



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH
TECHNologiÍ
ÚSTAV AUTOMATIZACE A MĚŘICÍ TECHNIKY

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION
DEPARTMENT OF CONTROL AND INSTRUMENTATION

INERCIÁLNÍ NAVIGAČNÍ JEDNOTKA

INERTIAL NAVIGATION UNIT

DIPLOMOVÁ PRÁCE
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

Bc. BRANISLAV KULKA

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

prof. Ing. FRANTIŠEK ŠOLC, CSc.

BRNO 2014



**VYSOKÉ UČENÍ
TECHNICKÉ V BRNĚ**

**Fakulta elektrotechniky
a komunikačních technologií**

Ústav automatizace a měřicí techniky

Diplomová práce

magisterský navazující studijní obor
Kybernetika, automatizace a měření

Student: Bc. Branislav Kulka

ID: 106584

Ročník: 2

Akademický rok: 2013/2014

NÁZEV TÉMATU:

Inerciální navigační jednotka

POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

Cílem práce je vytvořit funkční jednotku s inerciálními senzory pro odhad orientace v prostoru. Zadání lze shrnout do následujících bodů:

1. Seznamte se s problémem odhadu orientace pomocí inerciálních senzorů.
2. Navrhněte a vytvořte měřicí a výpočetní jednotku pro odhad orientace.
3. Zvolte nejvhodnější metodu odhadu orientace.
4. Implementujte algoritmus odhadu orientace do vytvořené jednotky.
5. Stanovte přesnost jednotky a omezení pro jednotlivé způsoby použití (UAV, Statické prostředí atd...).

DOPORUČENÁ LITERATURA:

[1] DAS, Subrata. High-level data fusion. USA: Artech house, 2008. ISBN 978-1-59693-281-4

Termín zadání: 10.2.2014

Termín odevzdání: 19.5.2014

Vedoucí práce: prof. Ing. František Šolc, CSc.

Konzultanti diplomové práce: Mgr. Radek Baránek

doc. Ing. Václav Jirsík, CSc.

Předseda oborové rady

UPOZORNĚNÍ:

Autor diplomové práce nesmí při vytváření diplomové práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č.40/2009 Sb.

ABSTRAKT

Táto práca sa zaoberá odhadom orientácie malých lietajúcich robotov s využitím cenovo nenáročných, miniatúrnych inerciálnych a magnetických senzorov. Je použitý rozšírený Kalmanov filter využívajúci kvaternión, ktorý adaptívne kompenzuje externé zrýchlenie. Externé zrýchlenie býva hlavným zdrojom chyby pri odhade orientácie. Pri detekcii externého zrýchlenia, je upravená hodnota kovariančnej matice šumu akcelerometru. Navrhnuté algoritmy sú overené experimentmi. Vybraný algoritmus je implementovaný na vývojovej doske STM32F4DISCOVERY.

KĽÚČOVÉ SLOVÁ

odhad orientácie, inerciálne senzory, MEMS, Kalmanov filter, kvaternión, magnetometer

ABSTRACT

This thesis is concerned with attitude estimation of small flying robots using low cost, small-sized inertial and magnetic sensors. A quaternion-based extended Kalman filter is used, which adaptively compensates external acceleration. External acceleration is the main source of estimation error. If external acceleration is detected, the accelerometer measurement covariance matrix of the Kalman filter is adjusted. The proposed algorithms are verified through experiments. Selected algorithm is implemented on STM32F4DISCOVERY development board.

KEYWORDS

orientation estimation, inertial sensors, MEMS, Kalman filter, quaternion, magnetometer

KULKA, Branislav *Inerciální navigační jednotka*: diplomová práce. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav automatizace a měřicí techniky, 2014. 67 s. Vedúci práce bol prof. Ing. František Šolc, CSc.

PREHLÁSENIE

Prehlasujem, že som svoju diplomovú prácu na tému „Inerciální navigační jednotka“ vypracoval samostatne pod vedením vedúceho diplomovej práce, s využitím odbornej literatúry a ďalších informačných zdrojov, ktoré sú všetky citované v práci a uvedené v zozname literatúry na konci práce.

Ako autor uvedenej diplomovej práce ďalej prehlasujem, že v súvislosti s vytvorením tejto diplomovej práce som neporušil autorské práva tretích osôb, najmä som nezasiahol nedovoleným spôsobom do cudzích autorských práv osobnostných a/alebo majetkových a som si plne vedomý následkov porušenia ustanovenia § 11 a nasledujúcich autorského zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorskom, o právach súvisiacich s právom autorským a o zmene niektorých zákonů (autorský zákon), v znení neskorších predpisov, vrátane možných trestnoprávnych dôsledkov vyplývajúcich z ustanovenia časti druhej, hlavy VI. diel 4 Trestného zákonníka č. 40/2009 Sb.

Brno

.....

(podpis autora)

POĎAKOVANIE

Na tomto mieste by som rád poďakoval vedúcemu diplomovej práce prof. Ing. Františkovi Šolcovi, CSc. ako aj konzultantovi Mgr. Radkovi Baránkovi za cenné pripomienky a odborné rady, ktorými prispeli k vypracovaniu tejto diplomovej práce.

Brno

.....

(podpis autora)

OBSAH

Úvod	9
1 Teoretické základy	10
1.1 Súradnicové sústavy	10
1.2 Vyjadrenie orientácie telesa	11
1.2.1 Rotačná matica	11
1.2.2 Kvaternióny	15
1.3 Kalmanov filter	21
1.3.1 Ladenie Kalmanovho filtru	23
2 Sensory použité pre odhad orientácie	24
2.1 Akcelerometer	24
2.2 Gyroskop	25
2.3 Magnetometer	25
2.3.1 Kalibrácia magnetometru	26
3 Hardvérové riešenie	32
3.1 Použité senzory	33
3.1.1 Gyroskop/akcelerometer MPU-6000	33
3.1.2 Magnetometer HMC5883L	33
4 Algoritmy pre odhad orientácie	34
4.1 EKF s modelom meraní akcelerometru a magnetometru	34
4.1.1 Model procesu	34
4.1.2 Model meraní	36
4.1.3 Potlačenie vplyvu externého zrýchlenia	37
4.2 EKF s meraním Eulerových uhlov	38
4.2.1 Model procesu	38
4.2.2 Model meraní	38
5 Charakteristiky šumu senzorov	40
6 Experimentálne výsledky	44
6.1 Statický test	44
6.2 Test na simulovanej trajektórii	46
7 Implementácia EKF na STM32F4	49
7.1 Súbor stm32f4_discovery_EKF.c	50

7.2	Súbor main.c	54
7.3	Komunikácia s jednotkou	55
8	Záver	58
	Literatúra	59
	Zoznam symbolov, veličín a skratiek	62
	Zoznam príloh	64
A	Schéma zapojenia	65
B	Výkresy DPS	66
C	CD médium	67

ZOZNAM OBRÁZKOV

1.1	Navigačná súradnicová sústava	10
1.2	Telesová súradnicová sústava	11
1.3	Definícia uhlov α_1 , α_2 a α_3 [4]	12
2.1	Principiálna schéma akcelerometru	24
2.2	Nekalibrované merania magnetometru preložené elipsoidom	29
2.3	Nekalibrované merania magnetometru	30
2.4	Kalibrované merania magnetometru ležiace na povrchu gule	30
2.5	Kalibrované merania magnetometru	31
3.1	Vývojová doska STM32F4DISCOVERY	32
4.1	Vymedzenie prahu pre detekciu externého zrýchlenia	38
5.1	Šum akcelerometru	41
5.2	Histogramy šumov akcelerometru	41
5.3	Šum gyroskopu	42
5.4	Histogramy šumov gyroskopu	42
5.5	Šum magnetometru	43
5.6	Histogramy šumov magnetometru	43
6.1	Odhad polohy a biasov pri statickom teste - filter podľa kapitoly 4.1 .	45
6.2	Odhad polohy a biasov pri statickom teste - filter podľa kapitoly 4.2 .	45
6.3	Testovacia trajektória	46
6.4	Simulované hodnoty senzorov na testovacej trajektórii	47
6.5	Výsledky testu na simulovanej trajektórii - EKF 4.1, s=100	48
6.6	Výsledky testu na simulovanej trajektórii - EKF 4.2, s=100	48
7.1	Štruktúra projektu v Keil MDK-ARM	49
7.2	Data z inerciálnej jednotky zobrazené v terminálovom programe . . .	56
7.3	Grafické užívateľské rozhranie v programe Matlab	57
B.1	Výkres plošných spojov dosky senzorov	66
B.2	Rozmiestnenie súčiastok	66

ÚVOD

Pre zabezpečenie stability a navigácie bezpilotných vzdušných prostriedkov, mobilných robotov atď. je potrebná znalosť ich orientácie. Na rozdiel od tradičného inerciálneho systému (INS), moderné MEMS senzory ponúkajú ľahké a cenovo priaznivé riešenie, ktoré je vhodnejšie pre aplikácie kde hmotnosť, rozmery a cena sú dôležitým faktorom. Problémom ale je, že sú menej presné ako tradičné mechanické alebo optické riešenia. Ich nepresnosť je spôsobená biasmi, šumom a chybou zosilnenia. Kvôli týmto nedokonalostiam MEMS senzorov, je potrebné informácie ktoré poskytujú vhodne skombinovať technikami fúzie dát. Medzi tradičné riešenia uvádzané v literatúre patrí napr. komplementárny filter alebo Kalmanov filter.

Cieľom tejto práce je vytvorenie inerciálnej navigačnej jednotky, ktorá bude odhadovať orientáciu telesa kombinovaním dát z trojosého snímača uhlových rýchlostí, trojosého akcelerometru a trojosého magnetometru za pomoci Kalmanovho filtru. Celý algoritmus je implementovaný na mikrokontroléri s jadrom Cortex-M4.

Práca je členená nasledujúcim spôsobom: V kapitole 1 je uvedená potrebná teória. Priestor je tu venovaný napr. súradnicovým sústavám, rotačnej matici, kvaternionom a všeobecnému popisu Kalmanovho filtru. V kapitole 2 sú uvedené základné vlastnosti senzorov používaných pre odhad orientácie. Je tu tiež uvedený postup pri kalibrácii magnetometru. Hardvérové riešenie navigačnej jednotky je popísané v kapitole 3 a v kapitole 4 sú uvedené dva rôzne EKF algoritmy pre odhad orientácie. Keďže je u Kalmanovho filtru potrebné správne nastaviť kovariančnú maticu šumu meraní, sú v piatej kapitole zisťované šumové vlastnosti použitých senzorov. V kapitole 6 sú uvedené výsledky testovania navrhnutých filtrov jak v statickom móde, tak aj na simulovanej trajektórii typyckej pre malé lietajúce roboty. V poslednej kapitole je uvedený popis implementácie zvoleného filtru na mikrokontroléri STM32F407VGT6 od spoločnosti STMicroelectronics.

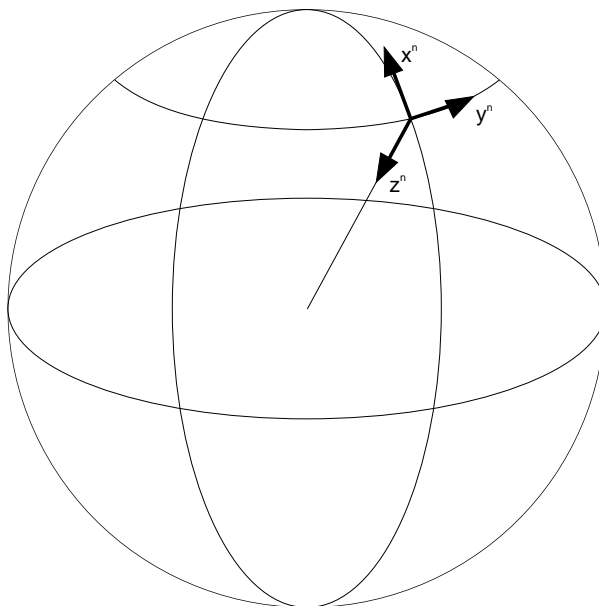
1 TEORETICKÉ ZÁKLADY

1.1 Súradnicové sústavy

Navigačné systémy vyžadujú transformáciu meraných a vypočítaných veličín medzi rôznymi vzťažnými sústavami. Ako si neskôr ukážeme, vektory majú rôznu reprezentáciu v rozličných súradnicových sústavach. Cieľom algoritmu na stanovovanie orientácie je určiť orientáciu telesa voči zvolenej referenčnej sústave. Budeme pracovať s nasledujúcimi dvomi ortogonálnymi súradnicovými sústavami:

Navigačná súradnicová sústava

Navigačná súradnicová sústava je lokálna zemepisná sústava reprezentovaná ortogonálnou vektorovou bázou $\{\mathbf{x}^n, \mathbf{y}^n, \mathbf{z}^n\}$ a je spojená so Zemou. Os \mathbf{x}^n smeruje k zemepisnému severu, \mathbf{y}^n smeruje na východ a \mathbf{z}^n smeruje do stredu Zeme ako znázorňuje obr. 1.1.

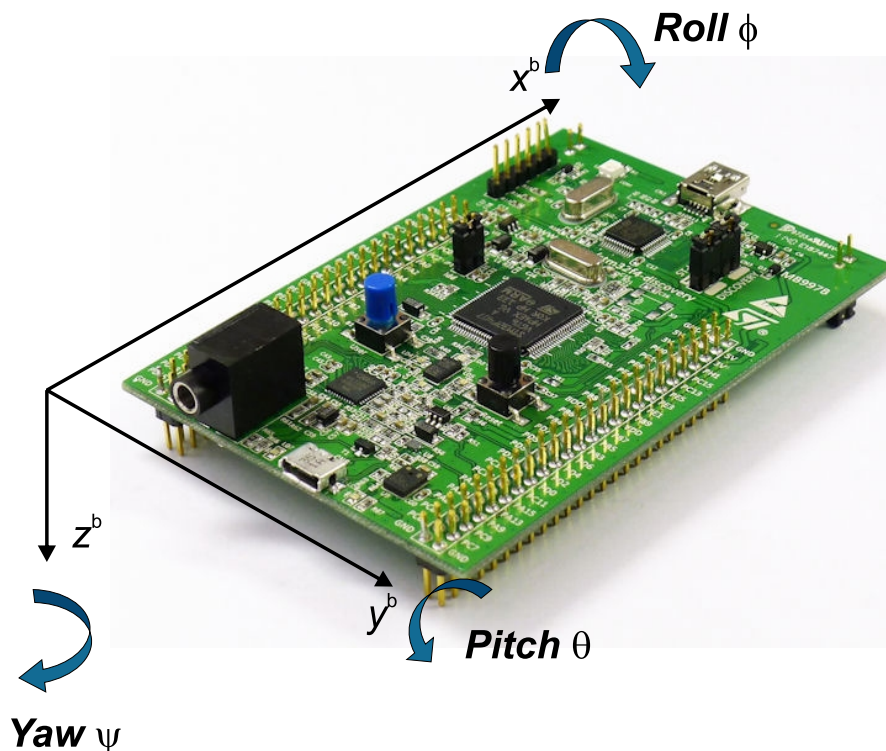


Obr. 1.1: Navigačná súradnicová sústava

Telesová súradnicová sústava

Počiatok tejto sústavy umiestňujeme do ťažiska telesa a je reprezentovaná ortogonálnou vektorovou bázou $\{\mathbf{x}^b, \mathbf{y}^b, \mathbf{z}^b\}$. Os \mathbf{x}^b smeruje dopredu a okolo tejto osy definujeme náklon telesa ϕ , os \mathbf{y}^b smeruje vpravo a okolo tejto osy definujeme klopenie telesa θ a nakoniec os \mathbf{z}^b smeruje nadol a okolo tejto osy definujeme kurz ψ .

Uhly ϕ , θ a ψ budeme považovať za kladné, ak pôjde o rotáciu v smere hodinových ručičiek ak sa dívame pozdĺž osy v jej kladnom smere ako je znázornené na obr. 1.2.



Obr. 1.2: Telesová súradnicová sústava

1.2 Vyjadrenie orientácie telesa

V literatúre existujú rôzne spôsoby vyjadrenia orientácie medzi súradnicovými systémami a transformácie vektorov a súradníc z jedného súradnicového systému do druhého. V nasledujúcich podkapitolách je uvedený prehľad rôznych prístupov použitých v tejto práci.

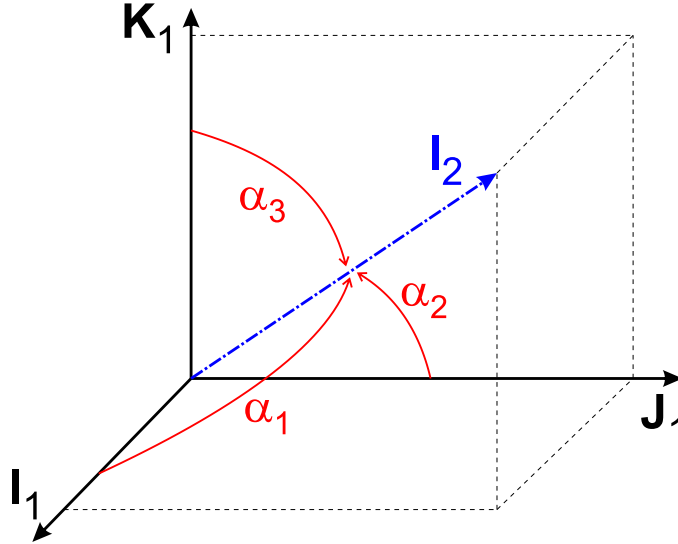
1.2.1 Rotačná matica

Uvažujme dva pravotočivé ortogonálne súradnicové systémy vyjadrené vektorovými bázami $\{\mathbf{I}_1, \mathbf{J}_1, \mathbf{K}_1\}$ a $\{\mathbf{I}_2, \mathbf{J}_2, \mathbf{K}_2\}$. Rotačná matica \mathbf{R}_2^1 vyjadrujúca vzájomnú orientáciu týchto dvoch systémov v trojdimenzionálnom priestore je matica o rozmeroch 3×3 , ktorej stĺpce reprezentujú jednotkové vektory $\mathbf{I}_2, \mathbf{J}_2, \mathbf{K}_2$ premietnuté pozdĺž osí $\mathbf{I}_1, \mathbf{J}_1, \mathbf{K}_1$ [4, 5]. Každý element \mathbf{R}_2^1 je kosínus uhlu medzi jedným z vektorov $\mathbf{I}_1, \mathbf{J}_1, \mathbf{K}_1$ a jedným z vektorov $\mathbf{I}_2, \mathbf{J}_2, \mathbf{K}_2$. Napríklad element v treťom riadku prvého stĺpca matice \mathbf{R}_2^1 je kosínus uhlu medzi vektorom \mathbf{K}_1 a \mathbf{I}_2 . Môžeme sa o tom

presvedčiť zapísaním skalárneho súčinu týchto dvoch vektorov:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_2^1(3, 1) &= \mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{I}_2 \\ &= |\mathbf{K}_1| |\mathbf{I}_2| \cos(\alpha_3) \\ &= \cos(\alpha_3)\end{aligned}\tag{1.1}$$

kde α_3 je uhol medzi \mathbf{K}_1 a \mathbf{I}_2 a využili sme, že $|\mathbf{K}_1| = |\mathbf{I}_2| = 1$.



