VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

MECHANICKÁ ANALÝZA PODSOUSTAVY VĚŽOVÉHO JEŘÁBU

MECHANICAL ANALYSIS OF THE SUBSYSTEM OF THE TOWER CRANE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE Roman Urbánek

AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE doc. Ing. Vladimír Fuis, Ph.D.

SUPERVISOR

BRNO 2022

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	**Roman Urbánek**
Studijní program:	Strojírenství
Studijní obor:	Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce:	**doc. Ing. Vladimír Fuis, Ph.D.**
Akademický rok:	2021/22

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Mechanická analýza podsoustavy věžového jeřábu

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Jeřáby je možné z hlediska mechanické analýzy řešit z různých pohledů. Jedním z nich je analýza stykových sil v jednotlivých vazbách, které souvisí s přemísťováním břemene. V tomto případě je ovlivnění pohybu nezanedbatelným vstupním parametrem a proto se bude úloha řešit s pasivními účinky. Při řešení se určují stykové výslednice v jednotlivých vazbách pro různé konfigurace jeřábu a různé pohybové stavy po překonání hranice klidové stability.

Cíle bakalářské práce:

1. Rešerše týkající se jeřábů.
2. Vytvoření výpočtového modelu soustavy umožňující přemísťování břemene u věžového jeřábu.
3. Provést výpočet hnacího momentu a stykových sil ve vazbách pro různé konfigurace a různé pohybové stavy.
4. Analyzovat chování soustavy po překonání hranice klidové stability.

Seznam doporučené literatury:

FLORIAN, Z., PŘIKRYL, K., ONDRÁČEK, E. Mechanika těles - statika. Vyd. 3. Brno: PC-DIR, 1995, ISBN 80-214-0694-1.

KRATOCHVÍL, C., SLAVÍK, J. Mechanika těles: Dynamika, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno, 2002, ISBN 80-214-2260-2.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2021/22

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc. ředitel ústavu	doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D. děkan fakulty

Abstrakt:

Bakalářská práce se zabývá řešením podsoustavy věžového jeřábu s pasivním účinkem (NNTP). Prvně je provedena krátká rešerše o věžových jeřábech a jejich částech. Následuje popis teoretických a fyzikálních zákonitostí statiky a dynamiky. V praktické části jsou vypočítávány různé pohybové stavy konkrétní vymodelované podsoustavy, která znázorňuje kočku věžového jeřábu. Cílem výpočtu každé konfigurace je zjištění numerických hodnot stykových sil ve vazbách, analýza dynamických veličin a vyhodnocení funkčnosti vazeb. Numerické hodnoty neznámých parametrů byly vypočítány řešením soustavy lineárních rovnic ve výpočtovém softwaru Matlab.

Klíčová slova

Síla, moment síly, zrychlení, smykové tření, valení, jeřáb, kočka, statika, dynamika

Abstract

The bachelor thesis deals with the solution of a subsystem of a tower crane with a passive effect (NNTP). First part describes tower cranes and their parts. The following part is a description of the theoretical and physical laws of statics and dynamics. In the practical part, various states of motion of a specific modeled subsystem are calculated, which shows a trolley of the tower crane. The aim of the calculation of each configuration is to determine the numerical values of the contact forces in the links, to analyze the dynamic quantities and to evaluate the functionality of the links. Numerical values of unknown parameters were calculated by solving a system of linear equations in the calculation software Matlab.

Keywords

Force, moment of force, accelaration, shear friction, rolling, crane, trolley, statics, dynamics

Bibliografické citace

URBÁNEK, Roman. Mechanická analýza podsoustavy věžového jeřábu [online]. Brno, 2022 [cit. 2022-04-08]. Dostupné z: https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/140030. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Vladimír Fuis.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Mechanická analýza podsoustavy věžového jeřábu“ vypracoval samostatně s použitím odborné literatury uvedené v seznamu zdrojů.

…… ……

Datum Roman Urbánek

Poděkování

Chtěl bych poděkovat panu Ing. Petru Lošákovi, Ph.D. za čas a cenné rady s tvorbou modelu a dynamických výpočtech. Dále bych chtěl poděkovat panu doc. Ing. Vladimíru Fuisovi, Ph.D. za vedení mojí bakalářské práce.

Obsah

1 Úvod ... 9
2 Jeřáby ... 10
2.1 Části věžového jeřábu ... 11
2.2 Podvozek ... 12
2.3 Věž ... 12
2.3 Výložník ... 12
2.4 Kabina ... 13
2.5 Kočka jeřábu ... 13
3 Statika, dynamika a mechanika těles ... 14
3.1 Tíhové pole ... 14
3.2 Axiomy statiky ... 15
3.3 Interakce a síla ... 16
3.4 Moment síly ... 17
3.4.1 Moment síly k bodu ... 17
3.4.2 Moment síly k ose ... 18
3.5 Newtonovy pohybové zákony ... 19
3.6 Moment setrvačnosti ... 20
3.7 Těžiště tělesa ... 21
3.8 Tuhé těleso ... 22
3.9 Statická ekvivalence ... 22
3.10 Statická rovnováha ... 23
3.11 Silové soustavy ... 23
3.12 Jednoduché pohyby tělesa ... 24
3.13 Pól pohybu ... 25
4 Vazby ... 25
4.1 Stupně volnosti ... 26
4.2 Stupně volnosti vázaného tělesa ... 26
5 Vazby NNTN ... 27
5.1 Kinematická dvojice v 2D ... 28
5.1.1 Kinematická dvojice obecná – Podpora ... 28
5.1.2 Kinematická dvojice - Posuvná vazba ... 28
5.1.3 Kinematická dvojice - Rotační vazba ... 29
6 Vazby NNTP ... 30

6.1 Tření ... 30
6.2 Tření smykové ... 30
6.3 Odpor valení ... 33
6.4 Čepové tření ... 34
6.4.1 Uvolnění dle Ponceleta ... 34
6.5 Vláknové (pásové) tření ... 35
6.6 Kinematické dvojice v 2D ... 36
6.6.1 Podpora ... 36
6.6.2 Posuvná vazba ... 39
6.6.3 Rotační vazba ... 40
8 Algoritmus řešení úlohy NNTP ... 42
8.1 Rozbor úlohy: ... 42
8.2 Kinematický rozbor ... 42
8.3 Určení charakteru relativního pohybu ... 42
8.4 Uvolnění ... 42
8.5 Statický rozbor ... 42
8.6 Sestavení rovnic ... 43
8.6.1 Sestavení statických rovnic ... 43
8.6.2 Sestavení rovnic dynamiky soustav těles ... 43
8.7 Řešení soustavy rovnic ... 45
8.8 Zhodnocení výsledků řešení ... 45
8.9 Formulace závěru ... 45
9 Řešená soustava těles ... 46
9.1 Popis těles a vazeb řešené soustavy ... 47
9.2 Geometrické rozměry a pasivní účinky jednotlivých těles ... 48
9.3 Předpoklady pro řešení ... 49
9.4 Výpočet těžiště kočky ... 50
10 Analýza pohybových stavů soustavy těles ... 51
10.1 První pohybový stav – zvedání kladnice s břemenem do výšky konstantní rychlostí ... 51
10.1.1 Kinematický rozbor ... 51
10.1.2 Uvolnění těles a sestavení rovnic statické rovnováhy ... 52
10.1.3 Statický rozbor ... 55
10.1.4 Analýza výsledků: ... 56
10.2 Druhý pohybový stav – pohyb kočky do strany ... 57

10.2.1 Kinematický rozbor 57
10.2.2 Uvolnění těles a sestavení rovnic statické rovnováhy 58
10.2.3 Statický rozbor 61
10.2.4 Analýza výsledků: 62
10.3 Třetí pohybový stav – spouštění kladnice 63
10.3.1 Sestavení množiny neznámých parametrů 63
10.3.2 Analýza výsledků: 63
10.4 Čtvrtý pohybový stav – zvedání kladnice s břemenem do výšky se zrychlením 64
10.4.1 Uvolnění těles a sestavení rovnic 64
10.4.2 Sestavení množiny neznámých parametrů 67
10.4.3 Analýza výsledků: 67
10.5 Pátý pohybový stav – pohyb kočky do strany se zrychlením 68
10.5.1 Uvolnění těles a sestavení rovnic 68
10.5.2 Sestavení množiny neznámých parametrů 70
10.5.3 Analýza výsledků: 71
11 Závěr 73
Seznam použitých zdrojů 75

1 Úvod

Při navrhování jakékoliv technické součásti, mechanismu nebo stroje musí inženýr podrobně znát fyzikální principy, které za jednotlivými vztahy a výpočty stojí. Tato práce je především zaměřena na statiku a dynamiku. Oba předměty patří mezi nejstarší odvětví fyziky, které spadá pod mechaniku těles. V technické praxi se potkáváme se statikou na počátku návrhu. Musíme určit jednotlivé silové účinky těles, dokud jsou v klidu. Dynamické veličiny nám poté pomohou určit chování produktu za chodu. Nato přijdou na řadu pevnostní výpočty.

Při řešení statické rovnováhy rozlišujeme dva postupy výpočtu podle typu vazeb, které se v soustavě těles nacházejí. Soustavy s vazbami neutrálními, když je soustava nepohyblivá a soustava s vazbami pasivními, když je pohyblivá. Pro výpočty soustavy těles s nezanedbatelným ovlivněním pohybu se používá model vazeb NNTP. Mezi pasivní účinky, které nás při návrhu strojního zařízení zajímají, patří zejména smykové tření, čepové tření, pásové tření nebo odpor valení. Hodnoty těchto veličin zásadně ovlivňují činnost stroje a jeho efektivitu.

Tato práce se zabývá jeřáby a základními výpočty při návrhu jejich podsoustavy. V teoretické části je provedena krátká rešerše o věžových jeřábech a jejich jednotlivých částech z důvodu seznámení se s modelovanou mechanickou soustavou. Následně jsou popsány základní pojmy, veličiny a zákonitosti statiky a dynamiky, která výpočtová analýza využívá. V druhé časti bakalářské práce je řešeno několik pohybových stavů, ve kterých se může podsoustava věžového jeřábu ocitnout. Zprvu uvažujeme, že se soustava nachází v mechanickém klidu. Další výpočty jsou provedeny pro pohybový stav zrychlení. Výpočty zjistíme jednotlivé silové působení v jednotlivých vazbách, potřebné hnací momenty k rozpohybování soustavy, či velikost zrychlení při daném výkonu motoru.

Cílem práce bylo vymodelovat a vypočítat soustavu těles s pasivním účinky reálného stroje, pomocí znalostí získaných v kurzech statiky a dynamiky na Fakultě strojního inženýrství. Práce může být použita i jako názorná ukázka praktického využití 2D modelování těles.

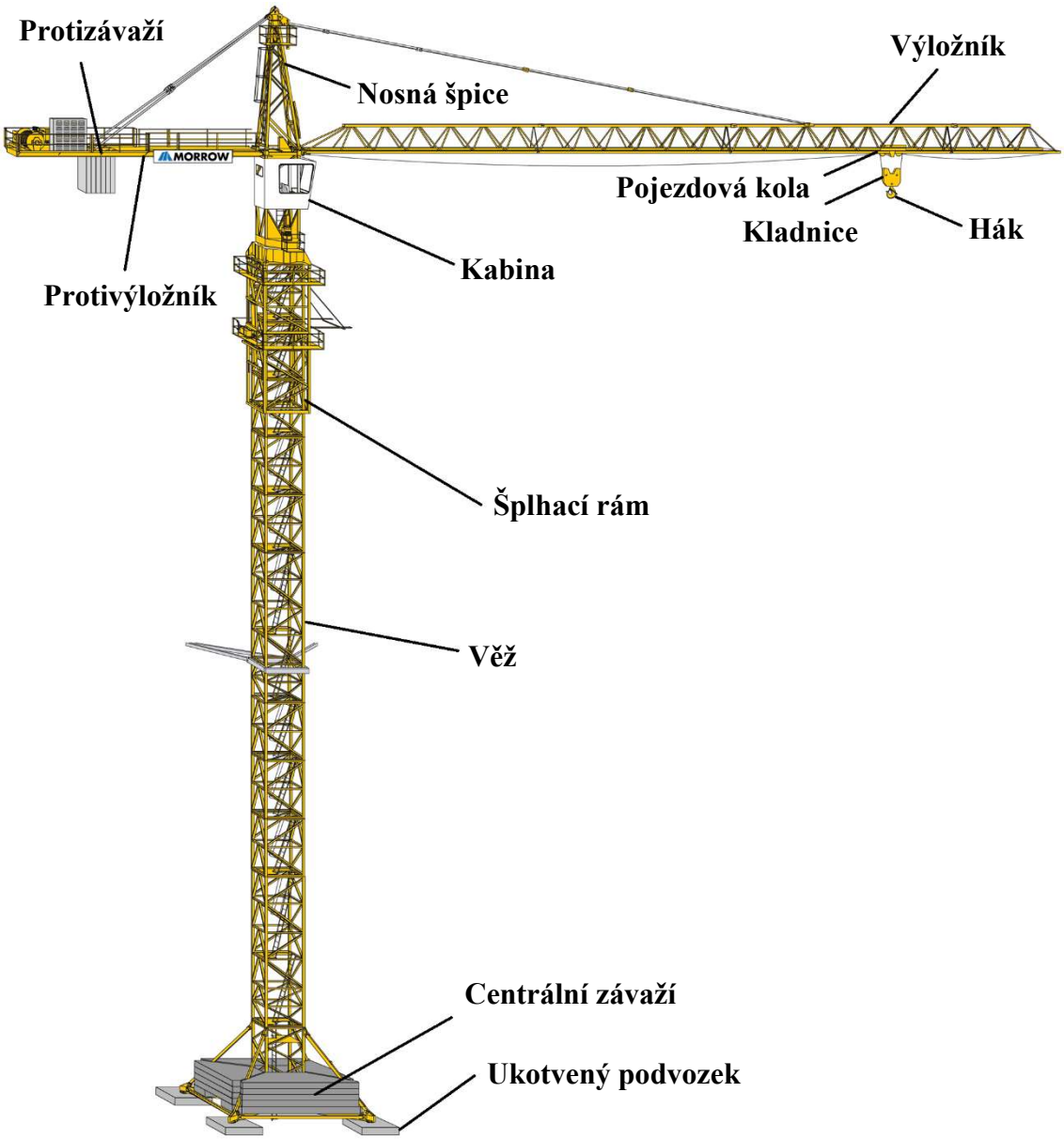
2 Jeřáby

Na celém světě hrají a hrály jeřáby dominantní roli při zvedání a přepravě těžkých nákladů (břemene). Prvním pokročilým vynálezem jeřábové techniky, který se používá až do dnešní doby, bylo objevení kladkostroje ve 4.století př.n.l. Kladkostroj byl složený z pevných a volných kladek. Podle počtu volných kladek dokázali starověcí lidé zmenšit sílu, která byla nutná pro zvednutí potřebného břemene. Počet kladek je teoreticky neomezený, ale jejich počet byl ve starověku limitovaný třením na pět. Pokud bylo potřeba zvedat mnohem těžší objekty, používaly se spíše tzv. bloky kladkostrojů. Římané počítali se ztrátami díky tření okolo 20 %. První ocelový jeřáb byl zkonstruován v roce 1834. Ještě ten samý rok bylo objeveno ocelové lano. A jako třetí do mozaiky zlepšovacích objevů přibyl samozřejmě motor, se kterým už jsme mohli zvedat v podstatě jakákoliv břemena, a ještě k tomu jakoukoliv rychlostí. V roce 1850 si nechal Sir William Farbairn patentovat největší ruční jeřáb na světě. Spojil nýty dva ocelové pláty a vytvořil zaoblený výložník, který byl mnohem stabilnější a praktičtější než předchozí rovné výložníky ze dřeva nebo z oceli. Jeřáb dokázal uzvednout 60 tun do výšky 18 metrů s rozsahem 32 metrů v průměru. Mechanický zisk byl roven 632:1, což znamenalo, že pokud každý ze 4 mužů, co jeřáb ovládali, vyvinul sílu pouze 23,7 kg, byl schopen uzvednout břemeno o hmotnosti až 60 tun. Současné největší jeřáby jsou schopné zvedat břemena o hmotnostech až 20 000 tun. Většinou jsou vybaveny podobným systémem, který nám nabízí stejný mechanický zisk, jaký byl popsán právě Fairbairnem [14].

Dnes existuje mnoho různých typů jeřábů, každý typ je speciálně navržen pro prostředí, ve kterém se používá. Jedním z nejběžnějších typů jeřábů je věžový jeřáb. Věžové jeřáby se vyskytují na mnoha různých místech, jako jsou loděnice, staveniště a průmyslová pracoviště. Používá se především na stavbách a osvědčil se při stavbě velmi vysokých budov. Tento typ jeřábu má malý půdorys, ale přesto je schopen pokrýt velmi širokou pracovní plochu. Pohyb břemen ve svislém směru se dosáhne zdviháním a spouštěním, pohyb ve vodorovném směru se dosáhne pojezdem kočky.

2.1 Části věžového jeřábu

Věžové jeřáby jsou složeny, krom výjimek s minimálními rozdíly, ze stejných částí. Na obr. 1 je popis jednotlivých dílů věžového jeřábu.



Obr. 1 Popis jednotlivých částí věžového jeřábu (převzato z [9])

2.2 Podvozek

Základní částí věžového jeřábu je podvozek. Slouží k namontování věže jeřábu, včetně hnacích motorů pro pojezd jeřábu. Způsob ukotvení ovlivňuje výšku a maximální nosnost jeřábu. Věžový jeřáb může být pohyblivý nebo stacionární. Stacionární jeřáby dále mohou být ukotvené ke stavbě, do podloží nebo neukotvené. Ukotvením jeřábu do podloží lže dosáhnout maximální možné výšky zdvihu jeřábu. V případě mobilních jeřábů může podvozek být obohacen o centrální závaží, které pomáhá stroj vyvažovat. Mobilní jeřáby jsou sice náročnější a nákladnější na montáž, nicméně jeden jeřáb je schopen obsloužit větší část stavby [10].

2.3 Věž

Existují tři typy věže věžového jeřábu: příhradová, sloupová, šplhavá. Příhradová věž je nejpoužívanější. Jednotlivé díly bývají většinou identické a zaměnitelné, tudíž je zjednodušena montáž a demontáž. Sloupová věž se používá u rychlostavitelných věžových jeřábů s menší nosností. Šplhavá věž se používá u nejvyšších jeřábů, určených pro stavbu výškových budov. Od příhradové věže je doplněna o šplhací konstrukci, díky které může jeřáb neustále stoupat v zavilosti na výšce budovy [12].

2.3 Výložník

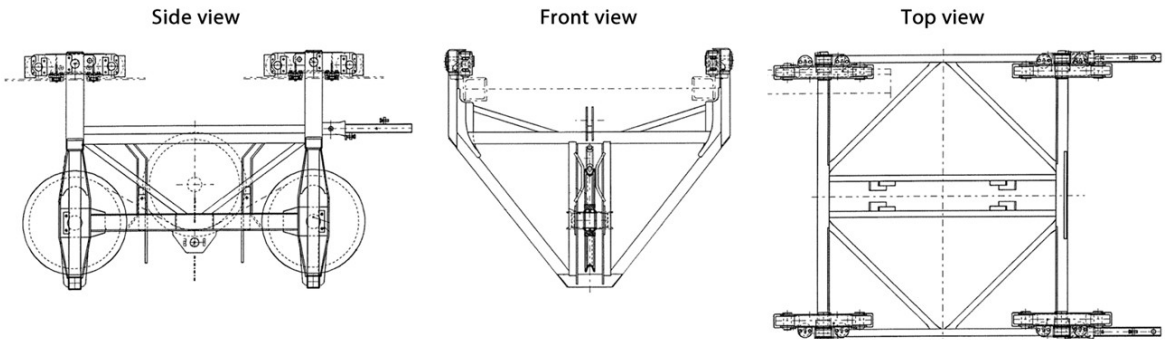
V technické praxi se používají tři typy výložníků: vodorovný, sklopný a lomený. Vodorovný výložník mění vložení pomocí pojíždějící jeřábové kočky. Konstrukčně je tento typ problematický, neboť přidává namáhání ohybem od tíhy kočky a nutnost vytvořit jízdní dráhu pro kočku vede ke zvýšení hmotnosti. Mezi výhody patří nižší výkon pro změnu vyložení, lepší manipulace, při pouze vodorovném pohybu je nutnost překonat jen pasivní odpory. Výhodou sklopného výložníku je měnitelná pracovní výška a větší únosnost, ale kvůli změně sklonu výložníku je třeba větší nárok na výkon. Lomený výložník je kombinací vodorovného a sklopného výložníku. Může být dosaženo vyššího zdvihu břemena při nižší věži jeřábu, ale práce s tímto výložníkem je velmi komplikovaná [13].

