření deformační podmínky pomocí Castiglianovy věty

$$w_b = \int_{\gamma} M_o \frac{\partial M_o}{\partial R_b} dx = 0$$

Ohybové momenty

$$Moa1 := R_a \cdot x11$$

$$Moa1 := -\frac{1}{4} \frac{(2 R_b l + 2 F p + F d - 4 F l) x11}{l}$$

$$Moa2 := R_a \cdot x12 - \frac{F}{2} \cdot (x12 - p)$$

$$Moa2 := -\frac{1}{4} \frac{(2 R_b l + 2 F p + F d - 4 F l) x12}{l} - \frac{1}{2} F (x12 - p)$$

$$\begin{aligned}
Mob &:= Ra \cdot x2 - \frac{F}{2} \cdot (x2 - p) - \frac{F}{2} \cdot (x2 - p - d) \\
Mob &:= -\frac{1}{4} \frac{(2 Rb l + 2 F p + F d - 4 F l) x2}{l} - \frac{1}{2} F (x2 - p) \\
&\quad - \frac{1}{2} F (x2 - p - d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Moc &:= Rc \cdot (2 \cdot l - x3) \\
Moc &:= \frac{1}{4} \frac{(2 F p + F d - 2 Rb l) (2 l - x3)}{l}
\end{aligned}$$

Parcialní derivace momentu (index i)

$$\begin{aligned}
Moa1i &:= \frac{\partial}{\partial Rb} Moa1 \\
Moa1i &:= -\frac{1}{2} x11
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Moa2i &:= \frac{\partial}{\partial Rb} Moa2 \\
Moa2i &:= -\frac{1}{2} x12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Mobi &:= \frac{\partial}{\partial Rb} Mob \\
Mobi &:= -\frac{1}{2} x2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Moci &:= \frac{\partial}{\partial Rb} Moc \\
Moci &:= -l + \frac{1}{2} x3
\end{aligned}$$

Deformační podmínka vyjádřená pomocí Castiglianovy věty

$$\begin{aligned}
integral &:= \int_0^p Moa1 \cdot Moa1i \, dx11 + \int_p^{p+d} Moa2 \cdot Moa2i \, dx12 + \\
&\quad \int_{p+d}^l Mob \cdot Mobi \, dx2 + \int_l^{2 \cdot l} Moc \cdot Moci \, dx3 = 0 \\
integral &:= \frac{1}{24} \frac{(2 Rb l + 2 F p + F d - 4 F l) p^3}{l} \\
&\quad + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{8} \frac{2 Rb l + 2 F p + F d - 4 F l}{l} + \frac{1}{4} F \right) ((p+d)^3 \\
&\quad - p^3) - \frac{1}{8} F p ((p+d)^2 - p^2) \\
&\quad + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{8} \frac{2 Rb l + 2 F p + F d - 4 F l}{l} + \frac{1}{2} F \right) (l^3 \\
&\quad - (p+d)^3) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} F p + \frac{1}{4} F (-p-d) \right) (l^2 - (p \\
&\quad + d)^2) - \frac{7}{24} (2 F p + F d - 2 Rb l) l^2 + \frac{3}{2} \left(F p + \frac{1}{2} F d \right. \\
&\quad \left. - Rb l \right) l^2 - \frac{1}{4} (4 F p + 2 F d - 4 Rb l) l^2 = 0
\end{aligned}$$

$$Rb := solve(integral, Rb)$$

$$R_b := -\frac{1}{4} \frac{F(3p^2d + 3pd^2 - 3dl^2 - 6p^3 + 2p^3 + d^3)}{l^3}$$

Kontrola výpočtu dosazením do silové podmínky rovnováhy

$$Z_k := \text{simplify}(R_a + R_b + R_c - F)$$

$$Z_k := 0$$

Vykreslení průběhu reakcí v podporách v závislosti na poloze p zatěžujících sil

R_a

$$-\frac{1}{4} \frac{1}{l} \left(-\frac{1}{2} \frac{F(-3dl^2 + 3pd^2 + 3p^2d + 2p^3 + d^3 - 6pl^2)}{l^2} + 2Fp + Fd - 4Fl \right)$$

R_b

$$-\frac{1}{4} \frac{F(-3dl^2 + 3pd^2 + 3p^2d + 2p^3 + d^3 - 6pl^2)}{l^3}$$

R_c

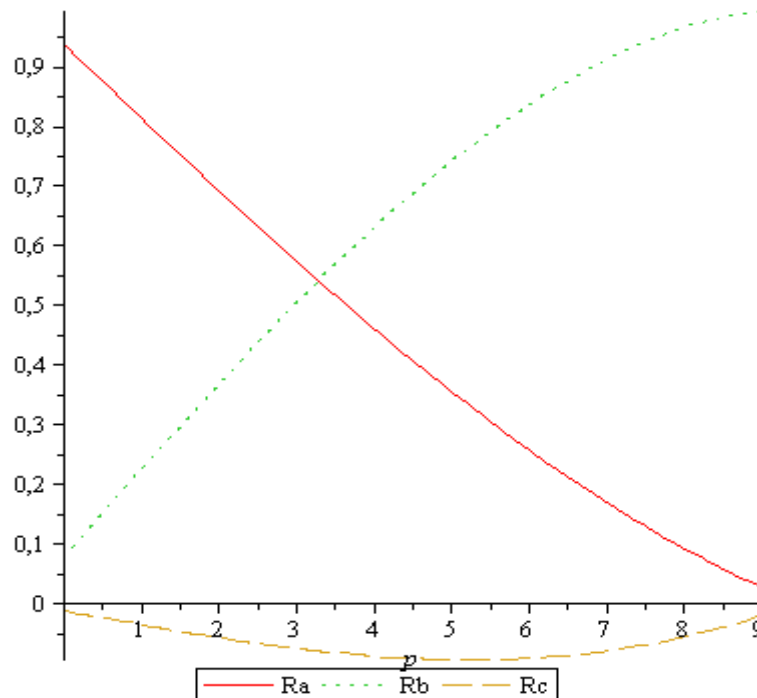
$$\frac{1}{4} \frac{1}{l} \left(2Fp + Fd + \frac{1}{2} \frac{F(-3dl^2 + 3pd^2 + 3p^2d + 2p^3 + d^3 - 6pl^2)}{l^2} \right)$$

$$l := 10$$

$$d := 1$$

$$F := 1$$

`plots[interactive]();`



Graf 1. Průběh sil v podporách R_a , R_b , R_c v závislosti na poloze p zatěžujících sil pro jejich polohu nad 1. polem

Vyjádření ohybového momentu v závislosti na proměnné x pro danou polohu zatěžujících sil p

simplify(Moa1)

$$\frac{1}{8} \frac{F(3p^2d + 3pd^2 - 5dl^2 - 10pl^2 + 2p^3 + d^3 + 8l^3)xl}{l^3}$$

simplify(Moa2)

$$\frac{1}{8} \frac{1}{l^3} (F(3x12p^2d + 3x12pd^2 - 5x12dl^2 - 10x12pl^2 + 2x12p^3 + x12d^3 + 4x12l^3 + 4l^3p))$$

simplify(Mob)

$$\frac{1}{8} \frac{1}{l^3} (F(3x2p^2d + 3x2pd^2 - 5x2dl^2 - 10x2pl^2 + 2x2p^3 + x2d^3 + 8l^3p + 4l^3d))$$

simplify(Moc)

$$\frac{1}{8} \frac{F(-2pl^2 - dl^2 + 3p^2d + 3pd^2 + 2p^3 + d^3)(2l - x3)}{l^3}$$

Určení ohybových momentů ve vytipovaných nebezpečných řezech dosazením jejich souřadnic za x . Tím dostáváme průběh ohybových momentů ve významných řezech v závislosti na poloze zatěžujících sil p

$x11 := p$

Moa1

$$-\frac{1}{4} \frac{1}{l} \left(\left(-\frac{1}{2} \frac{F(3p^2d + 3pd^2 - 3dl^2 - 6pl^2 + 2p^3 + d^3)}{l^2} + 2Fp + Fd - 4Fl \right) p \right)$$

$x12 := (p + d)$

Moa2

$$-\frac{1}{4} \frac{1}{l} \left(\left(-\frac{1}{2} \frac{F(3p^2d + 3pd^2 - 3dl^2 - 6pl^2 + 2p^3 + d^3)}{l^2} + 2Fp + Fd - 4Fl \right) (p + d) \right) - \frac{1}{2} Fd$$

$x2 := 1$

Mob

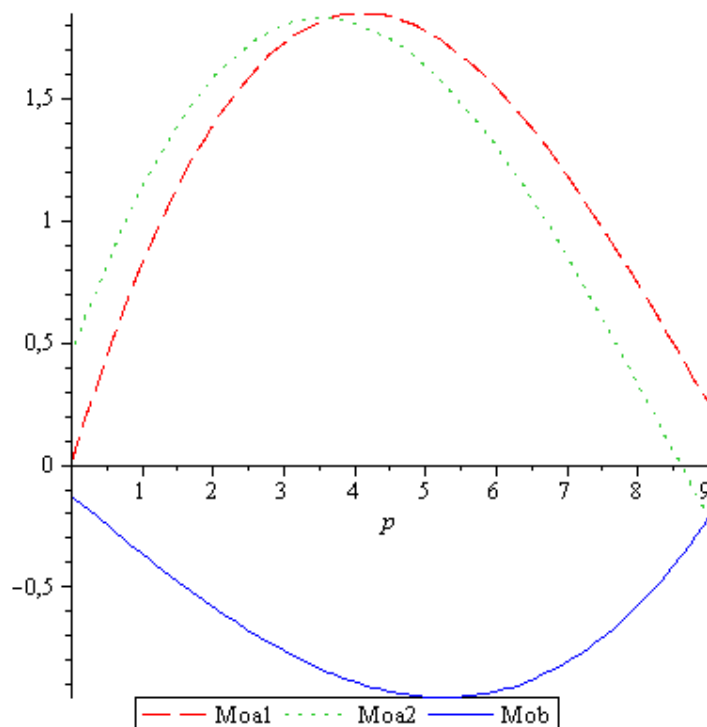
$$\frac{1}{8} \frac{F(3p^2d + 3pd^2 - 3dl^2 - 6pl^2 + 2p^3 + d^3)}{l^2} - \frac{1}{2} Fp - \frac{1}{4} Fd + Fl - \frac{1}{2} F(l - p) - \frac{1}{2} F(l - p - d)$$

$x3 := 1$

Moc

$$\frac{1}{2} F p + \frac{1}{4} F d + \frac{1}{8} \frac{F (3 p^2 d + 3 p d^2 - 3 d l^2 - 6 p l^2 + 2 p^3 + d^3)}{l^2}$$

```
l := 10
d := 1
F := 1
plots[interactive]();
```



Graf 2. Průběh maximálních ohybových momentů M_{oa1} , M_{oa2} , M_{ob} v závislosti na poloze zatěžujících sil pro jejich polohu v 1. poli

Určení polohy a velikosti maximálního ohybového momentu pro polohu zatěžujících sil nad 1. polem

$$derivace1 := \frac{d}{dp} Moa2 = 0$$

$$derivace1 := -\frac{1}{40} \left(\frac{997}{200} - \frac{3}{100} p - \frac{3}{100} p^2 \right) (p + 1) - \frac{997}{8000} p + \frac{7501}{8000} + \frac{3}{8000} p^2 + \frac{1}{4000} p^3 = 0$$

$simplify(derivace1)$

$$-\frac{497}{2000} p + \frac{813}{1000} + \frac{3}{1600} p^2 + \frac{1}{1000} p^3 = 0$$

$poloha[2]$

3.54591534;

```

derivace2 :=  $\frac{d}{dp}$  Moa1
derivace2 :=  $-\frac{1}{40} \left( \frac{997}{200} - \frac{3}{100} p - \frac{3}{100} p^2 \right) p - \frac{997}{8000} p$ 
 $+\frac{7501}{8000} + \frac{3}{8000} p^2 + \frac{1}{4000} p^3$ 

> derivace3 :=  $\frac{d}{dp}$  Mob
derivace3 :=  $-\frac{197}{800} + \frac{3}{400} p + \frac{3}{400} p^2$ 

> poloha2 [2]
4.118655179

> p := poloha [2]
p := 3.545915349

> Moa2
1.825583570

> p := poloha2 [2]
p := 4.118655179

> Moa1
1.845838589

> p := poloha3 [2]
p := 5.251811309

> Mob
-0.951445454

> restart
>

```

7.4.2 Poloha mezi 1.a 2. polem pro polohu $9 \leq p \leq 10$

7.4.2.1 Statické podmínky rovnováhy

Z rovnic statické rovnováhy sil a momentů vyjádřím závislost reakci R_a a R_c na R_b

```

> st1 := Ra + Rb + Rc - F = 0
> st2 :=  $-\frac{F}{2} \cdot p - \frac{F}{2} \cdot (p + d) + Rb \cdot l + Rc \cdot l \cdot 2 = 0$ 
> st := solve({st1, st2}, {Ra, Rc})
st :=  $\left\{ Ra = -\frac{1}{4} \frac{2 Rb l + 2 F p + F d - 4 F l}{l}, Rc \right.$ 
 $\left. = \frac{1}{4} \frac{2 F p + F d - 2 Rb l}{l} \right\}$ 

> Ra :=  $-\frac{1}{4} \frac{2 Rb l + 2 F p + F d - 4 F l}{l}$ 
> Rc :=  $\frac{1}{4} \frac{2 F p + F d - 2 Rb l}{l}$ 

```

7.4.2.2 Deformační podmínka $W_b = 0$

Vyjádření deformační podmínky pomocí Castiglianovy věty

$$w_b = 0 = \int M_o \frac{\partial M_o}{\partial R_b} dx = 0$$

Ohybové momenty

$$> Moa1 := Ra \cdot x11$$

$$Moa1 := -\frac{1}{4} \frac{(2 Rb l + 2 F p + F d - 4 F l) x11}{l}$$

$$> Moa2 := Ra \cdot x12 - \frac{F}{2} \cdot (x12 - p) + Rb \cdot (x12 - l)$$

$$Moa2 := -\frac{1}{4} \frac{(2 Rb l + 2 F p + F d - 4 F l) x12}{l} - \frac{1}{2} F (x12 - p) + Rb (x12 - l)$$

$$> Mob := Ra \cdot x2 - \frac{F}{2} \cdot (x2 - p)$$

$$Mob := -\frac{1}{4} \frac{(2 Rb l + 2 F p + F d - 4 F l) x2}{l} - \frac{1}{2} F (x2 - p)$$

$$> Moc := Ra \cdot x3 - \frac{F}{2} \cdot (x3 - p) + Rb \cdot (x3 - l) - \frac{F}{2} \cdot (x3 - p - d)$$

$$Moc := -\frac{1}{4} \frac{(2 Rb l + 2 F p + F d - 4 F l) x3}{l} - \frac{1}{2} F (x3 - p) + Rb (x3 - l) - \frac{1}{2} F (x3 - p - d)$$