Obr. 1.3: Definícia uhlov α_1 , α_2 a α_3 [4]

Pretože každý element rotačnej matice predstavuje kosínus uhlu, ktorý zvierajú osy dvoch súradnicových systémov, rotačná matica sa niekedy nazýva *matica smerových kosínusov*:

$$\mathbf{R}_2^1 = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_1) & \cos(\beta_1) & \cos(\gamma_1) \\ \cos(\alpha_2) & \cos(\beta_2) & \cos(\gamma_2) \\ \cos(\alpha_3) & \cos(\beta_3) & \cos(\gamma_3) \end{bmatrix}.\tag{1.2}$$

Obr. 1.3 znázorňuje uhly α_i pre $i = 1, 2, 3$, ktoré určujú prvý stĺpec matice \mathbf{R}_2^1 . Uhly β_i a γ_i sú definované obdobne. Ak poznáme relatívnu orientáciu súradnicových systémov, môžeme jednoznačne určiť rotačnú maticu \mathbf{R}_2^1 . Rotačná matica má nasledujúce vlastnosti:

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}\tag{1.3}$$

$$\det(\mathbf{R}) = 1.\tag{1.4}$$

Rotačná matica sa používa na transformovanie vektorov a súradníc z jedného súradnicového systému do druhého a naopak. Hoci má rotačná matica deväť prvkov, kvôli požiadavkom na ortogonalitu a jednotkovú veľkosť vektorov, ktoré ju tvoria, má rotačná matica len tri stupne volnosti. Preto sa používajú viaceré druhy parametrizácií, ktoré sú popísané v nasledujúcich podkapitolách.

Parametrizácia rotačnej matice pomocou Eulerových uhlov

Transformácia z navigačných súradníc do telesových súradníc je založená na troch postupných rotáciach okolo jednotlivých osí súradnicového systému. Existuje šesť rôznych možností ako môžeme jednotlivé rotácie aplikovať. Pretože pri násobení matíc neplatí komutatívny zákon, tvar výslednej rotačnej matice je závislý na poradí v akom sú jednotlivé rotácie aplikované. V tejto práci budeme rotácie aplikovať v nasledujúcom poradí:

1. Rotácia okolo osy z o uhol ψ (yaw):

$$\mathbf{R}_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

2. Rotácia okolo novej (rotovanej) osy y o uhol θ (pitch):

$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

3. Rotácia okolo novej osy x o uhol ϕ (roll):

$$\mathbf{R}_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Rotačná matica z navigačných súradníc do telesových súradníc pre uvedenú sekvenciu rotácií je

$$\mathbf{R}_n^b = \mathbf{R}_x(\phi)\mathbf{R}_y(\theta)\mathbf{R}_z(\psi) \quad (1.8)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \cos \psi \sin \theta \sin \phi - \cos \phi \sin \psi & \cos \phi \cos \psi + \sin \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \theta \sin \phi \\ \cos \phi \cos \psi \sin \theta + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \cos \psi \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Pre opačný prevod, t.j. z telesových do navigačných súradníc stačí maticu \mathbf{R}_n^b transponovať:

$$\mathbf{R}_b^n = (\mathbf{R}_n^b)^T = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

Eulerove uhly z rotačnej matice vypočítame nasledujúcim spôsobom:

$$\phi = \text{atan2}(R_{32}, R_{33}), \quad -180^\circ \leq \phi < 180^\circ, \quad (1.12)$$

$$\theta = \text{asin}(-R_{31}), \quad -90^\circ \leq \theta < 90^\circ, \quad (1.13)$$

$$\psi = \text{atan2}(R_{21}, R_{11}), \quad -180^\circ \leq \psi < 180^\circ. \quad (1.14)$$

Parametrizácia rotačnej matice pomocou dvojice os-uhol

Rotačná matica \mathbf{R}_n^b , ktorá transformuje vektor ako výsledok rotácie súradnicového systému okolo osy $\hat{\mathbf{n}}$ o uhol η je ($c = \cos$, $s = \sin$):

$$\mathbf{R}_n^b = \begin{bmatrix} \{\hat{n}_x^2 + (1 - \hat{n}_x^2) c\eta\} & \{\hat{n}_x \hat{n}_y (1 - c\eta) + \hat{n}_z s\eta\} & \{\hat{n}_x \hat{n}_z (1 - c\eta) - \hat{n}_y s\eta\} \\ \{\hat{n}_x \hat{n}_y (1 - c\eta) - \hat{n}_z s\eta\} & \{\hat{n}_y^2 + (1 - \hat{n}_y^2) c\eta\} & \{\hat{n}_y \hat{n}_z (1 - c\eta) + \hat{n}_x s\eta\} \\ \{\hat{n}_x \hat{n}_z (1 - c\eta) + \hat{n}_y s\eta\} & \{\hat{n}_y \hat{n}_z (1 - c\eta) - \hat{n}_x s\eta\} & \{\hat{n}_z^2 + (1 - \hat{n}_z^2) c\eta\} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Súčin $\mathbf{R}_n^b \hat{\mathbf{n}}$ je rovný $\hat{\mathbf{n}}$, čo potvrdzuje, že $\hat{\mathbf{n}}$ je vlastný vektor matice \mathbf{R}_n^b zodpovedajúci vlastnému číslu 1 (ďalšie dve vlastné čísla sú $\{\cos \eta + j \sin \eta, \cos \eta - j \sin \eta\}$) a pretože \mathbf{R}_n^b je rotačná matica, dokazuje, že $\hat{\mathbf{n}}$ je os rotácie. Os rotácie má rovnaké vyjadrenie v oboch súradnicových sústavách.

$$\mathbf{R}_n^b \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}} \quad (1.16)$$

Ak je rotačná matica aplikovaná na ľubovoľný vektor \mathbf{v} , výsledok je:

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}_n^b \mathbf{v} \\ = & \begin{bmatrix} \{\hat{n}_x^2 + (1 - \hat{n}_x^2) c\eta\} & \{\hat{n}_x \hat{n}_y (1 - c\eta) + \hat{n}_z s\eta\} & \{\hat{n}_x \hat{n}_z (1 - c\eta) - \hat{n}_y s\eta\} \\ \{\hat{n}_x \hat{n}_y (1 - c\eta) - \hat{n}_z s\eta\} & \{\hat{n}_y^2 + (1 - \hat{n}_y^2) c\eta\} & \{\hat{n}_y \hat{n}_z (1 - c\eta) + \hat{n}_x s\eta\} \\ \{\hat{n}_x \hat{n}_z (1 - c\eta) + \hat{n}_y s\eta\} & \{\hat{n}_y \hat{n}_z (1 - c\eta) - \hat{n}_x s\eta\} & \{\hat{n}_z^2 + (1 - \hat{n}_z^2) c\eta\} \end{bmatrix} \mathbf{v} \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$= \begin{bmatrix} \{\hat{n}_x^2 + (1 - \hat{n}_x^2) \cos \eta\} v_x + \{\hat{n}_x \hat{n}_y (1 - \cos \eta) + \hat{n}_z \sin \eta\} v_y + \{\hat{n}_x \hat{n}_z (1 - \cos \eta) - \hat{n}_y \sin \eta\} v_z \\ \{\hat{n}_x \hat{n}_y (1 - \cos \eta) - \hat{n}_z \sin \eta\} v_x + \{\hat{n}_y^2 + (1 - \hat{n}_y^2) \cos \eta\} v_y + \{\hat{n}_y \hat{n}_z (1 - \cos \eta) + \hat{n}_x \sin \eta\} v_z \\ \{\hat{n}_x \hat{n}_z (1 - \cos \eta) + \hat{n}_y \sin \eta\} v_x + \{\hat{n}_y \hat{n}_z (1 - \cos \eta) - \hat{n}_x \sin \eta\} v_y + \{\hat{n}_z^2 + (1 - \hat{n}_z^2) \cos \eta\} v_z \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

Vývoj Eulerových uhlov v čase

Vzťah medzi časovou deriváciou Eulerových uhlov a uhlovými rýchlosťami telesa $\Omega = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$ je [4]:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

Odtiaľ získame vývoj Eulerových uhlov v čase:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin \phi \sin \theta}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi \sin \theta}{\cos \theta} \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}. \quad (1.20)$$

Eulerové uhly môžeme získať z rovnice (1.20) pomocou integrácie pri znalosti počiatočnej orientácie telesa. Nevýhoda reprezentácie orientácie pomocou Eulerových uhlov je výskyt singularít pri $\theta = \pm 90^\circ$, kedy ϕ a ψ predstavujú rotáciu okolo tej istej osy a tým strácame jeden stupeň voľnosti. Určenie Eulerových uhlov už nie je jednoznačné (pri $\theta = -90^\circ$ môžeme určiť len súčet $\phi + \psi$ a pri $\theta = +90^\circ$ rozdiel $\phi - \psi$).

1.2.2 Kvaternióny

Kvaternióny prvýkrát opísal v roku 1843 írsky matematik Sir Wiliam Rowan Hamilton. Kvaternióny predstavujú štvor-dimenziálne rozšírenie komplexných čísel, niekedy sa nazývajú hyper-komplexné čísla [12].

Definícia

Kvaternión má štyri komponenty:

$$a = a_0 + a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k} = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}, \quad (1.21)$$

kde a_0, a_1, a_2 a a_3 sú reálne čísla. a_0 je skalárna zložka a $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$ je vektorová zložka kvaterniónu. Ekvivalentné vyjadrenia kvaterniónu pomocou jeho skalárnej a vektorovej zložky sú:

$$a = a_0 + \mathbf{a} = \{a_0, \mathbf{a}\} = \left\{ a_0, \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \right\}. \quad (1.22)$$

Ak skalárny komponent a_0 je nulový, kvaternión sa označuje ako rýdzi kvaternion alebo vektor. Ak je nulový vektorový komponent \mathbf{a} , potom je kvaternión jednoducho reálne číslo.

Súčet kvaterniónov

Súčet kvaterniónov je definovaný ako súčet jeho štyroch zložiek:

$$a + b = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j} + (a_3 + b_3)\mathbf{k}. \quad (1.23)$$

Súčet kvaterniónov je patrne komutatívny a asociatívny, pretože súčet reálnych čísel je komutatívny a asociatívny:

$$a + b = b + a \quad (1.24)$$

$$(a + b) + c = a + (b + c). \quad (1.25)$$

Súčin kvaterniónov

Súčin dvoch kvaterniónov je definovaný ako distributívny súčin jeho komponentov:

$$c = ab = (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})(b_0 + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} &= (a_0b_0 + a_0b_1\mathbf{i} + a_0b_2\mathbf{j} + a_0b_3\mathbf{k}) + (a_1b_0\mathbf{i} + a_1b_1\mathbf{ii} + a_1b_2\mathbf{ij} + a_1b_3\mathbf{ik}) \\ &+ (a_2b_0\mathbf{j} + a_2b_1\mathbf{ji} + a_2b_2\mathbf{jj} + a_2b_3\mathbf{jk}) + (a_3b_0\mathbf{k} + a_3b_1\mathbf{ki} + a_3b_2\mathbf{kj} + a_3b_3\mathbf{kk}). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Súčin komponentov kvaternionu je definovaný (kde r je reálne číslo):

$$r\mathbf{i} = \mathbf{i}r \quad (1.28)$$

$$r\mathbf{j} = \mathbf{j}r \quad (1.29)$$

$$r\mathbf{k} = \mathbf{k}r \quad (1.30)$$

$$\mathbf{ii} = \mathbf{jj} = \mathbf{kk} = -1 \quad (1.31)$$

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k} \quad (1.32)$$

$$\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i} \quad (1.33)$$

$$\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}. \quad (1.34)$$

Dôsledkom rovníc (1.31) až (1.34) je, že platí:

$$(\mathbf{ij})\mathbf{k} = \mathbf{i}(\mathbf{jk}) = -1. \quad (1.35)$$

Dosadením rovníc (1.28) až (1.35) do rovnice (1.27) sa výraz zjednoduší na:

$$\begin{aligned} c = ab &= (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} \\ &+ (a_0b_2 - a_1b_3 + a_2b_0 + a_3b_1)\mathbf{j} + (a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0)\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Štyri komponenty výsledného kvaterniónu c sú potom:

$$\begin{aligned}c_0 &= a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 \\c_1 &= a_0b_1 + a_1b_0 + a_2b_3 - a_3b_2 \\c_2 &= a_0b_2 - a_1b_3 + a_2b_0 + a_3b_1 \\c_3 &= a_0b_3 + a_1b_2 - a_2b_1 + a_3b_0.\end{aligned}\tag{1.37}$$

Kvaterniónový súčin môžeme zapísať pomocou maticového súčinu ak si z kvaterniónu a vytvoríme vhodnú maticu:

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}\tag{1.38}$$

Z výsledku je zrejmé, že súčin kvaterniónov nie je komutatívny

$$ab \neq ba,\tag{1.39}$$

dá sa dokázať, že násobenie kvaterniónov je asociatívne

$$(ab)c = a(bc).\tag{1.40}$$

Združený kvaternión

Združený kvaternión a^* je definovaný ako

$$a^* = a_0 - a_1\mathbf{i} - a_2\mathbf{j} - a_3\mathbf{k}.\tag{1.41}$$

Z definície súčinu kvaterniónov sa dá dokázať, že platí

$$(ab)^* = b^*a^*,\tag{1.42}$$

čo je možné rozšíriť pre súčiny viacerých kvaterniónov

$$(abc\dots z)^* = z^*\dots c^*b^*a^*.\tag{1.43}$$

Norma kvaterniónu

Norma kvaterniónu $N(a)$ je definovaná ako:

$$N(a) = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\tag{1.44}$$

Vynásobením kvaterniónu a a združeného kvaterniónu a^* dostaneme:

$$\begin{aligned}aa^* &= (a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})(a_0 - a_1\mathbf{i} - a_2\mathbf{j} - a_3\mathbf{k}) \\ &= a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = N(a)^2,\end{aligned}\tag{1.45}$$

odtiaľ vyplýva

$$N(a) = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{aa^*} = \sqrt{a^*a}. \quad (1.46)$$

Norma združeného kvaterniónu je rovná norme pôvodného kvaterniónu:

$$N(a^*) = \sqrt{a_0^2 + (-a_1^2) + (-a_2^2) + (-a_3^2)} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = N(a). \quad (1.47)$$

Inverzný kvaternión

Inverzný kvaternión a^{-1} je definovaný ako kvaternión spĺňajúci rovnicu:

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1. \quad (1.48)$$

Ak vynásobíme kvaternión a výrazom $\frac{a^*}{N(a)^2}$ najskôr zľava a potom zprava dostaneme:

$$\frac{1}{N(a)^2}(a_0 - a_1\mathbf{i} - a_2\mathbf{j} - a_3\mathbf{k})(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) = \frac{(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}{N(a)^2} = 1 \quad (1.49)$$

$$(a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})\frac{1}{N(a)^2}(a_0 - a_1\mathbf{i} - a_2\mathbf{j} - a_3\mathbf{k}) = \frac{(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}{N(a)^2} = 1 \quad (1.50)$$

Porovnaním výsledkov s rovnicou (1.48) je patrné, že výraz $\frac{a^*}{N(a)^2}$ je hľadaný inverzný kvaternión:

$$a^{-1} = \frac{a^*}{N(a)^2} = \frac{a^*}{aa^*} = \frac{a^*}{a^*a}. \quad (1.51)$$

Trojný súčin kvaterniónu a vektoru

Dva trojné súčiny $a^*\mathbf{v}a$ a $a\mathbf{v}a^*$, kde a je všeobecný kvaternión a \mathbf{v} je vektor sú užitočné pri použití kvaterniónu ako rotačného operátora. Priamym roznásobením môžeme dokázať, že oba tieto súčiny dávajú ako výsledok rýdzi kvaternión, teda iný vektor.

$$\begin{aligned} a^*\mathbf{v}a = & \left\{ (a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)v_1 + 2a_0(a_3v_2 - a_2v_3) + 2a_1(a_2v_2 + a_3v_3) \right\} \mathbf{i} \\ & + \left\{ 2a_3(a_2v_3 - a_0v_1) + (a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2)v_2 + 2a_1(a_2v_1 + a_0v_3) \right\} \mathbf{j} \\ & + \left\{ 2a_0(-a_1v_2 + a_2v_1) + 2a_3(a_1v_1 + a_2v_2) + (a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2)v_3 \right\} \mathbf{k} \end{aligned} \quad (1.52)$$

Kvaternión ako operátor rotácie

Rotačný kvaternión q pre rotáciu okolo normalizovanej osy rotácie $\hat{\mathbf{n}}$ o uhol η je definovaný ako:

$$q = \cos\left(\frac{\eta}{2}\right) + \hat{\mathbf{n}} \sin\left(\frac{\eta}{2}\right). \quad (1.53)$$

q je patrne jednotkový kvaternión pretože jeho norma je rovná jednej:

$$N(q) = \cos^2\left(\frac{\eta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\eta}{2}\right) (\hat{n}_x^2 + \hat{n}_y^2 + \hat{n}_z^2) = 1. \quad (1.54)$$

Overenie identifikácie kvaterniónu q ako operátora rotácie môžeme vykonať vypočítaním trojného súčinu $q^* \mathbf{v} q$, ktorý je pre ľubovoľný vektor \mathbf{v} :

$$q^* \mathbf{v} q = \left(\cos \left(\frac{\eta}{2} \right) - \hat{\mathbf{n}} \sin \left(\frac{\eta}{2} \right) \right) \mathbf{v} \left(\cos \left(\frac{\eta}{2} \right) + \hat{\mathbf{n}} \sin \left(\frac{\eta}{2} \right) \right) \quad (1.55)$$

$$= \left(\cos \left(\frac{\eta}{2} \right) - \hat{n}_x \sin \left(\frac{\eta}{2} \right) \mathbf{i} - \hat{n}_y \sin \left(\frac{\eta}{2} \right) \mathbf{j} - \hat{n}_z \sin \left(\frac{\eta}{2} \right) \mathbf{k} \right) (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}) \\ \left(\cos \left(\frac{\eta}{2} \right) + \hat{n}_x \sin \left(\frac{\eta}{2} \right) \mathbf{i} + \hat{n}_y \sin \left(\frac{\eta}{2} \right) \mathbf{j} + \hat{n}_z \sin \left(\frac{\eta}{2} \right) \mathbf{k} \right) \quad (1.56)$$

$$= \begin{bmatrix} \{\hat{n}_x^2 + (1 - \hat{n}_x^2) \cos \eta\} v_x + \{\hat{n}_x \hat{n}_y (1 - \cos \eta) + \hat{n}_z \sin \eta\} v_y + \\ \{\hat{n}_x \hat{n}_z (1 - \cos \eta) - \hat{n}_y \sin \eta\} v_z \\ \{\hat{n}_x \hat{n}_y (1 - \cos \eta) - \hat{n}_z \sin \eta\} v_x + \{\hat{n}_y^2 + (1 - \hat{n}_y^2) \cos \eta\} v_y + \\ \{\hat{n}_y \hat{n}_z (1 - \cos \eta) + \hat{n}_x \sin \eta\} v_z \\ \{\hat{n}_x \hat{n}_z (1 - \cos \eta) + \hat{n}_y \sin \eta\} v_x + \{\hat{n}_y \hat{n}_z (1 - \cos \eta) - \hat{n}_x \sin \eta\} v_y + \\ \{\hat{n}_z^2 + (1 - \hat{n}_z^2) \cos \eta\} v_z \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

Rovnice (1.18) a (1.57) súhlasia, čo znamená, že operátor $q^* \mathbf{v} q$ operujúci na vektore \mathbf{v} je ekvivalentný rotačnej matici operujúcej na \mathbf{v} :

$$\mathbf{R}_n^b \mathbf{v} = q^* \mathbf{v} q. \quad (1.58)$$

Kvaternión q je preto rotačný kvaternión pre transformovanie vektoru \mathbf{v} pri rotácii súradnicového systému okolo osy $\hat{\mathbf{n}}$ o uhol η prostredníctvom operátoru $q^* \mathbf{v} q$.