2.4 Kabina

Hlavními parametry návrhu kabiny je dobrý výhled na pracovní oblast při manipulaci s přemisťovaným břemenem. Kabina je designovaná do oblého tvaru, aby disponovala největším vnitřním prostorem a nejlepší viditelností. Kabina disponuje bezpečnostními skly, odhlučněním a tepelnou izolací. Řízení jeřábu je navrhnuto tak, aby bylo vždy v zorném poli osoby ovládající stroj. Kabina je buď umístěna mezi horní otočí a výložníkem, nebo na boku výložníku [12].

2.5 Kočka jeřábu

Kočka věžového jeřábu s vodorovným výložníkem je vysoce pokročilý kladkostroj tvořený motorem, kladnicí, pevnými vodícími kladkami a lany. Kladkostroj je kombinace pevných a volných kladek, které nám pomáhají zmenšit potřebnou sílu k zvedání potřebné tíhy. Kočka slouží k zvedání a spouštění břemen jakéhokoliv druhu. S kočkou mohou být spojená i pojezdová kola, která umožňují přesun kočky po kolejnicích na výložníku. Břemeno se zavěšuje na hák pomocí popruhů nebo vázacích lan.



Obr. 2 Zleva: boční pohled, čelní pohled a pohled shora pojízdné kočky věžového jeřábu (převzato z [9])

3 Statika, dynamika a mechanika těles

Mechanika je souhrnná vědní disciplína, která tvoří základ pro řešení technických problémů při návrhu strojních zařízení. Dá se považovat za doplněk a v některých případech i základ ostatních technických předmětů [3]. Statika (z řeckého slova στατικος = nehybný) je jednou z nejstarších částí fyziky a s kinematikou a dynamikou patří do oboru zvaný mechanika [4]. Statika je část mechaniky těles, která se zabývá vzájemným působením těles v klidu nebo v pohybu rovnoměrném přímočarém. Toto vzájemné působení těles je vyjádřeno silovými účinky neboli vzájemným působením sil [3]. Dynamika zkoumá příčiny pohybu těles a jaký druh pohybu je důsledkem určité příčiny.

Základní stavební kameny mechaniky těles položil v sedmnáctém století Galileo Gallilei. Studoval zákonitosti volného pádu reálných těles v gravitačním poli a mimo jiné objevil zákon setrvačnosti [2]. Na jeho práci navázal jeden z nejdůležitějších fyziků světa Isaac Newton, když popsal spojitost mezi silou a pohybem. Ve svém spise Philoshopiae naturalis principia mathematica přesně formuloval známé základní zákony dynamiky a zavedením pojmu hmotnosti jasně definoval vztah mezi silou a zrychlením [2]. Mnoho dalších významných vědců se zasloužilo o rozvoj mechaniky jako celku. G.W Leibniz zavedl pojem kinetická energie, Leonhard Euler zavedl pojmy vektoru rychlosti, zrychlení, vektoru síly a D´Alembert svým principem umožnil řešení dynamických úloh metodami statiky [2]. Mnoho dalších brilantních vědců se zasloužilo o rozvoj mechaniky jako takové. Na jejich bedrech stojí základ poznání technických věd.

3.1 Tíhové pole

Při řešení příkladu v dynamice, statice nebo při jakémkoliv konstrukčním návrhu počítáme s tíhovým polem Země. Tíhové pole země udává tělesům tíhové zrychlení. To je závislé na zeměpisné šířce a nadmořské výšce. V naší zeměpisné šířce je hodnota tíhového zrychlení $\vec{g} = 9.81275\ \mathrm{m} \cdot s^{-2}$.

3.2 Axiomy statiky

Pomocí axiomů jsou vytvářeny teorie oborů matematiky, mezi něž patří i mechanika. Axiomy vychází ze základních vět a logicko-matematických operací pomocí nichž vytváří nové věty a tvrzení. Základní věty musí tvořit axiomatický systém [1]. Věty a tvrzení odvozená z axiomu jsou dokazatelné. Axiomy musí být úplné, bezrozporné a nezávislé [1]. Teorii statiky můžeme popsat následujícími axiomy.

- Axiom o prostoru a čase: prostor je trojrozměrný, spojitý, izotropní, euklidovský, inerciální a absolutní. Čas je skalární, spojitá, ve všech bodech prostoru shodná, kladná rovnoměrně rostoucí veličina, charakterizující současnost a následnost jevů v prostoru.

- Axiom o hmotnosti: každému prvku tělesa, lze přiřadit hmotnost jako skalární veličinu charakterizující gravitační a setrvačné vlastnosti prvku.

- Axiom o energii a zachování energie: Energie je skalární veličina, která vyjadřuje míru změny děje. U uzavřených systémů je energie konstantní.

- Axiom o silovém působení

- Axiom o příčinné souvislosti mechanického pohybu a silového působení na těleso.

- Axiom o styku těles

Axiomy popisující silová působení jsou popsány v následujících kapitolách.

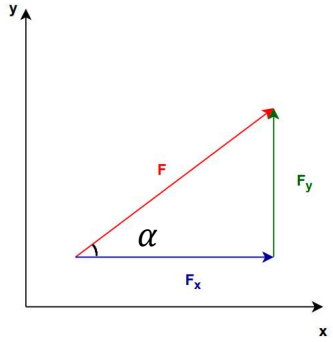
3.3 Interakce a síla

Jednou ze základních veličin, se kterou fyzika pracuje je pojem síla. Tato vektorová veličina, definovaná svým působištěm a směrem je nejdůležitějším pojmem statiky, dynamiky i pružnosti. Značí se výhradně písmenem $\vec{F}$. Silové působení v nepodstatném okolí bodu A tělesa je vektorová veličina – síla $\vec{F}$ vázaná k bodu A (obr. 4) [1]. V opačném případě, je-li plocha nezanedbatelná označujeme toto plošné silové působení tlak $\vec{p} = \frac{d\vec{F}}{dS}$ a je určeno velikostí síly působící na jednotku plochy v každém místě [1]. Základní jednotkou síly je Newton. Newton je značen velkým písmenem N a v základních jednotkách SI je roven $kg \cdot m \cdot s^{-2}$.

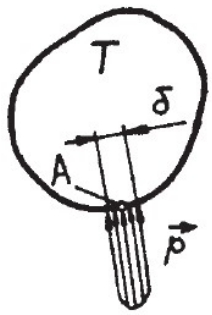
Sílu můžeme tedy označit jako míru pohybových a deformačních účinků jednoho tělesa na druhé [4]. Ve statice a dynamice nás budou zajímat především pohybové účinky jednotlivých sil na tělesa. Přímka, na které síla leží, je zvána nositelka síly. V případech, kdy neuvažujeme místo působení síly za podstatné (neuvažujeme-li například deformace tělesa) můžeme sílu libovolně přesouvat po nositelce, bez toho abychom změnili výsledek úlohy. K popsaní síly v prostoru se nejčastěji používá pravotočivý kartézský souřadnicový systém. V kartézském souřadném systému můžeme sílu rozložit ve směrech os na jednotlivé složky $\vec{F_x}, \vec{F_y}$ pro 2D, složka $\vec{F_z}$ pro 3D. Velikost síly následně můžeme vypočítat pomocí vektorového součtu následujícím vztahem. Pro 3D by vztah platil analogicky.

$$F = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2}$$

Interakce je vzájemné ovlivňování hmotných bodů, nebo těles mezi kterými existuje spojení. Silová interakce se nazývá silové působení [1]. Tělesa na sebe mohou působit přímým dotykem nebo na dálku pomocí fyzikálního pole (například pole gravitační).



Obr. 3 Vymezení síly v 2D



Obr. 4 Silové působení v δ okolí bodu A (převzato z [1])

Pro velikost síly $\vec{F}$ a její jednotlivé složky platí vztahy odvozené ze základní trigonometrie. Na obr. 3 platí rovnice:

$F_x = F \cdot \cos\ \alpha$

$F_x = F \cdot \sin\ \alpha$

3.4 Moment síly

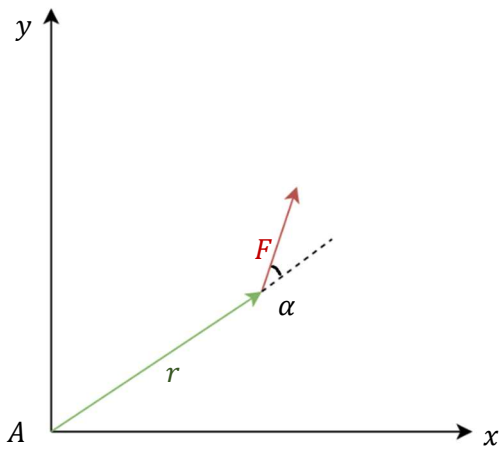
3.4.1 Moment síly k bodu

Moment síly je vektorová fyzikální veličina, která vyjadřuje otáčivý účinek síly. Velikost momentu síly závisí na velikosti působící síly a vzdálenosti od vztaženého bodu, ke kterému moment počítáme. Moment síly můžeme určit vzhledem k libovolnému bodu. Včetně těch, které se nacházejí mimo zkoumané těleso či mimo osu otáčení. Vzdálenost bodu a síly je nazývána rameno síly. Jednotkou momentu je newton-metr. V základních jednotkách SI je roven $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$. Obecně lze moment ve vektorové podobě vyjádřit vztahem [1]

$$\vec{\mathrm{M}} = \vec{\mathrm{r}} \times \vec{\mathrm{F}},$$

kde $\vec{\mathrm{M}}$ je vektor výsledného momentu, $\vec{\mathrm{F}}$ je vektor síly a $\vec{\mathrm{r}}$ je kolmé rameno síly. Pokud je α úhel mezi vektory $\vec{\mathrm{r}}$ a $\vec{\mathrm{F}}$, pak lze velikost momentu vyjádřit jako:

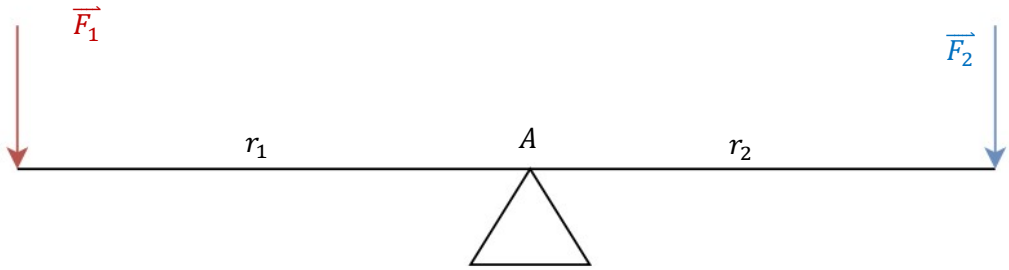
$$M = F \cdot r \cdot \sin \alpha$$



Obr. 5 Moment síly k bodu A

Nejvhodnější znázornění účinků momentů síly, lze provést pomocí jednoduchého stroje zvaného páka (obrázek 6). Páka je podepřená v bodě A s volnou rotací. V určitých vzdálenostech od bodu otáčení (ramenech síly r_1, r_2) je těleso zatíženo dvojící sil. Ty jsou v rovnováze, když platí:

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$$



Obr. 6 Rovnováha na páce

Pomocí jednoduchého stroje jako je páka můžeme zmenšit potřebnou sílu na vykonání práce. Na rovnováze momentu fungují i další jednoduché stroje jako je například kladka. Na stejném principu je i založen jeřáb. Síla na jednom rameni (délce výložníku) je tíha zvedaného břemene, síla na rameni druhém je tíha od váhy protizávaží.

Můžeme vidět, že když budeme mít dostatečně dlouhou páku, tak teoreticky vzato můžeme zvednout libovolně těžké břemeno. Stačí, aby rameno síly bylo mnohem delší než rameno břemena. Proto i výrok "Dejte mi pevný bod a já pohnu Zemí", který prohlásil podle legendy geniální starověký mechanik Archimédes, je pravdivý, i když neproveditelný.

3.4.2 Moment síly k ose

Většina strojních součástí koná rotační pohyb. Moment síly k jedinému bodu může být značně nepraktický, proto se v technické praxi zavádí i moment síly k ose, který vyjadřuje celkový točivý účinek k ose stroje. Pro výpočet momentu síly k ose vypočítáme moment síly k libovolnému bodu, který na této ose leží a vynásobíme ho skalárně s jednotkovým vektorem osy [1]. Moment síly k ose je definován vztahem:

$$\overrightarrow{\mathrm{M}} = (\vec{\mathrm{r}} \times \vec{\mathrm{F}}) \cdot \overrightarrow{e_p}$$

3.5 Newtonovy pohybové zákony

První Newtonův zákon: Každé bodové těleso zůstává ve stavu klidu, nebo ve stavu rovnoměrného přímočarého pohybu, pokud není vlivem působících silových účinků nuceno původní stav změnit. Matematicky vyjádřeno: [2]

$$\vec{\mathrm{F}} = 0 \rightarrow \vec{\mathrm{v}} = \text{konstantní}$$

Druhý Newtonův zákon, nazývaný také základním zákonem dynamiky, definuje sílu, která působí na bodové těleso jako časovou změnu jeho hybnosti. Vyjádřeno matematicky

$$\frac{\overrightarrow{dH}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \vec{\mathrm{F}}$$

Kde $\vec{H}$ je vektor hybnosti a $\vec{v}$ je vektor okamžité rychlosti, přičemž tato rychlost je měřena vzhledem k inerciálnímu souřadnicovému systému. [2]

V případě, že hmotnost bodového tělesa je konstantní, lze rovnici zjednodušit do tvaru

$$\vec{\mathrm{F}} = m \cdot \frac{\overrightarrow{dv}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

Kde $\vec{a}$ je vektor absolutního zrychlení, opět měřených vzhledem k inerciálnímu souřadnicovému systému [2].

Třetí Newtonův zákon je známým zákonem (axiomem) akce a reakce: síly, kterými na sebe působí dvě bodová tělesa, jsou stejné co do velikosti, ale opačné co do smyslu. Označíme-li například bodová tělesa čísly 1 a 2, platí: [2]

$$\overrightarrow{F_{12}} = \overrightarrow{F_{21}}$$

Newtonův gravitační zákon

Pro úplnost je uveden i gravitační zákon, který definuje velikost přitažlivé síly mezi dvěma bodovými tělesy o hmotnostech m_1 a m_2, jejichž vzájemná poloha je dána polohovým vektorem $\vec{r}$: [2]

$$\vec{\mathrm{F}} = \kappa \cdot \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r}$$

kde κ je gravitační konstanta ($\kappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11} [N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}]$)

3.6 Moment setrvačnosti

Pohyb tělesa ovlivňuje rozložení hmotnosti, které charakterizují kromě středu hmotnosti, respektive statických momentů, momenty setrvačnost a derivační momenty. Poněvadž jejich hodnoty jsou funkcí geometrických a hmotnostních parametrů tělesa, říká se jim také geometricko-hmotnostní charakteristiky. Jejich hodnoty lze určit nezávisle na pohybu tělesa [2].

Moment setrvačnosti je fyzikální veličina, která vyjadřuje míru setrvačnosti tělesa při otáčivém pohybu. Jeho velikost závisí na rozložení hmoty v tělese vzhledem k ose otáčení [2]. Osový moment setrvačnosti tělesa hmotnosti m k ose x, y, z je definován vztahem

$$I_x = \int_m {r_x}^2 \, dm, I_y = \int_m {r_x}^2 \, dm, I_z = \int_m {r_x}^2 \, dm$$

Kde r_x, r_y r_z, představují vzdálenost bodu tělesa od osy x, y a z.

Výpočet pro moment setrvačnosti homogenního válce o poloměru R, délky l a hmotnosti m k ose rotace vypadá následovně:

$$\mathrm{dm} = \varrho \cdot \mathrm{dV} = \varrho \cdot 2 \cdot \pi \cdot \mathrm{r} \cdot \mathrm{l} \cdot \mathrm{dr}$$

$$I_x = \int_m r^2 \, dm = \varrho \cdot 2 \cdot \pi \cdot \mathrm{l} \cdot \int_0^R \mathrm{r} \cdot r^2 \, \mathrm{dr} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \varrho \cdot \mathrm{l} \cdot R^4$$

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi \cdot R^2 \cdot l}$$

$$I_x = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2$$

Druhý Newtonův pohyb zákon může být přepsán do formy pro rotační pohyb ve tvaru:

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}$$

kde $\vec{M}$ je moment síly, I moment setrvačnosti a $\vec{\alpha}$ úhlové zrychlení.

3.7 Těžiště tělesa

Těžiště je bodem tělesa, kterým prochází osa soustavy elementárních tíhových sil při každém natočení tělesa [1].

Tíhová síla, je staticky ekvivalentní se soustavou elementárních tíhových sil, prochází těžištěm a při každém natočení má vzhledem k souřadnicovému systému spojenému se Zemí stejnou velikost, směr a smysl. Těleso vázané v těžišti bez omezení natáčení je v každé natočené poloze ve statické rovnováze [1].

Tíhovou sílu lze vypočítat pomocí základního vztahu:

$$\overrightarrow{F_g} = m \cdot \vec{g}$$

kde $\overrightarrow{F_g}$ je tíhová síla, m hmotnost tělesa a g tíhové zrychlení

Poloha těžiště vzhledem k souřadnicovému systému je jednoznačně určena vztahy:

$$x_T = \frac{\int_\Omega g \cdot \varrho \cdot x \cdot dV}{\int_\Omega g \cdot \varrho \cdot dV}, y_T = \frac{\int_\Omega g \cdot \varrho \cdot y \cdot dV}{\int_\Omega g \cdot \varrho \cdot dV}, z_T = \frac{\int_\Omega g \cdot \varrho \cdot z \cdot dV}{\int_\Omega g \cdot \varrho \cdot dV}$$

U homogenního tělesa, které je vyrobeno z jednoho materiálu, lze těžiště spočítat pomocí jednotlivých základních těles přes následující vztah (jedná se o vážený průměr ze souřadnic těžiště a délky):

Pro 1D:

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_{Ti} \cdot L_i}{\sum_{i=1}^{N} L_i}, y_T = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_{Ti} \cdot L_i}{\sum_{i=1}^{N} L_i}, z_T = \frac{\sum_{i=1}^{N} z_{Ti} \cdot L_i}{\sum_{i=1}^{N} L_i}$$

Pro 2D:

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^{N} S_i}, y_T = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^{N} S_i}, z_T = \frac{\sum_{i=1}^{N} z_{Ti} \cdot S_i}{\sum_{i=1}^{N} S_i}$$

Pro 3D:

$$x_T = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_{Ti} \cdot V_i}{\sum_{i=1}^{N} V_i}, y_T = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_{Ti} \cdot V_i}{\sum_{i=1}^{N} V_i}, z_T = \frac{\sum_{i=1}^{N} z_{Ti} \cdot V_i}{\sum_{i=1}^{N} V_i}$$

3.8 Tuhé těleso

Reálné těleso lze modelovat nekonečným počtem bodových těles. Takto chápaná mechanická soustava má nekonečný počet stupňů volnosti a lze jí modelovat i deformační vlastnosti tělesa. Poněvadž při pohybu tělesa jako celku jsou deformace zanedbatelné vůči výslednému pohybu, je zaveden pojem dokonale tuhého tělesa, u něhož předpokládáme, že jeho deformace jsou nulové. U takového tělesa je vzdálenost jeho dvou libovolných bodů konstantní [2].