Parciální derivace momentu (index i)

$$> Moali := \frac{\partial}{\partial Rb} Moa1$$

$$Moali := -\frac{1}{2} x11$$

$$> Moa2i := \frac{\partial}{\partial Rb} Moa2$$

$$Moa2i := \frac{1}{2} x12 - l$$

$$> Mob_i := \frac{\partial}{\partial Rb} Mob$$

$$Mob_i := -\frac{1}{2} x2$$

$$> Moci := \frac{\partial}{\partial Rb} Moc$$

$$Moci := \frac{1}{2} x3 - l$$

Deformační podmínka vyjádřená pomocí Castiglianovy věty

$$\begin{aligned} > \text{integral} := \int_0^p \text{Moa1} \cdot \text{Moa1i} \, dx11 + \int_p^l \text{Mob} \cdot \text{Mobi} \, dx2 + \\ & \int_l^{p+d} \text{Moa2} \cdot \text{Moa2i} \, dx12 + \int_{p+d}^{2 \cdot l} \text{Moc} \cdot \text{Moci} \, dx3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{integral} := & \frac{1}{24} \frac{(2 Rb l + 2 F p + F d - 4 F l) p^3}{l} \\ & + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{8} \frac{2 Rb l + 2 F p + F d - 4 F l}{l} + \frac{1}{4} F \right) (l^3 - p^3) \\ & - \frac{1}{8} F p (l^2 - p^2) + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{8} \frac{2 Rb l + 2 F p + F d - 4 F l}{l} \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} F + \frac{1}{2} Rb \right) ((p+d)^3 - l^3) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} F p - \frac{1}{2} Rb l \right. \\ & \left. - \left(-\frac{1}{4} \frac{2 Rb l + 2 F p + F d - 4 F l}{l} - \frac{1}{2} F + Rb \right) l \right) \\ & ((p+d)^2 - l^2) - \left(\frac{1}{2} F p - Rb l \right) l (p+d-l) + \frac{1}{3} \left(\right. \\ & \left. -\frac{1}{8} \frac{2 Rb l + 2 F p + F d - 4 F l}{l} - \frac{1}{2} F + \frac{1}{2} Rb \right) (8 l^3 \\ & - (p+d)^3) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} F p - \frac{1}{2} Rb l - \frac{1}{4} F (-p-d) - \left(\right. \right. \\ & \left. \left. -\frac{1}{4} \frac{2 Rb l + 2 F p + F d - 4 F l}{l} - F + Rb \right) l \right) (4 l^2 \\ & - (p+d)^2) - \left(\frac{1}{2} F p - Rb l - \frac{1}{2} F (-p-d) \right) l (2 l - p \\ & - d) = 0 \end{aligned}$$

$$> Rb := \text{solve}(\text{integral}, Rb)$$

$$\begin{aligned} Rb := & \frac{1}{4} \frac{1}{l^3} (F (-2 l^3 - 6 l p^2 - 6 l d^2 + 3 p^2 d + 3 p d^2 - 12 l p d \\ & + 12 p l^2 + 9 d l^2 + d^3)) \end{aligned}$$

> Kontrola výpočtu dosazením do silové podmínky rovnováhy

$$Zk := \text{simplify}(Ra + Rb + Rc - F)$$

$$Zk := 0$$

Vykreslení průběhu reakcí v podporách v závislosti na poloze p zatěžujících sil

$$> Ra := \text{simplify}(Ra)$$

$$\begin{aligned} Ra := & -\frac{1}{8} \frac{1}{l^3} (F (-10 l^3 - 6 l p^2 - 6 l d^2 + 3 p^2 d + 3 p d^2 \\ & - 12 l p d + 16 p l^2 + 11 d l^2 + d^3)) \end{aligned}$$

$$> Rb := \text{simplify}(Rb)$$

$$\begin{aligned} Rb := & \frac{1}{4} \frac{1}{l^3} (F (-2 l^3 - 6 l p^2 - 6 l d^2 + 3 p^2 d + 3 p d^2 - 12 l p d \\ & + 12 p l^2 + 9 d l^2 + d^3)) \end{aligned}$$

> $R_c := \text{simplify}(R_c)$

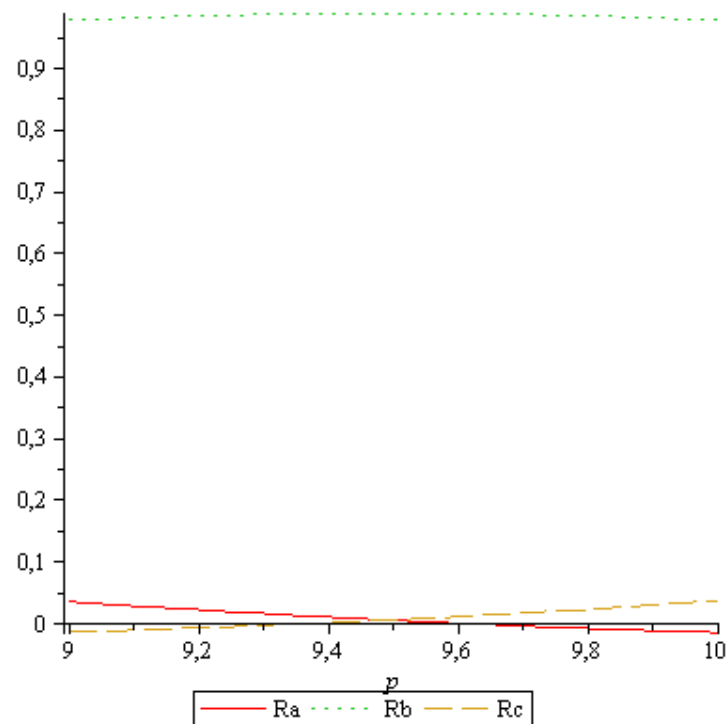
$$R_c := -\frac{1}{8} \frac{1}{l^3} (F (8 p l^2 + 7 d l^2 - 2 l^3 - 6 l p^2 - 6 l d^2 + 3 p^2 d + 3 p d^2 - 12 l p d + d^3))$$

> $l := 10$

> $d := 1$

> $F := 1$

> $\text{plots}[\text{interactive}]();$



Graf 3. Průběh sil v podporách R_a , R_b , R_c v závislosti na poloze p zatěžujících sil pro jejich polohu mezi 1. a 2. polem

Vyjádření ohybového momentu v závislosti na proměnné x pro danou polohu zatěžujících sil p

$\text{simplify}(Moa1)$

$$-\frac{1}{4} \frac{1}{l} \left(\left(\frac{1}{2} \frac{1}{l^2} (F (-2 l^3 - 6 l p^2 - 6 l d^2 + 3 p^2 d + 3 p d^2 - 12 l p d + 12 p l^2 + 9 d l^2 + d^3)) + 2 F p + F d - 4 F l \right) x l l \right)$$

> Moa2

$$-\frac{1}{4} \frac{1}{l} \left(\left(\frac{1}{2} \frac{1}{l^2} (F(-2l^3 - 6lp^2 - 6ld^2 + 3p^2d + 3pd^2 - 12lpd + 12pl^2 + 9dl^2 + d^3)) + 2Fp + Fd - 4Fl \right) \right. \\ \left. x12 \right) - \frac{1}{2} F(x12 - p) + \frac{1}{4} \frac{1}{l^3} (F(-2l^3 - 6lp^2 - 6ld^2 + 3p^2d + 3pd^2 - 12lpd + 12pl^2 + 9dl^2 + d^3) \\ (x12 - l))$$

> Mob

$$-\frac{1}{4} \frac{1}{l} \left(\left(\frac{1}{2} \frac{1}{l^2} (F(-2l^3 - 6lp^2 - 6ld^2 + 3p^2d + 3pd^2 - 12lpd + 12pl^2 + 9dl^2 + d^3)) + 2Fp + Fd - 4Fl \right) \right. \\ \left. x2 \right) - \frac{1}{2} F(x2 - p)$$

> Moc

$$-\frac{1}{4} \frac{1}{l} \left(\left(\frac{1}{2} \frac{1}{l^2} (F(-2l^3 - 6lp^2 - 6ld^2 + 3p^2d + 3pd^2 - 12lpd + 12pl^2 + 9dl^2 + d^3)) + 2Fp + Fd - 4Fl \right) \right. \\ \left. x3 \right) - \frac{1}{2} F(x3 - p) + \frac{1}{4} \frac{1}{l^3} (F(-2l^3 - 6lp^2 - 6ld^2 + 3p^2d + 3pd^2 - 12lpd + 12pl^2 + 9dl^2 + d^3) (x3 \\ - l)) - \frac{1}{2} F(x3 - p - d)$$

Určení ohybových momentů ve vytipovaných nebezpečných řezech dosazením jejich souřadnic x . Tím dostáváme průběh ohybových momentů ve významných řezech v závislosti na poloze zatěžujících sil p

> Moa1

$$-\frac{1}{4} \frac{1}{l} \left(\left(\frac{1}{2} \frac{1}{l^2} (F(-2l^3 - 6lp^2 - 6ld^2 + 3p^2d + 3pd^2 - 12lpd + 12pl^2 + 9dl^2 + d^3)) + 2Fp + Fd - 4Fl \right) \right. \\ \left. p \right)$$

> x12 := p + d

> Moa2

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} \frac{1}{l} \left(\left(\frac{1}{2} \frac{1}{l^2} (F(-2l^3 - 6lp^2 - 6ld^2 + 3p^2d + 3pd^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 12lpd + 12pl^2 + 9dl^2 + d^3)) + 2Fp + Fd - 4Fl \right) (p \right. \\
& \quad \left. + d) \right) - \frac{1}{2} Fd + \frac{1}{4} \frac{1}{l^3} (F(-2l^3 - 6lp^2 - 6ld^2 \\
& \quad + 3p^2d + 3pd^2 - 12lpd + 12pl^2 + 9dl^2 + d^3) (p + d \\
& \quad - l))
\end{aligned}$$

> x2 := l

> Mob

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{8} \frac{1}{l^2} (F(-2l^3 - 6lp^2 - 6ld^2 + 3p^2d + 3pd^2 - 12lpd \\
& \quad + 12pl^2 + 9dl^2 + d^3)) - \frac{1}{2} Fp - \frac{1}{4} Fd + Fl - \frac{1}{2} F(l \\
& \quad - p)
\end{aligned}$$

> x3 := p + d

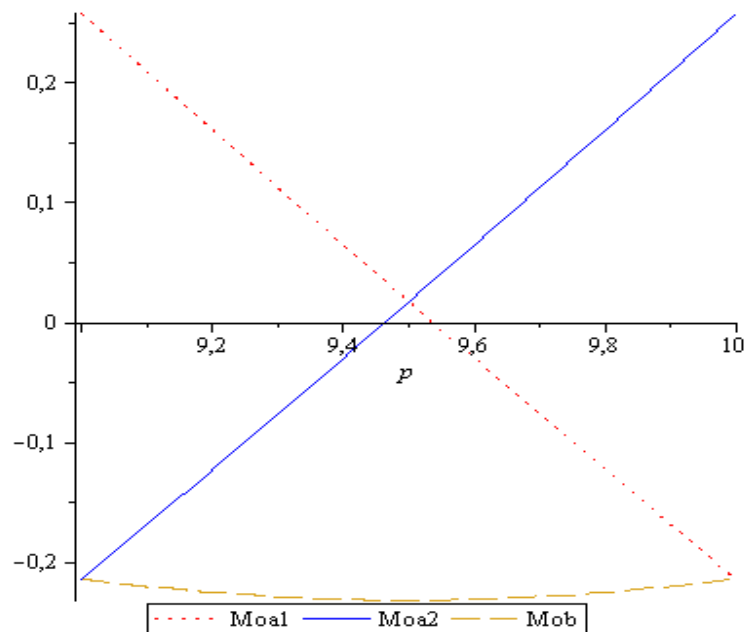
> Moc

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} \frac{1}{l} \left(\left(\frac{1}{2} \frac{1}{l^2} (F(-2l^3 - 6lp^2 - 6ld^2 + 3p^2d + 3pd^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 12lpd + 12pl^2 + 9dl^2 + d^3)) + 2Fp + Fd - 4Fl \right) (p \right. \\
& \quad \left. + d) \right) - \frac{1}{2} Fd + \frac{1}{4} \frac{1}{l^3} (F(-2l^3 - 6lp^2 - 6ld^2 \\
& \quad + 3p^2d + 3pd^2 - 12lpd + 12pl^2 + 9dl^2 + d^3) (p + d \\
& \quad - l))
\end{aligned}$$

> l := 10

> d := 1

> F := 1



Graf 4. Průběh maximálních ohybových momentů M_{oa1} , M_{oa2} , M_{ob} v závislosti na poloze zatěžujících sil pro jejich polohu mezi 1. a 2. polem

Určení polohy a velikosti maximálního ohybového momentu M_{ob} pro polohu zatěžujících sil nad podporou B

$$derivace3 := \frac{d}{dp} M_{ob}$$

$$derivace3 := \frac{57}{400} p - \frac{1083}{800}$$

> $poloha3 := fsolve(derivace3, p)$

$$poloha3 := 9.500000000$$

>

> $p := poloha3$

$$p := 9.500000000$$

> M_{ob}

$$-0.231562500$$

7.4.3 Poloha zatěžujících sil ve druhém poli pro polohu $10 \leq p \leq 19$

7.4.3.1 Statické podmínky rovnováhy

Z rovnic statické rovnováhy sil a momentů vyjádřím závislost reakci R_a a R_c na R_b

> $st1 := R_a + R_b + R_c - F = 0$

> $st2 := R_b \cdot l - \frac{F}{2} \cdot p - \frac{F}{2} (p + d) + R_c \cdot l \cdot 2 = 0$

$$\begin{aligned}
> st &:= solve(\{st1, st2\}, \{Ra, Rc\}) \\
&st := \left\{ Ra = -\frac{1}{4} \frac{2 Rb l + 2 F p + F d - 4 F l}{l}, Rc \right. \\
&\quad \left. = \frac{1}{4} \frac{-2 Rb l + 2 F p + F d}{l} \right\} \\
> Ra &:= -\frac{1}{4} \frac{2 Rb l + 2 F p + F d - 4 F l}{l} \\
> Rc &:= \frac{1}{4} \frac{-2 Rb l + 2 F p + F d}{l}
\end{aligned}$$

7.4.3.2 Deformační podmínka $W_b = 0$

Vyjádření deformační podmínky pomocí Castiglianovy věty

$$w_b = 0 = \int M_o \frac{\partial M_o}{\partial R_b} dx = 0$$

Ohybové momenty

$$\begin{aligned}
> Mob &:= Ra \cdot x2 \\
&Mob := -\frac{1}{4} \frac{(2 Rb l + 2 F p + F d - 4 F l) x2}{l} \\
> Moa1 &:= Ra \cdot x11 + Rb \cdot (x11 - l) \\
&Moa1 := -\frac{1}{4} \frac{(2 Rb l + 2 F p + F d - 4 F l) x11}{l} + Rb (x11 - l) \\
> Moa2 &:= Ra \cdot x12 + Rb \cdot (x12 - l) - \frac{F}{2} \cdot (x12 - p) \\
&Moa2 := -\frac{1}{4} \frac{(2 Rb l + 2 F p + F d - 4 F l) x12}{l} + Rb (x12 - l) \\
&\quad - \frac{1}{2} F (x12 - p) \\
> Moc &:= Rc \cdot (2 \cdot l - x3) \\
&Moc := \frac{1}{4} \frac{(-2 Rb l + 2 F p + F d) (2 l - x3)}{l}
\end{aligned}$$

Parciální derivace momentu (index i)

$$\begin{aligned}
> Moali &:= \frac{\partial}{\partial Rb} Moa1 \\
&Moali := \frac{1}{2} x11 - l \\
> Moa2i &:= \frac{\partial}{\partial Rb} Moa2 \\
&Moa2i := \frac{1}{2} x12 - l \\
> Mob i &:= \frac{\partial}{\partial Rb} Mob \\
&Mobi := -\frac{1}{2} x2 \\
> Moci &:= \frac{\partial}{\partial Rb} Moc
\end{aligned}$$

$$Moci := -l + \frac{1}{2} x^3$$

Deformační podmínka vyjádřená pomocí Castiglianovy věty

$$\begin{aligned} > \text{integral} := \int_l^p Moa1 \cdot Moa1i \, dx11 + \int_0^l Mob \cdot Mobi \, dx2 + \int_{p+d}^{2 \cdot l} Moc \\ & \cdot Moci \, dx3 + \int_p^{p+d} Moa2 \cdot Moa2i \, dx12 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{integral} := & \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{8} \frac{2 Rb l + 2 F p + F d - 4 F l}{l} + \frac{1}{2} Rb \right) (p^3 \\ & - l^3) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} Rb l - \left(-\frac{1}{4} \frac{2 Rb l + 2 F p + F d - 4 F l}{l} \right. \right. \\ & \left. \left. + Rb \right) l \right) (p^2 - l^2) + Rb l^2 (p - l) + \frac{1}{24} (2 Rb l + 2 F p \\ & + F d - 4 F l) l^2 \\ & - \frac{1}{24} \frac{(-2 Rb l + 2 F p + F d) (8 l^3 - (p + d)^3)}{l} + \frac{1}{2} \left(\right. \\ & \left. - Rb l + F p + \frac{1}{2} F d \right) (4 l^2 - (p + d)^2) - \frac{1}{4} (-4 Rb l \\ & + 4 F p + 2 F d) l (2 l - p - d) + \frac{1}{3} \left(\right. \\ & \left. -\frac{1}{8} \frac{2 Rb l + 2 F p + F d - 4 F l}{l} + \frac{1}{2} Rb - \frac{1}{4} F \right) ((p \\ & + d)^3 - p^3) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} Rb l + \frac{1}{4} F p - \left(\right. \right. \\ & \left. \left. -\frac{1}{4} \frac{2 Rb l + 2 F p + F d - 4 F l}{l} + Rb - \frac{1}{2} F \right) l \right) ((p \\ & + d)^2 - p^2) - \left(-Rb l + \frac{1}{2} F p \right) l d = 0 \end{aligned}$$

$$> Rb := \text{solve}(\text{integral}, Rb)$$

$$\begin{aligned} Rb := & \frac{1}{4} \frac{1}{l^3} (F (d^3 - 6 l d^2 + 3 p^2 d + 3 p d^2 - 12 l p^2 - 4 l^3 \\ & + 18 p l^2 + 9 l^2 d + 2 p^3 - 12 l p d)) \end{aligned}$$