Z definície q^* vyplýva, že q^* je rotačný kvaternión okolo tej istej osy $\hat{\mathbf{n}}$, ale o uhol $-\eta$ a je inverzný k operátoru q :

$$q^* = \cos \left(\frac{\eta}{2} \right) - \hat{\mathbf{n}} \sin \left(\frac{\eta}{2} \right) = \cos \left(\frac{\eta}{2} \right) + \hat{\mathbf{n}} \sin \left(\frac{-\eta}{2} \right). \quad (1.59)$$

Rotačné kvaternióny pre elementárne rotácie okolo jednotlivých osí vyplývajú z definície (1.53):

$$q_x(\phi) = \cos \left(\frac{\phi}{2} \right) + \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \mathbf{i} \quad (1.60)$$

$$q_y(\theta) = \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) + \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \mathbf{j} \quad (1.61)$$

$$q_z(\psi) = \cos \left(\frac{\psi}{2} \right) + \sin \left(\frac{\psi}{2} \right) \mathbf{k}. \quad (1.62)$$

Celkový rotačný kvaternión $q_{zyx} = q_z(\psi)q_y(\theta)q_x(\phi)$ pre sekvenciu rotácií u uhol ψ okolo osy z , potom o uhol θ okolo osy y a nakoniec o uhol ϕ okolo osy x je:

$$\begin{aligned}
q_{zyx} &= q_z(\psi)q_y(\theta)q_x(\phi) \\
&= \left\{ \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\mathbf{k} \right\} \left\{ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathbf{j} \right\} \left\{ \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\mathbf{i} \right\} \\
&= \left\{ \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right\} \\
&\quad + \left\{ \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \right\}\mathbf{i} \\
&\quad + \left\{ \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right\}\mathbf{j} \\
&\quad + \left\{ \sin\left(\frac{\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right\}\mathbf{k}
\end{aligned} \tag{1.63}$$

Rotačný kvaternión $q_{zyx} = q_z q_y q_x$ je aplikovaný na pravú stranu vektoru \mathbf{v} a v konjugovanej forme na jeho ľavú stranu, takže označenie q_{zyx} naznačuje sekvenciu rotácií okolo osy z , potom okolo y a nakoniec okolo osy x , podobne ako sme vytvárali rotačnú maticu \mathbf{R}_n^b . Priamym výpočtom môžeme overiť, platí:

$$\mathbf{R}_n^b \mathbf{v} = q_{zyx}^* \mathbf{v} q_{zyx} = (q_z q_y q_x)^* \mathbf{v} q_z q_y q_x = q_x^* q_y^* q_z^* \mathbf{v} q_z q_y q_x \tag{1.64}$$

$$= \begin{bmatrix} v_x c\theta c\psi + v_y c\theta s\psi - v_z s\theta \\ v_x(c\psi s\theta s\phi - c\phi s\psi) + v_y(c\phi c\psi + s\theta s\phi s\psi) + v_z c\theta s\phi \\ v_x(c\phi c\psi s\theta + s\phi s\psi) + v_y(c\phi s\theta s\psi - c\psi s\phi) + v_z c\theta c\phi \end{bmatrix}. \tag{1.65}$$

Výpočet rotačnej matice z rotačného kvaterniónu

Výpočet rotačnej matice \mathbf{R}_n^b ekvivalentnej zadanému rotačnému kvaterniónu q získame porovnaním výsledkov aplikovania kvaterniónu a matice na vektor \mathbf{v} :

$$q^* \mathbf{v} q = \mathbf{R}_n^b \mathbf{v} \tag{1.66}$$

$$\Rightarrow (q_0 - q_1 \mathbf{i} - q_2 \mathbf{j} - q_3 \mathbf{k})(v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k})(q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}) = \mathbf{R}_n^b \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \tag{1.67}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 2q_1q_3 - 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 + 2q_0q_2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \mathbf{R}_n^b \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \tag{1.68}$$

Pretože rotačný kvaternión q má jednotkovú normu $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$, môžeme rovnicu (1.68) zjednodušiť a získame jednoznačné mapovanie štyroch komponentov kvaterniónu na deväť elementov ekvivalentnej rotačnej matice:

$$\mathbf{R}_n^b = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix} \quad (1.69)$$

Vývoj kvaterniónu v čase

Vzťah medzi časovým vývojom jednotkového kvaterniónu a uhlovými rýchlosťami telesa je daný:

$$\dot{q} = \frac{1}{2}q\boldsymbol{\Omega}, \quad (1.70)$$

pričom v uvedenom kvaterniónovom súčine zaobchádzame s vektorom $\boldsymbol{\Omega}$ ako s kvaterniónom s nulovou skalárnou zložkou. S využitím zápisu kvaterniónového súčinu pomocou násobenia matic podľa vzťahu (1.38) môžeme vzťah prepísať:

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \quad (1.71)$$

prípadne

$$\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \quad (1.72)$$

1.3 Kalmanov filter

Kalmanov filter bol prvýkrát publikovaný Rudolphom E. Kalmanom v roku 1960. Filter bol vyvinutý na zlepšenie presnosti navigácie v priestore pre vesmírny program Apollo. Odvtedy našiel aplikácie v stovkách rôznych oblastí. Filter je určený pre lineárne systémy, kde šum procesu a šum meraní môžu byť modelované bielym Gaussovským šumom. Ak sú splnené tieto podmienky, Kalmanov filter je optimálny v zmysle, že minimalizuje kovarianciu chyby odhadu \mathbf{P} danú vzťahom

$$\mathbf{P} = E \langle \mathbf{e} \mathbf{e}^T \rangle, \quad (1.73)$$

kde \mathbf{e} je chyba medzi skutočným stavom \mathbf{x} a odhadom stavu $\hat{\mathbf{x}}$.

Ale pretože nie všetky systémy sú lineárne, bol vyvinutý tzv. rozšírený Kalmanov filter (Extended Kalman Filter - EKF), kde je nelineárny model linearizovaný, aby

mohol byť použitý lineárny Kalmanov filter. Táto podkapitola stručne sumarizuje rovnice použité u EKF.

Pre nelineárny systém je model procesu daný sadou nelineárnych diferenciálnych rovníc

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \mathbf{w}(t), \quad (1.74)$$

kde

\mathbf{x} je stavový vektor systému,

\mathbf{u} je vektor vstupov systému,

\mathbf{w} je šum procesu.

Nelineárna rovnica meraní je

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{v}(t), \quad (1.75)$$

kde $\mathbf{v}(t)$ je šum meraní.

Linearizáciou rozvojom do Taylorovej rady v okolí pracovného bodu získame nasledujúci linearizovaný systém

$$\begin{aligned} \dot{\delta \mathbf{x}}(t) &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} \cdot \delta \mathbf{x}(t) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} \cdot \delta \mathbf{u}(t) + \delta \mathbf{w}(t), \\ \delta \mathbf{y}(t) &= \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}} \cdot \delta \mathbf{x}(t) + \delta \mathbf{v}(t), \end{aligned} \quad (1.76)$$

kde

$\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}$ je pracovný bod systému,

$\delta \mathbf{x}$ je odchýlka stavového vektoru systému od pracovného bodu,

$\delta \mathbf{u}$ je odchýlka vektoru vstupov systému od pracovného bodu,

$\delta \mathbf{y}$ je odchýlka vektoru meraní,

$\delta \mathbf{w}, \delta \mathbf{v}$ sú vektory šumov procesu a meraní vrátane chýb linearizácie.

Dynamiku linearizovaného systému môžeme zapísať

$$\begin{aligned} \dot{\delta \mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) \delta \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) \delta \mathbf{u}(t) + \delta \mathbf{w}(t), \\ \delta \mathbf{y}(t) &= \mathbf{H}(\bar{\mathbf{x}}) \delta \mathbf{x}(t) + \delta \mathbf{v}(t). \end{aligned} \quad (1.77)$$

Diskretizáciou dynamiky linearizovaného systému získame

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{F}_k \delta \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \delta \mathbf{u}_k + \delta \mathbf{w}_k \\ \delta \mathbf{y}_k &= \mathbf{H}_k \delta \mathbf{x}_k + \delta \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (1.78)$$

pričom

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_k &= e^{\mathbf{A}_k T} \\ \mathbf{H}_k &= \mathbf{H} \end{aligned} \quad (1.79)$$

kde T je perióda vzorkovania.

Rovnice EKF pre predikčný a korekčný krok sú:

1. Predikcia

Apriórny odhad stavu a kovariančnej matice

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \cdot dt \quad (1.80)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (1.81)$$

kde \mathbf{Q}_k je kovariančná matica šumu procesu daná $\mathbf{Q}_k = \text{cov}(\delta \mathbf{w} \delta \mathbf{w}^T)$.

2. Korekcia

Kalmanovo zosilnenie sa vypočíta

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (1.82)$$

kde \mathbf{R}_k je kovariančná matica šumu meraní definovaná $\mathbf{R}_k = \text{cov}(\delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v}^T)$.

Aposteriórny odhad stavu založený na novom meraní \mathbf{z}_k vypočítame

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_k^-)) \quad (1.83)$$

a aktualizácia kovariančnej matice je

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- \quad (1.84)$$

Pre praktickú implementáciu, apriórny odhad stavu $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ a diskretizáciu systémovej matice \mathbf{F}_k zjednodušujeme

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k^- &\approx \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \cdot T \\ \mathbf{F}_k &\approx \mathbf{I} + \mathbf{A}_k T. \end{aligned} \quad (1.85)$$

1.3.1 Ladenie Kalmanovho filtru

Kovariančnú maticu šumu meraní \mathbf{R} môžeme určiť vopred, tým že zistíme rozptyl šumov z off-line odobratej vzorky dát. Proces určenia kovariančnej matice šumu procesu \mathbf{Q} je komplikovanejší, pretože obvykle nemáme možnosť priamo pozorovať stavy procesu.

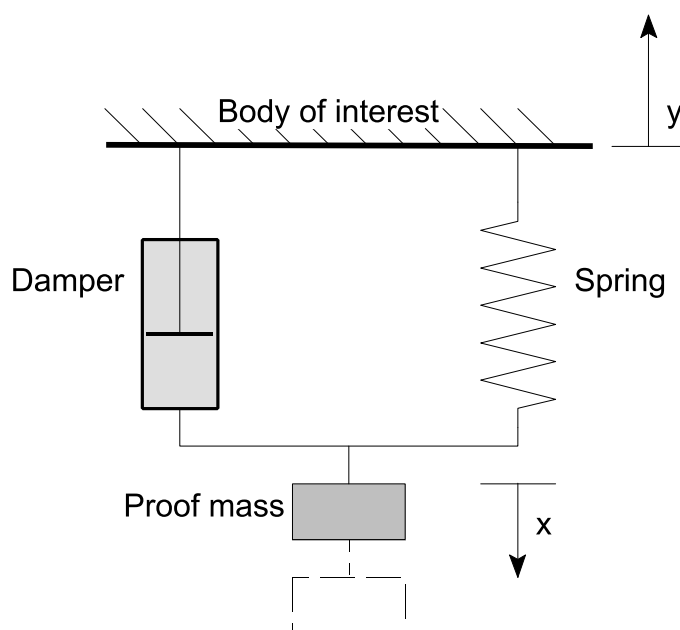
Ak sa chceme vyhnúť ladeniu matice \mathbf{Q} metódou pokus-omyl, problém ladenia môžeme formulovať ako problém optimalizácie kritériálnej funkcie. Ako kritériálnu funkciu volíme strednú kvadratickú chybu odhadu stavu. Predpokladom použitia metódy je, že máme k dispozícii kovariančnú maticu meraní \mathbf{R} a skutočné hodnoty stavových veličín.

2 SENZORY POUŽITÉ PRE ODHAD ORIEN- TÁCIE

Pre účel odhadu orientácie v priestore používame tzv. inerciálne snímače (akcelero-
meter a gyroskop) a magnetometer. V nasledujúcej časti budú tieto senzory bližšie
popísané, aby sme získali predstavu akú informáciu nám tieto senzory poskytujú, a
tým pádom boli schopní ich data čo najefektívnejšie využiť.

2.1 Akcelerator

Primárnou veličinou, ktorú akcelerator meria je sila vyvolaná pri zrýchlení te-
lesa. Fyzikálny princíp je založený na Newtonovom druhom pohybovom zákone,
podľa ktorého je sila pôsobiaca na teleso rovná súčinu hmotnosti telesa a zrýchlenia
telesa. Obr. 2.1 znázorňuje model, na ktorom je testovacie závažie spojené s vyšetro-
vaným telesom prostredníctvom pružiny s tlmičom. Pôsobením zrýchlenia začne na
testovacie závažie pôsobiť sila, ktorá spôsobí výchylku x . Pohyb je nutné nejakým
spôsobom tlmiť, inak by systém kmital vlastnou frekvenciou.



Obr. 2.1: Principiálna schéma akcelometru

Akcelerator je schopný merať zrýchlenie jak statické, čo je napr. tiažové zrých-
lenie, tak dynamické, ktoré je dané skutočným zrýchlením obejktu. Z tohoto dôvodu

je akcelerometer schopný podať relevantnú informáciu o orientácii, len ak na teleso nepôsobia lineárne a dostredivé zrýchlenia. Ak sú tieto parazitné zrýchlenia dostatočne malé v porovnaní s gravitačným zrýchlením, potom údaj akcelerometru poskytuje zložky gravitačného vektora vyjadrené v telesových súradniciach:

$$\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} A_{mx} \\ A_{my} \\ A_{mz} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_n^b \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

kde $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Zo znalosti gravitačného vektora môžeme vypočítať uhol náklonu a klopenia:

$$\phi = \text{atan2}(A_{my}, A_{mz}), \quad (2.2)$$

$$\theta = \text{asin}\left(\frac{-A_{mx}}{\|\mathbf{A}_m\|}\right). \quad (2.3)$$

2.2 Gyroskop

Gyroskop meria zložky uhlovej rýchlosti telesa $\boldsymbol{\Omega}$ vzhľadom k inerciálnej sústave vyjadrené v telesových súradniciach. Pri znalosti počiatočnej orientácie, môžeme integráciou uhlových rýchlostí získať odhad orientácie v čase. Pretože výstup gyroskopu je zatažený premenlivým biasom a šumom, model meraní gyroskopu je daný:

$$\boldsymbol{\Omega}_m = \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{b}(t) + \mu, \quad (2.4)$$

kde $\boldsymbol{\Omega}$ sú skutočné uhlové rýchlosti, $\mathbf{b}(t)$ je časovo premenlivý bias a μ je Gaussovský biely šum. Kvôli týmto zdrojom chýb je u lacných MEMS gyroskopov jednoduchá integrácia uhlových rýchlostí pre získanie orientácie nedostatočná.

2.3 Magnetometer

Magnetometer poskytuje informáciu o lokálnom vektore magnetickej indukcie. Pre účely zisťovania orientácie má tento údaj pre nás zmysel len ak meria magnetické pole Zeme. Vektor magnetického poľa Zeme, môžeme v obmedzenom priestore a čase považovať za konštantný. Pri znalosti vektora magnetického poľa Zeme v referenčnej sústave môžeme z merania tohoto vektora v telesovej sústave získať čiastočnú informáciu o orientácii.

Geomagnetické pole má v Brne veľkosť $B = 48.8 \text{ } \mu\text{T}$ s inklináciou $\delta = 65,4^\circ$ a deklináciou $3,9^\circ$ (podľa <http://www.ngdc.noaa.gov>, model IGRF 11). Vektor magnetického poľa vyjadrený v referenčnej sústave je

$$\mathbf{B}_r = B \begin{bmatrix} \cos \delta \\ 0 \\ \sin \delta \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Zanedbali sme deklináciu magnetického poľa, takže referenčná sústava smeruje k magnetickému severnému pólu a nie ku geografickému severnému pólu. Meranie magnetometru v telesovej sústave je potom

$$\mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} B_{mx} \\ B_{my} \\ B_{mz} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_n^b \begin{bmatrix} B \cos \delta \\ 0 \\ B \sin \delta \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Pri znalosti náklonu ϕ a klopenia θ , môžeme určiť kurz ψ pomocou vzťahu:

$$\psi = \tan^{-1} \left(\frac{B_{mx} \sin \phi - B_{my} \cos \phi}{B_{mx} \cos \theta + B_{my} \sin \theta \sin \phi + B_{mz} \sin \theta \cos \phi} \right). \quad (2.7)$$

Použitie tohoto vzťahu nevyžaduje znalosť veľkosti magnetického poľa B ani inklinácie δ , pretože tie sa v procese jeho odvodzovania pokrátia.

2.3.1 Kalibrácia magnetometru

Magnetometer meria súčet geomagnetického poľa a interferencie generovanej feromagnetickými materiálmi v blízkosti magnetometru. Túto interferenciu rozdeľujeme na interferenciu permanentnú spôsobenú trvale zmagnetizovanými predmetmi z magneticky tvrdých materiálov (hard iron) a indukovanú spôsobenú magneticky mäkkými materiálmi (soft iron). Veľkosť týchto rušivých vplyvov je často niekoľkonásobne väčšia ako veľkosť magnetického poľa Zeme, ktoré nám poskytuje užitočnú informáciu o orientácii [10]. Preto je nevyhnutné pred použitím magnetometru na odhad orientácie vplyv týchto zdrojov chýb určiť a matematicky ich kompenzovať. Najčastejším zdrojom rušivých magnetických polí sú:

- permanentné magnety (napr. v motoroch, reproduktoroch),
- polia indukované feromagnetickými materiálmi, ktoré sami a sebe pole nevytvárajú,
- polia generované tokom prúdu cez vodič.

Pretože magnetometer a zdroje „hard iron“ rušenia sú väčšinou voči sebe vo fixnej pozícii, tento typ rušenia sa prejaví aditívnym vektorom magnetického poľa meraného v súradniciach magnetometru. Z pohľadu výrobcov magnetometrov sa preto veľmi neoplatí dodávať na trh starostlivo kalibrované magnetometre a snažiť sa o čo najnižší offset pri nulovom poli, pretože v konkrétnej aplikácii budú aj tak vystavené neznámemu vplyvu tvrdého železa. Offset pri nulovom poli je taktiež nezávislý na orientácii a preto sa jednoducho pričíta k vplyvu tvrdého železa. Kalibračný algoritmus teda nijako nerozlíši offset pri nulovom poli od vplyvu tvrdého železa a odstráni ich súčasne. Medzi hard iron rušenie radíme tiež polia indukované do normálne nezmagnetizovaných feromagnetických materiálov od permanentne magnetizovaných

komponentov, ktoré sú voči magnetometru vo fixnej polohe a tým pádom je aj toto indukované pole fixné.

„Soft iron“ interferencia je vytvorená indukciou dočasných magnetických polí do normálne nezmagnetizovaných feromagnetických komponentov magnetickým polom Zeme. Účinky mäkkého železa je ťažšie modelovať, pretože tieto indukované polia závisia na relatívnej orientácii magnetometru voči zemskému magnetickému poľu. Tieto účinky modelujeme pomocou symetrickej matice o rozmeroch 3x3.

Lineárny model meraní

Kalibrovaný údaj magnetometru \mathbf{B}_c (kde kalibrovaný znamená, že vplyvy mäkkého a tvrdého železa nie sú prítomné alebo boli odstránené) je jednoducho zemské magnetické pole \mathbf{B}_r rotované maticou \mathbf{R}_n^b :

$$\mathbf{B}_c = \mathbf{R}_n^b \mathbf{B}_r. \quad (2.8)$$

Všeobecný lineárny model skutočného merania magnetometru \mathbf{B}_m , ktorý zahŕňa účinky skreslenia tvrdým a mäkkým železom je:

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{W}\mathbf{B}_c + \mathbf{V} = \mathbf{W}\mathbf{R}_n^b \mathbf{B}_r + \mathbf{V}. \quad (2.9)$$

Vektor \mathbf{V} s rozmerom 3x1 predstavuje offset spôsobený tvrdým železom a matica \mathbf{W} s rozmerom 3x3 modeluje smerové účinky indukovaných magnetických polí spôsobené mäkkým železom. Do matice \mathbf{W} sú zahrnuté aj rozdiely v citlivosti jednotlivých osí magnetometru.

Cieľom kalibrácie je určiť vektor \mathbf{V} a maticu \mathbf{W} z hodnôt nameraných magnetometrom a potom invertovaním rovnice (2.9) kompenzovať vplyvy mäkkého a tvrdého železa aby sme získali relevantnú informáciu o magnetickom poli Zeme pre odhad orientácie.