3.9 Statická ekvivalence

Pojem ekvivalence lze chápat jako vztah mezi objekty charakterizovanými shodností určitých, předem vymezených veličin [1]. Silové soustavy lze porovnávat za předpokladu, že je známa závislost mezi působením silové soustavy na těleso a pohybem tělesa jako celku. Z druhého Newtonova pohybového zákona vychází axiom, který popisuje vzájemnou závislost vztahy [1]

$$\sum \vec{F_i} = m \cdot \frac{\overrightarrow{dv}}{dt}$$

$$\sum \overrightarrow{M_i} = \frac{d(I \cdot \vec{\omega})}{dt}$$

kde:

$\vec{v}$	Rychlost translačního pohybu	[m/s]
m	Hmotnost tělesa	[kg]
I	Moment setrvačnosti tělesa	[kg·m^2]
$\vec{\omega}$	Úhlová rychlost tělesa	[rad/s]
t	Čas	[s]

Chceme-li srovnat z hlediska pohybové ekvivalence působení silových soustav na těleso, musíme nejdříve vyjádřit působení jednotlivých silových soustav v libovolném, ale pro všechny síly stejném bodě B a totéž provést pro síly druhé soustavy. Ekvivalence je

dosažena tehdy, když silová a momentová výslednice jedné soustavy je stejná jako výslednice druhé soustavy [1].

Silová výslednice soustavy: $\overrightarrow{F_v} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i}$

Momentová výslednice soustavy: $\overrightarrow{M_v} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_i}$

3.10 Statická rovnováha

Silová výslednice soustavy a výsledný moment síly ke zvolenému bodu udává podle druhého Newtonova zákona translační a rotační pohyb, který soustava vykonává. V případě, kdy silová výslednice a její moment je nulový, vzniká takzvaně statická rovnováha. Při statické rovnováze je těleso v klidu, nebo vykonává rovnoměrný přímočarý pohyb. Statickou rovnováhu tělesa můžeme vyjádřit [1]:

Silově vztahy : $\sum \overrightarrow{F_i} = \vec{0}$ $\sum \overrightarrow{M_i} = \vec{0}$

Pohybové stavy: $m \cdot \vec{v} = \overrightarrow{konst.}$ $I \cdot \vec{\omega} = \overrightarrow{konst.}$

Těleso, které je ve statické rovnováze. můžeme definovat jako těleso v mechanickém klidu.

3.11 Silové soustavy

Silovou soustavou nazýváme několik sil působících na těleso, kde každá jednotlivá síla může mít jiný směr a jinou velikost [5]. Při řešení úloh ve statice je důležité rozeznat o jaké silové soustavy se u těles jedná, abychom mohli určit počet použitelných rovnic na řešení neznámých parametrů. Podle polohy a orientace nositelek sil v rovině nebo v prostoru se rozeznává několik typů silových soustav [1]. V 2D jsou nejtypičtějšími soustavami:

- **Obecná silová soustava:** nositelky sil jsou mimoběžky
  Určena třemi algebraickými rovnicemi:

$$\sum F_{xi} = 0, \sum F_{yi} = 0, \sum M_{zi} = 0,$$

- **Soustava rovnoběžných sil: nositelky jsou rovnoběžky**
  Určena dvěma algebraickými rovnicemi:

$$\sum F_{xi} = 0, \sum M_{zi} = 0,$$

- **Centrální silová soustava:** všechny nositelky sil prochází jedním bodem
- **Přímková silová soustava:** všechny nositelky leží na jedné přímce

3.12 Jednoduché pohyby tělesa

Translační pohyb tělesa

Těleso koná translační pohyb, když libovolná přímka vedená tělesem zůstává při pohybu rovnoběžný s výchozí polohou. Zrychlení všech bodů tělesa při jeho translačním pohybu je stejné [11].

Rotační pohyb tělesa

Při rotačním pohybu, při kterém zůstávají dva body tělesa např. A a B v klidu, zůstávají v klidu všechny body spojnice $\overline{AB}$. Spojnice AB se nazývá stálá osa otáčení. Všechny ostatní body tělesa konají pohyb po kružnici se středem na ose otáčení. Protože jde o tuhé těleso, je vzdálenost libovolného bodu os osy otáčení stálá, a tedy trajektorie všech bodů jsou kružnice, ležící v rovinách kolmých k ose rotace majících střed na této ose [11]. Rotační pohyb je popsán vztahem:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Rychlost libovolného bodu tělesa, která koná rotační pohyb okolo stále osy otáčení je rovna vektorovému násobení vektorů úhlové rychlosti $\vec{\omega}$ a polohového vektoru $\vec{r}$ bodu tělesa [11].

Obecný rovinný pohyb

Obecný rovinný pohyb je pohyb složený z translačního pohybu referenčního bodu a rotačního pohybu tělesa kolem osy, která prochází referenčním bodem [11].

3.13 Pól pohybu

V každé okamžité poloze útvaru existuje bod hybné roviny, jehož rychlost je nulová za předpokladu, že $\vec{\omega} \neq \vec{0}$. Vyskytují se dvě základní vlastnosti pólu pohybu: pól pohybu je okamžitý střed otáčení (bod, kterým prochází osa rotace, jehož rychlost v dané poloze se rovná nule) a pól rotačního pohybu se trvale nachází ve středu rotace [11].

Znalost polohy pólu pohybu se využívá při sestavování doplňkových rovnic při mechanické analýze silových soustav se zrychlením. Pomocí pólu pohybu můžeme provázat pohyby jednotlivých těles, a tak vyřešit množinu neznámých parametrů.

4 Vazby

Skutečná tělesa vždy interagují se svým okolím, tyto interakce nazýváme vazbami. Ve statice se omezujeme na ty, které významně ovlivňují pohyb těles [1]. Při modelování úloh ve statice jednotlivé vazby nahrazujeme silovým působením. Tento postup je nazýván uvolnění vázaného tělesa. Výsledkem uvolnění vázaného tělesa je uvolněné těleso, na které působí soustava úplně a neúplně určených sil, při zachování pohybového stavu tělesa [1]. Uvolněné vazby se musí řídit třetím Newtonovým pohybovým zákonem akce a reakce. Stykové síly na obou tělesech, mezi kterými se vazba nachází, mají stejné velikosti a opačný směr. Rozlišení mechanických vazeb, a jim odpovídajících silových soustav na podstatné a nepodstatné, je nejvýznamnější etapou řešení problému a modelování [1].

Vazby jsou děleny na dva základní typy podle toho, jestli pohyb tělesa ovlivňují (silové vazby) nebo ovlivňují a omezují (vazby stykem) [1].

Existence vazby mezi hmotnými objekty neznamená, že interakce právě probíhá, je však nutnou podmínkou možné interakce. Podle toho, zda nastává či nenastává interakce prostřednictvím vazby, budeme v mechanice těles rozlišovat vazby [1]:

Funkční: vazba existuje a interakce v daném okamžiku probíhá

Nefunkční: vazba existuje, interakce je možná, ale v daném okamžiku neprobíhá

Vazby dále dělíme z hlediska klidové stability a ztrátové energie na vazby typu NNTN a NNTP, kde jednotlivá písmena označují následující vlastnosti těchto vazeb [1]. Posledním dělením vazeb je dělení dimenzionální na vazby rovinné a prostorové. Tato práce se výhradně zabývá vazbami rovinnými.

4.1 Stupně volnosti

Stupně volnosti určují počet možných pohybů tělesa. V rovině má těleso tři stupně volnosti: posuv v ose x, posuv v ose y a rotaci kolem osy z. V prostoru má těleso stupňů volnosti šest. Ve zvoleném souřadnicovém systému je schopno vykonávat tři nezávislé posuvy a tři nezávislé rotace [1].

4.2 Stupně volnosti vázaného tělesa

V realitě je každé těleso nebo soustava těles vždy vázána k pevné základně, kterou považujeme ve statice za dokonale tuhou (deformace z hlediska řešeného systému je nepodstatná [1]). Počet stupňů volnosti ovlivňují vazby, se kterými je těleso vázáno k počátečnímu tělesu. Počet stupňů volnosti odebraných vazbami je značen řeckým písmenem ξ.

Výsledný počet možných pohybů lze vypočítat pomocí vztahu:

$$i = (n - 1) \cdot i_v - \left(\sum \xi - \eta\right)$$

kde:

- i – počet stupňů volnosti tělesa vázaného k základnímu rámu
- n – počet těles soustavy
- i_v – počet stupňů volnosti volného tělesa
- ξ_i – počet statických parametrů příslušící jednotlivým vazbám
- η – počet deformačních parametrů omezených vazbami

Deformační parametry nám říkají, jestli stykové vazby neomezují deformaci tělesa.

Základní stavy, které vázané těleso z hlediska pohybu jako celku a deformace může nabývat [1]:

Normální stavy uložení

$i > 0, \eta = 0$ Těleso je uloženo pohyblivě bez omezení deformačních parametrů

$i = 0, \eta = 0$ Těleso je uloženo nepohyblivě bez omezení deformačních parametrů

$i = 0, \eta > 0$ Těleso je uloženo nepohyblivě s η omezenými deformačními parametry

Výjimkové stavy uložení

$i > 0, \eta > 0$ Těleso je uloženo pohyblivě s η omezenými deformačními parametry

5 Vazby NNTN

Vazby bez pasivních účinků nazýváme NNTN. Tyto vazby patří mezi nejjednodušší modely s neutrálním stykem. Hranice klidové stability a ztrátová energie v těchto vazbách jsou zanedbatelné. Tento typ vazeb je charakterizován:

1. Neprostupnost: složka relativní rychlosti bodu stykového útvaru, ve směru normály je nulová

2. Neproměnnost: stykový útvar je určen geometrií těles a polohou těles na počátku styku. Známe-li geometrii a vzájemnou polohu těles v okamžiku styku je útvar určen.

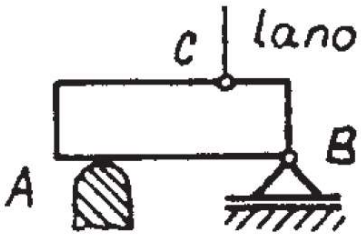
3. Tlakovost: V průběhu trvaní styku jsou v každém bodě stykového útvaru podstatné pouze elementární tlakové síly. Tedy $\overrightarrow{p_s} \leq \vec{0}$, je orientován do tělesa.

4. Neutrálnost: klidový stav je ve směru geometricky možného pohybu p nastane, jestliže $\overrightarrow{F_p} = \vec{0}$. Při pohybu je $\overrightarrow{F_p} \cdot \overrightarrow{v_p} = 0$. [1]

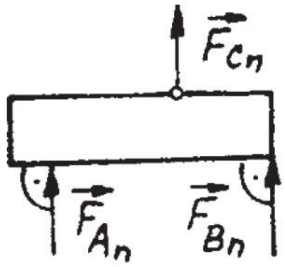
5.1 Kinematická dvojice v 2D

5.1.1 Kinematická dvojice obecná – Podpora

Obecná vazba se uvolňuje pomocí normálové síly. Druhou variantou obecné kinematické dvojice je lano. Podporu je vždy nutné uvolnit silou kolmou na danou hranu tělesa. S tím souvisí i podmínka funkčnosti vazby. Vazba je funkční, pokud styková síla míří z tělesa ven [1]. Obrázek znázorňuje značení a uvolnění obecných kinematických dvojic v rovině.



Obr. 7 Schéma vazby (převzato z [1])



Obr. 8 Uvolnění tělesa s vazbou podpora (převzato z [1])

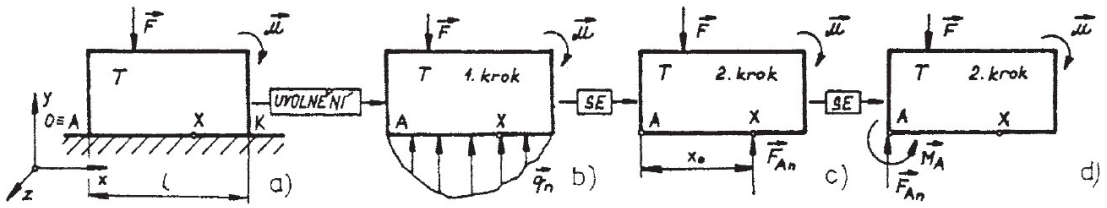
Počet odebraných stupňů volnosti: $\xi = 1°V$

Neznámé parametry: $\{F_n\} = 1$

Podmínka funkčnosti vazeb $F_n > 0$

5.1.2 Kinematická dvojice - Posuvná vazba

Jestliže stykový útvar těles v rovině je úsečka, považuje se to za posuvnou vazbu. V místě styku vzniká liniové zatížení, které lze chápat jako soustavu rovnoběžných sil v rovině [1]. Máme dvě metody uvolnění posuvné vazby. Obě jsou stejně staticky ekvivalentní. Posuvnou vazbu uvolňujeme normálovou silou kolmou na hranu tělesa a jejím polohovým vektorem, nebo silou a momentem síly. Obrázek znázorňuje přístupy uvolnění posuvné vazby.



Obr. 9 Způsoby uvolnění posuvné vazby (převzato z [1])

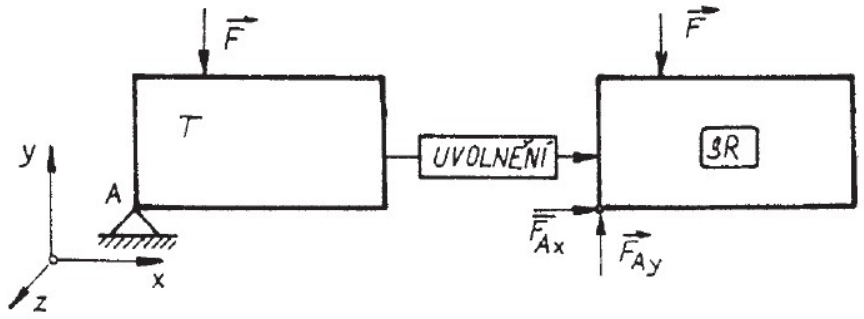
Počet odebraných stupňů volnosti: $\xi = 2\ °V$

Neznámé parametry: $\{F_n, x\}\ nebo\ \{Fn, M\} = 2$

Podmínka funkčnosti vazeb: $F_n > 0\ \wedge M > 0\ nebo\ F_n > 0\ \wedge x \in < 0; l >$

5.1.3 Kinematická dvojice - Rotační vazba

Rotační vazba je jeden z nejběžnějších typů uložení. Rotační vazbou jsou omezeny translační pohyby ve směru osy x a ve směru osy y. Umožňuje tedy tělesu pouze rotovat. Při způsobu uložení rotační vazbou nemůže dojít k přerušení kontaktu tělesa a vazby, tudíž nemusíme ověřovat její funkčnost pomocí podmínek funkčnosti. Funkční je vždy. Když při výpočtu dospějeme k zápornému výsledku hodnoty vazby, tak síla působí v obráceném směru, než je graficky uvolněná. V strojírenské praxi je realizována rotační vazba například pomocí čepu. Na obrázku lze vidět uvolnění rotační vazby.



Obr. 10 Uvolnění rotační vazby (převzato z [1])

Počet odebraných stupňů volnosti: $\xi = 2\ °V$

Neznámé parametry: $\{F_x, F_y\} = 2$

Podmínka funkčnosti vazeb: Není

6 Vazby NNTP

Vazby typu NNTN se používají v případech, kdy se těleso zcela nepohybuje nebo u soustav, kde je tření nepodstatné a pasivní účinky se tedy mohou zanedbat. Při mechanickém rozboru soustav, kde tepelné ztráty hrají podstatnou roli, se používá výpočtový algoritmus typu NNTP. Písmeno P v názvu představuje pasivnost vazeb v soustavě.

6.1 Tření

Pojem tření vyjadřuje působení stykových těles, které brání jejich relativnímu pohybu. Tření tělesa na nakloněné rovině je třením vnějším. Když dochází ke tření mezi částmi jednoho tělesa, jedná se pak o tření vnitřní. Vnitřní tření je způsobeno působením sil, které brání relativnímu pohybu vrstev kapalin a plynů. U všech typů tření vzniká třecí síla, která vždy směřuje proti směru pohybu tělesa. Nejzákladnějším typem tření, které ovlivňuje mechanickou analýzu soustav v statice a dynamice, je tření suché – bez přítomnosti maziva a tuhé valení.

Pokusy se třením se zabývali již fyzici sedmnáctého a osmnáctého století, jako byl Francouzi Guillaume Amontos nebo Charles Augistin Coulomb po němž je zákon smykového tření pojmenován.

6.2 Tření smykové

Pokud budeme působit na kostku silou $\vec{F}$ a snažíme se ji odtlačit směrem doleva, jako odezva vzniká adhezní síla $\overrightarrow{F_{T0}}$, která směřuje vpravo a přesně vyrovná sílu $\vec{F}$, kterou na kostku působíme. Se vzrůstající silou $\vec{F}$ roste i síla $\overrightarrow{F_{T0}}$. Jakmile velikost síly F dosáhne určité hodnoty, kostka se „utrhne“, ztratí svůj těsný kontakt s deskou a stolu a začne se pohybovat směrem vlevo. Síla, která působí proti pohybu tělesa, se nazývá třecí síla $\overrightarrow{F_T}$ [6].

Coulombův zákon nám říká, že třecí síla je závislá pouze na normálovém tlaku. Z toho plyne vztah: [1]

$$F_T = f \cdot F_N$$

F_T	Třecí síla [N]
F_N	Normálová síla [N]
f	součinitel smykového tření [-]

Pro klid platí vztah

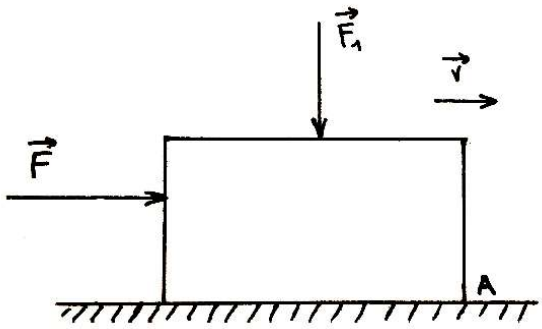
$$F_t < F_{T0} = f_0 \cdot F_N$$

Ft	Velikost tečné síly [N]
F_N	Normálová síla [N]
f_0	Součinitel adheze [-]

Podle stavu relativního klidu nebo pohybu mezi tělesy se rozeznává součinitel adheze f_0 nebo součinitel smykového tření f [1]. Obecně platí vztah $f_0 > f$.

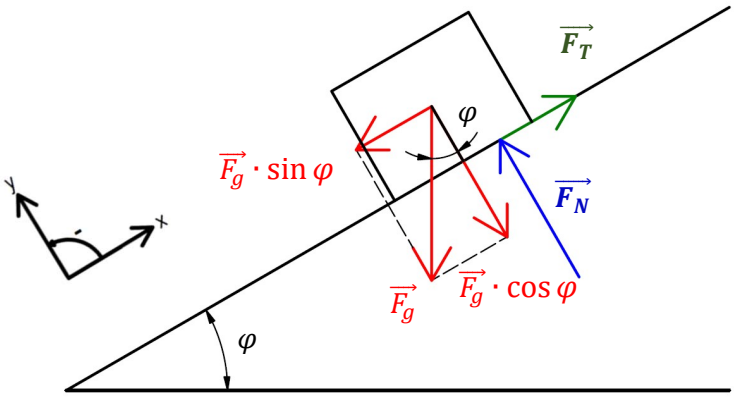
Součinitel smykového tření významně závisí na: [1]

- Jakosti povrchu třecích ploch
- Materiálu třecích ploch
- Jakosti mazání
- Teplotě v místě styku



Obr. 11 Kostka, na kterou působí smykové tření (převzato z [1])

Hodnota součinitele tření se zjišťuje následujícím experimentem:



Obr. 12 Uvolnění sil působících na nakloněný hranol

Hranol o hmotnosti m je položen na nakloněné rovině s úhlem sklonu φ. Předpokládaný pohyb je po nakloněné rovině dolů.

$$\sum F_x = 0: F_T - F_g \cdot \sin\varphi = 0$$

$$\sum F_y = 0: F_N - F_g \cdot \cos\varphi = 0$$

Dosazením:

$$\tan\varphi = \frac{F_T}{F_N} = f$$

Velikost součinitele smykového tření je závislá na tangentě úhlu sklonu desky.