Kontrola výpočtu dosazením do silové podmínky rovnováhy

$$Zk := \text{simplify}(Ra + Rb + Rc - F)$$

$$Zk := 0$$

Vykreslení průběhu reakcí v podporách v závislosti na poloze zatěžujících sil

$$> Ra$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \frac{1}{l} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{l^2} (F (3 p d^2 + 3 p^2 d + d^3 - 6 l d^2 + 18 p l^2 + 9 l^2 d \right. \\ & \left. + 2 p^3 - 12 l p^2 - 12 l p d - 4 l^3)) + 2 F p + F d - 4 F l \right) \end{aligned}$$

> R_b

$$\frac{1}{4} \frac{1}{l^3} (F (3 p d^2 + 3 p^2 d + d^3 - 6 l d^2 + 18 p l^2 + 9 l^2 d + 2 p^3 - 12 l p^2 - 12 l p d - 4 l^3))$$

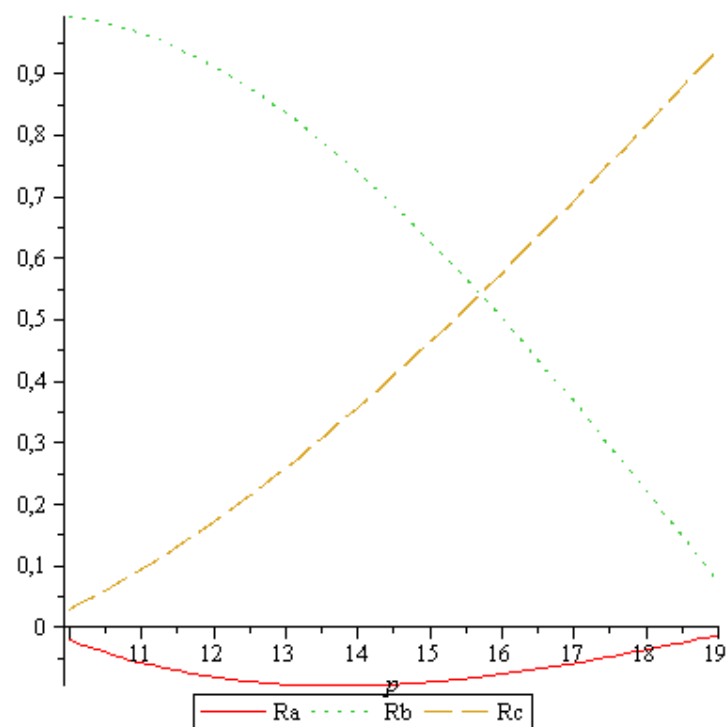
> R_c

$$\frac{1}{4} \frac{1}{l} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{l^2} (F (3 p d^2 + 3 p^2 d + d^3 - 6 l d^2 + 18 p l^2 + 9 l^2 d + 2 p^3 - 12 l p^2 - 12 l p d - 4 l^3)) + 2 F p + F d \right)$$

$l := 10$

$d := 1$

$F := 1$



Graf 5. Průběh sil v podporách R_a , R_b , R_c v závislosti na poloze p zatěžujících sil pro jejich polohu ve 2. poli

Vyjádření ohybového momentu v závislosti na proměnné x pro danou polohu zatěžujících sil p

$$\begin{aligned} & \text{simplify}(Moa1) \\ & -\frac{1}{4} \frac{1}{l} \left(\left(\frac{1}{2} \frac{1}{l^2} (F (d^3 - 6 l d^2 + 3 p^2 d + 3 p d^2 - 12 l p^2 - 4 l^3 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 18 p l^2 + 9 l^2 d + 2 p^3 - 12 l p d) \right) + 2 F p + F d - 4 F l \right) \\ & \quad x11 \Big) + \frac{1}{4} \frac{1}{l^3} (F (d^3 - 6 l d^2 + 3 p^2 d + 3 p d^2 - 12 l p^2 \\ & \quad - 4 l^3 + 18 p l^2 + 9 l^2 d + 2 p^3 - 12 l p d) (x11 - l)) \end{aligned}$$

> Moa2

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \frac{1}{l} \left(\left(\frac{1}{2} \frac{1}{l^2} (F (d^3 - 6 l d^2 + 3 p^2 d + 3 p d^2 - 12 l p^2 - 4 l^3 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 18 p l^2 + 9 l^2 d + 2 p^3 - 12 l p d) \right) + 2 F p + F d - 4 F l \right) \\ & \quad x12 \Big) + \frac{1}{4} \frac{1}{l^3} (F (d^3 - 6 l d^2 + 3 p^2 d + 3 p d^2 - 12 l p^2 \\ & \quad - 4 l^3 + 18 p l^2 + 9 l^2 d + 2 p^3 - 12 l p d) (x12 - l)) \\ & \quad - \frac{1}{2} F (x12 - p) \end{aligned}$$

> Mob

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \frac{1}{l} \left(\left(\frac{1}{2} \frac{1}{l^2} (F (d^3 - 6 l d^2 + 3 p^2 d + 3 p d^2 - 12 l p^2 - 4 l^3 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 18 p l^2 + 9 l^2 d + 2 p^3 - 12 l p d) \right) + 2 F p + F d - 4 F l \right) \\ & \quad x2 \Big) \end{aligned}$$

> Moc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \frac{1}{l} \left(\left(-\frac{1}{2} \frac{1}{l^2} (F (d^3 - 6 l d^2 + 3 p^2 d + 3 p d^2 - 12 l p^2 - 4 l^3 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + 18 p l^2 + 9 l^2 d + 2 p^3 - 12 l p d) \right) + 2 F p + F d \right) (2 l \\ & \quad - x3) \Big) \end{aligned}$$

Určení ohybových momentů ve vytipovaných nebezpečných řezech dosazením jejich souřadnic x . Tím dostáváme průběh ohybových momentů ve významných řezech v závislosti na poloze zatěžujících sil p

> x11 := p

$$x11 := p$$

> *Moa1*

$$-\frac{1}{4} \frac{1}{l} \left(\left(\frac{1}{2} \frac{1}{l^2} (F (d^3 - 6 l d^2 + 3 p^2 d + 3 p d^2 - 12 l p^2 - 4 l^3 + 18 p l^2 + 9 l^2 d + 2 p^3 - 12 l p d)) + 2 F p + F d - 4 F l \right) p \right) + \frac{1}{4} \frac{1}{l^3} (F (d^3 - 6 l d^2 + 3 p^2 d + 3 p d^2 - 12 l p^2 - 4 l^3 + 18 p l^2 + 9 l^2 d + 2 p^3 - 12 l p d) (p - l))$$

> *x12 := p + d*

$$x12 := p + d$$

> *Moa2*

$$-\frac{1}{4} \frac{1}{l} \left(\left(\frac{1}{2} \frac{1}{l^2} (F (d^3 - 6 l d^2 + 3 p^2 d + 3 p d^2 - 12 l p^2 - 4 l^3 + 18 p l^2 + 9 l^2 d + 2 p^3 - 12 l p d)) + 2 F p + F d - 4 F l \right) (p + d) \right) + \frac{1}{4} \frac{1}{l^3} (F (d^3 - 6 l d^2 + 3 p^2 d + 3 p d^2 - 12 l p^2 - 4 l^3 + 18 p l^2 + 9 l^2 d + 2 p^3 - 12 l p d) (p + d - l)) - \frac{1}{2} F d$$

> *x2 := l*

$$x2 := l$$

> *Mob*

$$-\frac{1}{8} \frac{1}{l^2} (F (d^3 - 6 l d^2 + 3 p^2 d + 3 p d^2 - 12 l p^2 - 4 l^3 + 18 p l^2 + 9 l^2 d + 2 p^3 - 12 l p d)) - \frac{1}{2} F p - \frac{1}{4} F d + F l$$

> *x3 := p + d*

$$x3 := p + d$$

> *Moc*

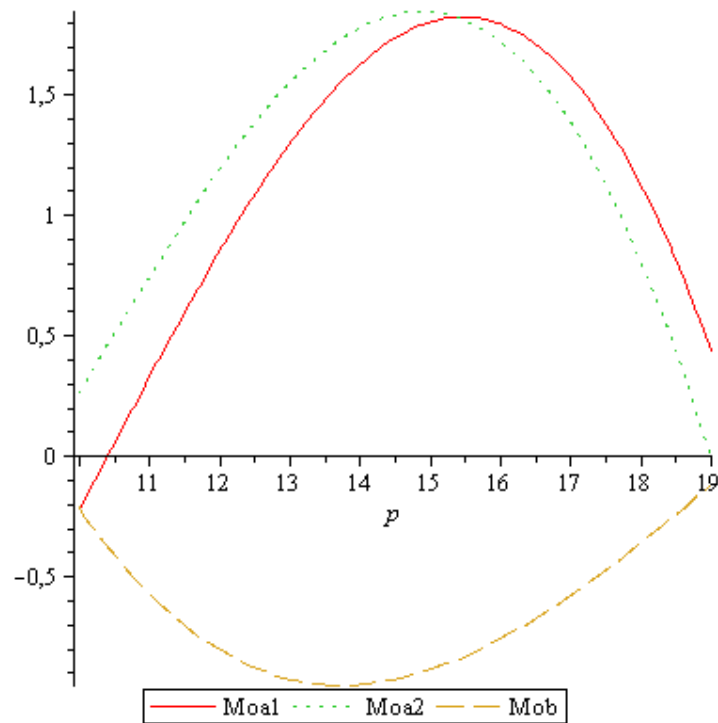
$$\frac{1}{4} \frac{1}{l} \left(\left(-\frac{1}{2} \frac{1}{l^2} (F (d^3 - 6 l d^2 + 3 p^2 d + 3 p d^2 - 12 l p^2 - 4 l^3 + 18 p l^2 + 9 l^2 d + 2 p^3 - 12 l p d)) + 2 F p + F d \right) (2 l - p - d) \right)$$

> *l := 10*

> *d := 1*

> *F := 1*

> *plots[interactive]();*



Graf 6. Průběh maximálních ohybových momentů M_{oa1} , M_{oa2} , M_{ob} v závislosti na poloze zatěžujících sil pro jejich polohu ve 2. polem

> **Určení polohy a velikosti maximálního ohybového momentu pro polohu zatěžujících sil nad 2. polem**

$$> \text{derivace1} := \frac{d}{dp} Moa2 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{derivace1} := & -\frac{1}{40} \left(\frac{2083}{200} + \frac{3}{100} p^2 - \frac{117}{100} p \right) (p + 1) \\ & + \frac{1283}{8000} p + \frac{4641}{8000} + \frac{1}{4000} p^3 - \frac{117}{8000} p^2 + \left(\frac{1683}{4000} \right. \\ & \left. + \frac{3}{2000} p^2 - \frac{117}{2000} p \right) (p - 9) = 0 \end{aligned}$$

$$> \text{simplify}(\text{derivace1})$$

$$\frac{1753}{2000} p - \frac{3467}{1000} + \frac{1}{1000} p^3 - \frac{93}{1600} p^2 = 0$$

$$> \text{poloha}[2]$$

$$14.8813448;$$

>

$$> \text{derivace2} := \frac{d}{dp} Moa1$$

$$\begin{aligned} \text{derivace2} := & -\frac{1}{40} \left(\frac{2083}{200} + \frac{3}{100} p^2 - \frac{117}{100} p \right) p + \frac{1283}{8000} p \\ & + \frac{4641}{8000} + \frac{1}{4000} p^3 - \frac{117}{8000} p^2 + \left(\frac{1683}{4000} + \frac{3}{2000} p^2 \right. \\ & \left. - \frac{117}{2000} p \right) (p - 10) \end{aligned}$$

$$\text{derivace3} := \frac{d}{dp} \text{Mob}$$

$$\text{derivace3} := -\frac{2083}{800} - \frac{3}{400} p^2 + \frac{117}{400} p$$

poloha2 [2]

15.4540846:

p := poloha [2]

p := 14.8813448:

Moa2

1.84583857:

p := poloha2 [2]

p := 15.4540846:

Moa1

1.82558357:

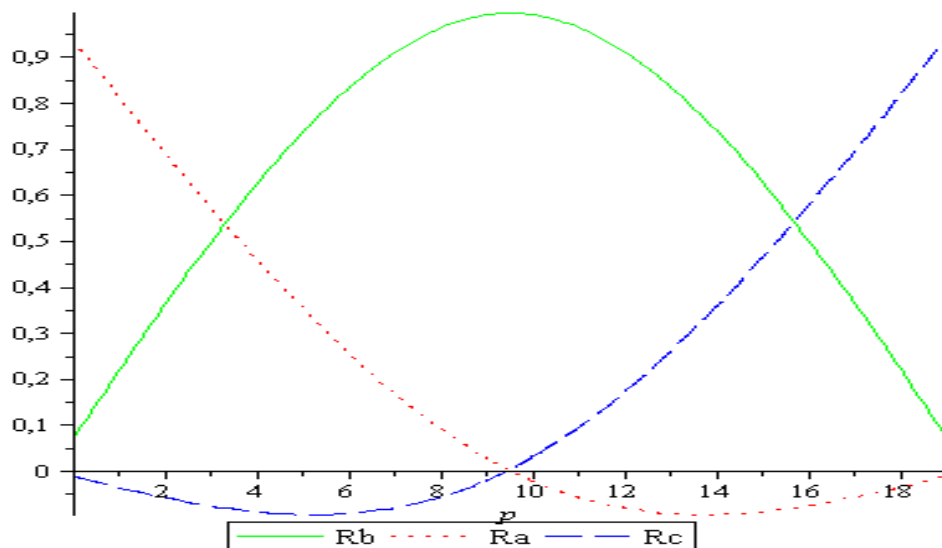
p := poloha3 [1]

p := 13.7481886:

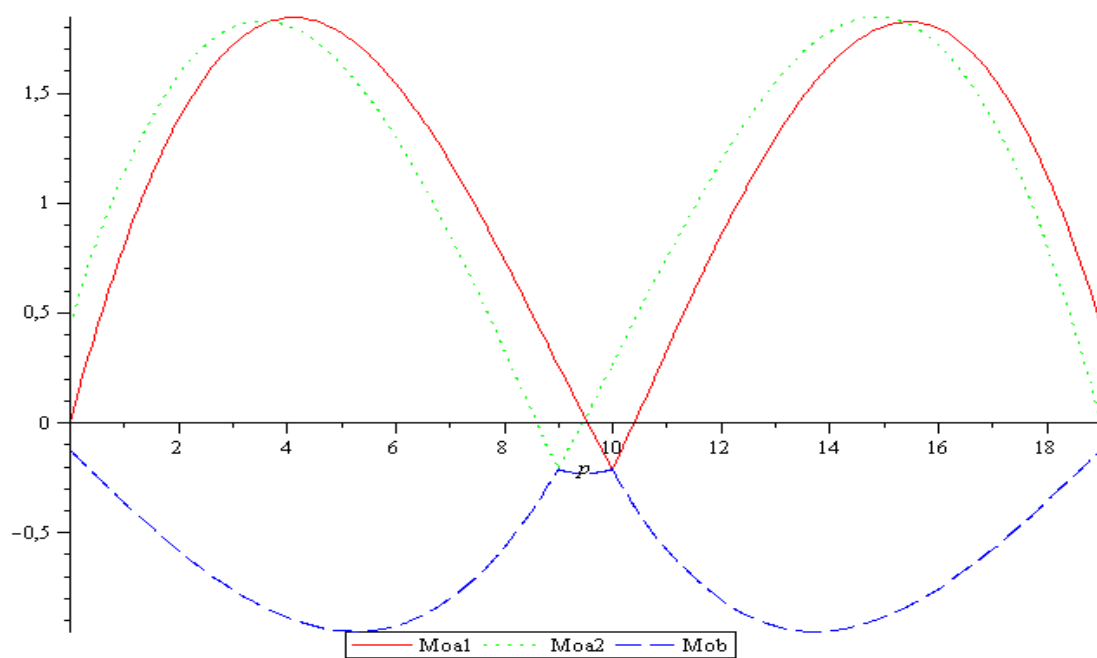
Mob

-0.951445440:

Na závěr výpočtu jsme sestavili z jednotlivých částí průběh sil v podporách a průběh maximálních ohybových momentů v závislosti na poloze zatěžujících sil p po celé délce nosníku.