Lokus meraní

Pri akejkoľvek orientácii magnetometru, leží kalibrované meranie magnetometru $\mathbf{B}_c = \mathbf{R}\mathbf{B}_r$ na povrchu gule s polomerom B .

$$(\mathbf{B}_c)^T \mathbf{B}_c = (\mathbf{R}\mathbf{B}_r)^T \mathbf{R}\mathbf{B}_r = \mathbf{B}_r^T \mathbf{R}^T \mathbf{R}\mathbf{B}_r = B^2. \quad (2.10)$$

V prítomnosti vplyvu tvrdého a mäkkého železa leží lokus nekalibrovaného merania magnetometru na povrchu definovanom s využitím rovnice (2.9):

$$\left\{ \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{B}_m - \mathbf{V}) \right\}^T \left\{ \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{B}_m - \mathbf{V}) \right\} = B^2 \quad (2.11)$$

$$\Rightarrow (\mathbf{B}_m - \mathbf{V})^T (\mathbf{W}^{-1})^T \mathbf{W}^{-1} (\mathbf{B}_m - \mathbf{V}) = B^2 \quad (2.12)$$

Všeobecné vyjadrenie pre lokus vektoru \mathbf{r} ležiaceho na povrchu elipsoidu so stredom \mathbf{r}_0 je:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^T \mathbf{A} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \text{konst.} \quad (2.13)$$

kde \mathbf{A} je symetrická matica definujúca tvar elipsoidu.

Rovnice (2.12) a (2.13) majú rovnaký tvar, pretože je jednoduché dokázať, že matica $\mathbf{A} = \{\mathbf{W}^{-1}\}^T \mathbf{W}^{-1}$ je symetrická:

$$\mathbf{A}^T = \left\{ \left\{ \mathbf{W}^{-1} \right\}^T \mathbf{W}^{-1} \right\}^T = \left\{ \mathbf{W}^{-1} \right\}^T \left\{ \left\{ \mathbf{W}^{-1} \right\}^T \right\}^T = \left\{ \mathbf{W}^{-1} \right\}^T \mathbf{W}^{-1} = \mathbf{A} \quad (2.14)$$

Vplyvom skreslení tvrdého a mäkkého železa leží teda vektor zemského magnetického poľa zmeraný magnetometrom vo svojich telesových súradniciach na povrchu elipsoidu so stredom $\mathbf{r}_0 = \mathbf{V}$, má tvar definovaný maticou $\mathbf{A} = \{\mathbf{W}^{-1}\}^T \mathbf{W}^{-1}$ a jeho celková veľkosť je určená silou magnetického poľa Zeme v mieste merania. Presný bod na povrchu elipsoidu kde leží meranie je určený orientáciou magnetometru.

Aplikáciou metódy najmenších štvorcov na zmerané data je možné nájsť maticu elipsoidu \mathbf{A} a vektor $\mathbf{r}_0 = \mathbf{V}$, avšak pre výpočet kalibrovaných meraní $\mathbf{W}^{-1}(\mathbf{B}_m - \mathbf{V})$ potrebujeme poznať maticu \mathbf{W}^{-1} . Je síce jednoduché vypočítať maticu \mathbf{A} zo známej matice \mathbf{W}^{-1} , ale pre opačný problém výpočtu \mathbf{W}^{-1} z matice \mathbf{A} nie je jednoznačné riešenie. Preto zavedieme požiadavok, aby aj matica \mathbf{W}^{-1} bola symetrická, čím znížime počet jej stupňov voľnosti na šesť (bližšie zdôvodnenie je možné nájsť v [9]), potom:

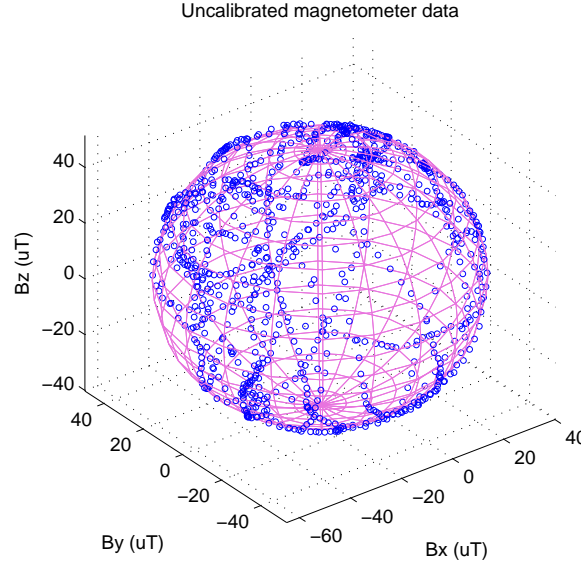
$$\left\{ \mathbf{W}^{-1} \right\}^T \mathbf{W}^{-1} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{W}^{-1} = \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{W}^{-1} = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.15)$$

Výsledky kalibrácie

Na obr. 2.2 sú znázornené reálne data magnetometru zaznamenané pri otáčaní jednotky rôznymi smermi v 3D pohľade spolu s elipsoidom nájdeným metódou najmenších štvorcov, na obr. 2.3 sú projekcie týchto dát do rovín X-Y, X-Z a Y-Z, červené elipsy v obrázkoch sú rezy elipsoidom. Z obrázkov je patrný vplyv mäkkého železa - elipsoid je totiž sploštený v ose z. Na obr. 2.3(b) a 2.3(c) si môžeme tiež všimnúť značný záporný offset vplyvom tvrdého železa v ose x, v ose y je offset takmer nepatrný a v ose z je mierny kladný offset.

Pri hľadaní elipsoidu metódou najmenších štvorcov bol použitý zjednodušený model, v ktorom sú prvky mimo hlavnú diagonálu matice \mathbf{A} (a tým pádom aj matice \mathbf{W}^{-1}) rovné nule. Principiálne osy elipsoidu sú teda rovnobežné s osami súradnicového systému. Matica \mathbf{A} nájdeného elipsoidu je:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,8983 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9390 & 0 \\ 0 & 0 & 1,1855 \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$



Obr. 2.2: Nekalibrované merania magnetometru preložené elipsoidom

pričom prvky boli normované tak, aby bol determinant (získ matice) rovný jednej. Tomu je prispôsobený aj výpočet intenzity mag. poľa B . Hard-iron offset je

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -12,396 \\ -1,737 \\ 5,612 \end{bmatrix} \mu\text{T} \quad (2.17)$$

a intenzita magnetického poľa Zeme

$$B = 49,89 \mu\text{T}. \quad (2.18)$$

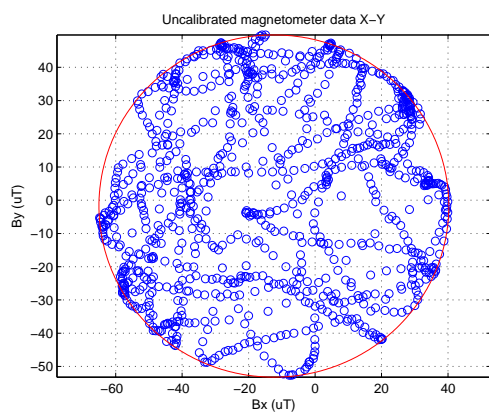
Zo znalosti matice \mathbf{A} môžeme podľa (2.15) vypočítať maticu \mathbf{W}^{-1} :

$$\mathbf{W}^{-1} = \sqrt{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0,9478 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9690 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0888 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

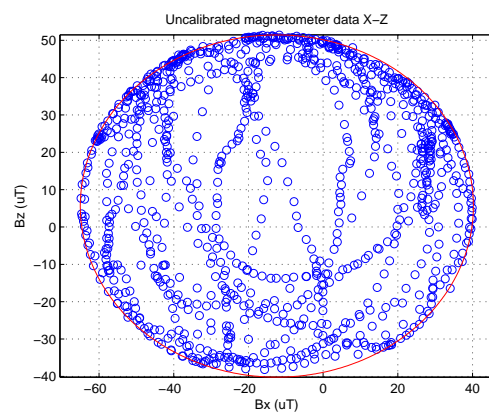
Z matice \mathbf{W}^{-1} vidíme, že na to, aby sme dostali kalibrované merania musíme namerané data v ose x a y mierne zmrštiť a v ose z naopak takmer o 9 % rozťahnúť. Kalibrované data získame z nameraných dat výpočtom

$$\mathbf{B}_c = \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{B}_m - \mathbf{V}). \quad (2.20)$$

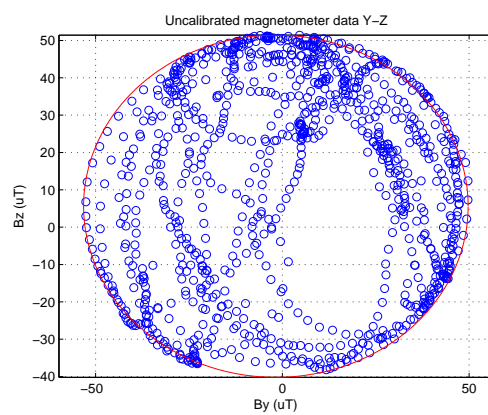
Na obr. 2.5 sú zobrazené kalibrované data aplikovaním predchádzajúceho vzťahu. Vidíme, že data už ležia na povrchu gule s polomerom B , ktorej stred leží v počiatku súradnicového systému.



(a) priemet X-Y

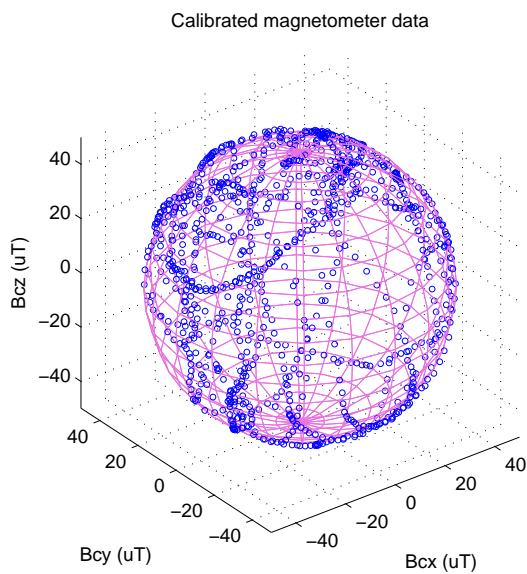


(b) priemet X-Z

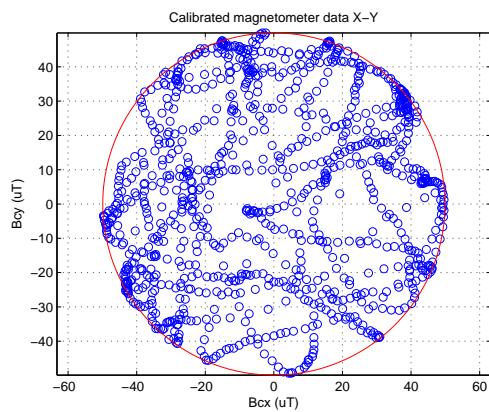


(c) priemet Y-Z

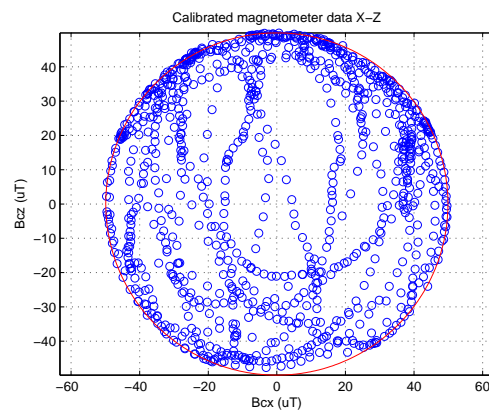
Obr. 2.3: Nekalibrované merania magnetometru



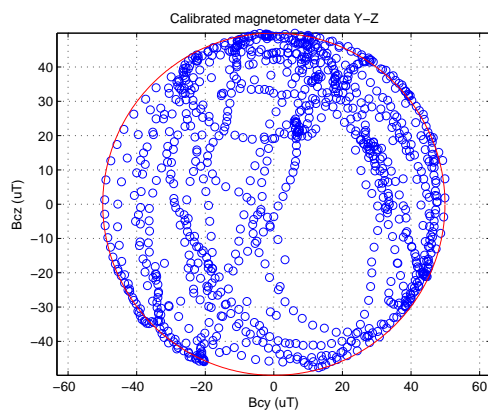
Obr. 2.4: Kalibrované merania magnetometru ležiace na povrchu gule



(a) priemet X-Y



(b) priemet X-Z

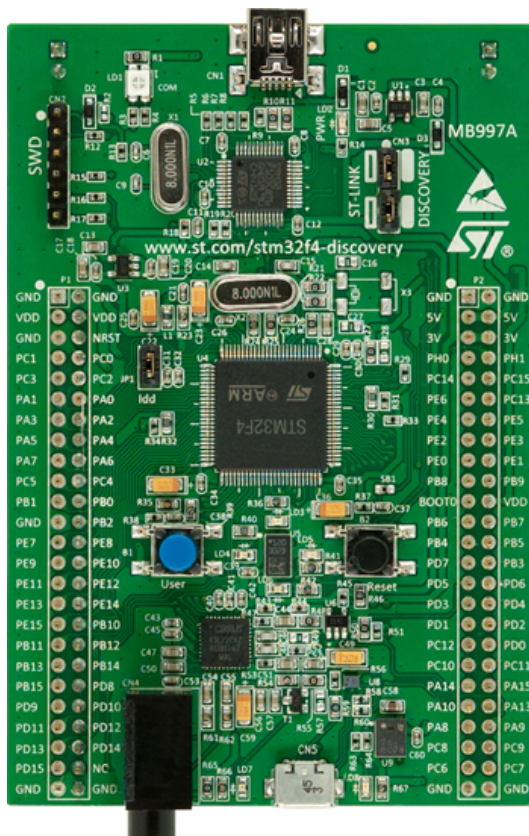


(c) priemet Y-Z

Obr. 2.5: Kalibrované merania magnetometru

3 HARDVÉROVÉ RIEŠENIE

Hardvérové riešenie inerciálnej navigačnej jednotky je založené na vývojovej doske STM32F4DISCOVERY od firmy STMicroelectronics. Vývojová doska je osadená 32-bitovým ARM mikrokontrolérom z rodiny Cortex-M4F. Cena tejto dosky je približne 370 Kč bez DPH.



Obr. 3.1: Vývojová doska STM32F4DISCOVERY

Základné vlastnosti:

- Mikrokontrolér STM32F407VGT6 s 32-bitovým jadrom ARM Cortex-M4F, 1MB Flash pamäť, 192 KB RAM, púzdro LQFP100
- Integrovaný ST-LINK/V2 adaptér pre debuggovanie a programovanie
- Napájanie prostredníctvom USB alebo externé napájanie 5V
- 3-osý MEMS akcelerometer LIS302DL
- všesmerový MEMS mikrofón MP45DT02
- audio DAC prevodník CS43L22 s integrovaným zisilňovačom v triede D
- 8 LED diód (4 stavové a 4 užívateľské), dve tlačidlá (user a reset)
- USB OTG rozhranie s micro-AB konektorom
- rozširujúci konektor na ktorom sú vyvedené všetky I/O piny pre pripojenie prototypových dosiek

Pre realizáciu inerciálnej navigačnej jednotky bola navrhnutá a realizovaná rozširujúca doska so senzormi, ktorá sa zo zadnej strany nasadí na kolíkové lišty STM32F4-DISCOVERY. Rozširujúca doska obsahuje 3-osý MEMS akcelerometer/gyroskop InvenSense MPU-6000 a 3-osý akcelerometer Honeywell HMC5883L. Oba senzory sú pripojené k mikrokontroléru prostredníctvom spoločnej I2C zbernice. Okrem senzorov sa na doske nachádza tiež prevodník USB na sériový UART FT232RL pre komunikáciu jednotky s PC. Ďalej je doska vybavená prevodníkom MAX3232 pre prevod úrovni UART 3,3 V na RS232. To umožňuje k inerciálnej jednotke pripojiť napr. GPS modul s rozhraním RS232. Táto možnosť zatiaľ nebola využitá. Podrobná schéma zapojenia rozširujúcej dosky je uvedená v prílohe A. Zapojenie je realizované na dvojvrstvej doske plošných spojov. Výkresy DPS ako aj rozmiestnenie súčiastok sú uvedené v prílohe B.

3.1 Použité senzory

3.1.1 Gyroskop/akcelerometer MPU-6000

Senzor MPU-6000 od firmy InvenSense kombinuje v jednom púzdre 3-osý MEMS gyroskop a 3-osý MEMS akcelerometer, čo do značnej miery odstraňuje chybu zarovania osí medzi akcelerometrom a gyroskopom, ktorá vzniká v prípade oddelených senzorov. Snímač umožňuje pripojenie externého magnetometru na pomocnej I2C zbernici a integrovaná výpočtová jednotka zvaná Digital Motion ProcessorTM umožňuje potom spracovanie údajov zo všetkých deviatich osí. Medzi jeho ďalšie funkcie patrí teplotný senzor a oscilátor s odchýlkou $\pm 1\%$ v celom rozsahu prevádzkových teplôt. Komunikácia s mikrokontrolérom je možná prostredníctvom SPI alebo I2C rozhrania. Data sú digitalizované 16-bitovými AD prevodníkmi so súčasným vzorkovaním. Gyroskop má nastaviteľný rozsah $\pm 250/500/1000/2000$ °/s, rozsahy akcelerometru sú $\pm 2/4/8/16$ g. Senzor sa dodáva v 24-pinovom QFN púzdre.

3.1.2 Magnetometer HMC5883L

Honeywell HMC5883L je 3-osý magnetometer založený na magnetorezistívnom princípe. S dynamickým rozsahom ± 8 Gaussov a 12-bitovým prevodníkom umožňuje vytvorenie kompasu s presnosťou 1 až 2°. S mikrokontrolérom komunikuje prostredníctvom I2C zbernice s maximálnou rýchlosťou 400 kHz. Senzor sa dodáva v 16-pinovom LCC púzdre.

4 ALGORITMY PRE ODHAD ORIENTÁCIE

Táto kapitola predstavuje dva rôzne EKF algoritmy. Dynamický model prostriedku, ktorého poloha sa má zisťovať nie je zahrnutý do modelu procesu EKF, pretože nie je určený konkrétny typ prostriedku kde by mala byť navigačná jednotka použitá. Zahrnutie dynamiky telesa tiež zvyšuje výpočtovú náročnosť EKF. Oba algoritmy využívajú rovnaký model procesu, ale líši sa model meraní. Prvý prezentovaný algoritmus využíva v korekčnom kroku priamo merania akcelerometru a magnetometru. U druhého EKF sa z meraní akcelerometru a magnetometru vypočíta najskôr orientácia reprezentovaná Eulerovými uhlami a tie sa potom využijú v korekčnom kroku EKF.