Orientační hodnoty součinitele smykového tření jsou v následující tabulce. [1]

Materiál těles	f_0	f
Ocel na oceli	0,15	0,03 - 0,09
Ocel na litině	0,33	0,13 - 0,17
Ocel na fosfátovém bronzu	0,11	0,01

Tab.1 Hodnoty součinitele adheze a smykového tření (Převzato z [1])

6.3 Odpor valení

Při valení dochází k deformaci těles (válce a desky) v místě styku. Deformace se projevuje posunutím nositelky normálové síly proti pohybu tělesa v místě styku. Tuto vzdálenost posuvu nazýváme ramenem valivého odporu a značíme ji e, přičemž je e=konstantní. [1] Rameno valivého odporu má jednotku metr. V místě styku vzniká pasivní účinek nazývaný moment valivého odporu, jehož smysl musí být vždy proti pohybu tělesa v místě styku [1]. Moment valivého odporu vypočteme pomocí vztahu:

$$M_v = F_n \cdot e$$

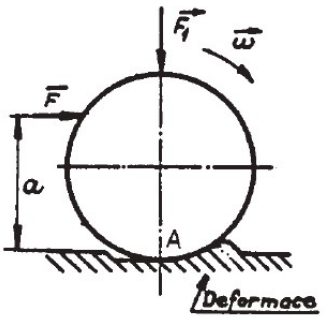
Velikost ramene valivého odporu závisí na materiálu stýkajících se těles. Orientační hodnoty jsou v následující tabulce. [1]

Materiál těles	**e [mm]**
Litina na litině	0,5
Ocel na oceli	0,5
Dřevo na kameni	1,5
Tvrdé dřevo na tvrdém dřeve	0,5

Tab.2 Ramena valivého odporu (Převzato z [1])

Valivý odpor je podstatně nižší než smykové tření, proto byl vynález kola starý více než 7000 let jedním z nejvýznamnějších objevů v dějinách lidstva a techniky.

Podstatou valivého odporu je deformace těles v místě styku. Jestliže dochází k valení, musíme tělesu dodávat energii, která se v místě styku mění nevratně na teplo a zbytkovou energii napjatosti [1].



Obr. 13 Valení (Převzato z [1])

6.4 Čepové tření

U rotační vazby za pohybu dochází mezi tělesy ke smýkání ve válcové ploše [1]. Odpor, který je rotační vazbě kladen, nazýváme moment čepového tření. Moment čepového tření lze popsat následujícím vztahem:

$$M_{A_č} = r_č \cdot f_č \cdot \sqrt{{F_{A_x}}^2 + {F_{A_y}}^2}$$

Kde:

rč	Poloměr čepu
fč	Součinitel čepového tření závisící na součiniteli smykového tření a na rozložení normálového tlaku
F_{Ax}, F_{Ay}	Výsledné stykové síly uvolněné rotační vazby

Pro rotační vazbu realizovanou pomocí čepu lze odvodit pro velikost součinitele čepového tření vztah [1]:

$$f_č = \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}}$$

f	Součinitel smykového tření mezi čepem a jeho pouzdrem.

Pro malé hodnoty součinitele smykového tření lze použít aproximaci $f \approx f_č$

6.4.1 Uvolnění dle Ponceleta

Odmocnina ve výpočtu čepového tření může být komplikací. Abychom mohli rovnice statické rovnováhy jednoduše vypočítat, musíme následující vztah převést do lineárního tvaru. Linearitu vztahu vyjadřuje přibližný lineární vztah podle Ponceleta [3].

$$F = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2} \approx 0{,}96 \cdot F_x + 0{,}4 \cdot F_y$$

Při použití aproximace se dopouštíme chyby, která je v mezích 4 %. Tento vztah platí, když $F_x > F_y$. V případě že $F_x < F_y$ prohodíme číselné koeficienty. Při řešení vypočítáme soustavu bez pasivních odporů, zjistíme, která vazbová síla je vyšší a doplníme čepová tření.

6.5 Vláknové (pásové) tření

Při pohybu lan, řemenů, ocelových pásů po zakřivených plochách těles dochází ve stykových plochách ke smýkání, které nazýváme pásové nebo vláknové tření (pásové brzdy, smýkání lana po pevné kladce atd.) [1].

$$F_x = 0: (F + dF) \cdot \cos\frac{d\psi}{2} - F \cdot \cos\frac{d\psi}{2} - dF_T = 0$$

$$F_y = 0: -(F + dF) \cdot \sin\frac{d\psi}{2} - F \cdot \sin\frac{d\psi}{2} + dF_N = 0$$

$$dF_T = f \cdot dF_N, \cos\frac{d\psi}{2} \cong 1, \sin\frac{d\psi}{2} \cong \frac{d\psi}{2}$$

$$dF - f \cdot dF_N = 0$$

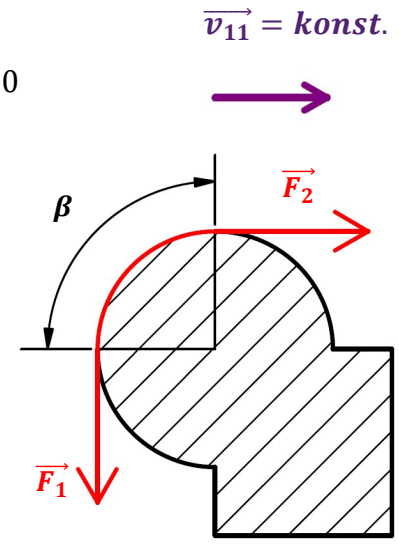
$$dF_N - F \cdot d\psi = 0$$

$$dF - F \cdot d\psi = 0$$

$$\frac{dF}{F} = f \cdot d\psi$$

$$\ln\frac{F_2}{F_1} = f \cdot \beta$$

$$\boldsymbol{F_2 = F_1 \cdot e^{\beta \cdot f}}$$



Obr. 14 Vláknové tření

β	Úhel opásání v radiánech
F_1, F_2	Síly v laně
f	Součinitel tření

Vztah je odvozen pro dokonale ohebné, neprodlužitelné vlákno, pohybující se po vypuklé ploše tělesa konstantní rychlostí. Zároveň je tíha vlákna vzhledem k ostatním silám nepodstatná. Součinitel smykového je předpokládán konstantní [1]. Když lano několikrát obtočíme kolem nekotovacího válce, přidáváme $2 \cdot \pi$ za každou plnou otáčku. Kromě pásového tření dochází u lan k dalším ztrátám energie. Tyto ztráty jsou však mnohem komplikovanějších a zohledňuji se pomoci experimentálně získaných součinitelů [8].

Odvozený vztah odvodil jeden z nejgeniálnějších matematiků všech dob Leonhard Paul Euler v osmnáctém století.

6.6 Kinematické dvojice v 2D

6.6.1 Podpora

Je-li těleso vázáno podporou, pak v podpoře může nastat klid, smýkání nebo valení. Skutečný pohybový stav závisí na uložení tělesa a silovém působení na těleso. Jestliže v podpoře nastává mechanický klid nebo smýkání, pak vazba odnímá tělesu jeden stupeň volnosti, v případě valení dva, protože otáčení kolem osy z a posuv ve směru osy x jsou lineárně závislé. Tato závislost je popsána vztahem $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ [1].

Klid

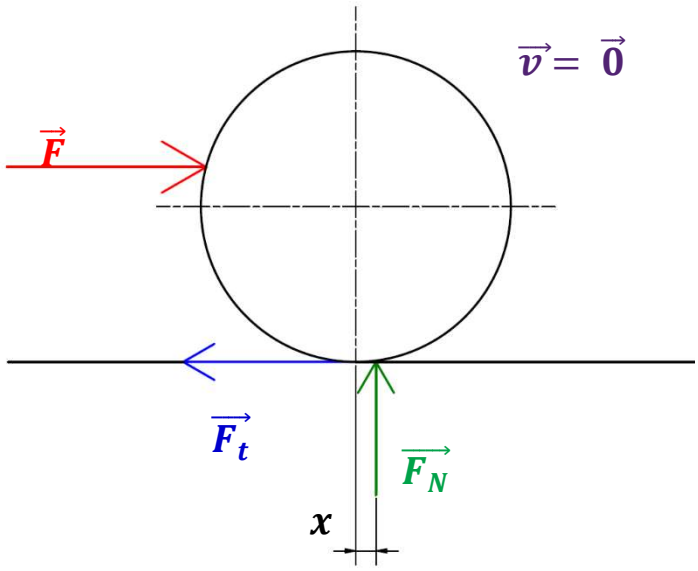
Při klidu nebyl překonán ani třecí ani valivý odpor ve vazbě. Mezi neznámé parametry patří normálová síla, tečná síla a moment neznámých velikostí. Z kinematického hlediska vazba stále odebírá pouze jeden stupeň volnosti, protože pohyb sice nenastává a ve smyslu rotace je ovlivněn, ne však omezen [1].

Neznámé parametry: $NP = \{F_t, F_N, x\}$

$\mu = 3$

Počet odebraných stupňů volnosti: $\xi = 1°V$

Podmínky pohybového stavu: $F < F_T = f \cdot F_N$



Obr. 15 Uvolnění pohybového stavu klid

Smýkání

Smyk ve vazbě bude nastávat v případě, kdy valivý odpor překonán není, ale je překonán tečný (třecí) odpor.

Neznámé parametry: $NP = \{F_N, x\}$

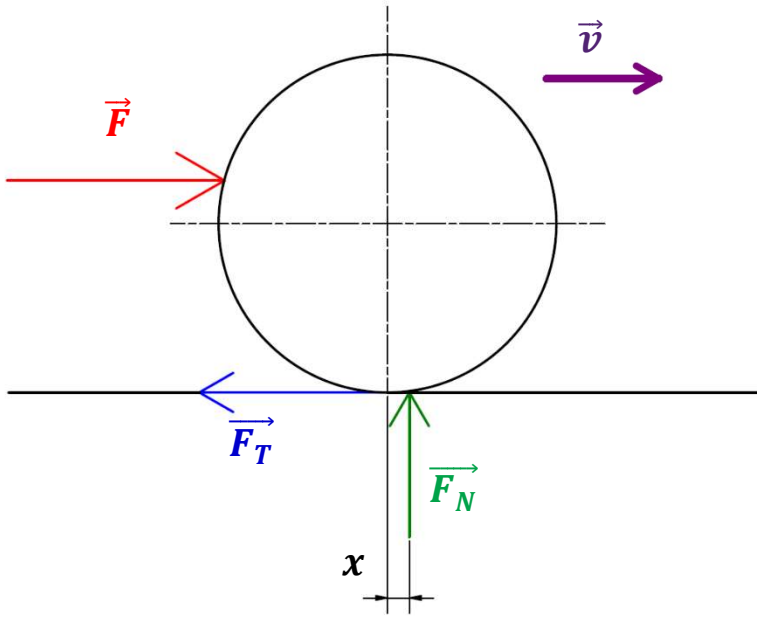
$\mu = 2$

Počet odebraných stupňů volnosti: $\xi = 1°V$

Podmínky pohybového stavu: $x < e$

Doplňkové rovnice: $F_T = f \cdot F_N$

U pohybové varianty smýkání je vyosení nositelky normálné síly z hlediska řešeného problému u většiny případů nepodstatné [1].



Obr. 16 Uvolnění pohybového stavu smýkání

Valení

Valení nastává po překonání momentu valivého odporu. Těleso vykonává složený pohyb, který lze charakterizovat jako rotaci kolem okamžité osy otáčení (ta je v bodu styku těles) a translaci (posuv) ve směru rovnoběžném (tečném) k podložce. [7]

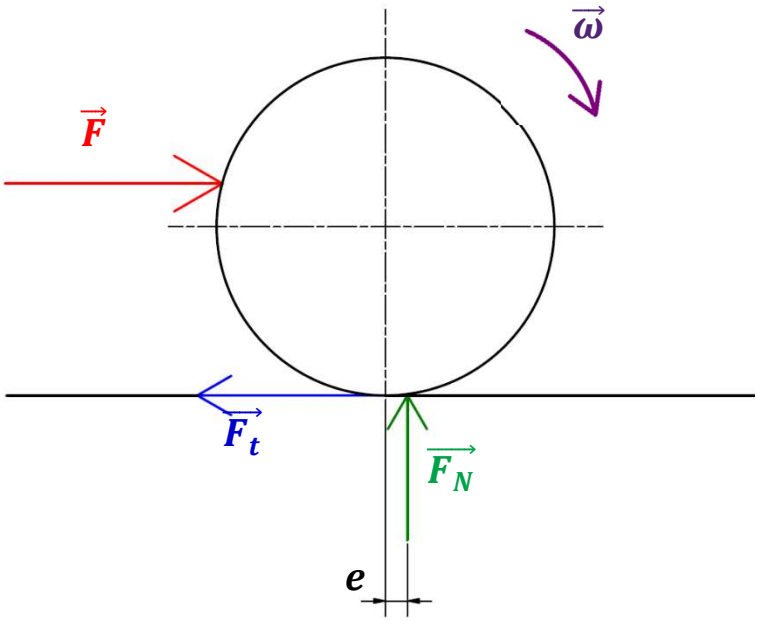
Neznámé parametry: $NP = \{F_t, F_N\}$

$\mu = 2$

Počet odebraných stupňů volnosti: $\xi = 2°V$

Podmínky pohybového stavu: $F_t < F_T = f \cdot F_N$

Doplňkové rovnice: $M_v = F_N \cdot e$



Obr. 17 Uvolnění pohybového stavu valení

Při uvolňování nevíme, jaký pohybový stav ve vazbě nastane. Je-li z hlediska uložení tělesa možné valení, pak ho předpokládáme. Válení je pravděpodobnější stav, než smýkání a pro určení neznámých parametrů zkontrolujeme podmínku pohybového stavu. [1]

6.6.2 Posuvná vazba

U jednostranné posuvné vazby pohybového hlediska může nastat klid, smýkání nebo může dojít ke zrušení vazby. Posuvná vazba odnímá tělesu dva stupně volnosti [1].

Klid

V klidu není překonán třecí odpor vazby tudíž tečnou sílu stejně jako sílu normálovou a moment považujeme za neznámé parametry.

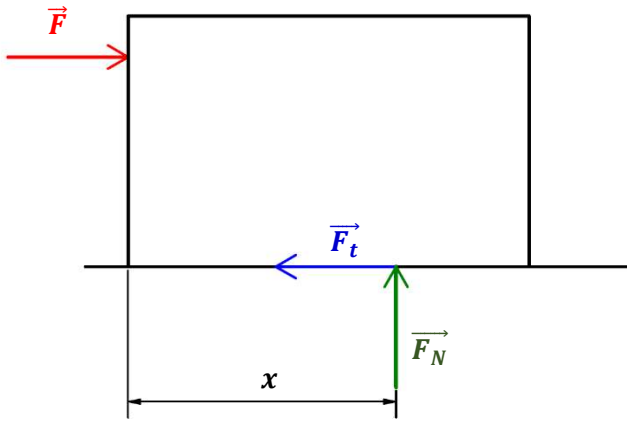
Neznámé parametry: $NP = \{F_t, F_N, x\}$

$\mu = 3$

Počet odebraných stupňů volnosti: $\xi = 2\ °V$

Podmínky pohybového stavu: $F_T = f \cdot F_N > F_t$

$x < l$



Obr. 18 Uvolnění pohybového stavu klid

Smýkání

Když se změní pohybový stav z klidu na pohyb, vznikne třecí síla kterou definuje Coulombův zákon.

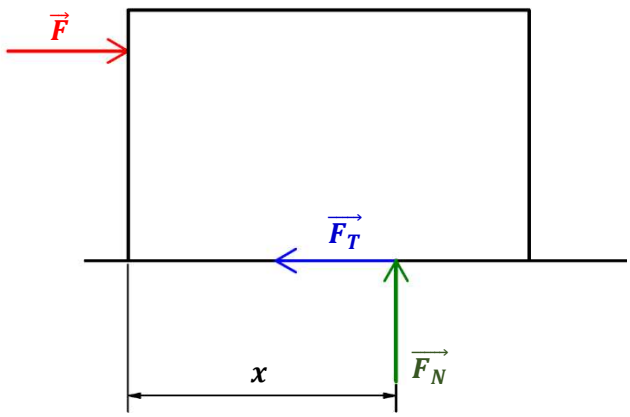
Neznámé parametry: $NP = \{F_N, x\}$

$\mu = 2$

Počet odebraných stupňů volnosti: $\xi = 2\ °V$

Podmínky pohybového stavu: $x < l$

Doplňkové rovnice: $F_{AT} = f \cdot F_{A_n}$



Obr. 19 Uvolnění pohybového stavu smýkání

6.6.3 Rotační vazba

V rotační vazbě mohou nastat dva pohybové stavy – klid a rotace. Odporovým účinek má charakter momentu způsoben kombinací mechanik tření a valení.

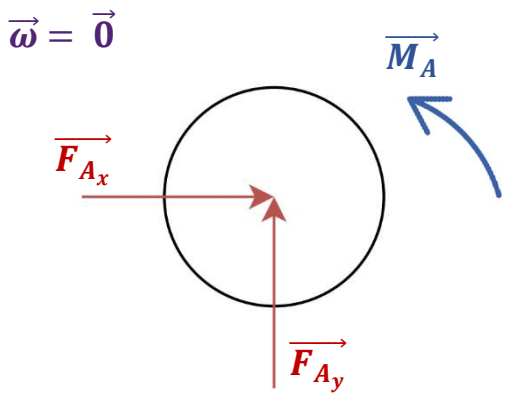
Smýkání

Neznámé parametry: $NP = \{F_{A_x}, F_{A_y}\}$

$\mu = 2$

Počet odebraných stupňů volnosti: $\xi = 2\ °V$

Doplňkové rovnice: $M_{A_č} = r_č \cdot f_č \cdot \sqrt{{F_{A_x}}^2 + {F_{A_y}}^2}$



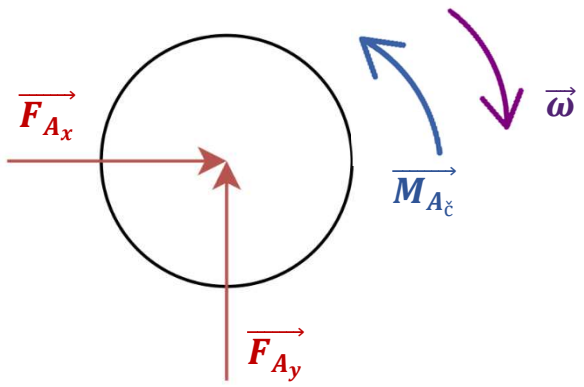
Obr. 20 Uvolnění pohybového stavu klid

Klid

Neznámé parametry: $NP = \left\{F_{A_x}, F_{A_y}, M_A\right\}$

$\mu = 3$

Počet odebraných stupňů volnosti: $\xi = 2\ °V$



Obr. 21 Uvolnění pohybového stavu smýkání

V kapitole je uvedeno jen několik typů rovinných vazeb a jejich parametrů. Byly vybrány ty nejtypičtější, se kterými se můžeme v mechanice setkat. Může se však vyskytovat mnoho dalších vazeb, především vazby prostorové.

8 Algoritmus řešení úlohy NNTP

8.1 Rozbor úlohy:

a) Kontrola formální správnosti a úplnosti zadání.
b) Klasifikace prostorovosti úlohy nebo přirazeného modelu objektu.
c) Označení těles čísly
d) Vymezení soustavy úplně zadaných silových prvků
e) Označení a klasifikace vazeb velkými písmeny [1]

8.2 Kinematický rozbor

Určíme pohyblivost soustavy a případný počet volných stupňů volnosti klasifikujeme.

8.3 Určení charakteru relativního pohybu

Při určení charakteru relativního pohybu musíme určit předpokládány směr pohybu. Podle směru pohybu můžeme určit směry odporových sil tření. Ve statice počítáme s konstantní rychlostí, v dynamice se zrychlením.

8.4 Uvolnění

Musíme určit jednotlivá silová působení na jednotlivá tělesa. Při uvolnění vazeb platí princip akce a reakce [1].

8.5 Statický rozbor

Pro výpočet úloh ve statice je potřeba provést takzvaný statický rozbor, který nám vypovídá, zdali je úloha ve statice řešitelná.