Graf 7. Průběh sil Ra, Rb, Rc v podporách v závislosti na poloze p pro nosník na třech podporách



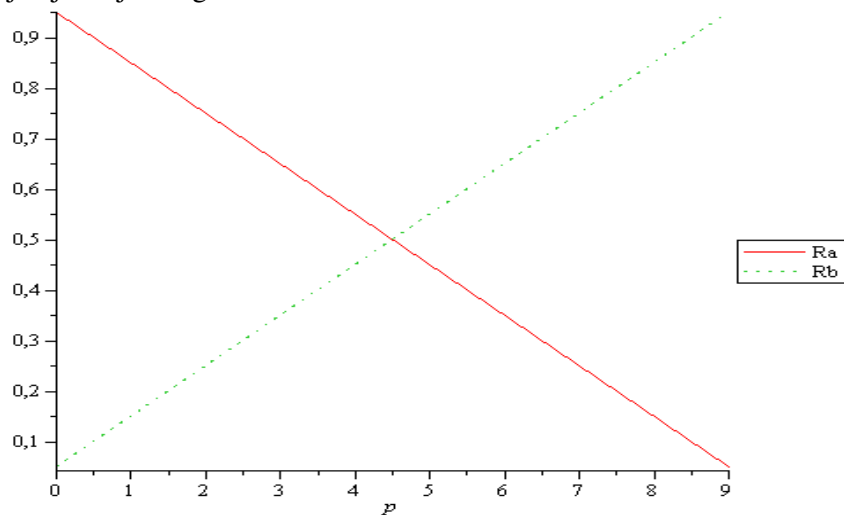
Graf 8. Průběh ohybových momentů v místech jejich extrémů v závislosti na poloze p pro nosník na třech podporách

Z průběhů je zřejmé, že jak průběh momentů, tak průběh sil je symetrický.

8 Prezence výsledků řešení:

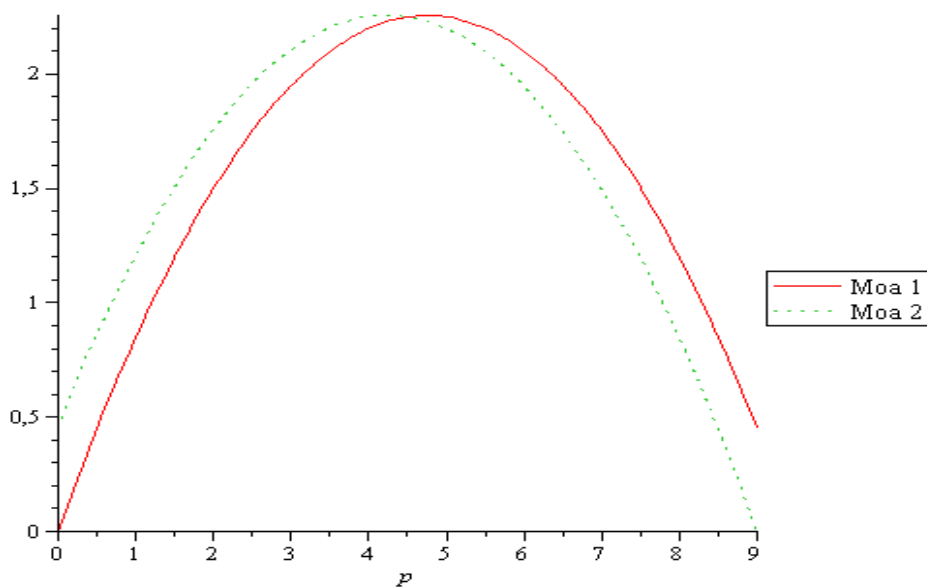
8.1 Nosník na dvou podporách

Začínal jsem s řešením dráhy podepřené dvěma podporami. Byl to jediný staticky určitý případ. Průběh maximálních ohybových momentů od zatěžujících sil byl symetrický kolem středu dráhy jak je zřejmé z grafu níže.



Graf 9. Průběh sil v podporách v závislosti na parametru p pro nosník na dvou podporách

Pouze u nosníku se dvěma podporami je lineární průběh sil v podporách v závislosti na poloze zatěžujících sil p . To proto že se zde neprojevuje vliv dalších podpor, jež narušují lineární průběh těchto sil v podporách.



Graf 10. Průběh ohybových momentů v místech jejich extrémů v závislosti na poloze p pro nosník na dvou podporách

Ohybové

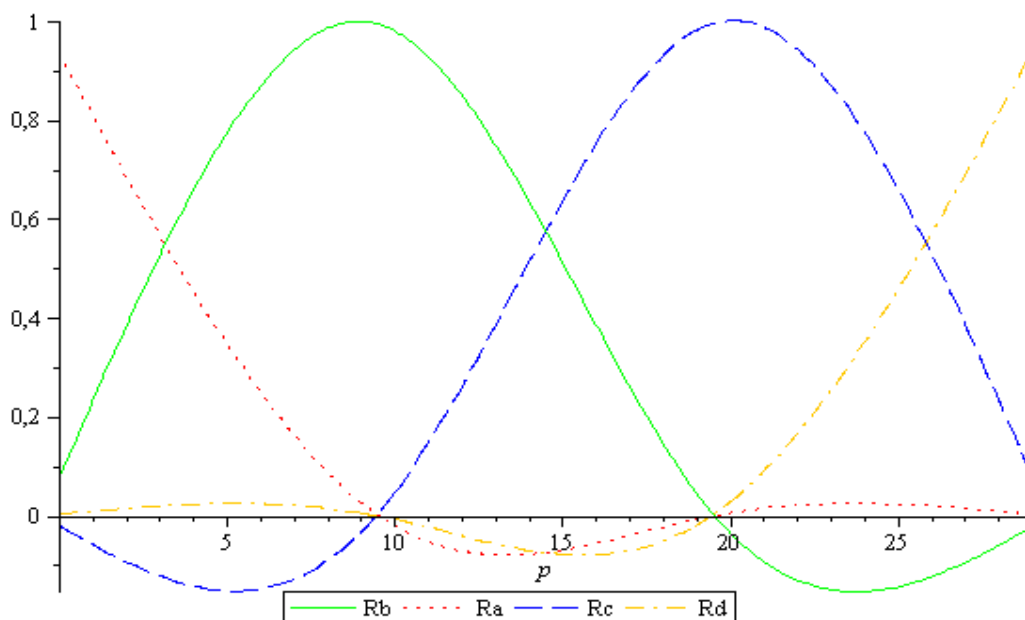
momenty dosahují stejné maximální hodnoty. Ohybový moment M_{oa2} v místě druhé zatěžující síly zleva pro polohu $p=4,25$. Ohybový moment M_{oa1} v místě první zatěžující síly pro polohu $p=4,75$. Osa pole se zde ztotožňuje se střední hodnotou poloh maximálních momentů M_{oa1} a M_{oa2} . Ve všech ostatních případech se střední poloha maximálních hodnot ohybových momentů M_{oa1} a M_{oa2} posouvá k bližšímu konci nosníku.

8.2 Nosník na třech podporách

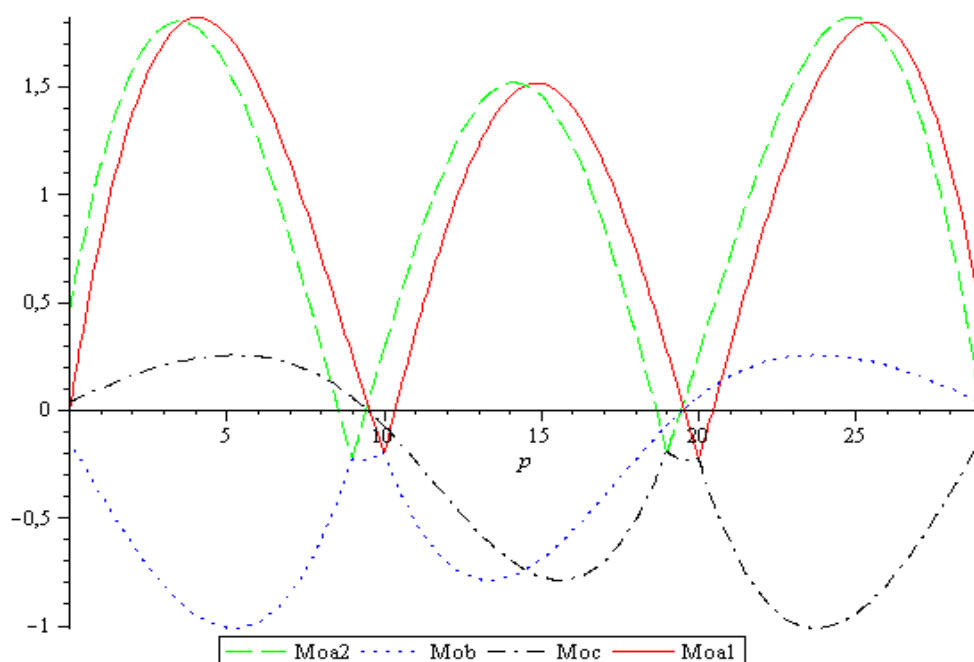
Viz. Graf .7 a 8 v kap 6.4.

8.3 Nosník na čtyřech podporách

Zde si poprvé můžeme povšimnout poklesu maximální hodnoty momentů M_{oa1} a M_{oa2} v prostředních polích dráhy viz graf č.11 Je také zřejmé že největší namáhání je v krajních polích. Současně vidíme, že ohybové momenty v místě podpor se rychle zmenšují se vzdáleností podpory od zatíženého pole. Stejné tendence můžeme sledovat ve zvýšené míře u nosníků s vyšším počtem podpor.

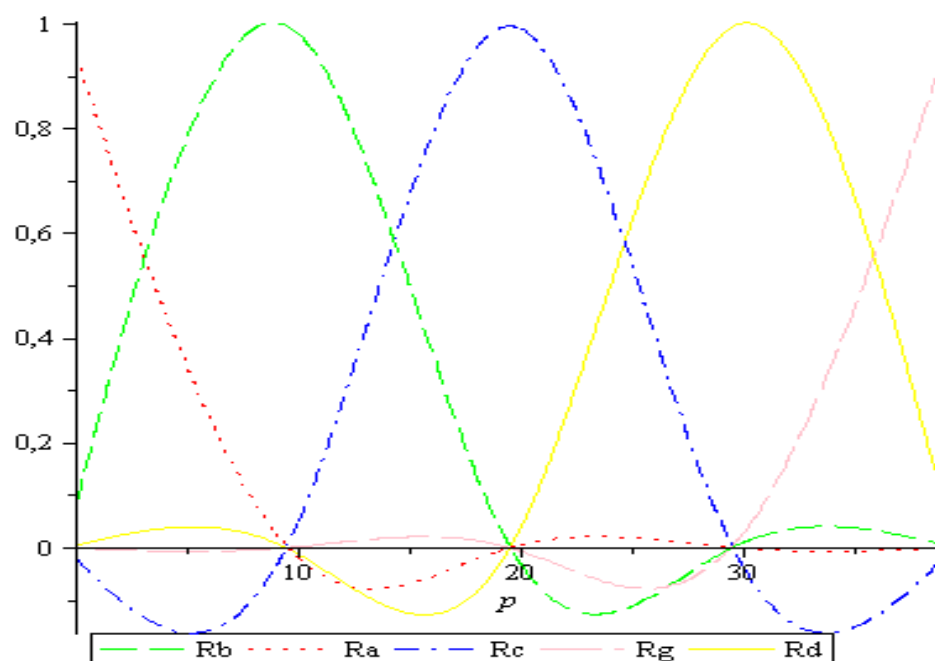


Graf 11. Průběh sil v podporách v závislosti na parametru p pro nosník na čtyřech podporách

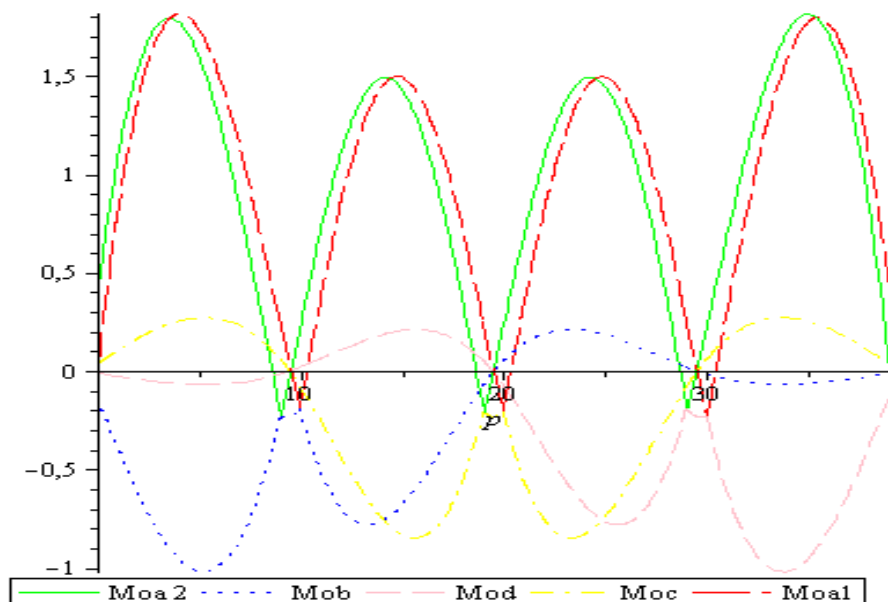


Graf 12. Průběh ohybových momentů v místech jejich extrémů v závislosti na poloze p pro nosník na čtyřech podporách

8.4 Nosník na pěti podporách



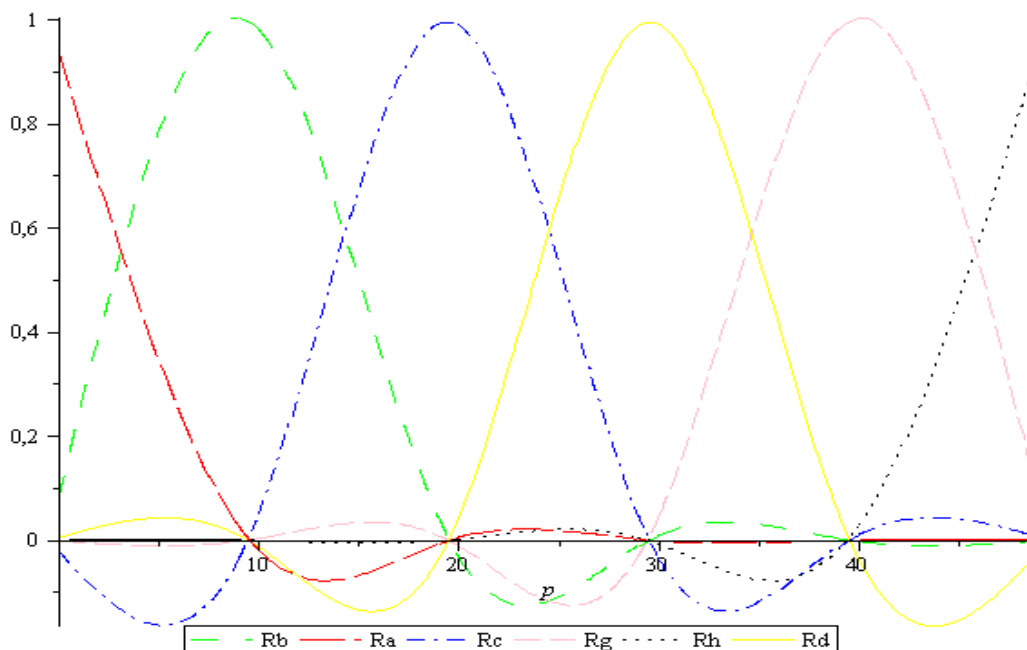
Graf 13. Průběh sil v místech podpor v závislosti na parametru p pro nosník na pěti podporách