4.1 EKF s modelom meraní akcelerometru a magnetometru

4.1.1 Model procesu

Do modelu procesu zahrnieme diferenciálnu rovnicu popisujúcu vývoj kvaterniónu v čase (rovnica(1.70)):

$$\begin{aligned}\dot{q}_k &= \frac{1}{2} q_k \Omega \\ &= \frac{1}{2} \Omega_k \cdot q_k\end{aligned}\tag{4.1}$$

kde

$$\Omega_k = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}\tag{4.2}$$

Pretože meranie uhlových rýchlostí je zaťažené biasom, musí byť bias odčítaný od merania gyroskopu

$$\Omega_k = \begin{bmatrix} 0 & -(\omega_x - w_{x_bias}) & -(\omega_y - w_{y_bias}) & -(\omega_z - w_{z_bias}) \\ (\omega_x - w_{x_bias}) & 0 & (\omega_z - w_{z_bias}) & -(\omega_y - w_{y_bias}) \\ (\omega_y - w_{y_bias}) & -(\omega_z - w_{z_bias}) & 0 & (\omega_x - w_{x_bias}) \\ (\omega_z - w_{z_bias}) & (\omega_y - w_{y_bias}) & -(\omega_x - w_{x_bias}) & 0 \end{bmatrix}.\tag{4.3}$$

Roznásobením rovnice (4.1) s použitím $\mathbf{\Omega}_k$ z (4.3) dostaneme

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -(\omega_x - w_{x_bias})q_1 - (\omega_y - w_{y_bias})q_2 - (\omega_z - w_{z_bias})q_3 \\ +(\omega_x - w_{x_bias})q_0 + (\omega_z - w_{z_bias})q_2 - (\omega_y - w_{y_bias})q_3 \\ +(\omega_y - w_{y_bias})q_0 - (\omega_z - w_{z_bias})q_1 + (\omega_x - w_{x_bias})q_3 \\ +(\omega_z - w_{z_bias})q_0 + (\omega_y - w_{y_bias})q_1 - (\omega_x - w_{x_bias})q_2 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

To ukazuje, že okrem zložiek kvaternionu musí byť odhadovaný aj bias gyroskopu. Takže stavový vektor systému vyzerá nasledovne:

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{x_bias} \\ w_{y_bias} \\ w_{z_bias} \\ q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Časová derivácia biasov gyroskopu je modelovaná ako

$$\begin{bmatrix} \dot{w}_{x_bias} \\ \dot{w}_{y_bias} \\ \dot{w}_{z_bias} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Biasy gyroskopu sú teda modelované ako konštantné a k ich zmene môže dôjsť iba korekčnom kroku. Celkový model procesu vyzerá nasledovne:

$$\dot{\mathbf{x}}_k = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -(\omega_x - x_1)x_5 - (\omega_y - x_2)x_6 - (\omega_z - x_3)x_7 \\ +(\omega_x - x_1)x_4 + (\omega_z - x_3)x_6 - (\omega_y - x_2)x_7 \\ +(\omega_y - x_2)x_4 - (\omega_z - x_3)x_5 + (\omega_x - x_1)x_7 \\ +(\omega_z - x_3)x_4 + (\omega_y - x_2)x_5 - (\omega_x - x_1)x_6 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Linearizáciou rovnice systému dostaneme nasledovnú stavovú maticu prechodu \mathbf{A}_k :

$$\mathbf{A}_k = \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right]_k = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & x_6 & x_7 & 0 & -(\omega_x - x_1) & -(\omega_y - x_2) & -(\omega_z - x_3) \\ -x_4 & x_7 & -x_6 & (\omega_x - x_1) & 0 & (\omega_z - x_3) & -(\omega_y - x_2) \\ -x_7 & -x_4 & x_5 & (\omega_y - x_2) & -(\omega_z - x_3) & 0 & (\omega_x - x_1) \\ x_6 & -x_5 & -x_4 & (\omega_z - x_3) & (\omega_y - x_2) & -(\omega_x - x_1) & 0 \end{bmatrix}_k. \quad (4.8)$$

4.1.2 Model meraní

V korekčnom kroku využijeme priamo merania z 3-osového akcelerometru a z 3-osového megnetometru, t.j.

$$\mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} A_{mx} \\ A_{my} \\ A_{mz} \\ B_{mx} \\ B_{my} \\ B_{mz} \end{bmatrix}_k. \quad (4.9)$$

Prvé tri prvky vektoru odhadovaných meraní tvoria preto zložky vektoru gravitácie transformovaného do telesových súradníc, t.j., $\mathbf{R}_n^b \mathbf{g}_r$, zvyšné tri prvky vektoru sú zložky magnetické poľa Zeme transformované do telesových súradníc, t.j., $\mathbf{R}_n^b \mathbf{B}_r$. Celkový model meraní vyzerá preto nasledovne

$$\hat{\mathbf{z}}_k = h(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} 2(x_5x_7 - x_4x_6)g \\ 2(x_6x_7 + x_4x_5)g \\ (1 - 2(x_5^2 + x_6^2))g \\ (1 - 2(x_6^2 + x_7^2))B_{rx} + 2(x_5x_7 - x_4x_6)B_{rz} \\ 2(x_5x_6 - x_4x_7)B_{rx} + 2(x_6x_7 + x_4x_5)B_{rz} \\ 2(x_5x_7 + x_4x_6)B_{rx} + (1 - 2(x_5^2 + x_6^2))B_{rz} \end{bmatrix}_k. \quad (4.10)$$

Jacobiho matica \mathbf{H}_k funkcie h je

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 3} & \tilde{\mathbf{H}}_k \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

kde $\tilde{\mathbf{H}}_k$ je

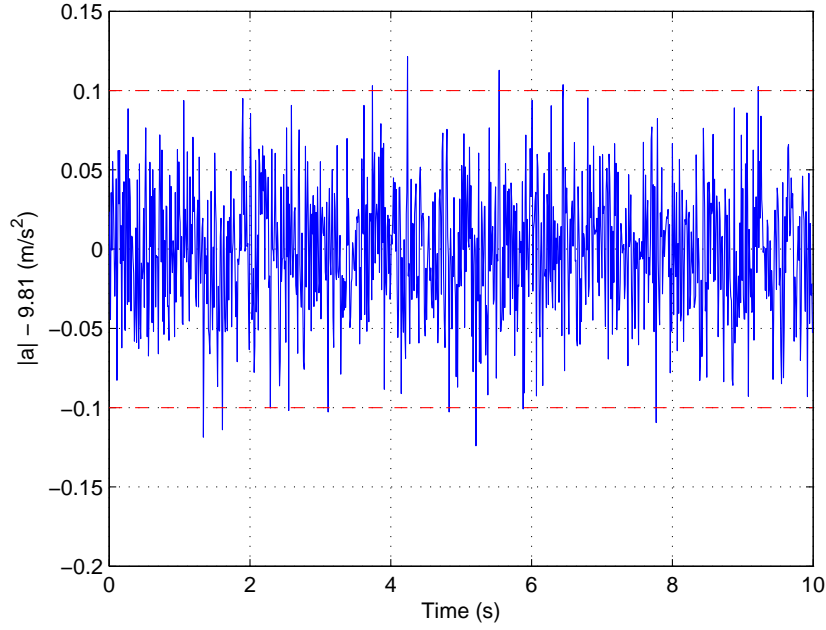
$$\tilde{\mathbf{H}}_k = \begin{bmatrix} -2x_6g & 2x_7g & -2x_4g & 2x_5g \\ 2x_5g & 2x_4g & 2x_7g & 2x_6g \\ 0 & -4x_5g & -4x_6g & 0 \\ -2x_6B_{rz} & 2x_7B_{rz} & -4x_6B_{rx} - 2x_4B_{rz} & -4x_7B_{rx} + 2x_5B_{rz} \\ -2x_7B_{rx} + 2x_5B_{rz} & 2x_6B_{rx} + 2x_4B_{rz} & 2x_5B_{rx} + 2x_7B_{rz} & -2x_4B_{rx} + 2x_6B_{rz} \\ 2x_6B_{rx} & 2x_7B_{rx} - 4x_5B_{rz} & 2x_4B_{rx} - 4x_6B_{rz} & 2x_5B_{rx} \end{bmatrix}_k \quad (4.12)$$

4.1.3 Potlačenie vplyvu externého zrýchlenia

Uvedený model meraní predpokladá, že akcelerometer meria iba vektor gravitačného zrýchlenia $[0 \ 0 \ g]^T$ rotovaný do telesových súradníc. V prípade, že na objekt pôsobia i zrýchlenia iné než gravitačné môže dôjsť k značným chybám pri odhade stavu, pretože Kalmanov filter sa bude snažiť v korekčnom kroku tento nepriaznivý vplyv preniesť prostredníctvom Kalmanovho zosilnenia \mathbf{K}_k do aposteriórneho odhadu stavu. Účinok externého zrýchlenia na odhad stavu môžeme do značnej miery eliminovať tým, že v okamihoch, kedy na teleso pôsobí externé zrýchlenie nastavíme prvky kovariančnej matice šumu meraní zodpovedajúce rozptylom šumu akcelerometru na vyššie hodnoty ako v okamihoch kedy akcelerometer meria len gravitačné zrýchlenie. Zvýšením hodnoty príslušných prvkov kovariančnej matice \mathbf{R}_k sa zníži váha meraní akcelerometru na odhad stavu. Prítomnosť externého zrýchlenia môžeme detekovať výpočtom normy vektoru zrýchlenia zmeraného akcelerometrom a ak sa táto hodnota líši od hodnoty $9,81 \text{ m/s}^2$ viac ako je určitý prah ϵ , znamená to prítomnosť externého zrýchlenia. Hodnotu kovariančnej matice šumu meraní budeme teda nastavovať podľa nasledujúceho pravidla:

$$\mathbf{R}_k = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{acc_nom.} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{mag_nom.} \end{bmatrix} & , \text{ ak } | \|\mathbf{A}_m\| - 9,81 \text{ m/s}^2 | < \epsilon \\ \begin{bmatrix} s\mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{R}_{mag_nom.} \end{bmatrix} & , \text{ inak} \end{cases} \quad (4.13)$$

kde $\mathbf{R}_{acc_nom.}$, $\mathbf{R}_{mag_nom.}$ sú nominálne hodnoty kovariancií šumov akcelerometru a magnetometru určené v kapitole 5 a $s \in R$ je hodnota na ktorú zvýšime kovariancie šumov akcelerometru v prípade detekovania externého zrýchlenia. Prah ϵ pre určenie prítomnosti externého zrýchlenia je potrebné zvoliť s ohľadom na šum akcelerometru. Testovaním na simulovanej trajektórii uvedenej v kapitole 6.2 sa ako dobrá hodnota ukázala $\epsilon = 0, 1$. Na obr.4.1 sú zobrazené hodnoty $\|\mathbf{A}_m\| - 9,81 \text{ m/s}^2$ spolu s prahom $\epsilon = 0, 1$ pri inerciálnej jednotke v pokoji.



Obr. 4.1: Vymedzenie prahu pre detekciu externého zrýchlenia

Nevýhodou tohoto prístupu je, že v prípade detekcie externého zrýchlenia sa potlačí informácia zo všetkých troch osí akcelerometru rovnako bez ohľadu na smer pôsobenia externého zrýchlenia. Ak externé zrýchlenie pôsobí napríklad len v ose x , stratíme aj informáciu z osí y a z , ktoré stále nesú relevantnú informáciu o orientácii.

4.2 EKF s meraním Eulerových uhlov

4.2.1 Model procesu

Model procesu a stavový vektor sú rovnaké ako u predošlého EKF v časti (4.1).

4.2.2 Model meraní

Meranie použité v korekčnom kroku je orientácia vyjadrená pomocou Eulerových uhlov ϕ (náklon), θ (klopenie) a ψ (kurz):

$$\mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}_k. \quad (4.14)$$

Eulerové uhly vypočítané pomocou vzťahov (2.2), (2.3) a (2.7) s využitím údajov z akcelerometru a magnetometru.

Z rovníc (1.12) až (1.14) dostávame nelineárny model meraní

$$\hat{\mathbf{z}}_k = h(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{atan2}(2x_6x_7 + 2x_4x_5, 1 - 2(x_5^2 + x_6^2)) \\ -\text{asin}(2x_5x_7 - 2x_4x_6) \\ \text{atan2}(2x_5x_6 + 2x_4x_7, 1 - 2(x_6^2 + x_7^2)) \end{bmatrix}_k. \quad (4.15)$$

Linearizáciou funkcie h získame Jacobiho maticu

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \tilde{\mathbf{H}}_k \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

kde

$$\tilde{\mathbf{H}}_k = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x_4} & \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x_5} & \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x_6} & \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x_7} \\ \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_4} & \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_5} & \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_6} & \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_7} \\ \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x_4} & \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x_5} & \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x_6} & \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x_7} \end{bmatrix}_k, \quad (4.17)$$

po spočítaní parciálnych derivácií dostaneme

$$\tilde{\mathbf{H}}_k = \begin{bmatrix} \frac{2R_{33}x_5}{R_{33}^2 + R_{32}^2} & \frac{2(R_{33}x_4 + 2R_{32}x_5)}{R_{33}^2 + R_{32}^2} & \frac{2(R_{33}x_7 + 2R_{32}x_6)}{R_{33}^2 + R_{32}^2} & \frac{2R_{33}x_6}{R_{33}^2 + R_{32}^2} \\ \frac{2x_6}{\sqrt{1 - R_{31}^2}} & \frac{-2x_7}{\sqrt{1 - R_{31}^2}} & \frac{2x_4}{\sqrt{1 - R_{31}^2}} & \frac{-2x_5}{\sqrt{1 - R_{31}^2}} \\ \frac{2R_{11}x_7}{R_{11}^2 + R_{21}^2} & \frac{2R_{11}x_6}{R_{11}^2 + R_{21}^2} & \frac{2(R_{11}x_5 + 2R_{21}x_6)}{R_{11}^2 + R_{21}^2} & \frac{2(R_{11}x_4 + 2R_{21}x_7)}{R_{11}^2 + R_{21}^2} \end{bmatrix}_k, \quad (4.18)$$

kde R_{ij} sú položky rotačnej matice, t.j.

$$\begin{aligned} R_{11} &= 1 - 2(x_6^2 + x_7^2) \\ R_{33} &= 1 - 2(x_5^2 + x_6^2) \\ R_{21} &= 2(x_5x_6 + x_4x_7) \\ R_{21} &= 2(x_5x_7 - x_4x_6) \\ R_{21} &= 2(x_6x_7 + x_4x_5) \end{aligned} \quad (4.19)$$

5 CHARAKTERISTIKY ŠUMU SENZOROV

Kovariančná matica šumu meraní \mathbf{R} Kalmanovho filtru musí byť nastavená s ohľadom na šum použitých senzorov. Informáciu o úrovni šumu môžeme získať buď od výrobcu z katalógového listu k danému senzoru, kde býva udaná spektrálna hustota alebo smerodatná odchýlka šumu, alebo vyhodnotením rozptylu z určitého súboru nameraných dat. Napríklad u použitého senzoru Ivensense MPU-6000 udáva výrobca spektrálnu hustotu šumu $400 \mu\text{g}/\sqrt{\text{Hz}}$ pre akcelerometer a $0,005^\circ/\text{s}/\sqrt{\text{Hz}}$ pre gyroskop. Ak vynásobíme túto hodnotu odmocninou frekvencie zlomu filtru, dostaneme smerodiatnú odchýlku šumu pri nominálnom napájanom napätí a teplote. MPU-6000 má programovateľný dolnopriepustný filter, ktorého šírka pásma sa dá nastaviť pomocou bitov `DLPF_CFG[2:0]` v registri `CONFIG`. Zápisom binárnej hodnoty 001 do týchto bitov bola nastavená šírka pásma filtru 184 Hz pre akcelerometer a 188 Hz pre gyroskop. Očakávané smerodatné odchýlky šumov akcelerometru a gyroskopu sú:

$$\sigma_{accel.} = 400 \frac{\mu\text{g}}{\sqrt{\text{Hz}}} \times \sqrt{184 \text{ Hz}} = 5,43 \text{ mg} = 0,053 \text{ m/s}^2, \quad (5.1)$$

$$\sigma_{gyro} = 0,005 \frac{^\circ/\text{s}}{\sqrt{\text{Hz}}} \times \sqrt{188 \text{ Hz}} = 0,0686^\circ/\text{s} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}. \quad (5.2)$$

U magnetometru Honeywell HMC5883L udáva výrobca šum ako smerodiatnú odchýlku 100 vzoriek $\sigma_{mag.} = 0,2 \mu\text{T}$.

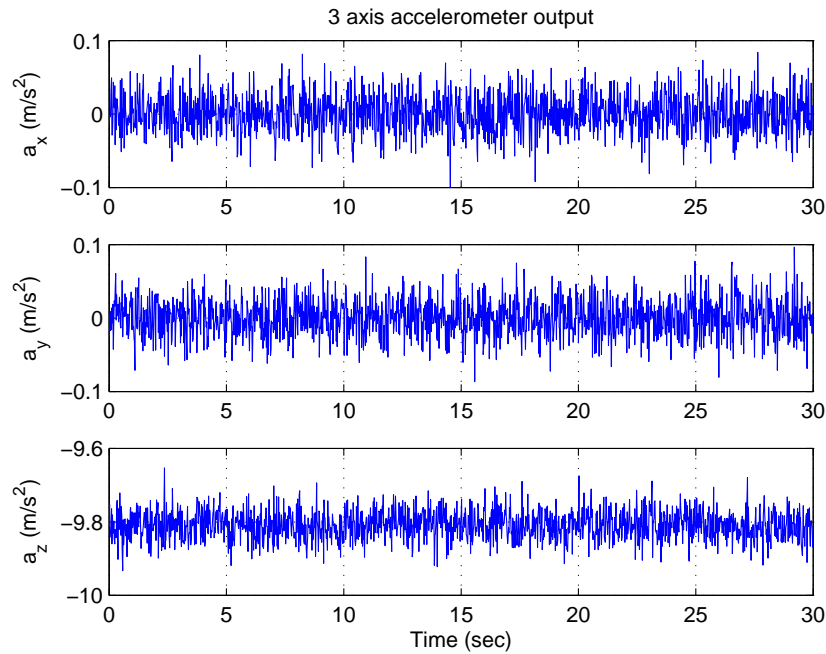
Reálnejší obraz o šume získame priamo z nameraných dat senzorov pri inerciálnej jednotke v stacionárnej polohe. V tab. 5.1 sú uvedené hodnoty smerodatných odchýliek a roptyly šumov senzorov vypočítané zo súboru 5000 vzoriek zachytených pri vzorkovacej frekvencii 100 Hz. Porovnaním hodnôt v tab. 5.1 s hodnotami vypočítanými vyššie vidíme, že skutočné úrovne šumov sú vo všetkých prípadoch nižšie ako hodnoty udávané výrobcom. Namerané hodnoty rozptylov použijeme ako vstupy do kovariančnej matice šumu meraní, napr. pre filter popísaný v kapitole 4.1 bude kovariančná matica \mathbf{R} vyzeráť nasledovne:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 6,558 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,737 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15,98 \cdot 10^{-4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0257 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0212 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0264 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

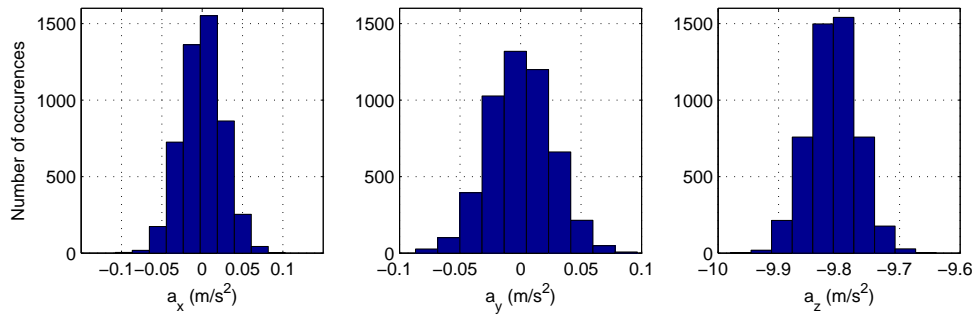
Na obr. 5.1 až 5.6 sú zobrazené šumy použitých senzorov v časovej oblasti a histogramy týchto šumov. Histogramy majú tvar Gaussových kriviek, čo indikuje aditívny Gaussový šum.