Postup je následující: [1]

a) Volba souřadnicového systému: Souřadnicový systém zvolíme libovolně, ale z hlediska řešeného problému vhodně.

b) Vymezení soustavy neúplně zadaných silových prvků π_R, množiny neznámých nezávislých parametrů NP a jejich počtu $\mu = \mu_F + \mu_M + \mu_R$ (silové + momentové + polohové)

c) Ověření nutné podmínky statické určitosti: Úloha je statický určitá, jestliže NP můžeme určit ze statických podmínek, což je splněno jestliže $\mu = \nu$. Neznáme souřadnice momentů nebo polohových parametrů můžeme určit z momentových podmínek $\mu_R + \mu_M \leq \upsilon_M$. Nutná podmínka statické určitosti úlohy:

$$\mu = \nu \wedge \mu_R + \mu_M \leq \upsilon_M$$

Při nesplnění podmínek statické určitosti nejsme schopni, až na výjimečné případy, úlohu řešit.

8.6 Sestavení rovnic

8.6.1 Sestavení statických rovnic

Sestavíme podmínky statické rovnováhy za základě typu silové soustavy, která působí na těleso. Pasivní účinky vyjádříme pomocí stykových závislostí.

8.6.2 Sestavení rovnic dynamiky soustav těles

Když řešíme úlohy v dynamice, můžeme si vybrat několik typů metod řešení soustav rovnic. Jde o metodu uvolňování, metodu redukce a Lagrangeovy rovnice druhého druhu.

Metoda uvolňování

Tato metoda převádí vyšetřování pohybu soustavy těles na řešení pohybu jednotlivých těles. Jde o univerzální metodu, umožňující celkové dynamické řešení mechanické soustavy. K pohybovým rovnicím je zpravidla ještě nutno připojit kinematické rovnice a rovnice vazeb, tak aby počet rovnic byl roven počtu neznámých. Pokud se podaří pomocí těchto vztahů vyloučit všechny závislé veličiny, bude v pohybových rovnicích mechanické soustavy s n stupni volnosti n nezávislých souřadnic. Vyloučením všech

vazebních sil obdržíme pohybové rovnice udávající závislost mezi vnějšími (akčními) silami a parametry pohybu. [2] Tato metoda je téměř identická se sestavováním statických rovnic.

Metoda redukce

Základní metodou vyšetřování pohybu soustav těles je metoda uvolňování. Tato metoda je poměrně časové náročná, poněvadž v ní vystupují všechny neznámé vnitřní síly soustavy, a proto ji nahrazujeme v případech, kdy chceme získat vlastní pohybovou rovnici, metodou redukce. Název metody vznikl z poznatku, že pro soustavu s jedním stupněm volnosti lze napsat vlastní pohybovou rovnici ve tvaru shodném s pohybovou rovnicí jediného tělesa, na které byly redukovány všechny hmotnostní a silové charakteristiky soustavy. Jde tedy o nahrazení skutečné soustavy soustavou jednodušší, která má všechny dynamické vlastnosti shodné se soustavou původní. Při redukci bychom mohli vycházet i z metody uvolňování a vlastní pohybové rovnice odvodit redukované veličiny. Tím by však řešení nebylo jednodušší [2]. Velkou nevýhodou metody redukce je, že ji musíme uvažovat pouze pro soustavy, kde se nenacházejí pasivní účinky.

Lagrangeovy rovnice druhého druhu

Lagrangeovy rovnice druhého druhu představují v současné době nejužívanější metodu analytické mechaniky při sestavování pohybových rovnic pro modelová tělesa, a především pro modelové soustavy těles. Metodický postup při sestavování pohybových rovnic je nezávislý na volbě souřadnicového systému, což je nespornou výhodou. Další výhodou je, že jedinými dynamickými veličinami, které je nutné vyjádřit, jsou kinetické energie a potenciální energie [2]. Opět však platí, že Lagrangeovy rovnice můžeme použít jen u konzervativních soustav.

8.7 Řešení soustavy rovnic

S narůstajícím počtem jednotlivých těles a podmínek statické rovnováhy je analytické řešení velkých mechanických soustav velmi časově náročné. Z důvodu úspory času a zmenšení pravděpodobnosti chyb, použijeme numerické řešení pomocí maticové rovnice. Řešená soustava je vypočítána v programu Matlab. Podmínkou vyřešení soustavy je lineárnost rovnic. Tu by nám mohlo narušit čepové tření, ale při použití nahrazení podle Ponceleta je tento problém vyřešen. Při nelinearitě bychom museli použít numerickou metodu pro vyřešení neznámých parametrů.

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

A	Matice soustavy
x	Sloupcový vektor neznámých parametrů
b	Sloupcový vektor známých parametrů

Po sestavení matic stačí jednoduše zadat příkaz $A\backslash b$ a Matlab vypočítá soustavu neznámých parametrů.

8.8 Zhodnocení výsledků řešení

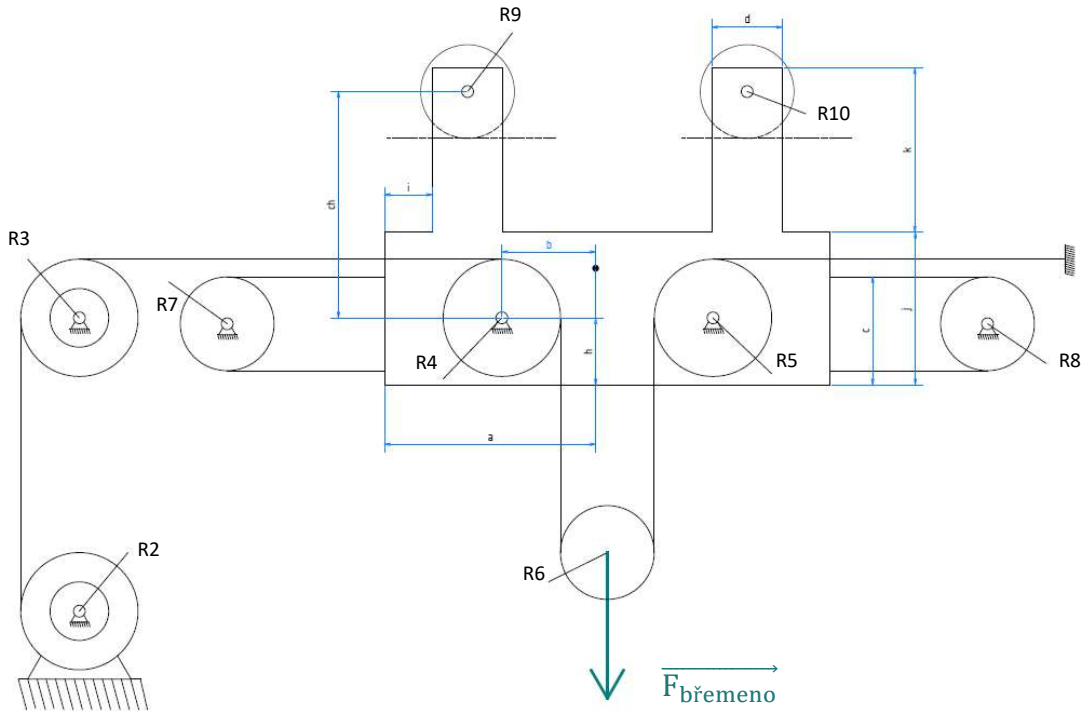
Většina vazeb má podmíněnou funkčnosti podmínkami. Je třeba zkontrolovat platnost těchto podmínek u všech těles. Když podmínky funkčnosti nejsou splněny, musíme náležitě výpočet upravit, abychom se dostali k funkčnímu výsledku. I pohybové stavy jsou podmíněny podmínkami funkčnosti jako je například valení.

8.9 Formulace závěru

V posledním kroku zhodnotíme úlohy. Co nám říkají hodnoty výsledků, kde se vyskytuje největší zatížení, případně jak součást optimalizovat vzhledem k vypočteným hodnotám.

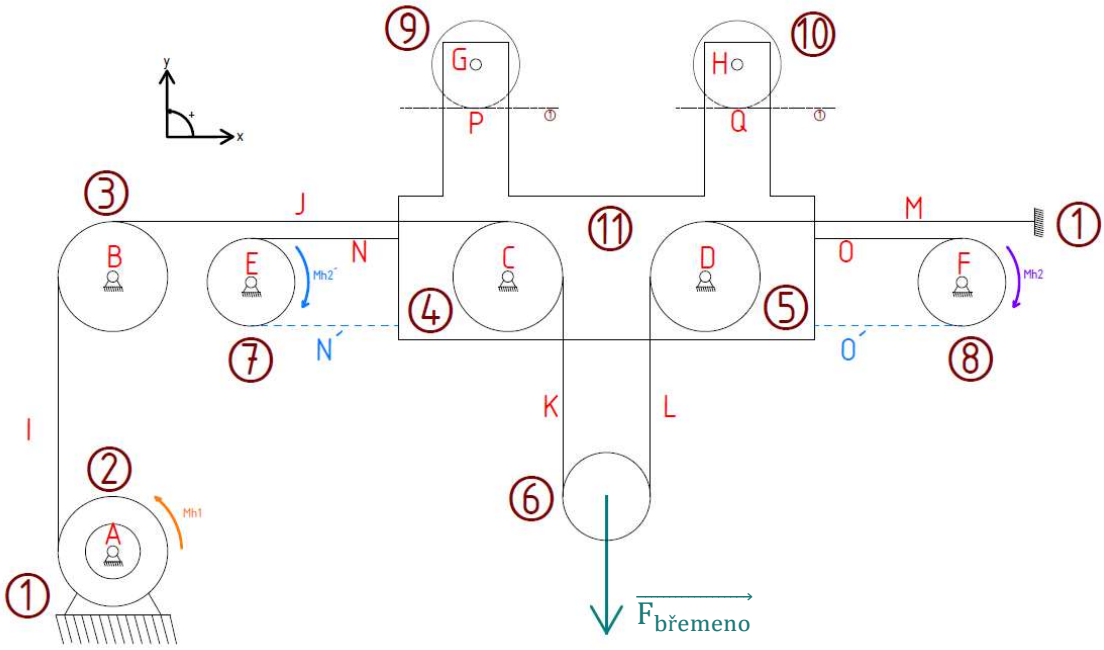
9 Řešená soustava těles

V technické praxi se můžeme potkat s velkým počtem typů jeřábů s rozličnými funkcemi. Nejběžnějším typem jeřábu, objevujících se na stavbách budov, je věžový jeřáb. Pro prezentaci řešení mechanické analýzy soustavy těles jsem zvolil jeho podsoustavu. Pro zjednodušení modelu jsem nahradil zvedané břemeno pomocí tíhové síly $\overrightarrow{F_{břemeno}}$ působící ve stejném směru, jako tíhová síla samotné kladnice. Pro správné fungování jeřábu je nutno správně vypočítat mnoho parametrů. Patří mezi ně výkon hnacího motoru, typy ložisek, provedení spojů, pružin a mnoho dalších technických součástek spadající do konstruovaní. Moje práce se zabývá mechanikou. Bude proveden výpočet velikosti hnacích momentů pro zvedání břemene do výšky a pohyb kočky do strany po výložníku. Dále bude řešena nutná velikost hmotnosti kladnice pro samovolné klesání kladnice k zemi a velikosti zrychlení po opuštění mechanického klidu v rozličných pohybových stavech. Ve všech případech bude proveden výpočet velikosti stykových sil. Všechny popsané parametry je nutno znát pro správné pokračování návrhu stroje jako celku. Skutečný věžový jeřáb nahradíme dvourozměrným modelem. Vliv setrvačných sil je zanedbatelný a předpokládáme nedeformovatelnosti jednotlivcích součásti, tudíž budeme moci použít algoritmus výpočtového modelu NNTP. Soustava je modelována na základě klasických konstrukčních návrhů věžových jeřábů.



Obr. 22 Řešená mechanická soustava s vyznačením důležitých geometrických rozměrů

9.1 Popis těles a vazeb řešené soustavy



Obr. 23 Řešená mechanická soustava s vyznačením těles a vazeb

Podsoustava obsahuje lanové bubny (tělesa 2, 7, 8), kočku jeřábu (těleso 11), pojezdová kola kočky (tělesa 9, 10), vodící kladky (tělesa 3, 4, 5) a kladnici (těleso 6). Všechny kladky jsou spojeny lany. Celkem máme soustavu s 11-ti tělesy.

Lanové bubny jsou poháněny hnacími momenty, které umožňuje pohyb podsoustavy v námi určeném směru. Hnací moment na tělese 2 umožňuje zvedání kladnice s břemenem vertikálně. Buben se rozpohybuje elektromotorem, který je spojen s bubnem hřídelí. Pro spouštění kladnice se používá jeho tíha, která ho samovolně spustí k zemi. Hnací momenty na tělese 7 a 8 umožňují pohyb kočky do stran. Lana O, N jsou funkční při pohybu kočky hnacím momentem Mh_2, zatímco lana N´, O´ jsou funkční při pohybu momentem Mh_2'. Tíha zvedaného břemene je uvažována s velikostí jedné tuny.

Pojezdová kola kočky se pohybují po výložníku kočky (který je brán jako základové těleso 1). Hnací lanový buben 2 je rovněž připevněn k jeřábové konstrukci, která je brána jako základové těleso.

9.2 Geometrické rozměry a pasivní účinky jednotlivých těles

Lanové bubny 2, 7, 8

Uložení lanových bubnů je ve skutečnosti realizováno pomocí valivých ložisek. Pro zjednodušení budeme uvažovat, že se jedná o čepy se součinitelem čepového tření (rotační vazby A, E, F).

Poloměr bubnu: $R_i = 0{,}4\ m$

Hmotnost bubnu: $m_i = 6000\ kg$

Poloměr ložiska: $r = 0{,}025\ m$

Součinitel čepového tření: $f = 0{,}015$

Vodící kladky 3, 4, 5

Uložení vodících kladek je realizováno obdobně jako u lanových bubnů (rotační vazby B, C, D). Rozměrově jsou však menší a lehčí než bubny, neboť v nich není uložen hnací elektromotor.

Poloměr bubnu: $R_i = 0{,}25\ m$

Hmotnost bubnu: $m_i = 3050\ kg$

Poloměr ložiska: $r = 0{,}025\ m$

Součinitel čepového tření: $f = 0{,}015$

Pojezdová kola 9, 10

Pojezdová kola slouží k přesouvání jeřábové kočky po výložníku.

Poloměr kola: $R_i = 0{,}35\ m$

Hmotnost kola: $m_i = 4050\ kg$

Poloměr ložiska: $r = 0{,}025\ m$

Součinitel čepového tření $f = 0{,}015$

Rameno valivého odporu: $e = 0{,}0007\ mm$

Kočka 11

Jádro podsoustavy věžového jeřábu, umožňující manipulaci s břemenem.

Hmotnost: $m_{11} = 8500\ kg$

Geometrie: $a = 0{,}8\ m$, $b = 0{,}4\ m$, $c = 0{,}7\ m$, $d = 0{,}5\ m$, $h = 0{,}4\ m$

$ch = 1{,}7\ m$, $i = 0{,}15\ m$, $j = 1\ m$, $k = 1{,}1\ m$

Kladnice 6

Zařízení obsahující lanové kladky a hák, sloužící k upevnění břemene.

Hmotnost: $m_6 = 3050\ kg$

Poloměr kola: $R_6 = 0{,}35\ m$

9.3 Předpoklady pro řešení

- Při řešení čepových třeních v rotačních vazbách využijeme linearizaci podle Ponceleta, abychom mohli řešit soustavu lineárních neznámých rovnic pomocí matic v softwaru Matlab.
- Hmotnosti jednotlivých lan zanedbáváme.
- Prokluz lan zanedbáváme.
- Sílu přepětí lan zanedbáváme.
- Při řešení veškerých pohybových stavů uvažujeme tíhové pole země.
- Hodnoty geometrických rozměrů, či součinitelů tření jednotlivých těles mechanické soustavy jsou odhadnuty na základě rozměrů typických věžových jeřábů značky Liebherr.

9.4 Výpočet těžiště kočky

Abychom mohli počítat s tíhovou silou kočky, musíme vypočítat souřadnice těžiště tělesa. Výpočet těžiště je proveden pomocí rozložení tělesa 11 na tři obdelníky. První o stranách $2 \cdot a \times j$, a dva o stranách $k \times d$. Pomocí souřadnic těžišť jednotlivých obdelníků jsme schopni určit souřadnice těžiště tělesa jako celku.

$$x_T = \frac{a \cdot (2 \cdot a \cdot j) + \left(i + \frac{d}{2}\right) \cdot (k \cdot d) + (2 \cdot a - i - \frac{d}{2}) \cdot (k \cdot d)}{(2 \cdot a \cdot j) + (k \cdot d) + (k \cdot d)}$$

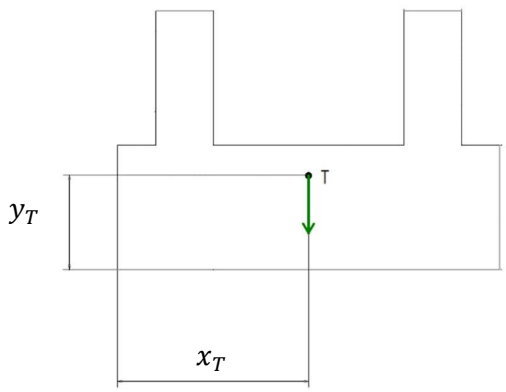
$$x_T = \frac{0{,}8 \cdot (2 \cdot 0{,}8 \cdot 1) + \left(0{,}15 + \frac{0{,}5}{2}\right) \cdot (1{,}1 \cdot 0{,}5) + (2 \cdot 0{,}8 - 0{,}15 - \frac{0{,}5}{2}) \cdot (1{,}1 \cdot 0{,}5)}{(2 \cdot 0{,}8 \cdot 1) + (1{,}1 \cdot 0{,}5) + (1{,}1 \cdot 0{,}5)}$$

$$= 0{,}8 \text{ m}$$

$$x_T = \frac{\frac{j}{2} \cdot (2 \cdot a \cdot j) + \left(j + \frac{k}{2}\right) \cdot (k \cdot d) + \left(j + \frac{k}{2}\right) \cdot (k \cdot d)}{(2 \cdot a \cdot j) + (k \cdot d) + (k \cdot d)}$$

$$y_T = \frac{\frac{1}{2} * (2 \cdot 0{,}8 \cdot 1) + \left(1 + \frac{1{,}1}{2}\right) * (1{,}1 \cdot 0{,}5) + (1 + \frac{1{,}1}{2}) * (1{,}1 \cdot 0{,}5)}{(2 \cdot 0{,}8 \cdot 1) + (1{,}1 \cdot 0{,}5) + (1{,}1 \cdot 0{,}5)} = 0{,}927 \text{ m}$$

T [0,8 ; 0,927] m



Obr. 24 Zakótovaná pozice vypočítaného těžiště

10 Analýza pohybových stavů soustavy těles

10.1 První pohybový stav – zvedání kladnice s břemenem do výšky konstantní rychlostí

V první variantě řešení budeme počítat nejtypičtější situaci ve které se věžový jeřáb může nacházet. Lanový buben bude zvedat kladnici s břemenem do výšky konstantní rychlostí. Úkolem příkladu bude vyjádřit velikost hnacího momentu Mh_1, který musí elektromotor vyvinou pro udržení tohoto pohybového stavu a stykové síly v jednotlivých vazbách.