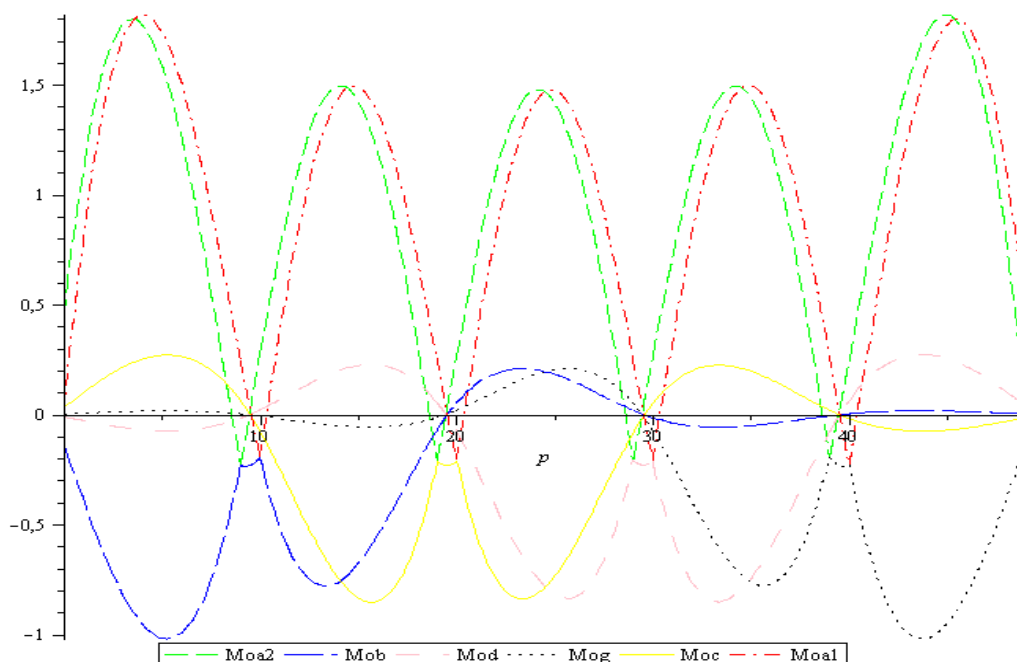
Graf 14. Průběh ohybových momentů v místech jejich extrémů v závislosti na poloze p pro nosník na pěti podporách

Pokles maximální hodnoty momentu u nosníku s pěti podporami ve druhém poli oproti prvnímu je o 17,7% (z 1,819 na 1,498). U dráhy se čtyřmi podporami je tento rozdíl o 16,7%. Větší pokles maximálních hodnot momentů ve středních polích u dráhy s pěti podporami oproti dráze se čtyřmi podporami je z důvodu vyztužujícího působení většího počtu podpor. Ty pomáhají ke snížení maximálních hodnot momentu. V grafu 19 je tato závislost ukázána.

8.5 Nosník na šesti podporách



Graf 15. Průběh sil v místech podpor v závislosti na parametru p pro nosník na šesti podporách

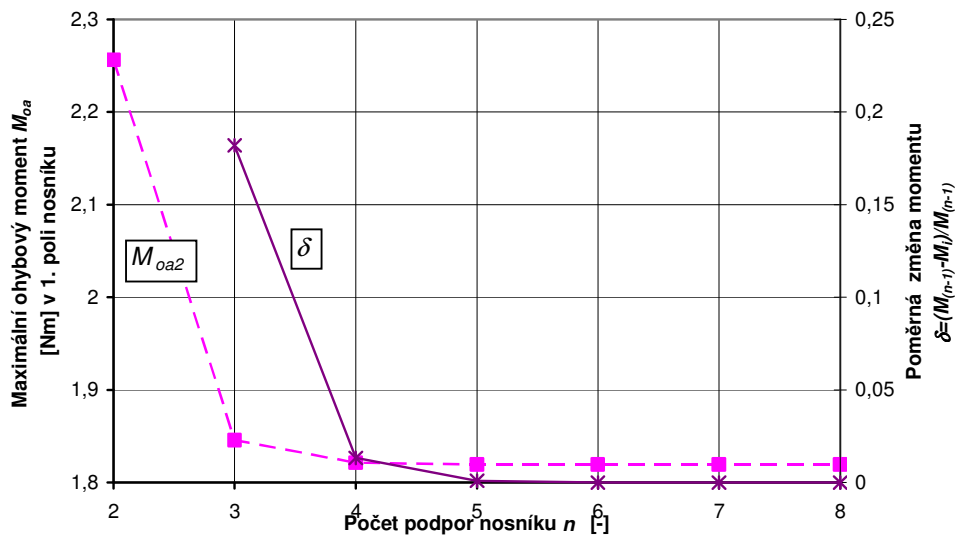


Graf 16. Průběh ohybových momentů v místech jejich extrémů v závislosti na poloze p pro nosník na šesti podporách. Rozteč podpor $l=10\text{m}$. Rozteč sil $d=1\text{m}$.

V grafech 10; 12; 14; 16 vidíme, že maximální ohybový moment je v místě druhé zatěžující síly $F/2$ pro polohu obou zatěžujících sil v prvním poli nosníku, nebo v místě první zatěžující síly $F/2$ pro polohu obou zatěžujících sil v posledním poli nosníku. Dále vidíme, že velikost tohoto maximálního ohybového momentu klesá s rostoucím počtem podpor nosníku. Největší zmenšení je mezi nosníkem se dvěma podporami a třemi podporami. Při dalším zvyšování počtu podpor se maximální ohybový moment již tak nemění. Dále je z průběhu maximálních hodnot momentů vidět, že maximální ohybový moment pro polohu zatěžujících sil nad druhým polem nosníku je nižší než maximální moment pro polohu zatěžujících sil nad prvním polem nosníku. Tento trend platí i pro polohu zatěžujících sil nad třetím polem nosníku i když zde je změna již malá. Detailně tyto závislosti probereme v kapitole 8.6

8.6 Závislost maximálních hodnot ohybových momentů na počtu podpor

8.6.1 Závislost maximálního ohybového momentu M_{oa2} na počtu podpor nosníku



Graf 17. Srovnání maximálních hodnot ohybového momentu pro nosníky o třech až osmi podporách. Platí pro rozteč podpor $d=1$.

Jak jsme uvedli v bodě 7.6 sledujeme maximální ohybový moment M_{oa2} (pro polohu zatěžujících sil v prvním poli nosníku). Jestliže vyjádříme poměrnou změnu maximálního ohybového momentu pro nosník s n podporami oproti nosníku s $(n-1)$ podporou podle výrazu:

$$\delta = \frac{M_{n-1} - M_n}{M_{n-1}} \quad (17)$$

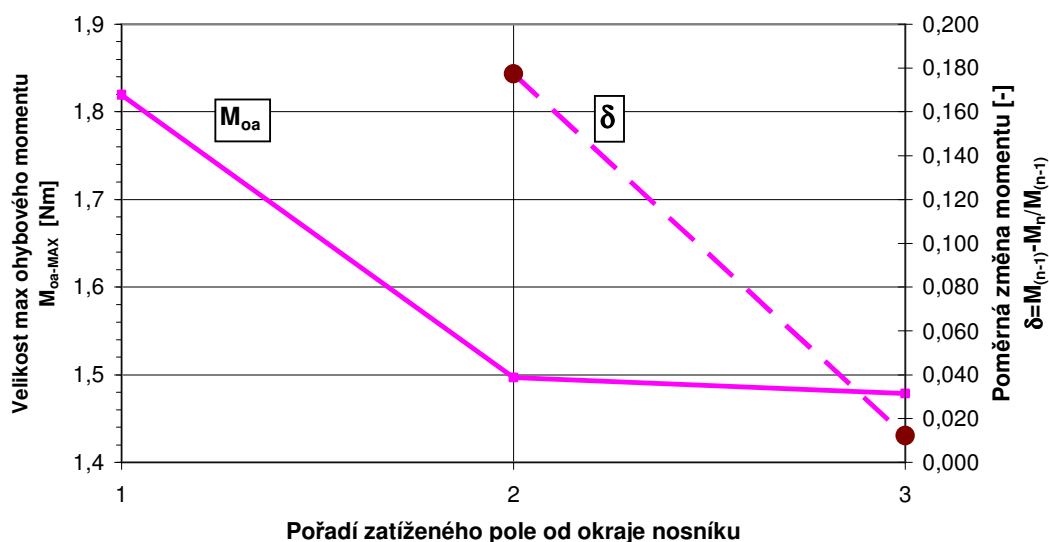
V grafu 17 jsme mimo vlastních maximálních ohybových momentů vynesli také poměrnou změnu maximálních ohybových momentů δ . Zde jasně vidíme, že největší změna maximálního momentu je při změně počtu podpor ze dvou na tři. Od počtu podpor 5 se velikost maximálního ohybového momentu již prakticky nemění. Pro ilustraci uvádím v tabulce 3 poměrnou změnu momentu pro $n=5,6,7,8$ podpor.

n	δ
5	9,54 E-4
6	6,85 E-5
7	4,92 E-6
8	3,53 E-7

Tabulka č.3

Prakticky to znamená, že z hlediska přesnosti určení maximálního ohybového momentu nemá význam řešit nosník s více než šesti podporami.

8.6.2 Závislost velikosti ohybového momentu M_{oa1} pro polohu zatížení nad prvním až třetím polem



Graf 18. Závislost velikosti maximálního ohybového momentu pro polohu zatěžujících sil $F/2$ nad prvním až čtvrtým polem nosníku se šesti podporami

Jak jsme uvedli v bodě 7.5 u všech znázorněných průběhů ohybového momentu je vidět, že maximum ohybového momentu je pro polohu zatěžujících sil v prvním poli. Velikost ohybového momentu pro polohu zatěžujících sil v druhém a třetím poli klesá jak je vidět v grafu 18. Poměrná změna momentu pro první pole je mnohem nižší než pro druhé pole. Z uvedené poměrné změny vyplývá, že největší snížení ohybového momentu nastane při poloze zatěžujících sil ve druhém poli, pro polohu zatěžujících sil ve třetím poli již ohybový moment tak výrazně neklesá.

Proto pokud chceme snížit namáhání jeřábové dráhy ohybovým momentem stačí provést úpravy jenom na prvním poli. Úpravy na dalších polích již nepřinesou výrazný efekt.

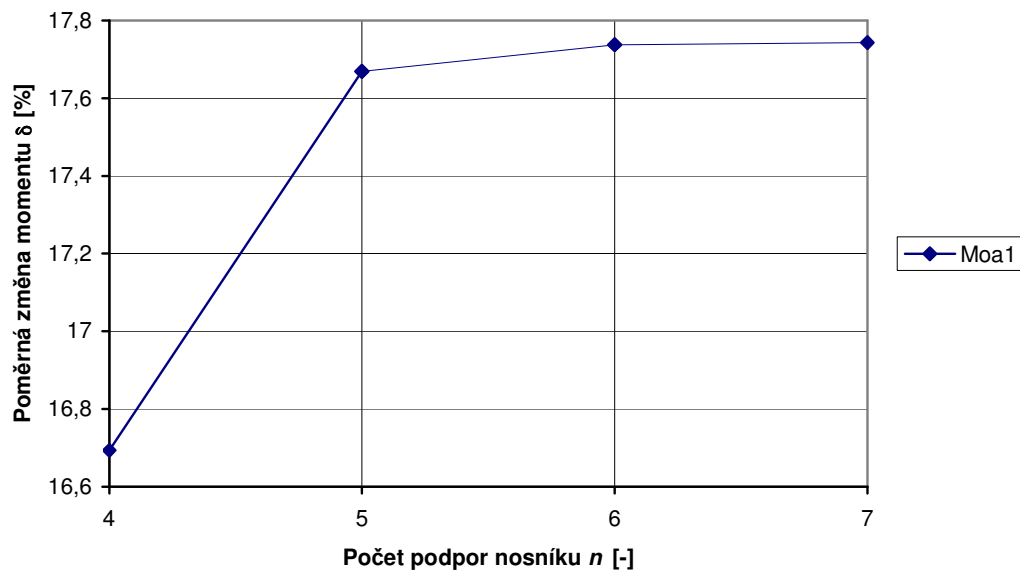
Možnými úpravami by mohlo být zmenšení rozteče podpor v krajním poli nebo zvětšení modulu průřezu v ohybu W_o nosníku jeřábové dráhy v krajním poli v poměru maxim momentů v krajním poli 1 a v poli 2

$$W_{opole1} = W_{opole2} \cdot \frac{M_{oa21}}{M_{oa23}} \quad 18)$$

K určení zmenšení rozteče z důvodu snížení maximálního ohybového momentu v prvním poli na úroveň ohybového momentu v druhém poli se vrátíme v dalších grafech viz Graf 24.

8.6.3 Závislost poměrné změny δ maximálního ohybového momentu M_{0a} pro zatížené druhé pole nosníku oproti prvnímu zatíženému poli v závislosti na počtu podpor n

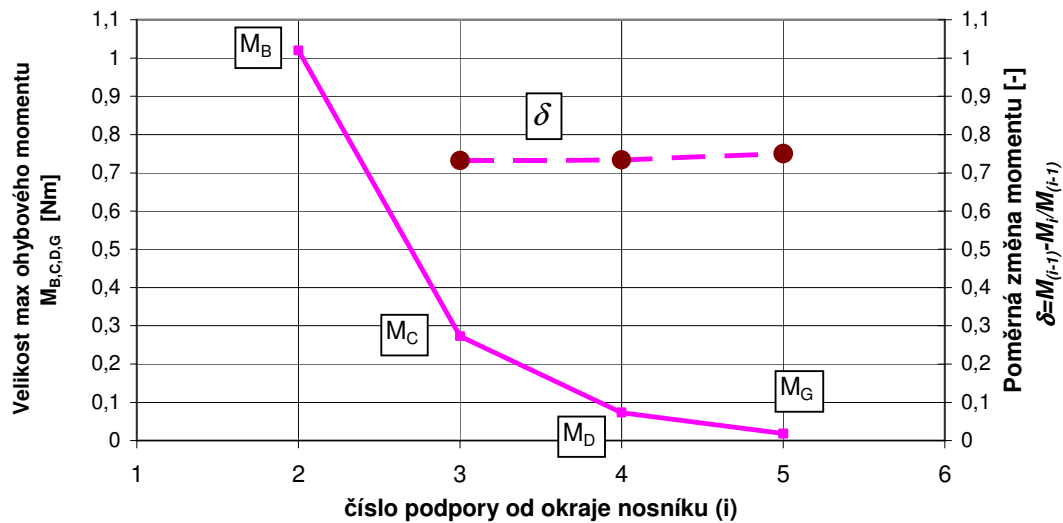
V následujícím grafu určíme vliv počtu podpor na poměrnou změnu δ [%] maximálního ohybového momentu pro druhé zatížené pole oproti maximálnímu momentu pro první zatížené pole



Graf 19. Poměrná změna δ maximálního ohybového momentu pro zatížení v druhém poli 2 oproti poli 1. v závislosti na celkovém počtu podpor nosníku

Jak je vidět z grafu 19 nejmenší poměrná změna δ je pro nosník se čtyřmi podporami. S rostoucím počtem podpor tato poměrná změna roste, ale její velikost již od nosníku se šesti podporami zůstává téměř stálá. Velikost poměrné změny momentu se zvyšuje s rostoucím počtem podpor, protože na změnu mají vyztužující vliv ohybové momenty v místech podpor. Zatímco pro zatížení v prvním poli je ohybový moment jen v místě jedné podpory (vnitřní podpory), pro druhé zatížené pole je ohybový moment v místech obou podpor sousedících s druhým polem. Pokud jde o nosník s více podporami než 4, potom se projevuje ještě vliv ohybového momentu v místech dalších vzdálenějších podpor. Tento vliv se vzdáleností výrazně klesá jak si můžeme ujasnit v Grafu 20.