Senzor	Os	Smerodatná odchýlka	Rozptyl
MPU-6000 (akcelerometer)	x	$0,0256 \text{ m/s}^2$	$6,558 \cdot 10^{-4} (\text{m/s}^2)^2$
	y	$0,0260 \text{ m/s}^2$	$6,737 \cdot 10^{-4} (\text{m/s}^2)^2$
	z	$0,0400 \text{ m/s}^2$	$15,98 \cdot 10^{-4} (\text{m/s}^2)^2$
MPU-6000 (gyroskop)	x	$6,945 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$	$4,824 \cdot 10^{-7} (\text{rad/s})^2$
	y	$7,044 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$	$4,962 \cdot 10^{-7} (\text{rad/s})^2$
	z	$6,684 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$	$4,468 \cdot 10^{-7} (\text{rad/s})^2$
HMC5883L (magnetometer)	x	$0,1602 \text{ } \mu\text{T}$	$0,0257 (\text{ } \mu\text{T})^2$
	y	$0,1455 \text{ } \mu\text{T}$	$0,0212 (\text{ } \mu\text{T})^2$
	z	$0,1624 \text{ } \mu\text{T}$	$0,0264 (\text{ } \mu\text{T})^2$

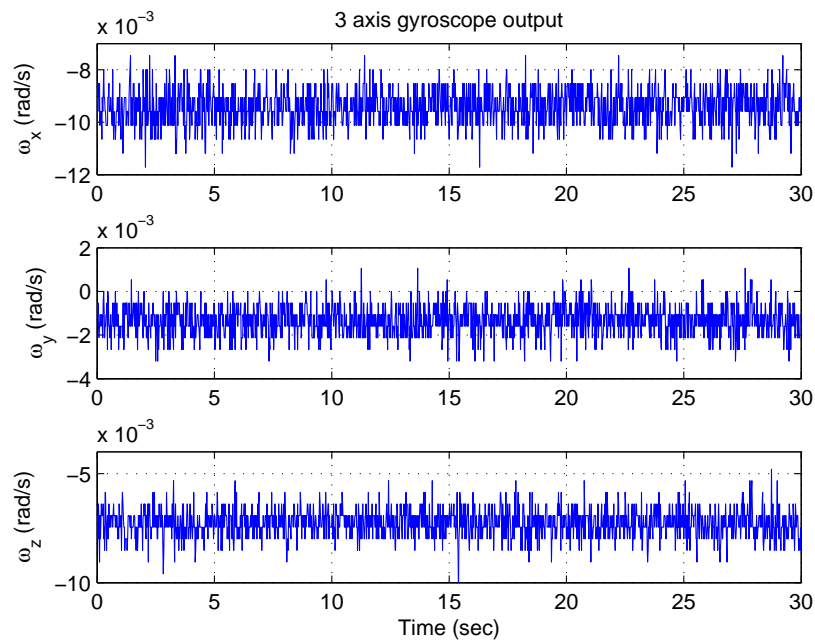
Tab. 5.1: Smerodatné odchýlky a rozptyly senzorov určené z nameraných dat



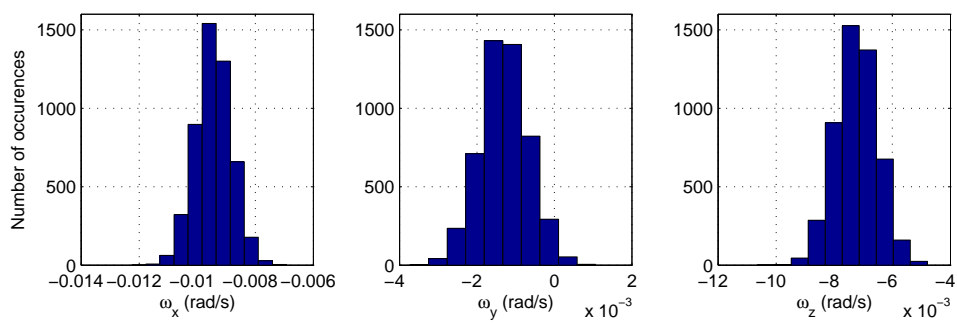
Obr. 5.1: Šum akcelerometru



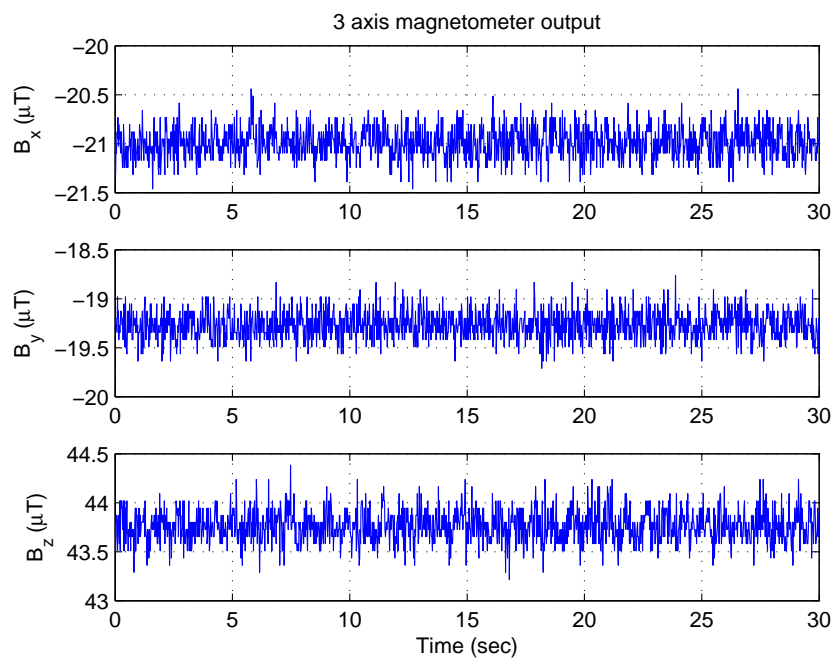
Obr. 5.2: Histogramy šumov akcelerometru



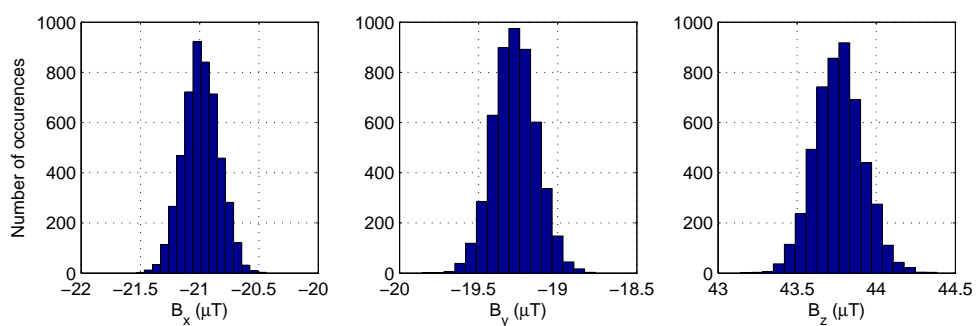
Obr. 5.3: Šum gyroskopu



Obr. 5.4: Histogramy šumov gyroskopu



Obr. 5.5: Šum magnetometru



Obr. 5.6: Histogramy šumov magnetometru

6 EXPERIMENTÁLNE VÝSLEDKY

V tejto kapitole sú prezentované výsledky testov na simulovaných datach realizované v prostredí Matlab. Na posúdenie presnosti navrhovaných algoritmov boli vykonané dva druhy testov: statický test a dynamický test na trajektórii generovanej s pomocou modelu multikoptéry.

Na ohodnotenie presnosti bola pre každý algoritmus vypočítaná priemerná kvadratická chyba S_ϕ a maximálna chyba M_ϕ , ktoré sú pre uhol ϕ definované nasledovne:

$$S_\phi = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\hat{\phi}_k - \phi_k)^2, \quad (6.1)$$

$$M_\phi = \max_k |\hat{\phi}_k - \phi_k|, \quad (6.2)$$

kde $\hat{\phi}_k$ je odhadovaná hodnota a ϕ_k je skutočná hodnota uhlu. Obdobne sú tieto hodnoty vypočítané aj pre uhly θ a ψ .

6.1 Statický test

V tomto teste sú simulované hodnoty senzorov pri orientácii $\phi = \theta = \psi = 0$ a nulovom externom zrýchlení. K simulovaným hodnotám senzorov bol pridaný gaussovský šum s rozptylom zodpovedajúcim reálnym sensorom, ktorý bol určený v predchádzajúcej kapitole. U gyroskopu bol simulovaný konštantný bias s nasledujúcimi hodnotami: $b_x = -0,00942$ rad/s, $b_y = -0,00129$ rad/s a $b_z = -0,00728$ rad/s. Pretože ide o statický test bez prítomnosti externého zrýchlenia, nemá zmysel používať adaptáciu kovariančnej matice šumu meraní popísanú v kapitole 4.1.3. Data boli vzorkované s frekvenciou 100 Hz.

Nastavenie filtru podľa kapitoly 4.1 je nasledovné:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \\ \mathbf{P}_0 &= \text{diag}([0,1 \ 0,1 \ 0,1 \ 0,001 \ 0,001 \ 0,001 \ 0,001]), \\ \mathbf{R} &= \text{diag}([6,558 \cdot 10^{-4} \ 6,737 \cdot 10^{-4} \ 15,98 \cdot 10^{-4} \ 0,0257 \ 0,0212 \ 0,0264]), \\ \mathbf{Q} &= \text{diag}([10^{-13} \ 10^{-13} \ 10^{-13} \ 10^{-12} \ 10^{-12} \ 10^{-12} \ 10^{-12}]), \end{aligned} \quad (6.3)$$

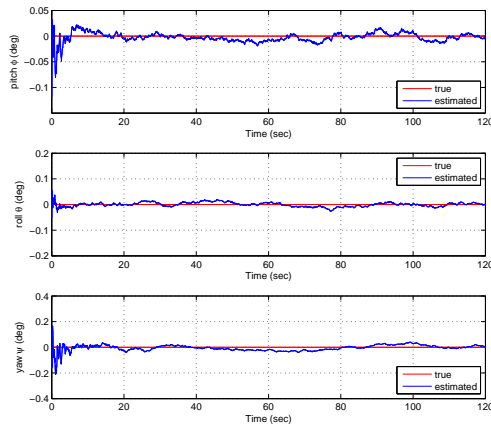
a filter podľa kapitoly 4.1 je nastavený:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T, \\ \mathbf{P}_0 &= \text{diag}([0,1 \ 0,1 \ 0,1 \ 0,001 \ 0,001 \ 0,001 \ 0,001]), \\ \mathbf{R} &= \text{diag}([0,1 \ 0,1 \ 1]), \\ \mathbf{Q} &= \text{diag}([10^{-11} \ 10^{-11} \ 10^{-11} \ 10^{-10} \ 10^{-10} \ 10^{-10} \ 10^{-10}]). \end{aligned} \quad (6.4)$$

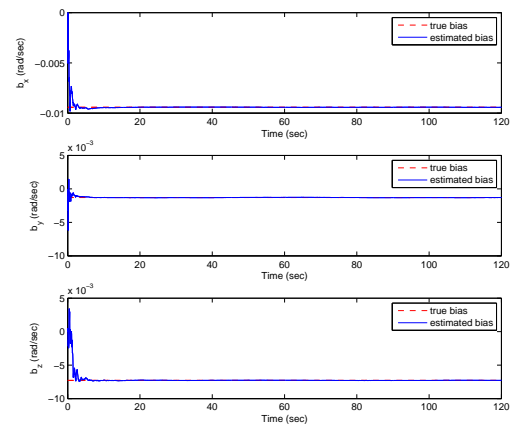
Výsledky statického testu sú uvedené v tab. 6.1. Grafické znázornenie odhadu Eulerových uhlov a biasov gyroskopu sú na obr. 6.1 a obr. 6.2. Vidíme, že oba filtre po niekoľkých sekundách dokázali správne určiť biasy gyroskopu.

Algoritmus	$S_\phi [^\circ]^2$	$M_\phi [^\circ]$	$S_\theta [^\circ]^2$	$M_\theta [^\circ]$	$S_\psi [^\circ]^2$	$M_\psi [^\circ]$
EKF - kap. 4.1	$7,96 \cdot 10^{-5}$	0,12	$6,51 \cdot 10^{-5}$	0,073	$4,27 \cdot 10^{-4}$	0,22
EKF - kap. 4.2	$0,28 \cdot 10^{-3}$	0,18	$0,22 \cdot 10^{-3}$	0,037	$1,1 \cdot 10^{-3}$	0,33

Tab. 6.1: Výsledky statického testu

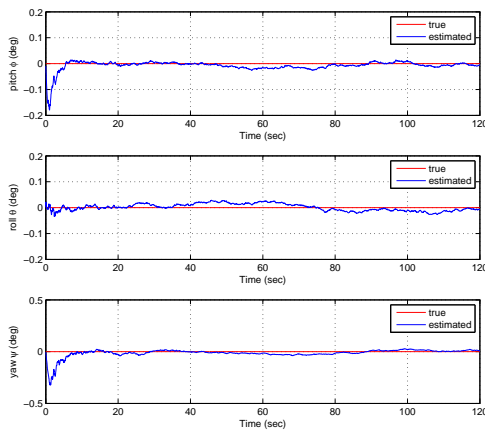


(a) Orientácia

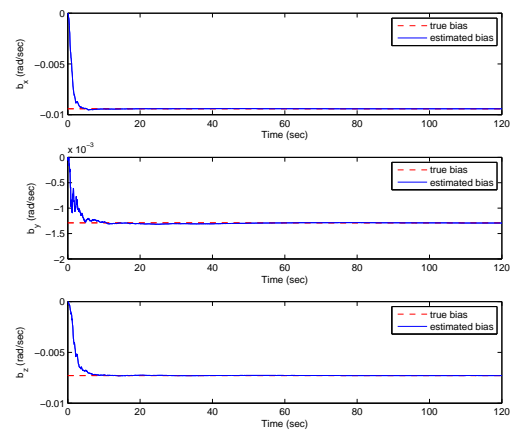


(b) Biasy gyroskopu

Obr. 6.1: Odhad polohy a biasov pri statickom teste - filter podľa kapitoly 4.1



(a) Orientácia

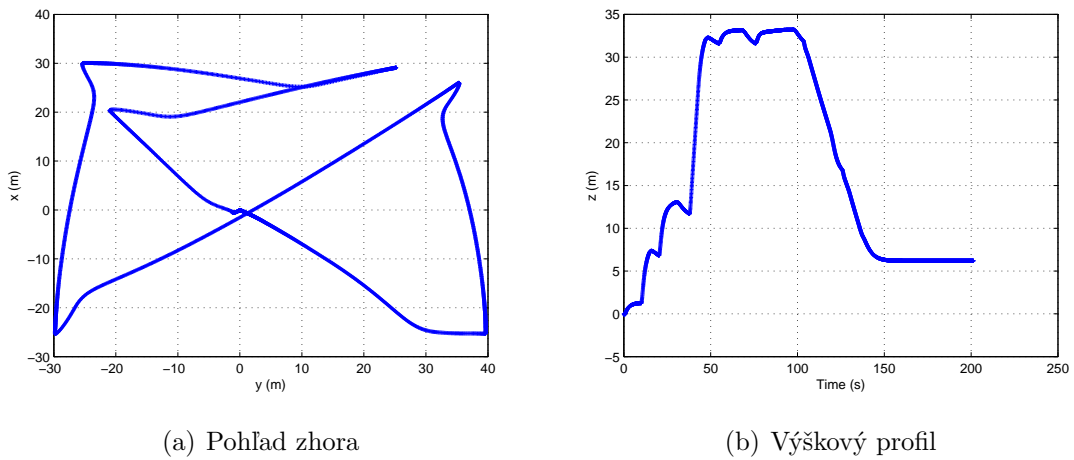


(b) Biasy gyroskopu

Obr. 6.2: Odhad polohy a biasov pri statickom teste - filter podľa kapitoly 4.2

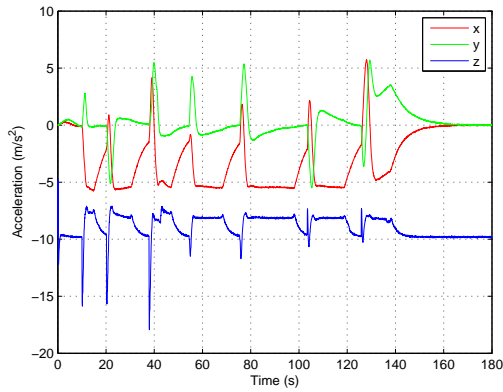
6.2 Test na simulovanej trajektórii

Pri tomto teste boli vygenerované hodnoty senzorov na simulovanej trajektórii s využitím modelu multikoptéry. Táto trajektória bola poskytnutá konzultantom diplomovej práce. K vypočítaným ideálnym hodnotám senzorov na tejto trajektórii bol pridaný aditívny šum zodpovedajúci použitému senzoru. U gyroskopu bol simulovaný bias s hodnotami ako u statického testu. Testovacia trajektória je zobrazená na obr. 6.3 a simulované hodnoty senzorov na tejto trajektórii sú znázornené na obr. 6.4.

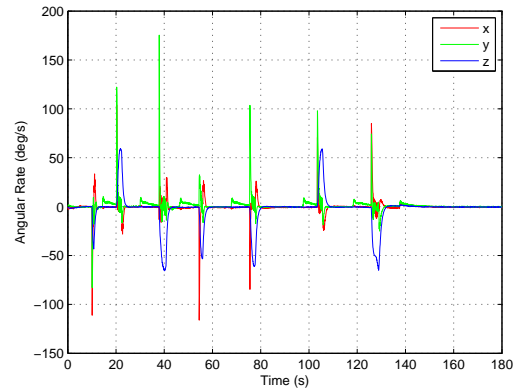


Obr. 6.3: Testovacia trajektória

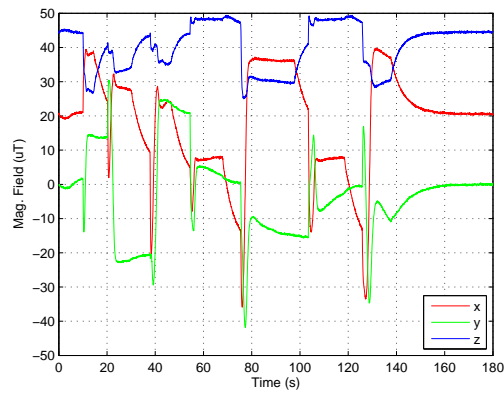
Nastavenie filtrov v tomto teste je rovnaké ako u statického testu, prah pre detekciu externého zrýchlenia ϵ bol nastavený na hodnotu 0,1 a filtre boli testované pri nastavení $s \in \{1, 10, 100\}$. Stredné kvadratické chyby a maximálne chyby odhadu Eulerových uhlov pre oba filtre sú uvedené v tab. 6.2, pričom sú uvedené výsledky bez adaptácie kovariančnej matice \mathbf{R} na externé zrýchlenie ako aj s adaptáciou pri troch rôznych hodnotách parametru s . Je patrné, že u oboch filtrov sa adaptáciou kovariančnej matice pri detekcii externého zrýchlenia výrazne zmenšili chyby odhadu orientácie. U filtru podľa kapitoly 4.1 bolo možné dosiahnuť o niečo menšie chyby ako u filtru podľa kapitoly 4.2. Filter 4.1 je tiež výpočtovo menej náročný a preto bol tento filter implementovaný do mikrokontroléru STM32F4. Na obr. 6.5 a obr. 6.6 sú odhady Eulerových uhlov a biasov gyroskopu oboch filtrov.