10.1.1 Kinematický rozbor

$$i = (n - 1) \cdot i_v - \left(\sum \xi - \eta\right)$$

A, B, C, D: Rotační vazba odebírající dva stupně volnosti $\xi = 2\ °V$

I, J, K, L, M: Vazba lano odebírající jeden stupeň volnosti $\xi = 1\ °V$

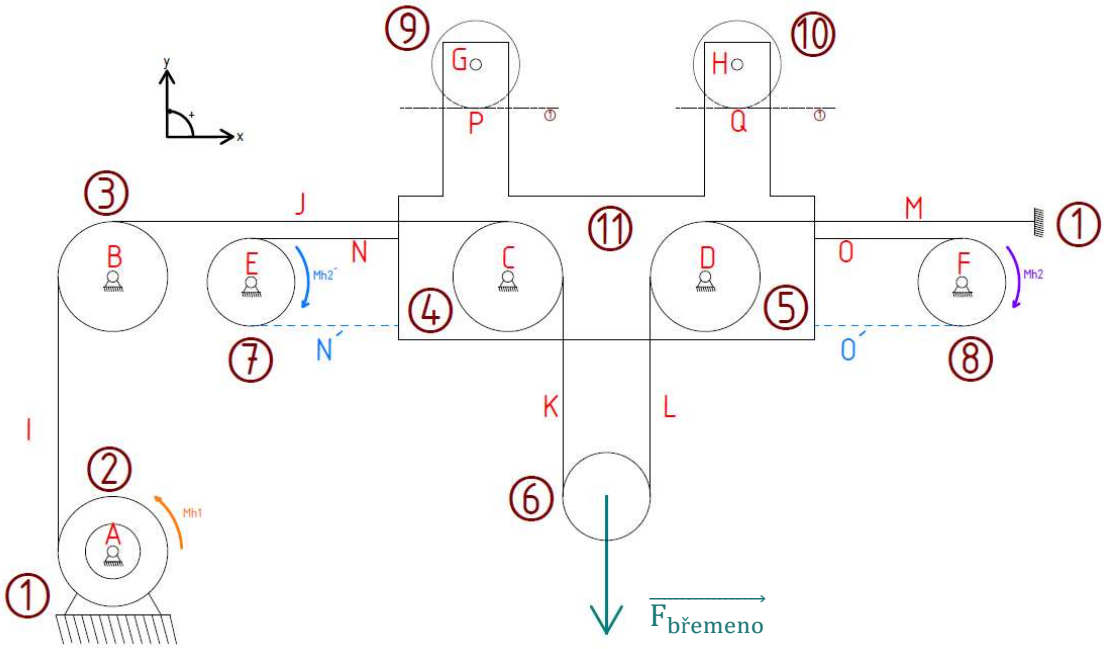
$$i = (6 - 1) \cdot 3 - (2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 - 0)$$

$$i = 2\ °V$$

$$\eta = 0$$

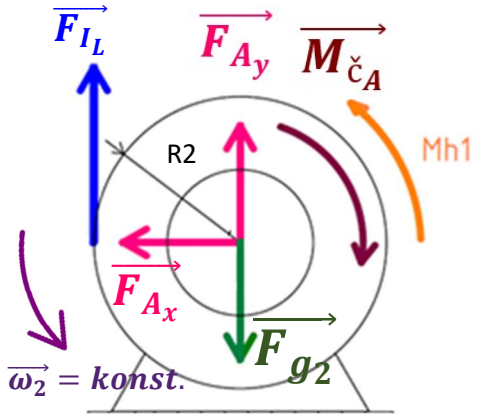
Podle výsledku kinematického rozboru můžeme určit, že soustava těles se bude pohybovat bez omezení deformačních parametrů s dvěma stupni volnosti. Volné pohyby jsou zvedání kladnice v ose y a rotace břemena na zavěšených lanech v ose z.

10.1.2 Uvolnění těles a sestavení rovnic statické rovnováhy

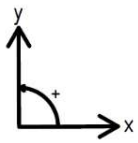


Obr. 23 Řešená mechanická soustava s vyznačením těles a vazeb

Těleso 2



Obr. 25 Uvolnění tělesa 2



$$\sum F_x = 0: \; -F_{A_x} = 0$$

$$\sum F_y = 0: F_{A_y} - F_{g_2} + F_{I_L} = 0$$

$$\sum M_{z_0} = 0: \; -F_{I_L} \cdot R2 + M_{h_1} - M_{\check{c}_A} = 0$$

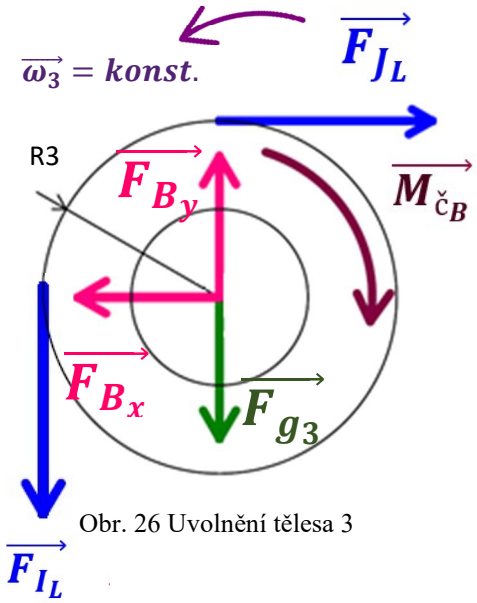
Doplňkové rovnice:

$$F_{g_2} = m_2 \cdot g$$

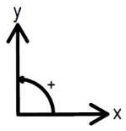
Stykové závislosti:

$$M_{\check{c}_A} = f_{\check{c}_A} \cdot r_A \cdot \sqrt{{F_{A_x}}^2 + {F_{A_y}}^2}$$

Těleso 3



Obr. 26 Uvolnění tělesa 3



$$\sum F_x = 0: \; -F_{B_x} + F_{J_L} = 0$$

$$\sum F_y = 0: -F_{I_L} - F_{g_3} + F_{B_y} = 0$$

$$\sum M_{z_0} = 0: F_{I_L} \cdot R3 - F_{J_L} \cdot R3 - M_{č_B} = 0$$

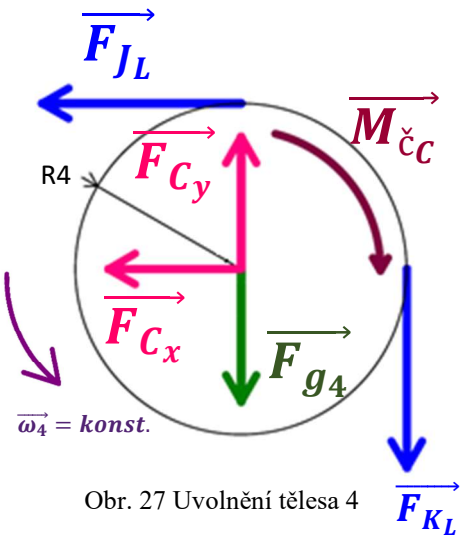
Doplňkové rovnice:

$$F_{g_3} = m_3 \cdot g$$

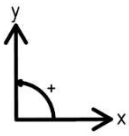
Stykové závislosti:

$$\mathrm{M_{č_B}} = \mathrm{f_{č_B}} \cdot \mathrm{r_B} \cdot \sqrt{\mathrm{F_{B_x}}^2 + \mathrm{F_{B_y}}^2}$$

Těleso 4



Obr. 27 Uvolnění tělesa 4



$$\sum F_x = 0: \; -F_{C_x} - F_{J_L} = 0$$

$$\sum F_y = 0: -F_{K_L} - F_{g_4} + F_{C_y} = 0$$

$$\sum M_{z_0} = 0: -F_{K_L} \cdot R4 + F_{J_L} \cdot R4 - M_{č_C} = 0$$

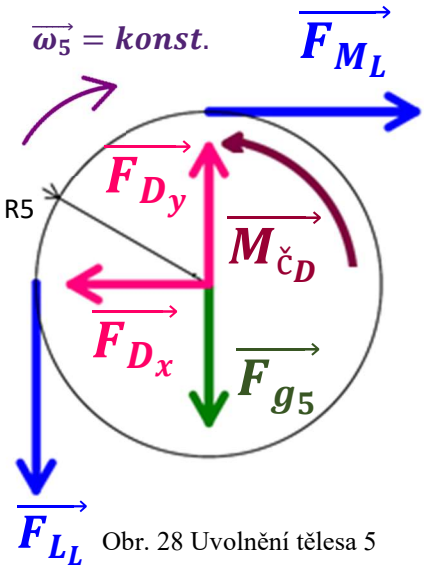
Doplňkové rovnice:

$$F_{g_4} = m_4 \cdot g$$

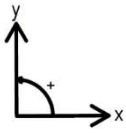
Stykové závislosti:

$$M_{č_C} = f_{č_C} \cdot r_C \cdot \sqrt{F_{C_x}^2 + F_{C_y}^2}$$

Těleso 5



Obr. 28 Uvolnění tělesa 5



$$\sum F_x = 0: \; -F_{D_x} + F_{M_L} = 0$$

$$\sum F_y = 0: -F_{L_L} - F_{g_5} + F_{D_y} = 0$$

$$\sum M_{z_0} = 0: -F_{M_L} \cdot R5 + F_{L_L} \cdot R5 + M_{čD} = 0$$

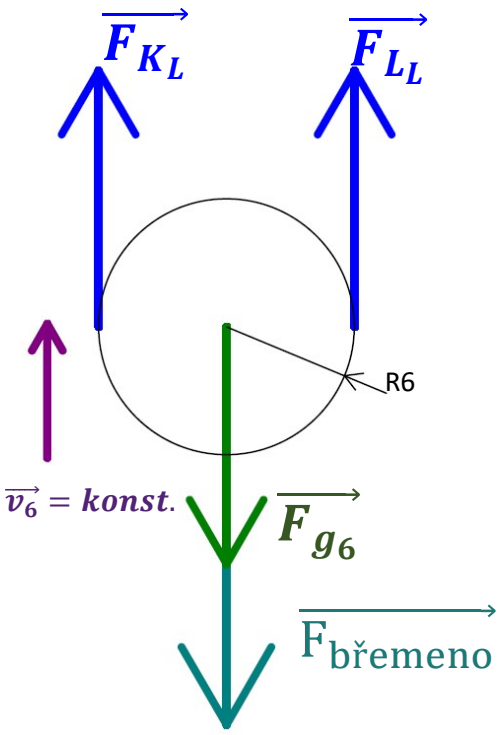
Doplňkové rovnice:

$$F_{g_5} = m_5 \cdot g$$

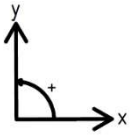
Stykové závislosti:

$$M_{čD} = f_{čD} \cdot r_D \cdot \sqrt{{F_{D_x}}^2 + {F_{D_y}}^2}$$

Těleso 6



Obr. 29 Uvolnění tělesa 6



$$\sum F_y = 0: F_{L_L} - F_{g_6} + F_{K_L} - F = 0$$

$$\sum M_{z_0} = 0: -F_{K_L} \cdot R6 + F_{L_L} \cdot R6 = 0$$

Doplňkové rovnice:

$$F_{g_6} = m_6 \cdot g$$

10.1.3 Statický rozbor

Sestavení množiny neznámých parametrů

$$\text{NP}: \{F_{A_x}, F_{A_y}, F_{B_x}, F_{B_y}, F_{C_x}, F_{C_y}, F_{D_x}, F_{D_y}, F_{I_L}, F_{J_L}, F_{K_L}, F_{L_L}, F_{M_L}, M_{h_1}\}$$

$$\mu = \mu_F + \mu_M + \mu_R = 13 + 1 + 0 = 14 \; (\mu_F = 13, \mu_M = 1, \mu_R = 0)$$

Klasifikace charakteru silových soustav:

2,3,4,5: Síly působí jak ve směru osy x, tak ve směru osy y, taktéž nejsou na jedné nositelce → Obecná rovinná silová soustava: $\upsilon = 3 \; (\upsilon_F = 2, \; \upsilon_M = 1)$

6: Síly působí na rovnoběžných nositelkách → Soustava rovnoběžných sil v rovině:

$\upsilon = 2 \; (\upsilon_F = 1, \; \upsilon_M = 1)$

Celkový počet použitelných statických podmínek v základním tvaru:

$$\upsilon = 4 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 14$$

Ověření nutné podmínky statické určitosti:

$$s = \mu - \upsilon = 0$$

$$s = 14 - 14 = 0$$

→ PLATÍ

$$\upsilon_M \geq \mu_M + \mu_R$$

$$1 \geq 1 + 0$$

→ PLATÍ

Obě podmínky statické rovnováhy jsou splněny, soustava těles je statický určitá.

10.1.4 Analýza výsledků:

V tabulce níže jsou uvedené jednotlivé neznámé parametry a jejich vypočítané hodnoty. Dále jsou posouzeny podmínky funkčnosti vazeb.

NP	Hodnota	Podmínka funkčnosti	Ověření funkčnosti
F_{A_x}	0 N	Vždy funkční	-
F_{A_y}	38 946 N	Vždy funkční	-
F_A	38 946 N	-	-
F_{B_x}	19 872 N	Vždy funkční	-
F_{B_y}	49 860 N	Vždy funkční	-
F_B	53 674 N	-	-
F_{C_x}	-19 872 N	Vždy funkční	-
F_{C_y}	49 800 N	Vždy funkční	-
F_C	53 618 N	-	-
F_{D_x}	19 929 N	Vždy funkční	-
F_{D_y}	49 800 N	Vždy funkční	-
F_D	53 640 N	-	-
F_{I_L}	19931 N	$F_{I_L} > 0$	$19931 > 0$
F_{J_L}	19872 N	$F_{J_L} > 0$	$19872 > 0$
F_{K_L}	19871 N	$F_{K_L} > 0$	$19871 > 0$
F_{L_L}	19871	$F_{L_L} > 0$	$19870 > 0$
F_{M_L}	19929 N	$F_{M_L} > 0$	$19929 > 0$
M_{h_1}	7986 N·m	-	-

Tab. 3 Výsledné neznámé parametry a ověření funkčnosti vazeb

Cílem úlohy bylo vyjádřit velikost hnacího momentu M_{h_1}, aby se kladnice se zavěšeným břemenem o tíze jedné tuny, zvedala do výšky rovnoměrně přímočaře. Velikost sil působících ve vazbách vypočteme pomocí vektorového součtu. Z výsledků vidíme, že výsledné síly mají velmi podobné hodnoty. Konstrukčně by takového provedení bylo velmi výhodné, neboť by podsoustava byla rovnoměrně zatížena.

Typický motor věžového jeřábu má výkon 200 kW. Dle vztahu pro přepočet točivého momentu a otáček, můžeme vypočítat kolik otáček za vteřinu hnací buben provede, aby zvedal rovnoměrně tisíci kilogramové břemeno.

$$P = \omega \cdot M_{h1} = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot M_{h1}$$

$$n = \frac{P}{2 \cdot \pi \cdot M_{h1}} = \frac{200\,000}{2 \cdot \pi \cdot 7986} = 3{,}985\ ot./sekundu$$

Aby věžový jeřáb zvedl požadované břemeno, buben musí provést téměř 4 otáčky za sekundu.

10.2 Druhý pohybový stav – pohyb kočky do strany

V druhé variantě řešení budeme počítat situaci, kdy lanový buben posouvá s celou kočkou v kladném směru osy x konstantní rychlostí. Úkolem příkladu je vyjádřit velikost hnacího momentu Mh_2, který musí elektromotor vyvinou pro udržení tohoto pohybového stavu a stykové síly v jednotlivých vazbách.

10.2.1 Kinematický rozbor

$$i = (n - 1) \cdot i_v - \left(\sum \xi - \eta\right)$$

E, F, G, H: Rotační vazba odebírající dva stupně volnosti $\xi = 2\ °V$

N, O: Vazba lano odebírající jeden stupeň volnosti $\xi = 1\ °V$

P, Q: Vazba podpora – valení odebírající dva stupně volnosti $\xi = 2\ °V$

$$i = (6 - 1) \cdot 3 - (2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 0)$$

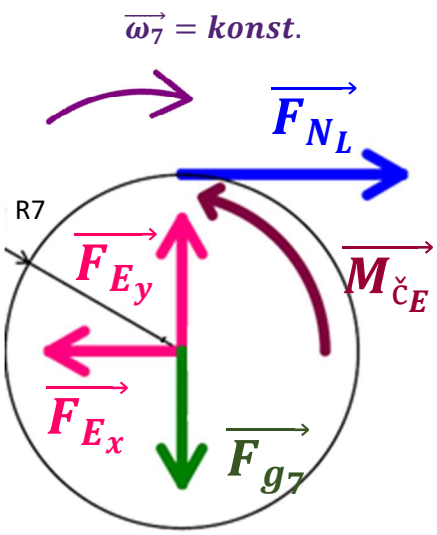
$$i = 1\ °V$$

$$\eta = 0$$

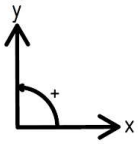
Výsledky kinematického rozboru vypovídají, že soustava těles se bude pohybovat bez omezení deformačních parametrů s jedním stupněm volnosti. Volný pohyb je posun mechanismu kočky v ose x.

10.2.2 Uvolnění těles a sestavení rovnic statické rovnováhy

Těleso 7



Obr. 30 Uvolnění tělesa 7



$$\sum F_x = 0: \; -F_{E_x} + F_{N_L} = 0$$

$$\sum F_y = 0: \; -F_{g_7} + F_{E_y} = 0$$

$$\sum M_{z_0} = 0: -F_{N_L} \cdot R7 + M_{\check{c}_E} = 0$$

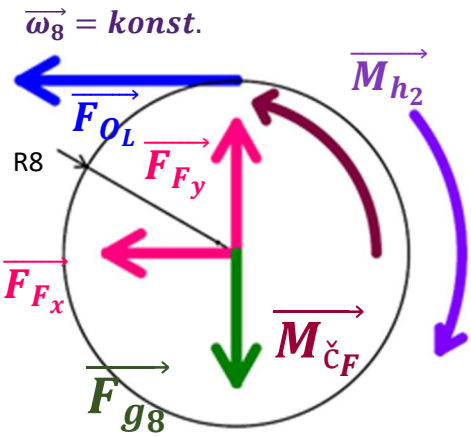
Doplňkové rovnice:

$$F_{G_7} = m_7 \cdot g$$

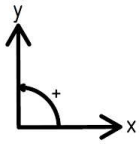
Stykové závislosti:

$$M_{\check{c}_E} = f_{\check{c}_E} \cdot r_E \cdot \sqrt{{F_{E_x}}^2 + {F_{E_y}}^2}$$

Těleso 8



Obr. 31 Uvolnění tělesa 8



$$\sum F_x = 0: \; -F_{O_L} - F_{F_x} = 0$$

$$\sum F_y = 0: \; -F_{g_8} + F_{F_y} = 0$$

$$\sum M_{z_0} = 0: F_{O_L} \cdot R8 + M_{\check{c}_F} - M_{h_2} = 0$$

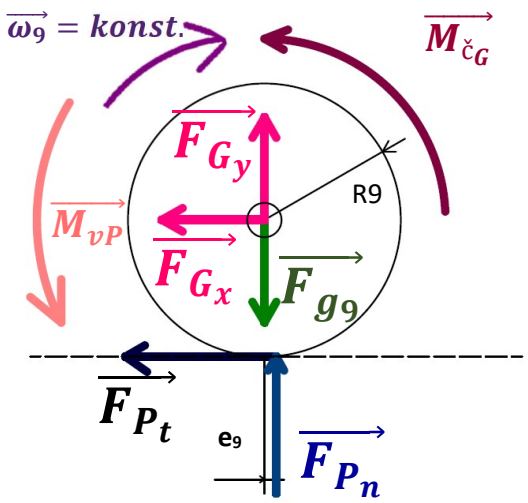
Doplňkové rovnice:

$$F_{G_8} = m_8 \cdot g$$

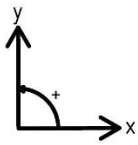
Stykové závislosti:

$$M_{\check{c}_F} = f_{\check{c}_F} \cdot r_F \cdot \sqrt{{F_{F_x}}^2 + {F_{F_y}}^2}$$

Těleso 9



Obr.32 Uvolnění tělesa 9



$$\sum F_x = 0: \; -F_{P_t} - F_{G_x} = 0$$

$$\sum F_y = 0: \; -F_{g_9} + F_{g_y} + F_{P_n} = 0$$

$$\sum M_{z_0} = 0: -F_{P_t} \cdot R9 + M_{\check{c}_G} + M_{v_P} = 0$$

Doplňkové rovnice:

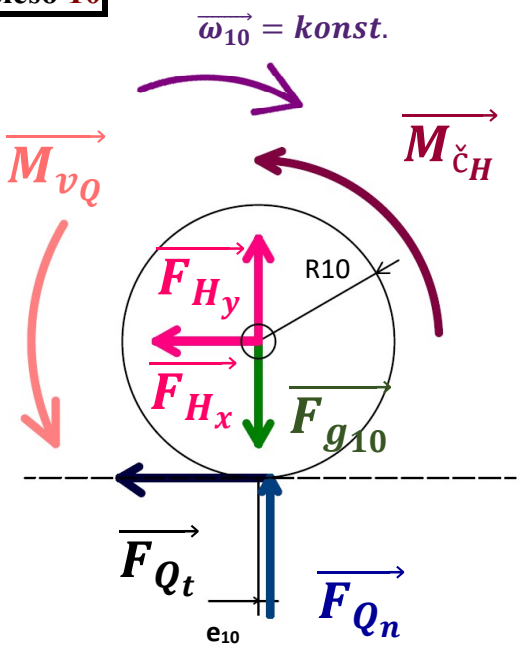
$$F_{g_9} = m_9 \cdot g$$

Stykové závislosti:

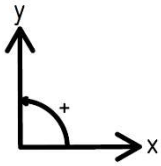
$$M_{\check{c}_G} = f_{\check{c}_G} \cdot r_G \cdot \sqrt{{F_{G_x}}^2 + {F_{G_y}}^2}$$

$$M_{v_P} = e_1 \cdot F_{P_n}$$

Těleso 10



Obr.33 Uvolnění tělesa 10



$$\sum F_x = 0: \; -F_{Q_t} - F_{H_x} = 0$$

$$\sum F_y = 0: \; -F_{g_{10}} + F_{H_y} + F_{Q_n} = 0$$

$$\sum M_{z_0} = 0: -F_{Q_t} \cdot R10 + M_{\check{c}_H} + M_{v_Q} = 0$$

Doplňkové rovnice:

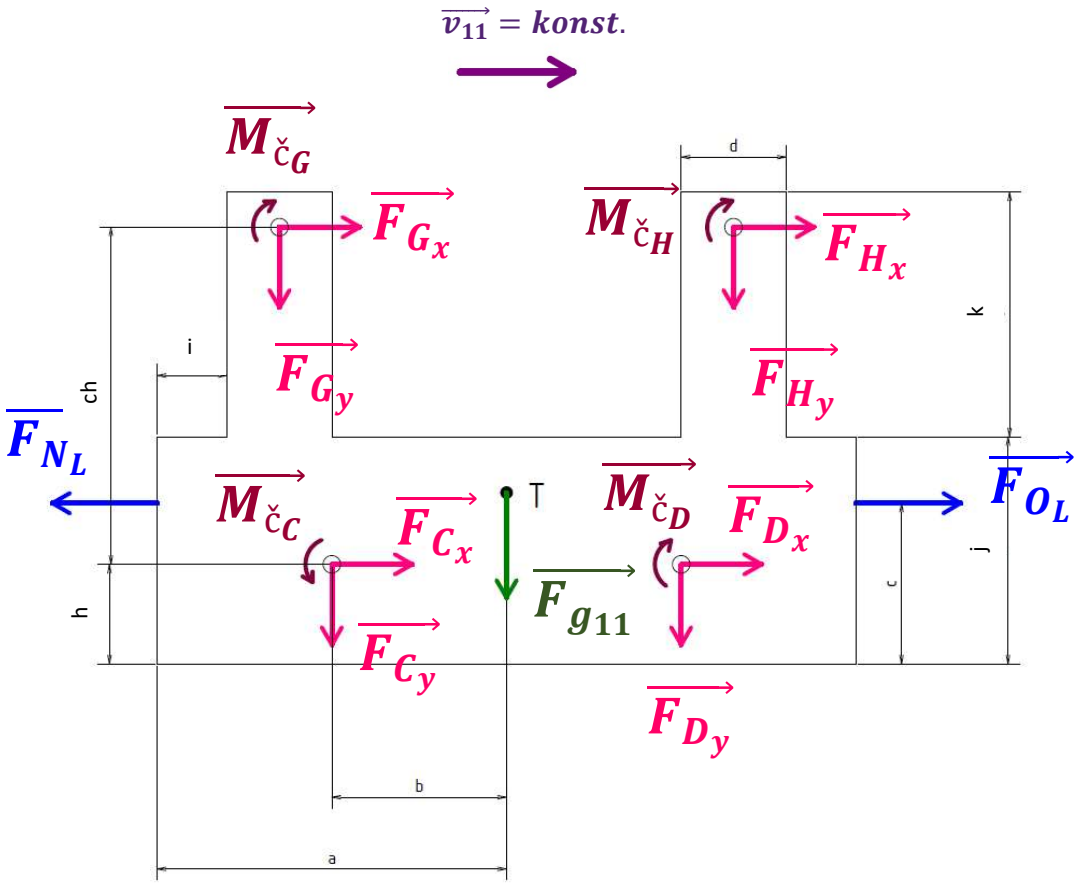
$$F_{g_{10}} = m_{10} \cdot g$$

Stykové závislosti:

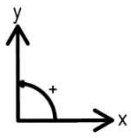
$$M_{\check{c}_H} = f_{\check{c}_H} \cdot r_H \cdot \sqrt{{F_{H_x}}^2 + {F_{H_y}}^2}$$

$$M_{v_Q} = e_2 \cdot F_{Q_n}$$

Těleso 11



Obr. 34 Uvolnění tělesa 11



$$\sum F_x = 0: \; -F_{N_L} + F_{O_L} + F_{C_x} + F_{D_x} + F_{G_x} + F_{H_x} = 0$$

$$\sum F_y = 0: \; -F_{g_{11}} - F_{H_y} - F_{C_y} - F_{D_y} - F_{G_y} = 0$$

$$\sum M_{z_C} = 0: -F_{D_y} \cdot (2 \cdot b) - F_{g_{11}} \cdot b - F_{G_x} \cdot ch + F_{G_y} \cdot \left(a - b - i - \frac{d}{2}\right) -$$

$$-F_{H_y} * \left(3 \cdot b - i - \frac{d}{2}\right) - F_{H_x} \cdot ch + F_{N_L} \cdot (c - h) - F_{O_L} \cdot (c - h) - M_{\check{c}_H} +$$

$$+M_{\check{c}_C} - M_{\check{c}_G} - M_{\check{c}_D} = 0$$

Doplňkové rovnice:

$$F_{g_{11}} = m_{11} \cdot g$$

10.2.3 Statický rozbor

Sestavení množiny neznámých parametrů

$$\text{NP:}\left\{F_{E_x}, F_{E_y}, F_{F_x}, F_{F_y}, F_{G_x}, F_{G_y}, F_{H_x}, F_{H_y}, F_{P_n}, F_{P_t}, F_{Q_t}, F_{Q_n}, F_{N_L}, F_{O_L}, M_{h_2}\right\}$$

$$\mu = \mu_F + \mu_M + \mu_R = 14 + 1 + 0 = 15\ (\mu_F = 14, \mu_M = 1, \mu_R = 0)$$

Klasifikace charakteru silových soustav:

7,8,9,10,11: Síly působí jak ve směru osy x, tak ve směru osy y, taktéž nejsou na jedné nositelce → Obecná silová soustava v 2D: $\upsilon = 3\ (\upsilon_F = 2,\ \upsilon_M = 1)$

Celkový počet použitelných statických podmínek v základním tvaru:

$$\upsilon = 5 \cdot 3 = 15$$

Ověření nutné podmínky statické určitosti:

$$s = \mu - \upsilon = 0$$

$$s = 15 - 15 = 0$$

→ PLATÍ

$$\upsilon_M \geq \mu_M + \mu_R$$

$$1 \geq 1 + 0$$

→ PLATÍ

Obě podmínky statické rovnováhy jsou splněny, soustava těles je statický určitá.

10.2.4 Analýza výsledků:

V tabulce níže jsou uvedené jednotlivé neznámé parametry a jejich vypočítané hodnoty. Dále jsou posouzeny podmínky funkčnosti vazeb.

NP	Hodnota	Podmínka funkčnosti	Ověření funkčnosti
F_{E_x}	84,83 N	Vždy funkční	-
F_{E_y}	58877 N	Vždy funkční	-
F_{F_x}	-322 N	Vždy funkční	-
F_{F_y}	58876	Vždy funkční	-
F_{G_x}	-147,99 N	Vždy funkční	-
F_{G_y}	-92347 N	Vždy funkční	-
F_{H_x}	-147 N	Vždy funkční	-
F_{H_y}	-906 601 N	Vždy funkční	-
F_{P_n}	132 089 N	$F_{P_n} > 0$	$132089 > 0$
F_{P_t}	147,99 N	$F_{P_t} < F_{P_T}$	147,99 < 19813
F_{Q_t}	146,55 N	$F_{Q_t} < F_{Q_T}$	146,5 < 19561
F_{Q_n}	130 403 N	$F_{Q_n} > 0$	$130403 > 0$
F_{N_L}	84,83 N	$F_{N_L} > 0$	$84{,}83 > 0$
F_{O_L}	322 N	$F_{O_L} > 0$	$322 > 0$
M_{h_2}	89,23	-	-

Tab. 4 Výsledné neznámé parametry a ověření funkčnosti vazeb

Cílem úlohy bylo vyjádřit velikost hnacího momentu M_{h_2}, aby se kočka začala pohybovat v kladném směru osy x rovnoměrně přímočaře. Při řešení úlohy byl u těles 9, 10 předpokládán pohybový stav valení, který byl podmínkami funkčnosti potvrzen. Z výsledků můžeme vidět, že síla v laně ve vazbě N je menší než síla v laně, která s kočkou tahá. V reálném jeřábu lano N slouží na podporu stability při pohybu, výkon je přenášen tažným lanem. Hnací moment M_{h_2} je také mnohonásobně menší než hnací moment pro zvedání břemene. Zvednout břemeno do výše vyžaduje mnohonásobně vyšší výkon než rozpohybovaní soustavy těles do strany.

10.3 Třetí pohybový stav – spouštění kladnice

V třetí variantě řešení budeme počítat situaci, kdy se kladnice spouští v záporném směru osy y. Úkolem úlohy je vyjádřit velikost hmotnosti m_6 kladnice, aby došlo k spouštění břemene konstantní rychlostí a stykové závislosti v jednotlivých vazbách. Jelikož je působení sil v jednotlivých tělesech obdobné jako u předcházejících variant, je krok uvolnění těles a sestavení rovnic statické rovnováhy v této statické analýze přeskočen.

10.3.1 Sestavení množiny neznámých parametrů

NP: $\{F_{A_x}, F_{A_y}, F_{B_x}, F_{B_y}, F_{C_x}, F_{C_y}, F_{D_x}, F_{D_y}, F_{I_L}, F_{J_L}, F_{K_L}, F_{L_L}, F_{M_L}, F_{g6}\}$

10.3.2 Analýza výsledků:

V tabulce níže jsou uvedené jednotlivé neznámé parametry a jejich vypočítané hodnoty. Dále jsou posouzeny podmínky funkčnosti vazeb.

NP	Hodnota	Podmínka funkčnosti	Ověření funkčnosti
F_{A_x}	0 N	Vždy funkční	-
F_{A_y}	58 824 N	Vždy funkční	-
F_{B_x}	71,03 N	Vždy funkční	-
F_{B_y}	29 982 N	Vždy funkční	-
F_{C_x}	-71,03 N	Vždy funkční	-
F_{C_y}	30 018 N	Vždy funkční	-
F_{D_x}	70,83 N	Vždy funkční	-
F_{D_y}	30 018 N	Vždy funkční	-
F_{I_L}	52,94 N	$F_{I_L} > 0$	52,94> 0
F_{J_L}	71,03 N	$F_{J_L} > 0$	71,03> 0
F_{K_L}	88,94 N	$F_{K_L} > 0$	$88{,}94 > 0$
F_{L_L}	88,94 N	$F_{L_L} > 0$	$88{,}94 > 0$
F_{M_L}	70,83 N	$F_{M_L} > 0$	$70{,}83 > 0$
F_{g6}	177,86 N	-	-

Tab. 5 Výsledné neznámé parametry a ověření funkčnosti vazeb

Cílem úlohy bylo vyjádřit velikosti tíhy kladnice, aby se začala vlivem tíhy spouštět v záporném směru osy y. Hmotnost vyjádříme pomocí vypočítané tíhové síly pomocí vztahu: $F_{g6} = m_6 \cdot g$

$$m_6 = \frac{F_{g6}}{g} = \frac{177{,}8553}{9{,}81} = 18{,}13\ kg$$

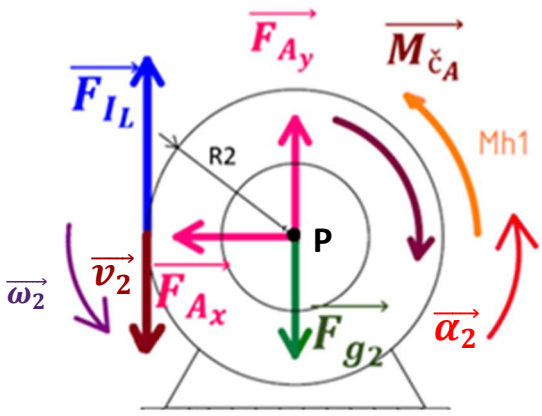
Z výsledků vidíme, že stačí pouhých osmnáct kilogramu, což je mizivá hodnota vůči hmotnostem jednotlivých částí jeřábu. Při stavbě bude stačit tíha materiálu a funkce bude splněna.

10.4 Čtvrtý pohybový stav – zvedání kladnice s břemenem do výšky se zrychlením

V čtvrté variantě řešení budeme počítat situaci, kdy lanový buben s daným hnacím momentem zvedá břemeno vertikálně v kladném směru osy y. Úkolem příkladu bude vyjádřit velikosti zrychlení jednoltivých těles a stykové závislosti v jednotlivých vazbách. Když uvažujeme dynamickou veličinu zrychlení, přidá se nám do uvolnění těles důležitý geometrický bod a toť pól pohybu tělesa. Ten se mění pří různých typech pohybových stavů. V uvolnění těles je pól pohybu značen boden s písmenem P.

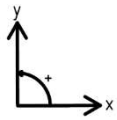
10.4.1 Uvolnění těles a sestavení rovnic

Těleso 2



Obr. 35 Uvolnění tělesa 2 se zrychlením

Rotační pohyb



$\sum F_x: -F_{A_x} = 0$

$\sum F_y: F_{A_y} - F_{g_2} + F_{I_L} = 0$

$\sum M_{z_0}: -F_{I_L} \cdot R2 + M_{h_1} - M_{č_A} = I_2 \cdot \alpha_2$

Doplňkové rovnice:

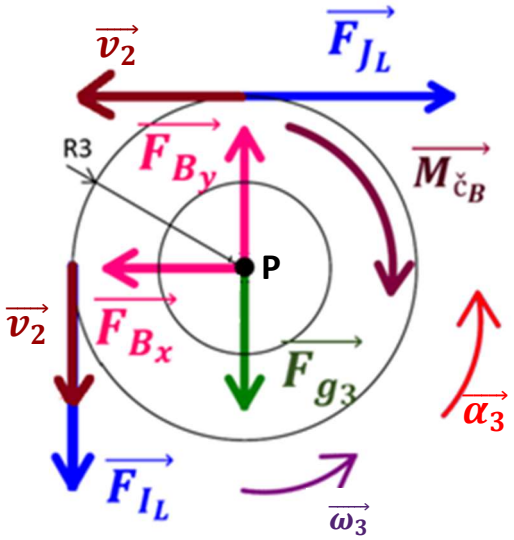
$F_{g_2} = m_2 \cdot g$

$I_2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot R2^2$

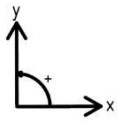
Stykové závislosti

$M_{č_A} = f_{č_A} \cdot r_A \cdot \sqrt{{F_{A_x}}^2 + {F_{A_y}}^2}$

Těleso 3



Obr. 36 Uvolnění tělesa 3 se zrychlením



Rotační pohyb

$\sum F_x: -F_{B_x} + F_{J_L} = 0$

$\sum F_y: -F_{I_L} - F_{g_3} + F_{B_y} = 0$

$\sum M_z: F_{I_L} \cdot R3 - F_{J_L} \cdot R3 - M_{č_B} = I_3 \cdot \alpha_3$

Doplňkové rovnice:

$F_{g_3} = m_3 \cdot g$

$I_3 = \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot R3^2$

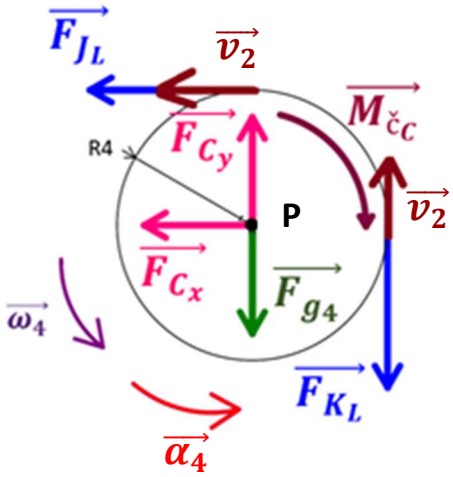
Stykové závislosti:

$M_{č_B} = f_{č_B} \cdot r_B \cdot \sqrt{{F_{B_x}}^2 + {F_{B_y}}^2}$

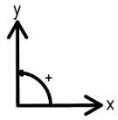
Kinematické dvojice:

$R2 \cdot \alpha_2 = R3 \cdot \alpha_3$

Těleso 4



Obr. 37 Uvolnění tělesa 4 se zrychlením



Rotační pohyb

$\sum F_x: -F_{C_x} - F_{J_L} = 0$

$\sum F_y: -F_{K_L} - F_{G_4} + F_{C_y} = 0$

$\sum M_z: -F_{K_L} \cdot R4 + F_{J_L} \cdot R4 - M_{č_C} = I_4 \cdot \alpha_4$

Doplňkové rovnice:

$F_{g_4} = m_4 \cdot g$

$I_4 = \frac{1}{2} \cdot m_4 \cdot R4^2$

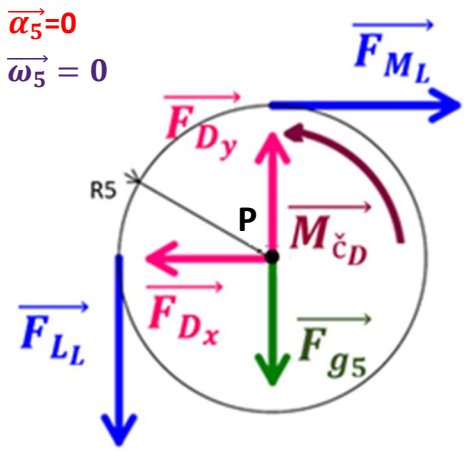
Stykové závislosti:

$M_{č_C} = f_{č_C} \cdot r_C \cdot \sqrt{{F_{C_x}}^2 + {F_{C_y}}^2}$

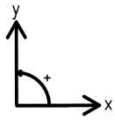
Kinematické dvojice:

$R4 \cdot \alpha_4 = \alpha_3 \cdot R3$

Těleso 5



Obr. 38 Uvolnění tělesa 5 se zrychlením



Nebude s pohybovat ($\alpha_5 = 0$)

$\sum F_x: -F_{D_x} + F_{M_L} = 0$

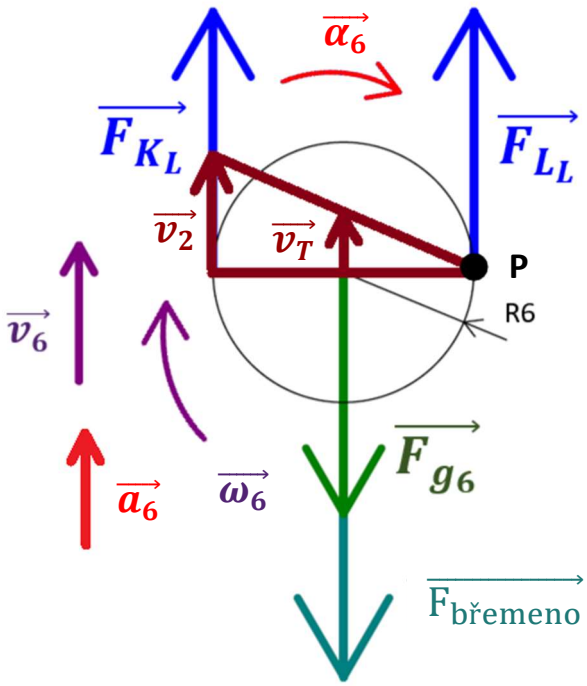
$\sum F_y: -F_{L_L} - F_{g_5} + F_{D_y} = 0$

$\sum M_z: -F_{M_L} \cdot R5 + F_{L_L} \cdot R5 = 0$

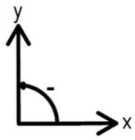
Doplňkové rovnice:

$F_{g_5} = m_5 \cdot g$

Těleso 6



Obr. 39 Uvolnění tělesa 6 se zrychlením



Obecný rovinný pohyb

$\sum F_x: 0 = 0$

$\sum F_y: F_{L_L} - F_{g_6} + F_{K_L} - F = m_6 \cdot a_6$

$\sum M_{z_0}: F_{K_L} \cdot R6 - F_{L_L} \cdot R6 = I_6 \cdot \alpha_6$

Doplňkové rovnice:

$F_{g_6} = m_6 \cdot g$

$I_6 = \frac{1}{2} \cdot m_6 \cdot R6^2$

Kinematické vazby:

$a_6 = \alpha_6 \cdot R6$

$\alpha_6 \cdot R6 = \alpha_4 \cdot R4 \cdot 2$

10.4.2 Sestavení množiny neznámých parametrů

$$\text{NP}: \{F_{A_x}, F_{A_y}, F_{B_x}, F_{B_y}, F_{C_x}, F_{C_y}, F_{D_x}, F_{D_y}, F_{I_L}, F_{J_L}, F_{K_L}, F_{L_L}, F_{M_L}, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_6\}$$

$$\mu = 17, \nu = 17\ (14\ uvolnění, 3\ kin.dvojice) \rightarrow Soustava\ je\ řešitelná$$

10.4.3 Analýza výsledků:

V tabulce níže jsou uvedené jednotlivé neznámé parametry a jejich vypočítané hodnoty, Dále jsou posouzeny podmínky funkčnosti vazeb.