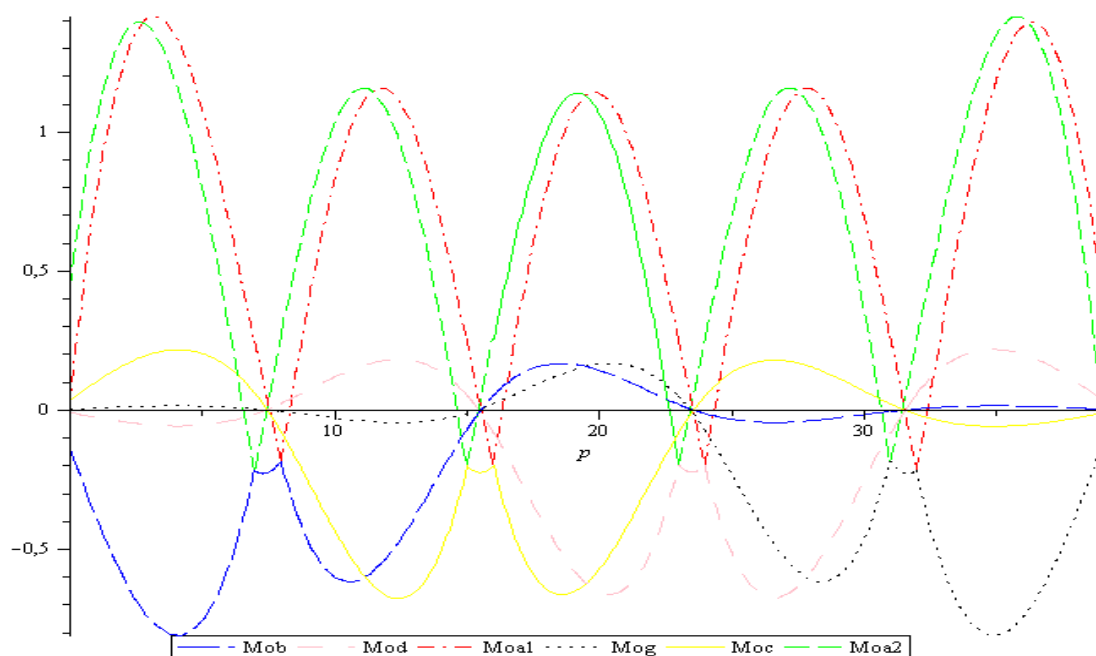
8.6.4 Závislost velikosti maximálních ohybových momentů v místech podpor B, C, D, G pro první zatížené pole nosníku



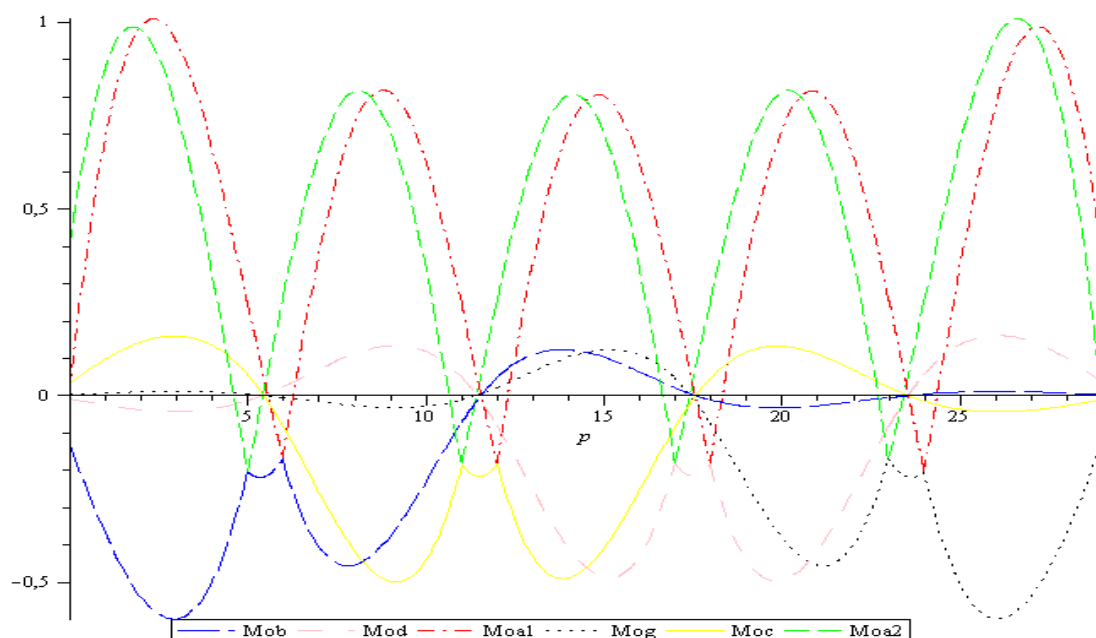
Graf 20. Velikosti maximálních ohybových momentů v místech podpor M_B, C, D, G pro zatížené 1.pole nosníku na šesti podporách. Momenty jsou vyneseny v absolutní hodnotě.

Jak jsme již uvedli velikost ohybového momentu v místech podpor se vzdáleností podpory od zatíženého pole rychle klesá viz Graf. 20. Na rozdíl od jiných změn je poměrná změna ohybového momentu v podpoře následující, oproti předchozí, téměř stálá. Rychlým snížením těchto ohybových momentů si můžeme vysvětlit rychlé ustálení maximálního momentu pro polohu zatěžujících sil nad prvním polem pro rostoucí počet podpor v grafu 17 a také ustálení velikosti maximálního momentu pro polohu zatěžujících sil v 1.-3. poli v Grafu 18.

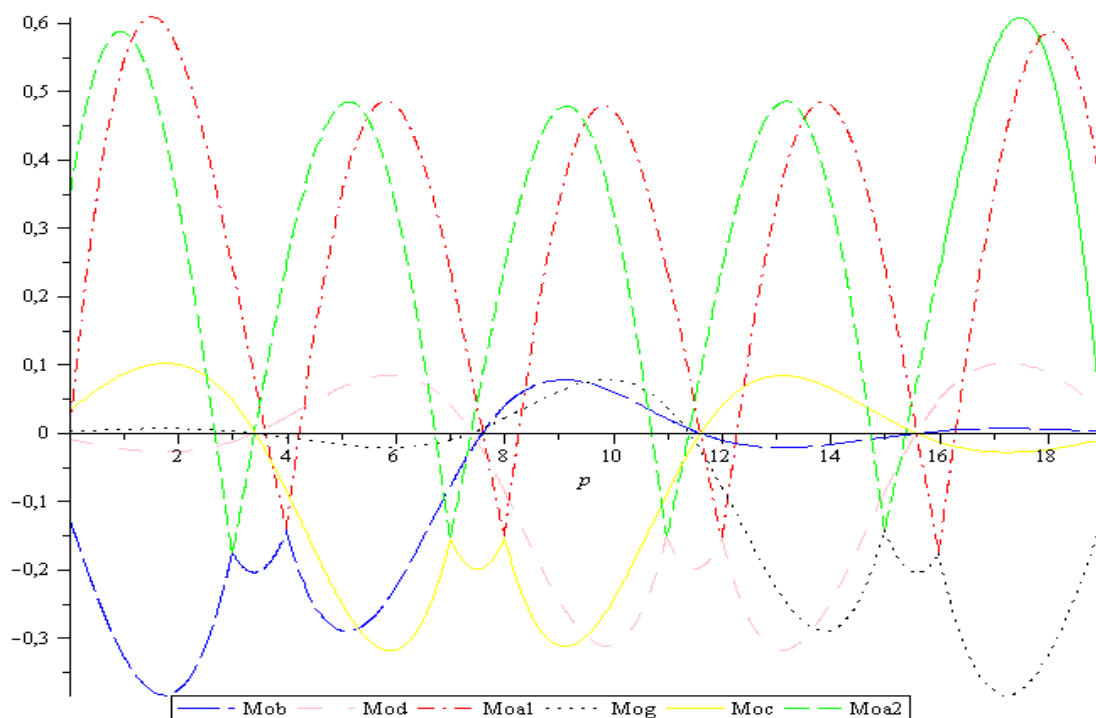
8.7 Závislost maximálních ohybových momentů pro extrémní řezy na rozteči podpor l .



Graf 21. Průběh ohybových momentů v místech jejich extrémů v závislosti na poloze p pro nosník na šesti podporách. Rozteč podpěr $l=8\text{m}$. Rozteč sil $d=1\text{m}$.



Graf 22. Průběh ohybových momentů v místech jejich extrémů v závislosti na poloze p pro nosník na šesti podporách. Rozteč podpěr $l=6\text{m}$. Rozteč sil $d=1\text{m}$.



Graf 23. Průběh ohybových momentů v místech jejich extrémů v závislosti na poloze p pro nosník na šesti podporách. Rozteč podpor $l=4\text{m}$. Rozteč sil $d=1\text{m}$.

Z průběhů ohybových momentů pro nosník na šesti podporách s proměnnou roztečí podpor jsou výsledky vykresleny na předcházejících grafech:

Graf 16 rozteč pole $l = 10\text{m}$

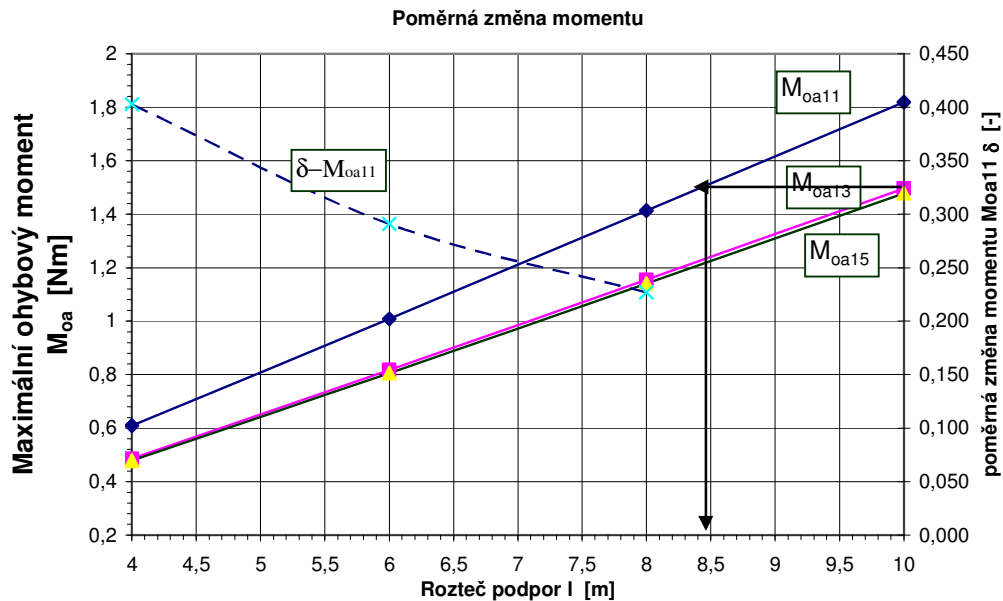
Graf 21 rozteč pole $l = 8\text{m}$

Graf 22 rozteč pole $l = 6\text{m}$

Graf 23 rozteč pole $l = 4\text{m}$

Maximální ohybový moment M_{oa} v místech zatěžujících sil má stejný charakter jako u nosníku s roztečí podpor $l=10\text{m}$. Jeho hodnota se se zmenšováním rozteče l výrazně snižuje. Ohybový moment M_{ob} v místě podpory B se sice také snižuje ale pomaleji než moment M_{oa} .

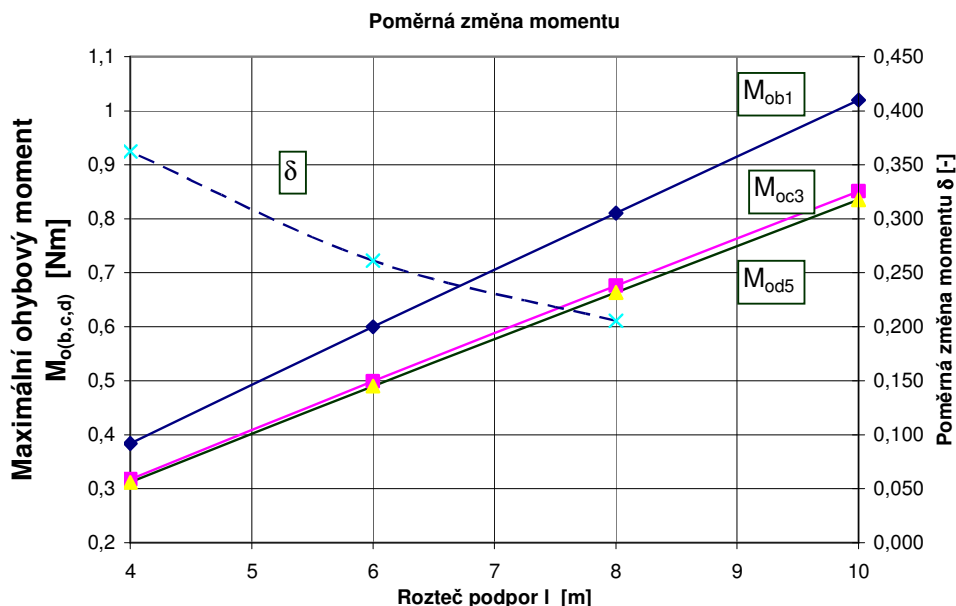
8.7.1 Závislost maximálního ohybového momentu M_{oa} v místě zatěžující první síly v 1. 2. a ve 3. poli na rozteči podpor l



Graf 24. Závislost ohybových momentů v místě první zatěžující síly v 1. v 2. a ve 3. poli na rozteči podpor l . Rozteč zatěžujících sil $d=1$

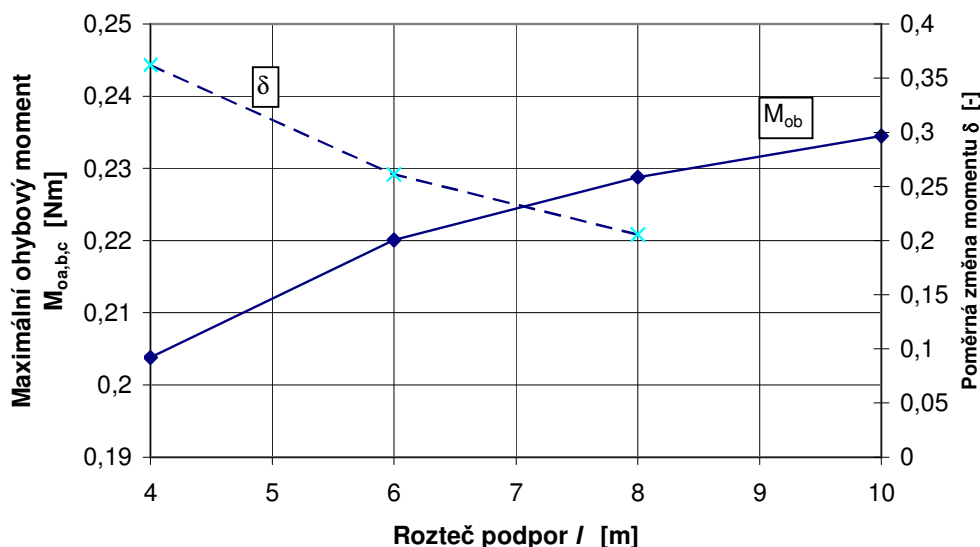
V grafu 24 je vyznačeno jak se mění maximální ohybový moment M_{oa} v závislosti na rozteči podpor l . Vidíme, že se velikost ohybového momentu s klesající roztečí snižuje. Také je vidět, že pro maximální ohybové momenty M_{oa13} pro zatížené druhé pole a M_{oa15} pro zatížené třetí pole vykazují podobný poměr v celém rozsahu sledovaných roztečí podpor $l=(4-10)m$. Poměrná změna maximálního momentu s klesající roztečí stoupá. V tomto diagramu můžeme odečíst přibližnou hodnotu rozteče krajní podpory pro podmínku, že maximální ohybový moment v krajním poli má být stejný jako ve druhém poli od kraje. Z toho vidíme, že srovnatelná rozteč krajního pole je 8,45m.

8.7.2 Závislost maximálního ohybového momentu v místech podpor $M_{o(b,c,d)}$ pro polohu zatěžujících sil v prvním poli na rozteči podpor l



Graf 25. Závislost ohybového momentu M_{ob1} pro zatížení v 1. poli, M_{oc3} pro zatížení v 2. poli a M_{od5} pro zatížení v 3. poli na rozteči podpor l . Rozteč zatěžujících sil $d=1$. Momenty jsou vyneseny v absolutní hodnotě.