(a) Zrýchlenie



(b) Uhlová rýchlosť

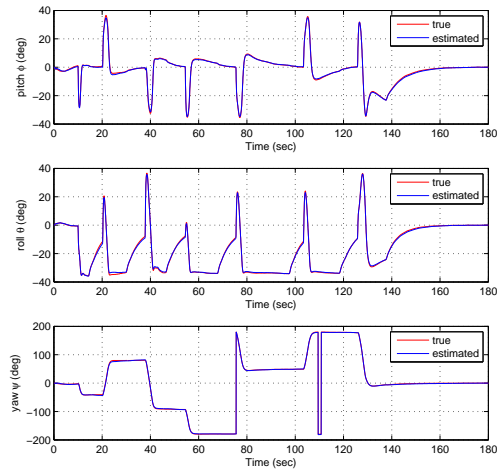


(c) Magnetické pole

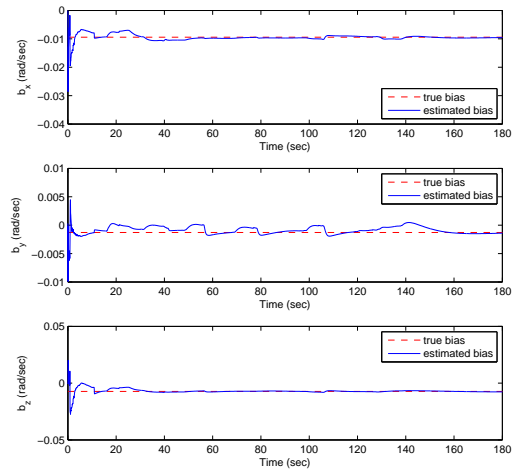
Obr. 6.4: Simulované hodnoty senzorov na testovacej trajektórii

Algoritmus	$S_\phi [^\circ]^2$	$M_\phi [^\circ]$	$S_\theta [^\circ]^2$	$M_\theta [^\circ]$	$S_\psi [^\circ]^2$	$M_\psi [^\circ]$
EKF 4.1 - bez adapt.	1,5909	8,2566	1,5553	6,5503	4,9577	12,5346
EKF 4.1 - s=1	0,1610	1,8322	0,2442	1,5790	1,0915	4,0035
EKF 4.1 - s=10	0,1604	1,8236	0,2437	1,5766	1,0899	4,0006
EKF 4.1 - s=100	0,1604	1,8226	0,2436	1,5762	1,0898	3,9998
EKF 4.2 - bez adapt.	1,7492	9,1697	1,8293	7,4242	7,7588	19,6129
EKF 4.2 - s=1	0,3539	4,5455	0,3793	2,9335	3,8155	12,4735
EKF 4.2 - s=10	0,2744	3,2475	0,2372	2,1272	1,5512	6,3171
EKF 4.2 - s=100	0,2725	3,0836	0,2221	2,0925	1,2848	4,9231

Tab. 6.2: Výsledky testu na simulovanej trajektórii

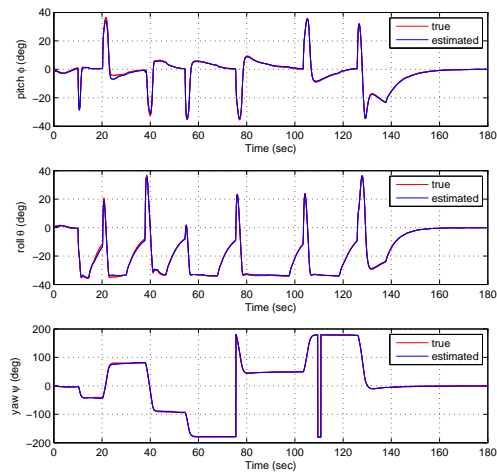


(a) Orientácia

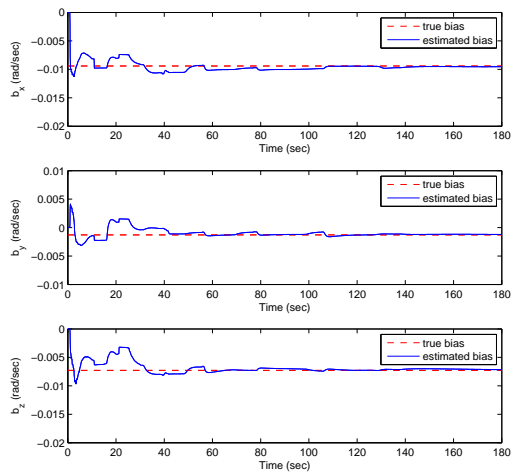


(b) Biasy gyroskopu

Obr. 6.5: Výsledky testu na simulovanej trajektórii - EKF 4.1, $s=100$



(a) Orientácia



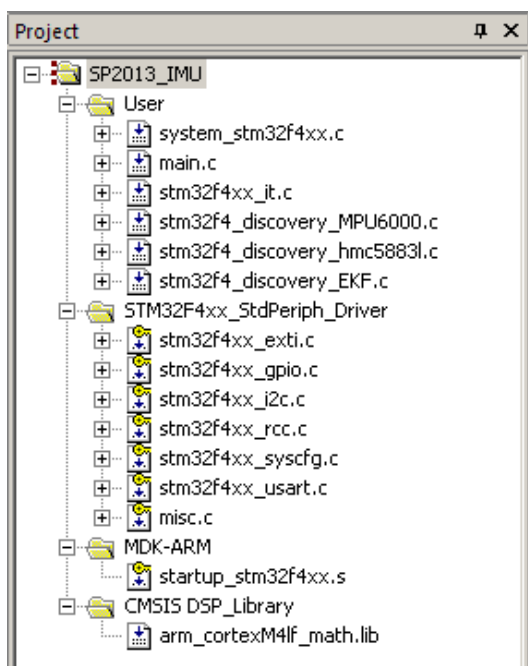
(b) Biasy gyroskopu

Obr. 6.6: Výsledky testu na simulovanej trajektórii - EKF 4.2, $s=100$

7 IMPLEMENTÁCIA EKF NA STM32F4

V tejto kapitole bude popísaná implementácia rozšíreného Kalmanovho filtru z kapitoly 4.1 do mikrokontroléru STM32F407VGT6 použitého na vývojovej doske STM32F4DISCOVERY. Firmware pre mikrokontrolér bol napísaný v jazyku C vo vývojovom prostredí Keil MDK-ARM ver. 4.70. Výpočty v plávajúcej desatinej čiarky boli realizované v presnosti *single precision* prostredníctvom typu *float*. FPU (Floating-point unit) použitá na jadre Cortex™ M4 je totiž implementáciou ARM™ Fpv4-SP, čo je single-precision variant architektúry Fpv4. Aby bolo možné využiť výhody vstavanej jednotky FPU, bolo teda nutné použiť typ *float*. Na operácie s maticami (sčítanie, násobenie, transponovanie, inverzia) boli použité funkcie z knižnice CMSIS DSP Software Library. Implementovaný filter pracuje na vzorkovacej frekvencii 100 Hz.

Štruktúra vytvoreného projektu je znázornená na obr. 7.1. Program pozostáva z



Obr. 7.1: Štruktúra projektu v Keil MDK-ARM

nasledujúcich zdrojových súborov:

- **system_stm32f4xx.c/.h**: Tento súbor obsahuje konfiguráciu systémových hodín (system clock) pre zariadenia STM32F4xx. Exportuje funkciu **SystemInit()**, ktorá nastaví zdroj systémových hodín (v našom prípade 8 MHz externý kryštál), PLL násobiče a deliče, AHB/APBx preddeliče a nastavenia pamäte Flash. Táto funkcia je volaná hneď po resete ešte pred zavolaním funkcie **main()**. Volanie funkcie **SystemInit()** je uskutočnené zo súboru **startup_stm32f4xx.s**.

- `main.c/.h`: Hlavný zdrojový súbor programu, obsahuje funkciu `main()`.
- `stm32f4xx_it.c/.h`: Obsahuje rutiny na obsluhu prerušení od jednotky USART a externého prerušenia od pinu INT senzoru MPU-6000, ktorý signalizuje, že ukončil prevod a v datových registroch sú pripravené nové hodnoty na prečítanie.
- `stm32f4_discovery_MPU6000.c/.h`: Obsahuje funkcie na inicializáciu, čítanie z registrov a zápis do registrov gyroskopu/akcelerometru MPU-6000 prostredníctvom zbernice I²C.
- `stm32f4_discovery_HMC5883L.c/.h`: Obsahuje funkcie na inicializáciu, čítanie z registrov a zápis do registrov magnetometru HMC5883L prostredníctvom zbernice I²C.
- `stm32f4_discovery_EKF.c/.h`: Implementuje funkcie na inicializáciu a výpočet iterácie Kalmanovho filtru.
- `stm32f4xx_exti.c`, `stm32f4xx_gpio.c`, `stm32f4xx_i2c.c`, `stm32f4xx_rcc.c`, `stm32f4xx_syscfg.c`, `stm32f4xx_usart.c`, `misc.c`:
Ovládače periférií pre mikrokontroléry STM32F4xx ako sú radič externých prerušení, vstupno-výstupné piny, I²C zbernica, USART a pod.. Tieto ovládače poskytujú STMicroelectronics v softvérovom balíčku pre STM32F4DISCOVERY, ktorý sa dá stiahnuť z webu ST.
- `startup_stm32f4xx.s`: Poskytuje inicializačný kód pre Cortex-M4, definuje vektory prerušení, volá `SystemInit()` a funkciu `main()`.
- `arm_cortexM4lf_math.lib`: Táto knižnica obsahuje predkompilované CMSIS-DPS funkcie pre Cortex-M4 s využitím FPU. Knižnica CMSIS-DSP obsahuje funkcie pre operácie s vektormi, maticami, komplexnými číslami, výpočet Fourierovej transformácie, PID regulátor a mnoho ďalších často používaných DSP algoritmov. Je obsiahnutá v spomínanom softvérovom balíčku od STMicroelectronics, je súčasťou inštalácie Keil MDK-ARM alebo sa dá stiahnuť z www.arm.com. Je dostupná aj pre jadra Cortex-M0 a Cortex-M3. Funkcie z tejto knižnice sú deklarované v hlavičkovom súbore `arm_math.h`, pričom je potrebné v nastavení projektu definovať makrá `ARM_MATH_CM4` a `__FPU_USED = 1`.

Súborom `stm32f4_discovery_EKF.c/.h` a `main.c` sa budeme bližšie venovať v nasledujúcich kapitolách.

7.1 Súbor `stm32f4_discovery_EKF.c`

V súbore `stm32f4_discovery_EKF.c` a k nemu prislúchajúcim hlavičkovom súbore `stm32f4_discovery_EKF.h` sú definované funkcie a datové štruktúry pre implementá-

ciu rozšíreného Kalmanovho filtru.

Štruktúra IMU__Sensors

Do tejto štruktúry sa zapisujú data načítané zo senzorov jednak ako integer hodnoty prečítané priamo z datových registrov senzorov ako aj v jednotkách reálneho sveta (t.j. zrýchlenie v m/s^2 , uhlová rýchlosť v rad/s a magnetické pole v μT). Štruktúra je definovaná nasledovne:

```
/* IMU sensors structure definition */
typedef struct
{
    int16_t iGpx;    /* accelerometer output x (counts) */
    int16_t iGpy;    /* accelerometer output y (counts) */
    int16_t iGpz;    /* accelerometer output z (counts) */
    float32_t fGpx;  /* accelerometer output x ( $\text{m/s}^2$ ) */
    float32_t fGpy;  /* accelerometer output y ( $\text{m/s}^2$ ) */
    float32_t fGpz;  /* accelerometer output z ( $\text{m/s}^2$ ) */
    int16_t iBpx;    /* magnetometer output x (counts) */
    int16_t iBpy;    /* magnetometer output y (counts) */
    int16_t iBpz;    /* magnetometer output z (counts) */
    int16_t iBcx;    /* calibrated magnetometer output x (counts) */
    int16_t iBcy;    /* calibrated magnetometer output y (counts) */
    int16_t iBcz;    /* calibrated magnetometer output z (counts) */
    float32_t fBpx;  /* magnetometer output x ( $\mu\text{T}$ ) */
    float32_t fBpy;  /* magnetometer output y ( $\mu\text{T}$ ) */
    float32_t fBpz;  /* magnetometer output z ( $\mu\text{T}$ ) */
    float32_t fBcx;  /* calibrated magnetometer output x ( $\mu\text{T}$ ) */
    float32_t fBcy;  /* calibrated magnetometer output y ( $\mu\text{T}$ ) */
    float32_t fBcz;  /* calibrated magnetometer output z ( $\mu\text{T}$ ) */
    int16_t iWpx;    /* gyroscope output x (counts) */
    int16_t iWpy;    /* gyroscope output y (counts) */
    int16_t iWpz;    /* gyroscope output z (counts) */
    float32_t fWpx;  /* gyroscope output x ( $\text{rad/s}$ ) */
    float32_t fWpy;  /* gyroscope output y ( $\text{rad/s}$ ) */
    float32_t fWpz;  /* gyroscope output z ( $\text{rad/s}$ ) */
    int16_t iTemp;   /* temperature output (counts) */
    float32_t fTemp; /* temperature output ( $^{\circ}\text{C}$ ) */
}IMU_Sensors;
```

Štruktúra MagCalibration

V tejto štruktúre sú uložené hodnoty hard-iron vektoru \mathbf{V} a inverznej soft-iron matice \mathbf{W}^{-1} , ktoré boli zistené pri kalibrácii magnetometru v kapitole 2.3.1. Túto štruktúru použije funkcia `InvertMagCal` na výpočet kalibrovaných hodnôt magnetometru. Ako bolo poznamenané v kapitole 2.3.1 matica \mathbf{W}^{-1} je symetrická, preto nie je potrebné uchovávať prvky pod hlavnou diagonálou.

```
/* magnetic calibration structure */
typedef struct
{
    float32_t fVx;    /* x component of hard iron offset (uT) */
    float32_t fVy;    /* y component of hard iron offset (uT) */
    float32_t fVz;    /* z component of hard iron offset (uT) */
    float32_t B;      /* geomagnetic field magnitude in uT */
    /* diagonal elements of inverse soft iron matrix */
    float32_t finvW11;
    float32_t finvW22;
    float32_t finvW33;
    /* off-diagonal elements of inverse soft iron matrix */
    float32_t finvW12;
    float32_t finvW13;
    float32_t finvW23;
}MagCalibration;
```

Štruktúra EKF_TypeDef

Táto štruktúra uchováva inštancie matíc používaných pri výpočte iterácie Kalmanovho filtru.

```
/* Extended Kalman Filter struct */
typedef struct
{
    arm_matrix_instance_f32 xm; /* a priori estimate of x */
    arm_matrix_instance_f32 xp; /* a posteriori estimate of x */
    arm_matrix_instance_f32 I;  /* identity matrix */
    arm_matrix_instance_f32 F;  /* state transition matrix */
    arm_matrix_instance_f32 FT; /* transpose of F */
    arm_matrix_instance_f32 H;  /* measurement sensitivity matrix */
    arm_matrix_instance_f32 HT; /* transpose of H */
    arm_matrix_instance_f32 Pp; /* state covariance matrix P+ */
}
```

```

arm_matrix_instance_f32 Pm; /* state covariance matrix P- */
arm_matrix_instance_f32 Q; /* process noise covariance matrix */
arm_matrix_instance_f32 R; /* meas. noise covariance matrix */
arm_matrix_instance_f32 Temp1; /* Temporary matrix 1 */
arm_matrix_instance_f32 Temp2; /* Temporary matrix 2 */
arm_matrix_instance_f32 Temp3; /* Temporary matrix 3 */
arm_matrix_instance_f32 Temp4; /* Temporary matrix 4 */
arm_matrix_instance_f32 Temp5; /* Temporary matrix 5 */
arm_matrix_instance_f32 Temp6; /* Temporary matrix 6 */
arm_matrix_instance_f32 K; /* Kalman gain matrix */
arm_matrix_instance_f32 dz; /* dz = z - z_est */
}EKF_TypeDef;

```

Štruktúra IMU_Orientation

Do štruktúry IMU_Orientation ukladá funkcia EKF_Iteration vypočítanú informáciu o orientácii jak vo forme Eulerových uhlov, tak aj vo forme kvaterniónu.

```

/* IMU orientation structure definition */
typedef struct
{
    float32_t fPhi; /* roll angle (rad) */
    float32_t fThe; /* pitch angle (rad) */
    float32_t fPsi; /* yaw angle (rad) */
    float32_t fq0; /* quaternion scalar component */
    float32_t fq1; /* quaternion vector component x */
    float32_t fq2; /* quaternion vector component y */
    float32_t fq3; /* quaternion vector component z */
}IMU_Orientation;

```

Funkcia EKF_Init

Táto funkcia má nasledujúci prototyp:

```
void EKF_Init(EKF_TypeDef *pEKF_Struct);
```

Funkcia slúži k inicializácii EKF a postará sa o definovanie rozmerov matíc a prepojenie inšancií matíc so zodpovedajúcimi datovými buffermi.

Funkcia EKF_Iteration

Táto funkcia má nasledujúci prototyp:

```
void EKF_Iteration(EKF_TypeDef *pEKF_Struct, IMU_Sensors *pthisSens,  
IMU_Orientation *pthisOrientation);
```

Funkcia tvorí jadro algoritmu rozšíreného Kalmanovho filtru. Na základe hodnôt zo senzorov prepočíta orientáciu a výsledok uloží do štruktúry `IMU_Orientation`.

Funkcia InvertMagCal

Táto funkcia má nasledujúci prototyp:

```
void InvertMagCal(IMU_Sensors *pthisSens, MagCalibration *pthisMagCal);
```

Funkcia vypočíta kalibrované hodnoty magnetického poľa z merania magnetometru pomocou vzťahu 2.20.

7.2 Súbor main.c

Funkcia main

Ide o hlavnú funkciu programu. Na začiatku prebehne inicializácia jednotky UART, senzorov MPU-6000 a HMC5883L, zavolá sa funkcia `EKF_Init()` a nastaví sa hodnoty v štruktúre `MagCalibration`. Hlavná slučka programu vyzerá nasledovne:

```
while (1)  
{  
    if(MPU6000_data_available == SET)  
    {  
        ReadSensorData(&thisSens);  
        InvertMagCal(&thisSens, &thisMagCal);  
        EKF_Iteration(&thisEKF, &thisSens, &thisOrientation);  
  
        printf("%d;%d;%d;%d;%d;%d;%d;%d;%d;%+8.5f;%+8.5f;%+8.5f;%+8.5f  
        \r\n", thisSens.iBpx, thisSens.iBpy, thisSens.iBpz,  
        thisSens.iGpx, thisSens.iGpy, thisSens.iGpz,  
        thisSens.iWpx, thisSens.iWpy, thisSens.iWpz,  
        thisOrientation.fq0, thisOrientation.fq1,  
        thisOrientation.fq2, thisOrientation.fq3);  
  
        MPU6000_data_available = RESET;
```

```

    }
}

```

Premenná `MPU6000_data_available` sa nastaví v externom prerušení od pinu INT senzoru MPU-6000 (nábežná hrana na tomto pine signalizuje, že v jeho datových registroch sú pripravené nové hodnoty na prečítanie). Následne sa prečítajú data zo sensorov, vypočítajú sa kalibrované hodnoty magnetometru a prebehne iterácia Kalmanovho filtru. Údaje zo sensorov sa potom spolu s vypočítaným kvaterniónom vyšlú po sériovej linke do PC. Výpočet jednej iterácie Kalmanovho filtru trvá 240,4 μ s (frekvencia jadra je nastavená na maximálnych 168 MHz).

7.3 Komunikácia s jednotkou

Inerciálna navigačná jednotka komunikuje s okolím prostredníctvom sériovej linky. Ako už bolo spomenuté v kapitole 3 jednotka obsahuje prevodník USB na UART FT232RL. Po pripojení k PC pomocou USB káblu sa teda javí ako virtuálny sériový port. Parametre pre komunikáciu sú nasledovné:

- komunikačná rýchlosť 115200 Bd
- žiadna parita
- 1 stop bit

Jednotka začne vysielat data po prijatí znaku „s“ (ASCII hodnota 0x73), komunikácia sa ukončí ak jednotka prijme znak „e“ (ASCII hodnota 0x65). Formát správy vyslanej jednotkou je nasledujúci:

```
magx;magy;magz;accx;accy;accz;gyrx;gyry;gyrz;q0;q1;q2;q3\r\n
```

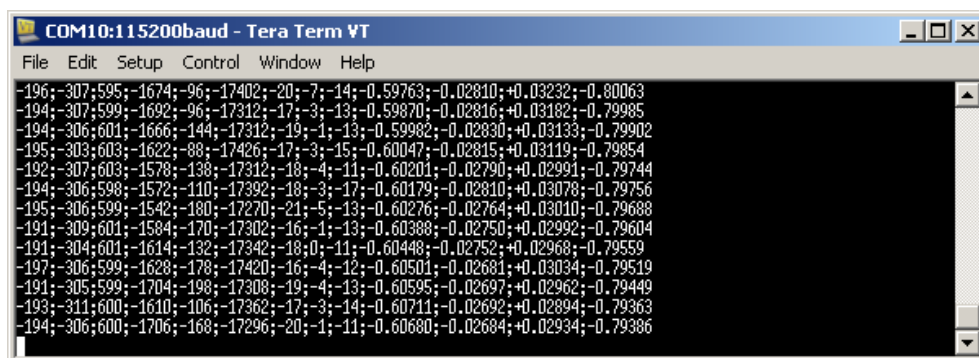
Jednotlivé položky sú od seba oddelené znakom `;`, pričom prvých deväť položiek sú data zo sensorov v integer tvare so znamienkom, tak ako boli prečítané z registrov a posledné štyri položky sú prvky kvaterniónu vypočítané Kalmanovým filtrom. Tieto štyri položky sú vo formáte float. Reťazec je ukončený znakmi pre prechod na nový riadok (Carriage Return a Line Feed). Ukážka komunikácie zachytená v programe Tera Term je na obr. 7.2.