NP	Hodnota	Podmínka funkčnosti	Ověření funkčnosti
F_{A_x}	0 N	Vždy funkční	-
F_{A_y}	35330 N	Vždy funkční	-
F_{B_x}	22759 N	Vždy funkční	-
F_{B_y}	53476 N	Vždy funkční	-
F_{C_x}	-22759 N	Vždy funkční	-
F_{C_y}	51967 N	Vždy funkční	-
F_{D_x}	20593 N	Vždy funkční	-
F_{D_y}	50522 N	Vždy funkční	-
F_{I_L}	23547 N	$F_{I_L} > 0$	$23547 > 0$
F_{J_L}	22759 N	$F_{J_L} > 0$	$22759 > 0$
F_{K_L}	22038 N	$F_{K_L} > 0$	$22038 > 0$
F_{L_L}	20593 N	$F_{L_L} > 0$	$20593 > 0$
F_{M_L}	20593 N	$F_{M_L} > 0$	$20593 > 0$
α_2	1,1845 rad $\cdot$ s^{-2}	-	-
α_3	1,8952 rad$\cdot$ s^{-2}	-	-
α_4	1,8952 rad$\cdot$ s^{-2}	-	-
α_6	6,3173 rad$\cdot$ s^{-2}	-	-

Tab. 6 Výsledné neznámé parametry a ověření funkčnosti vazeb

Cílem úlohy bylo spočítat zrychlení jednotlivých těles při pohybu kladnice v kladném směru osy y. Oproti předcházejícím variantám jsou určovány neznáme parametry pro

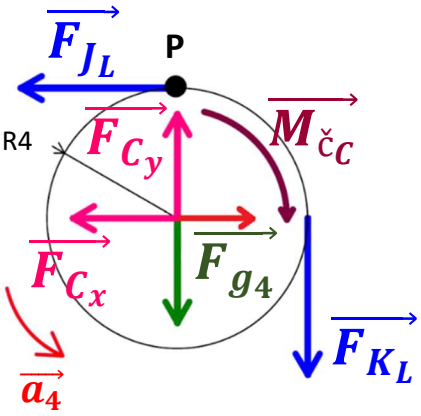
zadaný hnací moment. Dle výsledků můžeme vidět, že rychlost rotace vodících kladek je vesměs stejná, zatímco rychlost rotace samotné kladky při jejím zdvihání je násobně větší. Rychlost rotace kladky při zvedání musí být menší než samostatná rotace kladnice kolem její osy, neboť rotující kladky přenášejí výkon motoru.

10.5 Pátý pohybový stav – pohyb kočky do strany se zrychlením

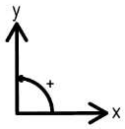
V páté variantě řešení budeme počítat situaci, kdy lanový buben s daným hnacím momentem posouvá s celou kočkou v kladném směru osy x se zrychlením. Úkolem je vyjádřit velikost zrychlení, které působí na jednotlivá tělesa a stykové závislosti v jednotlivých vazbách.

10.5.1 Uvolnění těles a sestavení rovnic

Těleso 4



Obr. 40 Uvolnění tělesa 4 se zrychlením



$$\sum F_x = 0: \; -F_{C_x} - F_{J_L} = 0$$

$$\sum F_y = 0: -F_{K_L} - F_{g_4} + F_{C_y} = 0$$

$$\sum M_{z_0} = 0: -F_{K_L} \cdot R4 + F_{J_L} \cdot R4 - M_{\check{c}_C} = I_4 \cdot \alpha_4$$

Doplňkové rovnice:

$$F_{g_4} = m_4 \cdot g$$

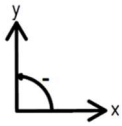
Stykové závislosti:

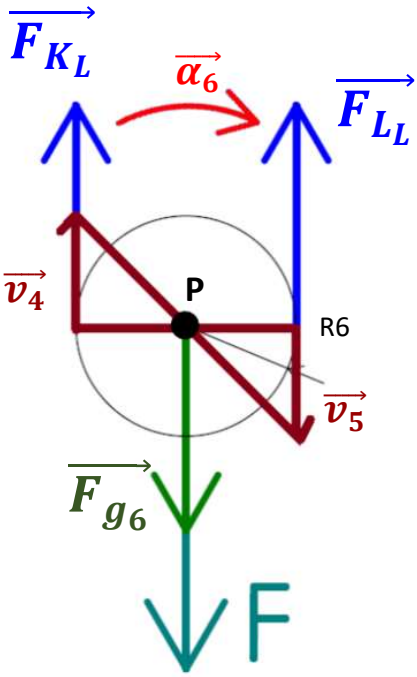
$$M_{\check{c}_C} = f_{\check{c}_C} \cdot r_C \cdot \sqrt{{F_{C_x}}^2 + {F_{C_y}}^2}$$

Kinematické dvojice:

$$a_4 = R4 \cdot \alpha_4$$

Těleso 6





Obr. 41 Uvolnění tělesa 6 se zrychlením

Rotační pohyb

$\sum F_y = 0: F_{K_L} - F_{g_6} + F_{L_L} = 0$

$\sum M_{z_0} = 0: F_{K_L} \cdot R6 - F_{L_L} \cdot R6 = I_6 \cdot \alpha_6$

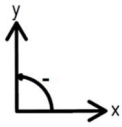
Doplňkové rovnice:

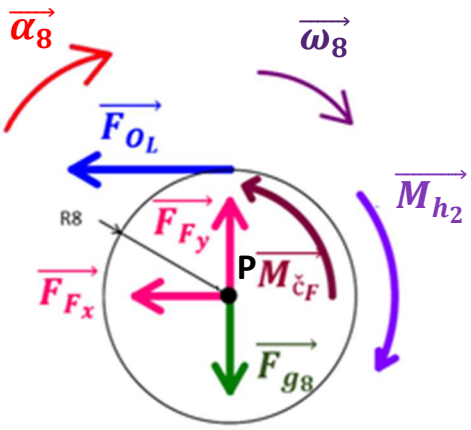
$F_{g_6} = m_6 \cdot g$

Kinematické dvojice

$a_4 = R6 \cdot \alpha_6$

Těleso 8





Obr. 42 Uvolnění tělesa 8 se zrychlením

Rotační pohyb

$\sum F_x = 0: -F_{O_L} - F_{F_x} = 0$

$\sum F_y = 0: -F_{g_8} + F_{F_y} = 0$

$\sum M_{z_0} = 0: -F_{O_L} \cdot R8 - M_{č_F} + M_{h_2} = I_8 \cdot \alpha_8$

Doplňkové rovnice:

$F_{g_8} = m_8 \cdot g$

$I_8 = \frac{1}{2} \cdot m_8 \cdot R8^2$

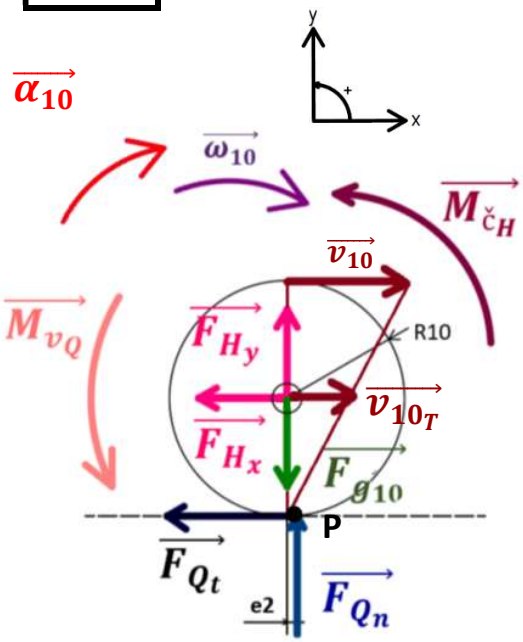
Stykové závislosti:

$M_{č_F} = f_{č_F} \cdot r_F \cdot \sqrt{{F_{F_x}}^2 + {F_{F_y}}^2}$

Kinematické dvojice

$\alpha_8 = R8 \cdot \alpha_8$

Těleso 10



Obr. 43 Uvolnění tělesa 10 se zrychlením

Obecný rovinný pohyb

$\sum F_x = 0: \; -F_{Q_t} - F_{H_x} = m_{10} \cdot a_{10}$

$\sum F_y = 0: \; -F_{g_{10}} + F_{H_y} + F_{Q_n} = 0$

$\sum M_{z_0} = 0: F_{Q_t} \cdot R10 - M_{\check{c}_H} - M_{v_Q} = I_{10} \cdot \alpha_{10}$

Doplňkové rovnice:

$F_{g_{10}} = m_{10} \cdot g$

Stykové závislosti:

$M_{\check{c}_H} = f_{\check{c}_H} \cdot r_H \cdot \sqrt{{F_{H_x}}^2 + {F_{H_y}}^2}$

$M_{v_Q} = e_1 \cdot F_{Q_n}$

Kinematické dvojice:

$a_{10_T} = R10 \cdot \alpha_{10}$

10.5.2 Sestavení množiny neznámých parametrů

NP: $\{F_{C_x}, F_{C_y}, F_{D_x}, F_{D_y}, F_{E_x}, F_{E_y}, F_{F_x}, F_{F_y}, F_{G_x}, F_{G_y}, F_{H_x}, F_{H_y}, F_{J_L}, F_{K_L}, F_{L_L}, F_{M_L}, F_{P_n},$

$F_{P_t}, F_{Q_t}, F_{Q_n}, F_{N_L}, F_{O_L}, a\}$

$\mu = 23, \nu = 23, (19\ uvolnění, 4\ kin.\ dvojice) \rightarrow Soustava\ je$ řešitelná

10.5.3 Analýza výsledků:

V tabulce níže jsou uvedené jednotlivé neznámé parametry a jejich vypočítané hodnoty, dále jsou posouzeny podmínky funkčnosti vazeb.

NP	Hodnota	Podmínka funkčnosti	Ověření funkčnosti
F_{C_x}	-19145 N	Vždy funkční	-
F_{C_y}	50464 N	Vždy funkční	-
F_{D_x}	17796 N	Vždy funkční	-
F_{D_y}	49135 N	Vždy funkční	-
F_{E_x}	2668 N	Vždy funkční	-
F_{E_y}	58877 N	Vždy funkční	-
F_{F_x}	-22341 N	Vždy funkční	-
F_{F_y}	58877 N	Vždy funkční	-
F_{G_x}	-5466 N	Vždy funkční	-
F_{G_y}	-98695 N	Vždy funkční	-
F_{H_x}	-5452 N	Vždy funkční	-
F_{H_y}	-84313 N	Vždy funkční	-
F_{J_L}	19145 N	$F_{J_L} > 0$	$19145 > 0$
F_{K_L}	20535 N	$F_{K_L} > 0$	$20535 > 0$
F_{L_L}	19206 N	$F_{L_L} > 0$	$19206 > 0$
F_{M_L}	17796 N	$F_{M_L} > 0$	$17796 > 0$
F_{P_n}	138437 N	$F_{P_n} > 0$	$138437 > 0$
F_{P_t}	1937 N	$F_{P_T} > F_{P_t}$	$20766 > 1937$
F_{Q_t}	1923 N	$F_{Q_T} > F_{Q_t}$	$18608 > 1923$
F_{Q_n}	124055 N	$F_{Q_n} > 0$	$124055 > 0$
F_{N_L}	2668 N	$F_{N_L} > 0$	$2668 > 0$
F_{O_L}	22341 N	$F_{O_L} > 0$	$22341 > 0$
a	0.8713 m·s^{-2}	-	-

Tab. 7 Výsledné neznámé parametry a ověření funkčnosti vazeb

Úkolem poslední pohybové konfigurace bylo vypočítat zrychlení působící na tělesa při pohybu kočky v kladném směru osy x. V této pohybové variantě není pól pohybu těles 4,5 ve středu rotace, i když se jedná o rotační pohyb tělesa. Kladnice se vertikálně nepohybuje a její pól pohybu je poprvé uprostřed tělesa. I když kladnice není poháněna lanovým bubnem 2, bude rotovat v důsledku pohybu do strany. Zrychlení těžiště kočky a těžiště pojezdových kol se musí rovnat. Toto zrychlení musí být i rovno zrychlení ve středech čepů jednotlivých kladek. Předpoklad valení byl opět ověřen podmínkami funkčnosti. Hodnota velikosti stykové síly v laně N je opět řádově menší než síly v ostatních lanech, protože slouží k stabilizaci pohybu soustavy. Velikost zrychlení je rovna 0,87 $m \cdot s^{-2}$, což odpovídá průměrným rozjížděcím rychlostem podsoustav věžových jeřábů.

Dalším pohybovým stavem, který by mohl být uvažován je pohyb se zrychlením kočky do strany a zároveň zvedání břemene do výšky. Jelikož jsou však vypočítány obě varianty jednotlivě, stačí použít metodu superpozice a pro jakékoliv těleso můžeme určit velikost a směr zrychlení.

11 Závěr

Bakalářská práce se zabývá mechanickou analýzou soustavy těles s vazbami s pasivním účinkem. Pro vytvoření modelu na rozbor byla jako předloha vybrána pohyblivá podsoustava věžového jeřábu. Analýza se týkala různých pohybových stavů jeřábové kočky se zavěšeným břemenem na kladnici. Jednotlivá tělesa systému znázorňují reálné strojní součásti, díky kterým zdvihací stroj plní svoji funkci.

Pro přiblížení modelované soustavy byl v první části práce popsán věžový jeřáb a jeho jednotlivé části. Následovalo vymezení základních pojmů ze statiky a dynamiky, oborů zabývajících se pohybovými stavy, jako je síla a její moment, podmínky statické rovnováhy, nebo pól pohybu. Byly popsány fundamenty teorie, které jsou nutné znát pro schopnost řešení mechanických soustav těles, jako jsou vazby a jejich uvolnění, druhy pasivních účinků, postup řešení úloh statiky výpočtovým modelem NNTP a další, které byly využity ve výpočtové části práce.

Analýza byla provedena pro několik pohybových stavů. Prvně byl řešen mechanický klid soustavy. Cílem jednotlivých variant bylo stanovit nutnou velikost hnacího momentu, který musí motor na bubnu vyvinout, aby uzvedl břemeno o váze jedné tuny nebo aby se kočka pohybovala pomocí pojezdových kol do strany výložníku. Z výsledků lze vyvodit počet otáček navijáku, aby při daném výkonu normovaného motoru dokázal zvednout potřebnou tíhu. Pro jednotunové břemeno se otáčky rovnaly čtyřem za vteřinu. Pro spouštění kladnice k zemi je využita vlastní tíha kladnice. Pro překonání pasivních účinků vymodelované soustavy je třeba hmotnost o velikosti osmnácti kilogramů. Po opuštění přímočarého pohybu, byly vypočítány pohybové konfigurace se zrychlením při dané velikosti hnacího momentu. Prvně bylo břemeno opět zvedáno lanovým bubnem do výšky. Zrychlení při rotaci vodících kladek je vesměs stejné, zatímco zrychlení samostatné rotace kladnice je mnohonásobně vyšší. Takový výsledek odpovídá realitě, neboť kladnice neovlivňuje pohyb ostatních těles. Posledním úkolem bylo vypočítat velikost zrychlení při pohybu kočky do strany. Jeho velikost vyšla menší než jedna, což odpovídá obrovským strojům jako je věžový jeřáb.

U všech variant výpočtu byly vypočítány stykové síly a posouzena funkčnost vazeb. U modelování reálného stroje jako je věžový jeřáb, nelze zanedbat vliv pasivních účinků, tudíž pro výpočet dynamických veličin byla použita uvolňovací metoda, neboť

ostatní metody řešení mohou být použity jen u konzervativních soustav. Výpočty byly provedeny pro stejné zatížení, či pro stejnou velikost hnacího momentu. V reálných situacích se tíha jednotlivých zvedaných předmětů liší a tím i velikosti neznámých parametrů. U motoru můžeme regulovat moment a s ním jaké zrychlení soustavě udělíme.

Cílem této práce bylo ukázat využití znalostí z oborů mechaniky k výpočtu neznámých parametrů reálného stroje. Pomocí těchto poměrně jednoduchých analýz lze získat počáteční vstupní data, ze kterých lze dále vycházet při konstrukčním návrhu a usnadnit tak složitý proces projektování zařízení. Využít co nejjednodušších postupů k dosažení co nejpřesnějších výsledků je jedna z nejlepších schopností každého inženýra.

Seznam použitých zdrojů

[1] FLORIAN, Zdeněk, Karel PŘIKRYL a Emanuel ONDRÁČEK. Mechanika těles: statika. 3. vyd. Brno: Brno : PC-DIR, 1997. ISBN 80-214-0952-5.

[2] KRATOCHVÍL, C., SLAVÍK, J. Mechanika těles: Dynamika, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno, 2002, ISBN 80-214-2260-2.

[3] ŠEBEK, Radek. Mechanika - statika. 2012, 101 s

[4] BAJER, Jiří. Mechanika 1. Třetí rozš. Olomouc: chlup.net, 2015. ISBN 978-80-903958-8-6.

[5] Juliš K., Brepta R.: Mechanika I. díl - Statika a kinematika SNTL Praha 1986

[6] HALLIDAY, David, Robert RESNICK a Jearl WALKER, DUB, Petr, ed. Fyzika: [vysokoškolská učebnice fyziky]. Svazek 1. 2. přeprac. vyd. Přeložil Miroslav ČERNÝ. Brno: VUTIUM, c2013. Překlady vysokoškolských učebnic, sv. 4. ISBN 978-80-214-4123-1.

[7] KAREL, Juliš a Brepta RUDOLF. Mechanika. Statika a Kinematika. Praha: SNTL, 1987.

[8] SHIGLEY, Joseph E., Charles R. MISCHKE a Richard G. BUDYNAS. Konstruování strojních součástí. 1. vyd. 2010. ISBN 978-80-214-2629-0.

[9] Tower Crane Guide. *morrow.com* [online]. c2022, [cit. 2022-04-05]. Dostupné z: https://www.morrow.com/training-center/tower-crane-101/

[10] Marshall Brain. How tower cranes work. Howstuffworks.com [online]. c1998-2012[cit.2022-04-05]. Dostupné z http://science.howstuffworks.com/transport/enginesequipment/tower-crane3.htm

[11] PŘIKRYL, Karel. Kinematika. Vydání páté, V Akademickém nakladatelství CERM třetí vydání. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2008. ISBN 9788021436794.

[12] DRAŽAN, F., KUPKA, L. Jeřáby. 1. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1968. 661s.

[13] REMTA, F., KUPKA, L., DRAŽAN, F. Jeřáby. 2., přeprac. a dopln. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1975. 562 s.

[14] Jan Hlavatý *skoleniorevize.cz [online]. c2022* [cit. 2022-04-08]. Dostupné z: https://www.skolenirevize.cz/historie-jerabu.php