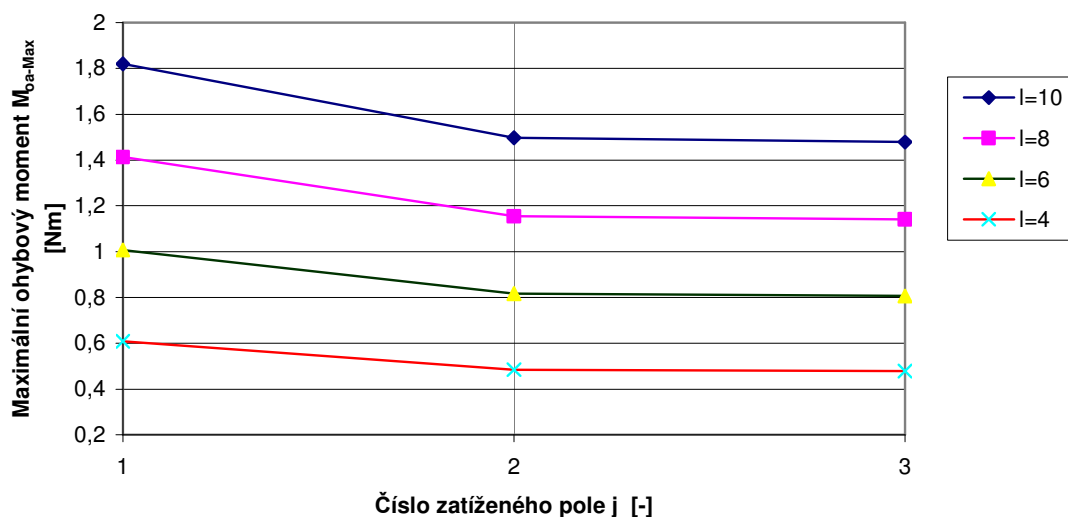
V Grafu 25 je obdobný průběh maximálních ohybových momentů v místech vnitřních podpor nosníku. Průběh je obdobný jako u momentů M_{oa} , poměrná změna momentů v závislosti na rozteči podpor je shodná.



Graf 26. Závislost ohybového momentu M_{ob} na rozteči podpor l pro polohu zatěžujících sil v prvním poli i v druhém poli nosníku. (Jedna zat. síla v prvním poli druhá zat. síla v druhém poli) Rozteč zatěžujících sil $d=1$

V Grafu 26 je znázorněn průběh ohybového momentu v místě podpory B v závislosti na rozteči podpor l . Tento průběh platí pro polohu zatěžujících sil v prvním poli a současně ve druhém poli. Velikost tohoto momentu je nízká, ale poměrná změna momentu je stejná jako pro polohu zatěžujících sil mezi podporami.

8.7.3 Závislost maximálního ohybového momentu M_{oa} na rozteči podpor $l = (4-10)m$ pro polohu zatěžujících sil v prvním až třetím poli

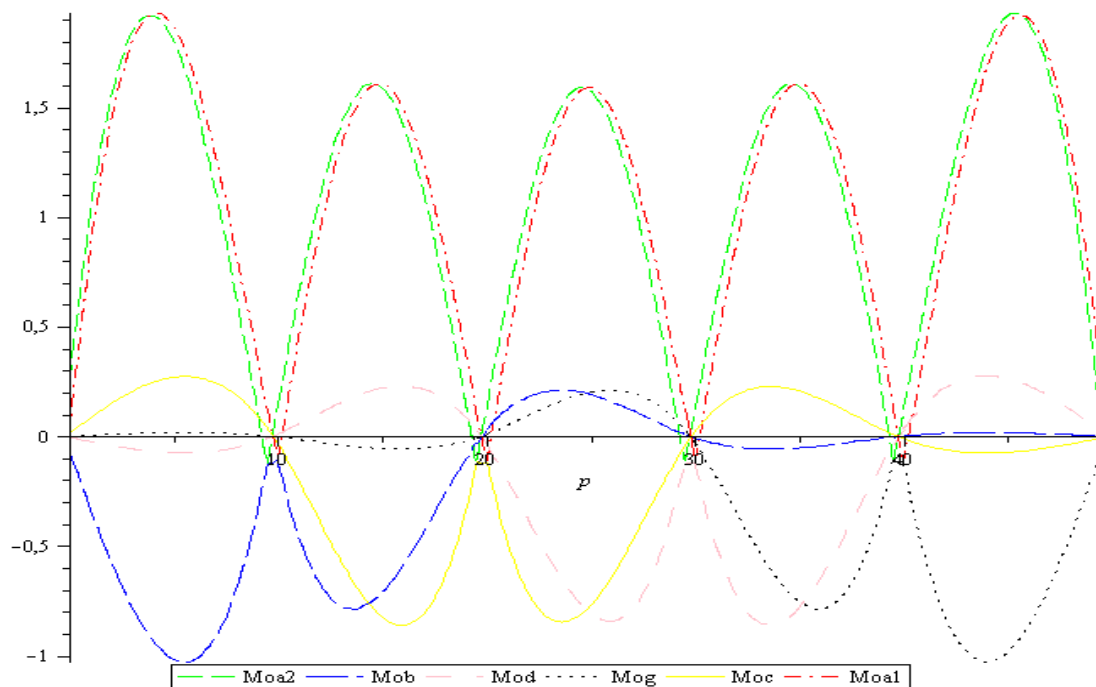


Graf 27. Závislost ohybového momentu M_{oa} na rozteči podpor l pro polohu zatěžujících sil v prvním až třetím poli. Rozteč zatěžujících sil $d=1$. Nosník se šesti podporami

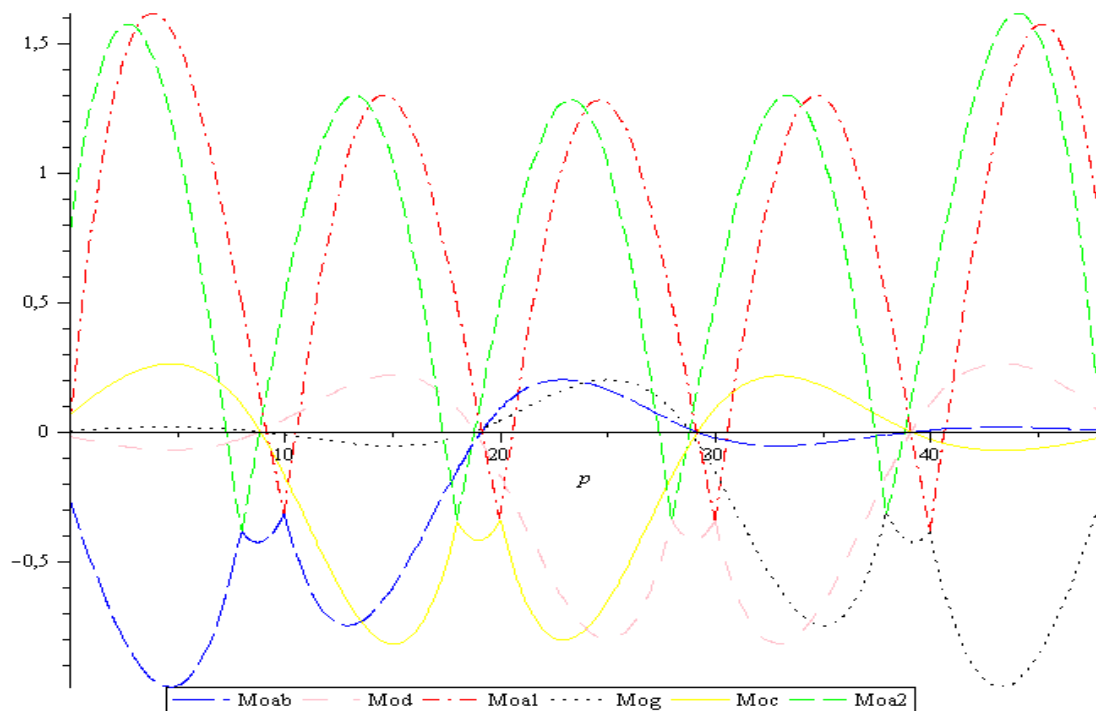
V Grafu 27 je znázorněno snížení maximálního ohybového momentu pro první až třetí zatížené pole pro zadanou rozteč $l = (4-10)m$. Je vidět, že průběh momentů je obdobný nezávisle na rozteči podpor

Celkově můžeme říci, že zmenšováním rozteče podpor nosníku a snižují všechna maxima ohybových momentů, jak pod zatěžujícími silami tak i v místech podpor.

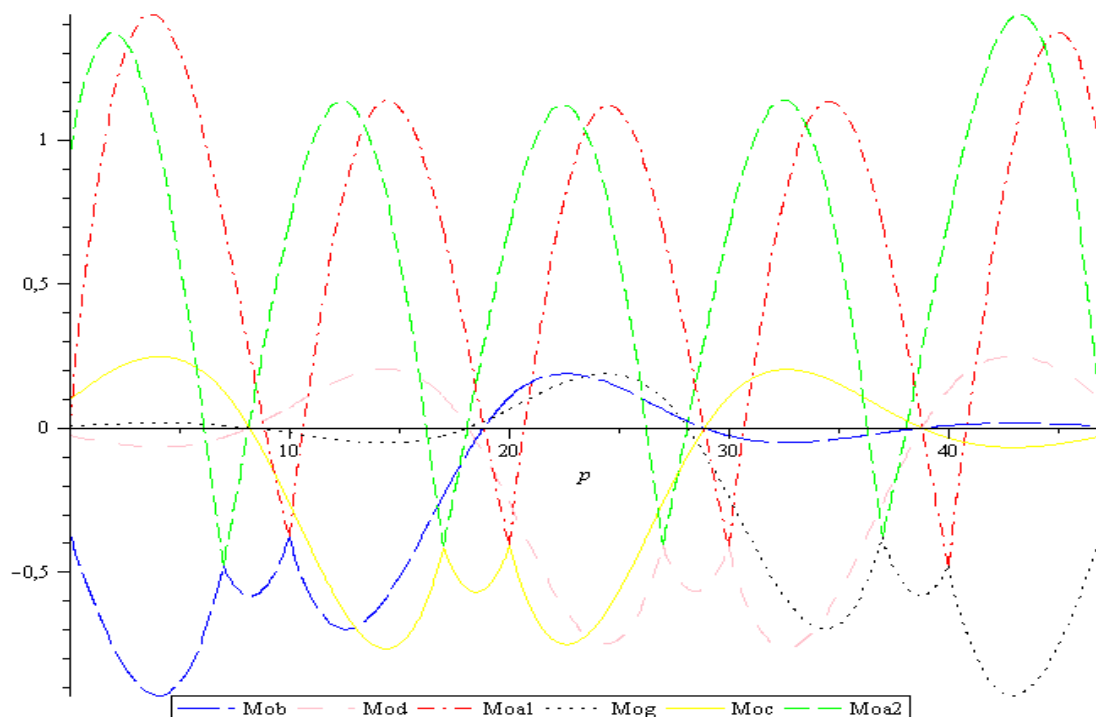
8.8 Závislost maxim ohybových momentů na rozteči zatěžujících sil



Graf 28. Průběh ohybových momentů v místech jejich extrémů v závislosti na poloze p pro nosník na šesti podporách. Rozteč podpěr $l=10\text{m}$. Rozteč sil $d=0,5\text{m}$.



Graf 29. Průběh ohybových momentů v místech jejich extrémů v závislosti na poloze p pro nosník na šesti podporách. Rozteč podpěr $l=10\text{m}$. Rozteč sil $d=2\text{m}$.



Graf 30. Průběh ohybových momentů v místech jejich extrémů v závislosti na poloze p pro nosník na šesti podporách. Rozteč podpor $l=10\text{m}$. Rozteč sil $d=3\text{m}$

Z průběhů ohybových momentů pro nosník na šesti podporách s proměnnou roztečí zatěžujících sil jsou výsledky vykresleny v předchozích grafech:

Graf 16 rozteč pole $l = 10\text{m}$, rozteč sil $d = 1\text{m}$

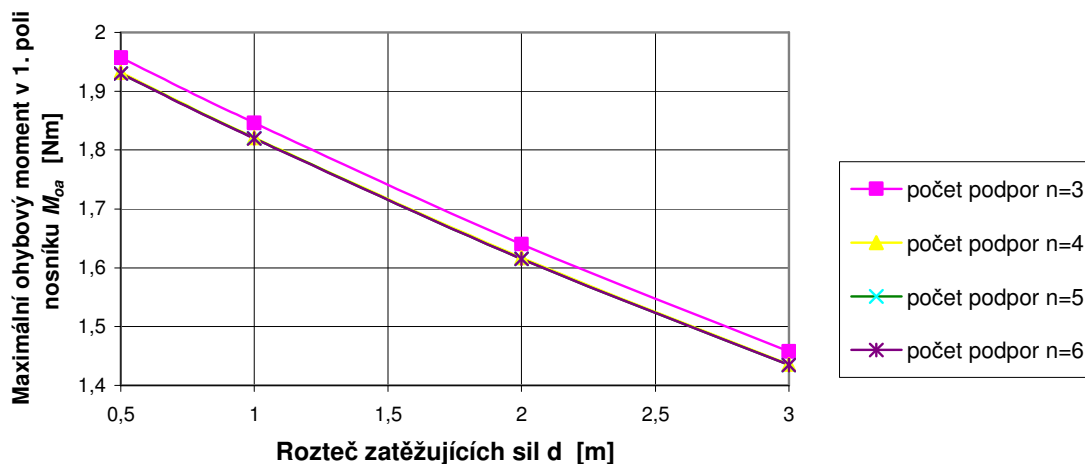
Graf 28 rozteč pole $l = 10\text{m}$, rozteč sil $d = 0,5\text{m}$

Graf 29 rozteč pole $l = 10\text{m}$, rozteč sil $d = 2\text{m}$

Graf 30 rozteč pole $l = 10\text{m}$, rozteč sil $d = 3\text{m}$

Maximální ohybový moment M_{oa} v místech zatěžujících sil má stejný charakter jako u nosníku s roztečí podpor $d = 1\text{m}$ Jeho hodnota se se zvětšováním rozteče zatěžujících sil výrazně snižuje. Na druhé straně roste maximální ohybový moment v místě podpor ať už pro zatížení jednotlivých polí, nebo pro současné zatížení dvou sousedních polí.

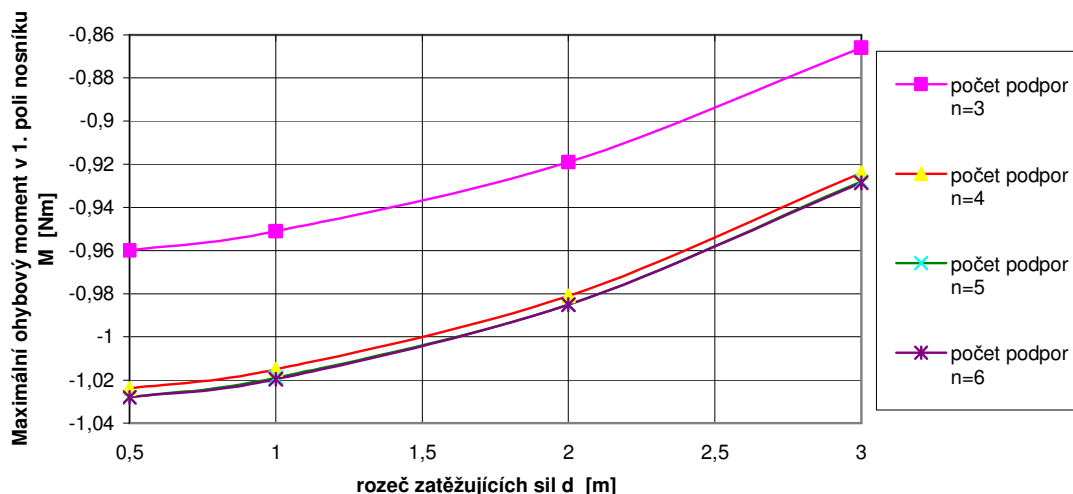
8.8.1 Závislost maximálního momentu M_{oa} pro zatěžující síly v prvním poli na rozteči zatěžujících sil d .