Takto vyslaný reťazec môžeme napríklad v Matlabe prečítať pomocou nasledujúcich príkazov (`s` je objekt sériového portu vrátený príkazom `serial`):

```

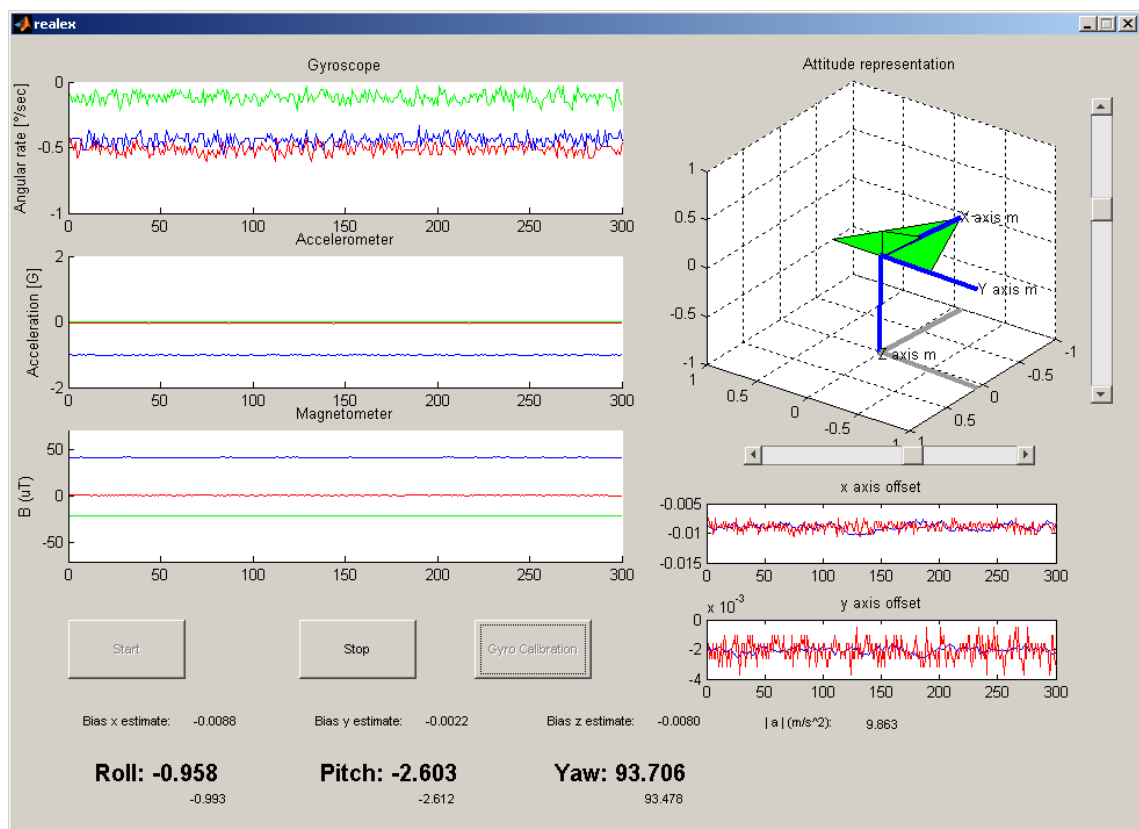
strin = fscanf(s);
[magx,magy,magz,accx,accy,accz,gyrx,gyry,gyrz,q0,q1,q2,q3] =
    strread(strin,'%d%d%d%d%d%d%d%f%f%f%f','delimiter',';',',',
    'emptyvalue',0);

```



Obr. 7.2: Data z inerciálnej jednotky zobrazené v terminálovom programe

Pre pohodlnú vizualizáciu dat zo senzorov a vypočítanej orientácie bolo použité mierne upravené grafické užívateľské rozhranie poskytnuté konzultantom práce. Toto užívateľské rozhranie je na obr. 7.3. V spodnej časti okna sú zobrazené väčším tučným písmom hodnoty Eulerových uhlov vypočítané z prijatého kvaternionu. Pre porovnanie bol rovnaký Kalmanov filter ako na mikrokontroléri prepočítavaný aj v Matlabe z prijatých dat senzorov. Eulerové uhly z tohoto filtru sú zobrazené úplne dole. Môžeme si všimnúť, že hodnoty vypočítané na mikrokontroléri sa od hodnôt vypočítaných v Matlabe mierne líšia. To je dané tým, že Kalmanov filter na mikrokontroléri prepočítaval data s frekvenciou 100 Hz, ale do Matlabu boli posielané data len z každej piatej iterácie, teda filter v Matlabe pracoval len na frekvencii 20 Hz. Matlab totiž dokázal spoľahlivo prijímať data z jednotky a obnovovať okno užívateľského rozhrania asi do frekvencie 40 Hz, pri vyšších frekvenciách dochádzalo k problémom s komunikáciou.



Obr. 7.3: Grafické užívateľské rozhranie v programe Matlab

8 ZÁVER

V tejto práci boli prezentované dva rozšírené Kalmanove filtre pre odhad orientácie telesa v priestore. Signál z gyroskopu je skombinovaný so signálom z akcelerometru a magnetometru kvôli eliminovaniu driftu. V okamihoch pôsobenia externého zrýchlenia, je úpravou kovariančnej matice meraní znížená váha informácie akcelerometru na odhad stavu. Výsledky testu na simulovanej trajektórii multikoptéry ukazujú, že týmto opatrením sa výrazne znížili chyby odhadu orientácie v porovnaní s filtrom bez adaptácie na externé zrýchlenie. V práci boli popísané základné vlastnosti senzorov, ktoré sa používajú pri inerciálnej navigácii. Bol uvedený postup pri kalibrácii magnetometru, ktorého výstup môže byť značne ovplyvnený prítomnosťou feromagnetických materiálov v jeho blízkosti. V semestrálnom projekte, ktorý predchádzal diplomovej práci bol navrhnutý a realizovaný rozširujúci modul pre vývojovú dosku STM32F4DISCOVERY, ktorý obsahuje potrebné senzory pre realizáciu navigačnej jednotky. V tejto diplomovej práci bol algoritmus výpočtu orientácie implementovaný do mikrokontroléru tejto vývojovej dosky. Odhad orientácie z vytvorenej inerciálnej navigačnej jednotky by mohol byť použitý napríklad pre stabilizáciu malého lietajúceho robota.

LITERATÚRA

- [1] GREWAL, M. S., ANDREWS, A. P. *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB, Second Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2001, ISBN 0-471-39254-5.
- [2] WELCH, G., BISHOP, G. *An Introduction to the Kalman Filter*. University of North Carolina at Chapel Hill, 2006.
- [3] DAS, S. *High-level data fusion*. USA: Artech House, 2008, ISBN-13 978-1-59693-281-4.
- [4] FARRELL, J. A. *Aided Navigation: GPS with High Rate Sensors*. The McGraw-Hill Companies, 2008, ISBN-13 978-0071493291.
- [5] TITTERTON, D. H., WESTON J. L. *Strapdown Inertial Navigation Technology - 2nd Edition*. The Institution of Electrical Engineers, 2004, ISBN 0 86341 358 7.
- [6] Invensense, *MPU-6000 and MPU-6050 Product Specification* [online]. InvenSense Inc., Revision 3.4. Dostupné z URL: <<http://invensense.com/mems/gyro/documents/PS-MPU-6000A-00v3.4.pdf>>.
- [7] Invensense, *MPU-6000 and MPU-6050 Register Map and Descriptions* [online]. InvenSense Inc., Revision 4.0. Dostupné z URL: <<http://invensense.com/mems/gyro/documents/RM-MPU-6000A-00v4.2.pdf>>.
- [8] Honeywell, *3-Axis Digital Compass IC HMC5883L* [online]. Honeywell International Inc., April 2012, Rev C. Dostupné z URL: <<http://www.farnell.com/datasheets/1683374.pdf>>.
- [9] Freescale, *Application Note 4246: Calibrating an eCompass in the Presence of Hard and Soft-Iron Interference* [online]. Freescale Semiconductor, Inc., April 2013, Rev. 3. Dostupné z URL: <http://www.freescale.com/files/sensors/doc/app_note/AN4246.pdf>.
- [10] Freescale, *Application Note 4247: Layout Recommendations for PCBs Using a Magnetometer Sensor* [online]. Freescale Semiconductor, Inc., February 2012, Rev. 3. Dostupné z URL: <http://www.freescale.com/files/sensors/doc/app_note/AN4247.pdf>.

- [11] Freescale, *Application Note 4248: Implementing a Tilt-Compensated eCompass using Accelerometer and Magnetometer Sensors* [online]. Freescale Semiconductor, Inc., January 2012, Rev. 3. Dostupné z URL: <http://www.freescale.com/files/sensors/doc/app_note/AN4248.pdf>.
- [12] Freescale, *Application Note 4676: Euler Angle, Rotation Matrix and Quaternion Representations of Orientation in Aerospace, Android and Windows 8 Coordinates*. Mark Pedley, Freescale Semiconductor, Inc., April 2013, Rev. 1.0.
- [13] Freescale, *Application Note 4684: Magnetic Calibration of Hard and Soft Iron Interference*. Mark Pedley, Freescale Semiconductor, Inc., April 2013, Rev. 1.0.
- [14] ROGERS, R. M. *Applied Mathematics in Integrated Navigation Systems, Second Edition*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Reston, Virginia, 2003, ISBN 1-56347-656-8.
- [15] FUX, S. *Development of a planar low cost Inertial Measurement Unit for UAVs and MAVs*. Zurich, 2008. Master Thesis. Swiss Federal Institute of Technology Zurich.
- [16] BEKIR, E. *Introduction to Modern Navigation Systems*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007, ISBN-13 978-981-270-765-9.
- [17] ŘEZÁČ, M., HURÁK, Z. *Low-cost inertial estimation unit based on extended Kalman filtering*. Proc. of SPIE Vol. 7696, Automatic Target Recognition XX; Acquisition, Tracking, Pointing, and Laser System Technologies XXIV; and Optical Pattern Recognition XXI, 76961F. September 2010.
- [18] BARÁNEK, R. *Estimace stavu miniaturního létajícího robota*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2013. 23 s. Vedoucí pojednání prof. Ing. František Šolc, CSs.
- [19] MAJEED, A. A. *Integration of predictive filters on ARM7 for application in tracking algorithms*. Freiburg, 2008. Master Thesis. Institute of Computer Science, Albert-Ludwigs-University of Freiburg.
- [20] MARMION, M. *Airborne attitude estimation using a Kalman filter*. Trondheim, 2006. Master Thesis. Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway.
- [21] ŠILHÁN, M. *Odhad orientace UAV v prostoru*. Praha, 2010. Diplomová práce. Fakulta elektrotechnická, České vysoké učení technické v Praze.

- [22] SUH, Y.S., PARK, S.K., KANG, H.J., RO, Y.S. *Attitude estimation adaptively compensating external acceleration*. JSME International Journal Ser. C, vol. 49, no. 1, pp. 172-179, 2006.
- [23] SUH, Y.S. *Orientation Estimation Using a Quaternion-Based Indirect Kalman Filter With Adaptive Estimation of External Acceleration*. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. 59, no. 12, 2010.
- [24] REHBINDER, H., HU, X. *Drift-Free Attitude Estimation for Accelerated Rigid Bodies*. Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics & Automation, pp. 4244-4249, 2001.
- [25] LEE, J.K., PARK, E.J. *A minimum-order Kalman filter for ambulatory real-time human body orientation tracking*. Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Robotics & Automation, pp. 3565-3570, 2009.

ZOZNAM SYMBOLOV, VELIČÍN A SKRATIEK

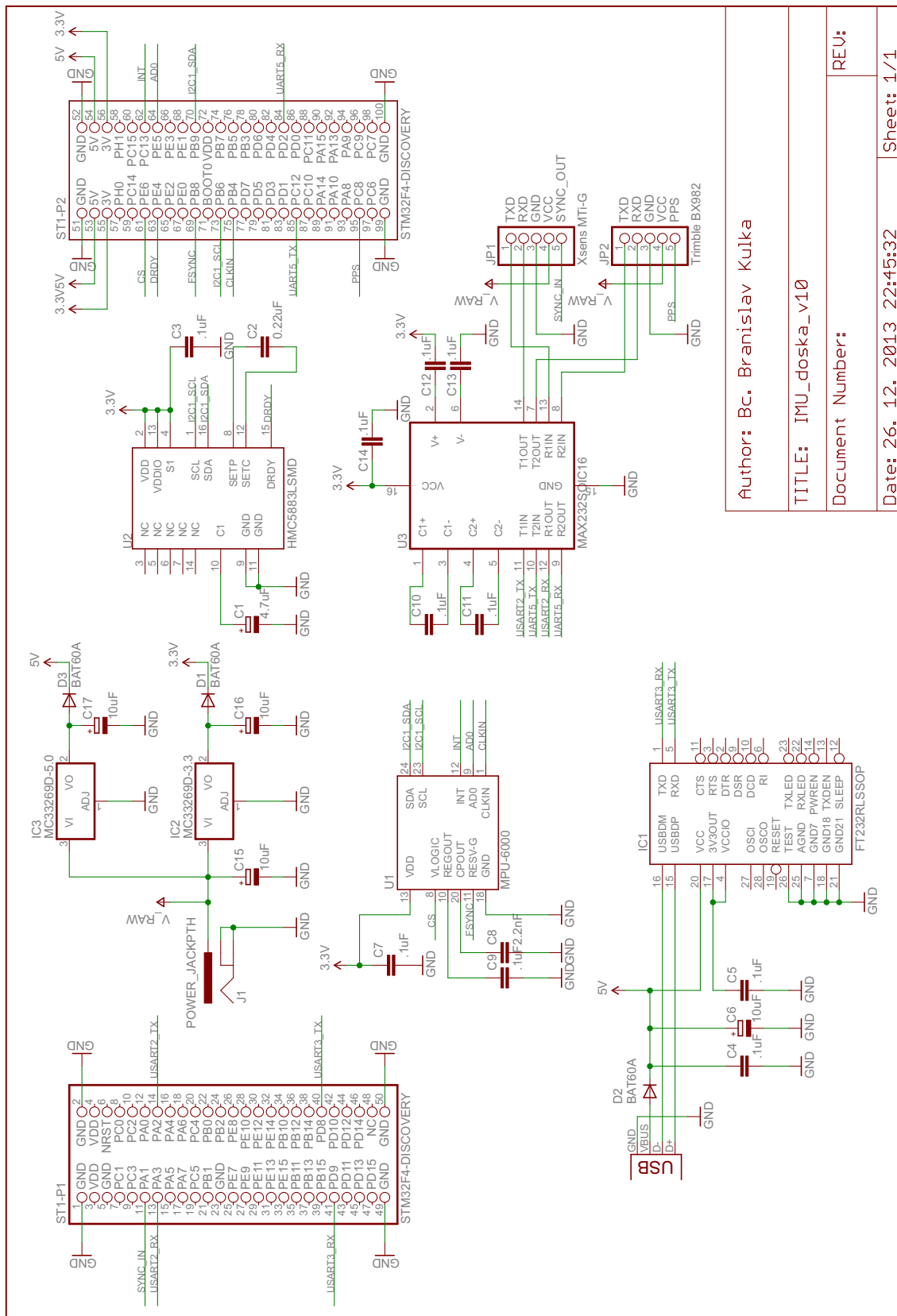
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$	matice spojitého systému
\mathbf{A}_m	3-osové meranie akcelerometru
A_{mx}, A_{my}, A_{mz}	zložky zrýchlenia zmeraného akcelerometrom
$\mathbf{F}_k, \mathbf{G}_k, \mathbf{H}_k$	matice diskrétného systému
\mathbf{B}	vektor magnetického poľa Zeme
\mathbf{B}_m	3-osové meranie magnetometru
B_{mx}, B_{my}, B_{mz}	zložky merania magnetometru
$\mathbf{I}_{x \times x}$	jednotková matica rozmerov $x \times x$
\mathbf{K}_k	Kalmanovo zosilnenie
\mathbf{P}_k	aposteriórna kovariančná matica chyby odhadu
\mathbf{P}_k^-	apriórna kovariančná matica chyby odhadu
\mathbf{Q}_k	kovariančná matica šumu procesu
\mathbf{R}_k	kovariančná matica šumu merania
\mathbf{R}_b^n	rotačná matica z telesových do navigačných súradníc
\mathbf{R}_n^b	rotačná matica z navigačných do telesových súradníc
T	perióda vzorkovania
$\hat{\mathbf{b}}$	odhad biasu gyroskopu
R_{ij}	prvok rotačnej matice \mathbf{R}_b^n
g	gravitačné zrýchlenie
$\mathbf{u}(t)$	vektor vstupov systému
\mathbf{v}	vektor šumov merania
\mathbf{w}	vektor šumov procesu
\mathbf{x}_k	stavový vektor diskrétného systému
$\hat{\mathbf{x}}_k$	odhadovaný stavový vektor diskrétného systému

$\hat{\mathbf{x}}_k^-$	apriórny odhad stavu diskrétného systému
x_1, x_2, \dots	zložky stavového vektora
\mathbf{z}_k	skutočné meranie výstupu systému
$\hat{\mathbf{z}}_k$	odhadovaný výstup systému
$\mathbf{\Omega}_m$	3-osové meranie gyroskopu
ϕ, θ, ψ	náklon (roll), klopenie (pitch), kurz (yaw)
$\omega_x, \omega_y, \omega_z$	zložky uhlovej rýchlosti
$\mathbf{0}_{x \times x}$	nulová matica $x \times x$
q	kvaternión
q^*	združený kvaternión
q_0	skalárna zložka kvaterniónu q
\mathbf{q}	vektorová zložka kvaterniónu q
$q = \{q_0, \mathbf{q}\}$	zápis kvaternionu q pomocou jeho skalárnej a vektorovej zložky
$N(q)$	norma kvaternionu q
q^{-1}	inverzný kvaternión ku q
$\hat{\mathbf{n}}$	jednotkový vektor reprezentujúci os rotácie
η	všeobecný uhol rotácie
EKF	Extended Kalman Filter – rozšírený Kalmanov filter
GUI	Graphical User Interface – grafické užívateľské rozhranie
IMU	Inertial Measurement Unit – inerciálna navigačná jednotka
KF	Kalman Filter – Kalmanov filter
MEMS	Micro-Electro-Mechanical Systems – mikro-elektro-mechanický systém
FPU	Floating-point unit – matematický koprocessor
CMSIS	Cortex Microcontroller Software Interface Standard

ZOZNAM PRÍLOH

A	Schéma zapojenia	65
B	Výkresy DPS	66
C	CD médium	67

A SCHÉMA ZAPOJENIA



Author: Bc. Branislav Kulka

TITLE: IMU_doska_v10

Document Number:

REV:

Date: 26. 12. 2013 22:45:32

Sheet: 1/1

C CD MÉDIUM

Obsahom CD média sú:

- elektronická verzia tohoto dokumentu
- projekt vytvorený v Keil MDK-ARM so zdrojovými súbormi
- aplikácia s grafickým užívateľským rozhraním vytvorená v programe Matlab