Graf 31. Závislost maximálního ohybového momentu M_{oa} na rozteči zatěžujících sil d

V Grafu 31 jsou vyneseny průběhy ohybových momentů pro maximální ohybový moment M_{oa} v závislosti na rozteči zatěžujících sil. Maximální hodnota ohybového momentu M_{oa} se s rostoucí roztečí zatěžujících sil snižuje. Průběh pro nosník se třemi podporami je poněkud výš, což koresponduje s naší závislostí maximálního momentu M_{oa} na Grafu 17. Průběhy pro nosníky se čtyřmi až šesti podporami se slévají do jedné čáry.

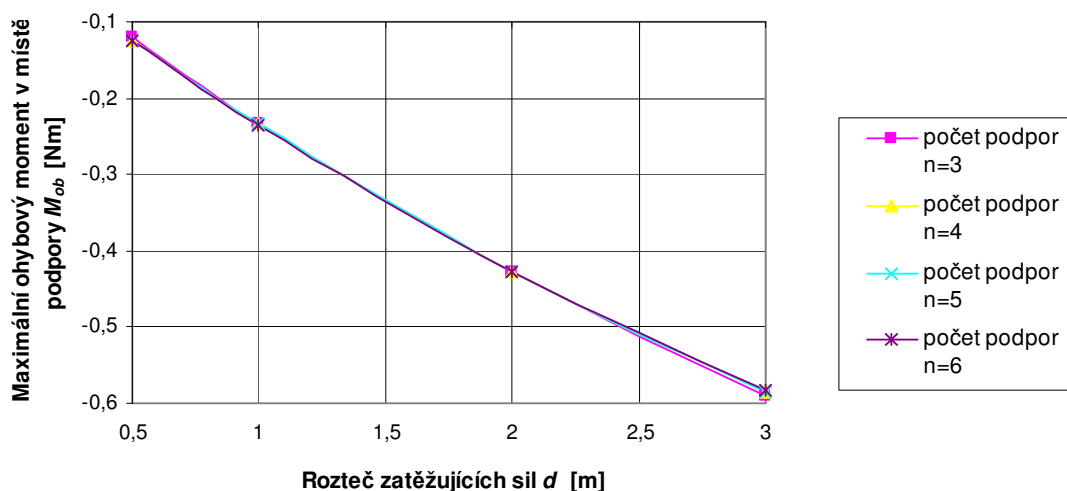
8.8.2 Závislost maximálního momentu M_{ob} na rozteči zatěžujících sil d v místě podpory B pro zatěžující síly v prvním poli.



Graf 32. Závislost maximálního ohybového momentu M_{ob} v místě podpory B v závislosti na rozteči zatěžujících sil. Zatěžující síly jsou v prvním poli.

V Grafu 32 jsou vyneseny průběhy ohybových momentů M_{ob} v místě podpory B v závislosti na rozteči zatěžujících sil. Maximální hodnota ohybového momentu M_{ob} se s rostoucí roztečí zatěžujících sil snižuje. Průběhy pro nosník se třemi a čtyřmi podporami jsou rozeznatelné, pro nosníky s pěti a šesti podporami se slévají do jedné čáry.

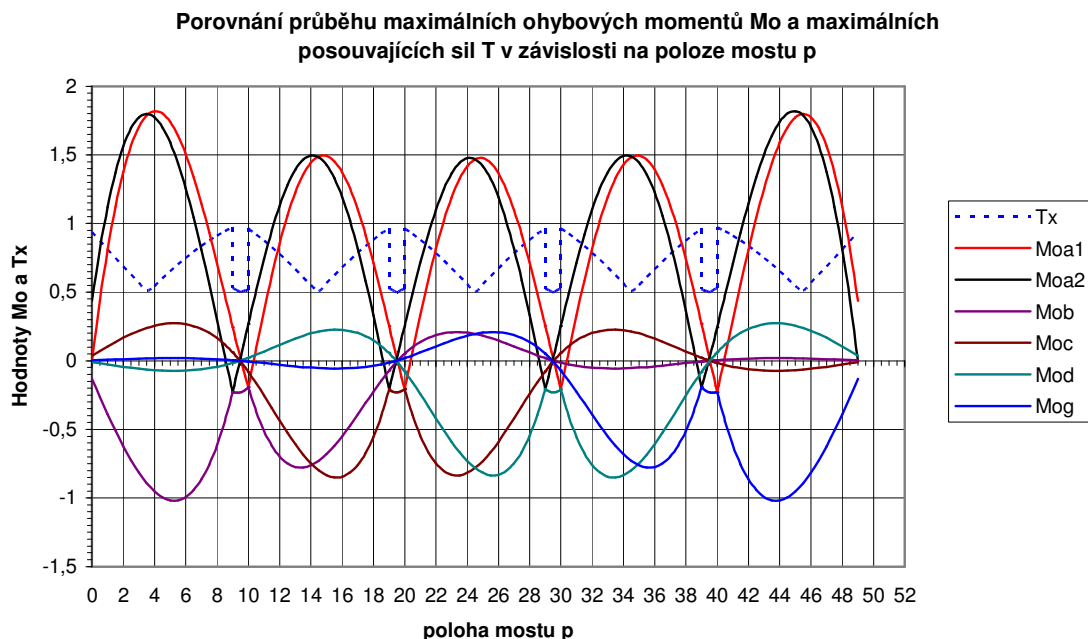
8.8.3 Závislost maximálního momentu M_{ob} na rozteči zatěžujících sil d v místě podpory B pro zatěžující síly v prvním poli i druhém poli



Graf 33. Závislost maximálního ohybového momentu M_{ob} v místě podpory B na rozteči zatěžujících sil d pro polohu zatěžujících sil v prvním i druhém poli.

Velikost absolutní hodnoty ohybového momentu M_{ob} v místě podpory B s horoucí roztečí d zatěžujících sil roste

8.9 Posouvající síly a ohybové momenty



Graf 34. Srovnání závislosti ohybových momentů a posouvajících sil v místech jejich extrémů v závislosti na poloze p

V Grafu 34 je vynesena průběh ohybových momentů a posouvajících sil v řezech jejich extrémů v závislosti na poloze zatěžujících sil p . V tomto grafu je vidět, že pro polohy zatěžujících sil p kde jsou extrémní ohybové momenty největší jsou posouvající síly nejmenší. Pro zde uvedený nosník jsou ohybové momenty M_{oa1} a M_{oa2} v řezech pod zatěžujícími silami největší pro případy, kdy poloha obou zatěžujících sil $F/2$ je nad stejným polem nosníku. Pokud jsou zatěžující síly současně ve dvou sousedních polích mají maximální hodnotu momenty v místech podpor.

9 Závěr

Největší namáhání nosníku jeřábové dráhy je v krajních polích jak je patrné z grafů průběhu maximálních ohybových momentů. Uvědomíme-li si tuto skutečnost při dalších výpočtech namáhání podobného nosníku, mohli bychom si celý výpočet zjednodušit a zaměřit se pouze na nejvíce namáhanou část, tedy na okrajová pole nosníku jeřábové dráhy. Tato část nosníku by tak rozhodovala o dimenzování jeho celé délky, což by vedlo ve středních oblastech nosníku ke zbytečnému předimenzování a vyšším nákladům.

Možnou úpravou by mohlo být zkrácení okrajových polí, čímž by se snížila nejvyšší hodnota maximálního ohybového momentu až na úroveň maximálního ohybového momentu v sousedním poli. Z grafu 24. je patrné, že při délce středních polí $l=10\text{m}$ je potřeba okrajové pole zkrátit na délku 8,4m.

Dalším možným opatřením by mohlo být zvětšení modulu průřezu v ohybu W_o nosníku v krajních polích.

Vzhledem k tomu, že maxima ohybových momentů se od počtu podpor 6 téměř nemění jak je zřejmé z grafu 17 a z velikosti poměrné změny momentu δ uvedené v tabulce 3. není třeba počítat nosníky s více než šesti podporami.

10 Seznam použitých veličin

Fcelková zatěžující síla	[N]
ppoloha zatěžujících sil	[m]
lrozteč podpor	[m]
drozteč zatěžujících sil	[m]
φvyrovnávací součinitel	[-]
εdynamický součinitel	[-]
F_{AXmax} ..maximální osová síla kterou přenese kolo mostu na kolejnici	[N]
F_{NJ}tíhová síla od celého jeřábu včetně břemene	[N]
fsoučinitel tření mezi kolem a kolejnicí	[-]
ncelkový počet kol pojezdu	[-]
ipočet hnaných/počet bržděných kol	[-]
F_{BXmax} ..maximální osová síla kterou přenese kolo kočky na kolejnici	[N]
F_{NK}normální síla od kočky jeřábu včetně břemene	[N]
sstupeň statické neurčitosti	[-]
npočet podpor	[-]
M_oohybový moment	[Nm]
Tposouvající síla	[N]
Rsíla v místě podpory (R_a ...v místě podpory A)	[N]
EYoungův modul	[Pa]
Josový kvadratický moment	[m ⁴]
M_{oa11} ...ohybový moment v místě 1. zatěžující síly v 1.poli	[Nm]
M_{oa12} ...ohybový moment v místě 1. zatěžující síly v 2.poli	[Nm]
M_{oa21} ...ohybový moment v místě 2. zatěžující síly v 1. poli	[Nm]
M_{oa22} ...ohybový moment v místě 2. zatěžující síly v 2. poli	[Nm]
$M_{oB,C}$...ohybový moment v místě podpory B;C...	[Nm]
Wenergie napjatosti	[J]
xpoloha řezu	[m]
W_omodul průřezu v ohybu	[m ³]
w_bposunutí v místě podpory B	[m]

11 Seznam obrázků

Obr. 1 Mostový jeřáb.....	10
Obr. 2 Schéma zatížení nosníku jeřábové dráhy	14
Obr. 3a Nosník na dvou podporách.....	16
Obr. 3b Uvolnění pro vyšetřování výsledných vnitřních účinků.....	16
Obr. 4a Staticky neurčitě uložený nosník s pěti podporami	17
Obr. 4b Částečně uvolněný nosník.....	17
Obr. 5 Značení při určování VVÚ.....	19
Obr. 6 Průběh posouvajících sil a ohybových momentů pro polohu zatěžujících sil v prvním poli jeřábové dráhy	20
Obr. 7 Průběh posouvajících sil a ohybových momentů pro polohu zatěžujících sil mezi prvním a druhým polem jeřábové dráhy (druhá podpora je mezi zatěžujícími silami).....	21
Obr. 8 Průběh posouvajících sil a ohybových momentů pro polohu zatěžujících sil ve druhém poli jeřábové dráhy	21

12 Seznam grafů

Graf 1. Průběh sil v podporách R_a , R_b , R_c v závislosti na poloze p zatěžujících sil pro jejich polohu nad 1. polem	26
Graf 2. Průběh maximálních ohybových momentů M_{oa1} , M_{oa2} , M_{ob} v závislosti na poloze zatěžujících sil pro jejich polohu v 1. poli	28
Graf 3. Průběh sil v podporách R_a , R_b , R_c v závislosti na poloze p zatěžujících sil pro jejich polohu mezi 1. a 2. polem.....	32
Graf 4. Průběh maximálních ohybových momentů M_{oa1} , M_{oa2} , M_{ob} v závislosti na poloze zatěžujících sil pro jejich polohu mezi 1. a 2. polem	35
Graf 5. Průběh sil v podporách R_a , R_b , R_c v závislosti na poloze p zatěžujících sil pro jejich polohu ve 2. poli.....	38
Graf 6. Průběh maximálních ohybových momentů M_{oa1} , M_{oa2} , M_{ob} v závislosti na poloze zatěžujících sil pro jejich polohu ve 2. polem.....	41
Graf 7. Průběh sil R_a , R_b , R_c v podporách v závislosti na poloze p pro nosník na třech podporách.....	42
Graf 8. Průběh ohybových momentů v místech jejich extrémů v závislosti na poloze p pro nosník na třech podporách	43
Graf 9. Průběh sil v podporách v závislosti na parametru p pro nosník na dvou podporách ...	44
Graf 11. Průběh sil v podporách v závislosti na parametru p pro nosník na čtyřech podporách	45
Graf 12. Průběh ohybových momentů v místech jejich extrémů v závislosti na poloze p pro nosník na čtyřech podporách	46
Graf 13. Průběh sil v místech podpor v závislosti na parametru p pro nosník na pěti podporách.....	46
Graf 15. Průběh sil v místech podpor v závislosti na parametru p pro nosník na šesti podporách.....	47
Graf 16. Průběh ohybových momentů v místech jejich extrémů v závislosti na poloze p pro nosník na šesti podporách. Rozteč podpor $l=10m$. Rozteč sil $d=1m$	48
Graf 17. Srovnání maximálních hodnot ohybového momentu pro nosníky o třech až osmi podporách. Platí pro rozteč podpor $d=l$	49

Graf 18. Závislost velikosti maximálního ohybového momentu pro polohu zatěžujících sil $F/2$ nad prvním až čtvrtým polem nosníku se šesti podporami	50
Graf 19. Poměrná změna δ maximálního ohybového momentu pro zatížení v druhém poli 2 oproti poli 1. v závislosti na celkovém počtu podpor nosníku	51
Graf 20. Velikosti maximálních ohybových momentů v místech podpor $M_{B, C, D, G}$ pro zatížené 1.pole nosníku na šesti podporách. Momenty jsou vyneseny v absolutní hodnotě.	52
Graf 21. Průběh ohybových momentů v místech jejich extrémů v závislosti na poloze p pro nosník na šesti podporách. Rozteč podpor $l=8m$. Rozteč sil $d=1m$	53
Graf 22. Průběh ohybových momentů v místech jejich extrémů v závislosti na poloze p pro nosník na šesti podporách. Rozteč podpor $l=6m$. Rozteč sil $d=1m$	53
Graf 23. Průběh ohybových momentů v místech jejich extrémů v závislosti na poloze p pro nosník na šesti podporách. Rozteč podpor $l=4m$. Rozteč sil $d=1m$	54
Graf 24. Závislost ohybových momentů v místě první zatěžující síly v 1. v 2. a ve 3. poli na rozteči podpor l . Rozteč zatěžujících sil $d=1$	55
Graf 25. Závislost ohybového momentu M_{ob1} pro zatížení v 1. poli, M_{oc3} pro zatížení v 2. poli a M_{od5} pro zatížení v 3. poli na rozteči podpor l . Rozteč zatěžujících sil $d=1$. Momenty jsou vyneseny v absolutní hodnotě.	56
Graf 26. Závislost ohybového momentu M_{ob} na rozteči podpor l pro polohu zatěžujících sil v prvním poli i v druhém poli nosníku. (Jedna zat. síla v prvním poli druhá zat. síla v druhém poli) Rozteč zatěžujících sil $d=1$	56
Graf 27. Závislost ohybového momentu M_{oa} na rozteči podpor l pro polohu zatěžujících sil v prvním až třetím poli. Rozteč zatěžujících sil $d=1$. Nosník se šesti podporami	57
Graf 28. Průběh ohybových momentů v místech jejich extrémů v závislosti na poloze p pro nosník na šesti podporách. Rozteč podpor $l=10m$. Rozteč sil $d=0,5m$	58
Graf 29. Průběh ohybových momentů v místech jejich extrémů v závislosti na poloze p pro nosník na šesti podporách. Rozteč podpor $l=10m$. Rozteč sil $d=2m$	58
Graf 30. Průběh ohybových momentů v místech jejich extrémů v závislosti na poloze p pro nosník na šesti podporách. Rozteč podpor $l=10m$. Rozteč sil $d=3m$	59
Graf 31. Závislost maximálního ohybového momentu M_{oa} na rozteči zatěžujících sil d	60
Graf 32. Závislost maximálního ohybového momentu M_{ob} v místě podpory B v závislosti na rozteči zatěžujících sil. Zatěžující síly jsou v prvním poli.	60
Graf 33. Závislost maximálního ohybového momentu M_{ob} v místě podpory B na rozteči zatěžujících sil d pro polohu zatěžujících sil v prvním i druhém poli.	61
Graf 34. Srovnání závislosti ohybových momentů a posouvajících sil v místech jejich extrémů v závislosti na poloze p	62

13 Použitá literatura

- [1] Janíček P., Ondráček O., Vrbka J., Burša J., Mechanika těles pružnost pevnost 1, CERM 2004
- [2] Remta F., Kupka L., Jeřáby 1.díl, Státní nakladatelství technické literatury 1956
- [3] Remta F., Kupka L., Jeřáby 2.díl, Státní nakladatelství technické literatury 1958