

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV POČÍTAČOVÝCH SYSTÉMŮ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF COMPUTER SYSTEMS

ANIMOVANÝ 3D MODEL

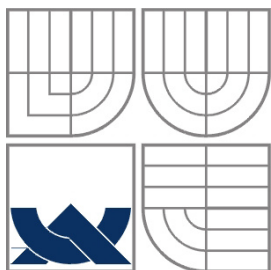
BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

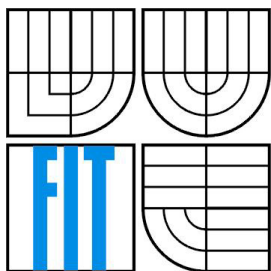
AUTOR PRÁCE
AUTHOR

KAMIL KONEČNÝ

BRNO 2014



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
ÚSTAV POČÍTAČOVÝCH SYSTÉMŮ

FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF COMPUTER SYSTEMS

ANIMOVANÝ 3D MODEL

ANIMATED 3D MODEL

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

KAMIL KONEČNÝ

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

PROF. DR. ING. PAVEL ZEMČÍK

BRNO 2014

Vysoké učení technické v Brně - Fakulta informačních technologií

Ústav počítačové grafiky a multimédií

Akademický rok 2013/2014

Zadání bakalářské práce

Řešitel: **Konečný Kamil**

Obor: Informační technologie

Téma: **Animovaný 3D model**
Animated 3D Model

Kategorie: Počítačová grafika

Pokyny:

1. Prostudujte dostupnou literaturu na téma animace 3D modelů s parametrickým vstupem, alternativně i dostupný software.
2. Navrhněte vhodný postup pro animaci na základě simulace průběhu parametrů modelu (například pohyb koulí na kulečnicku, pohyb jednoduchého strojku apod.)
3. Navrhněte způsob implementace předchozího bodu zadání.
4. Implementujte animaci a demonstруйте na vhodném příkladě.
5. Diskutujte dosažené výsledky a možnosti pokračování práce.

Literatura:

- Dle pokynů vedoucího

Při obhajobě semestrální části projektu je požadováno:

- Body 1 až 3 zadání

Podrobné závazné pokyny pro vypracování bakalářské práce naleznete na adrese <http://www.fit.vutbr.cz/info/szz/>

Technická zpráva bakalářské práce musí obsahovat formulaci cíle, charakteristiku současného stavu, teoretická a odborná východiska řešených problémů a specifikaci etap (20 až 30% celkového rozsahu technické zprávy).

Student odevzdá v jednom výtisku technickou zprávu a v elektronické podobě zdrojový text technické zprávy, úplnou programovou dokumentaci a zdrojové texty programů. Informace v elektronické podobě budou uloženy na standardním nepřepisovatelném paměťovém médiu (CD-R, DVD-R, apod.), které bude vloženo do písemné zprávy tak, aby nemohlo dojít k jeho ztrátě při běžné manipulaci.

Vedoucí: **Zemčík Pavel, prof. Dr. Ing.**, UPGM FIT VUT

Datum zadání: 1. listopadu 2013

Datum odevzdání: 21. května 2014

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
Fakulta informačních technologií
Ústav počítačové grafiky a multimédií
602 00 Brno, Božetěchova 2



doc. Dr. Ing. Jan Černocký
vedoucí ústavu

Abstrakt

Tato práce se zabývá výrobou trojrozměrného animovaného modelu. Jedná se o vizualizaci pohybu koulí po kulečnickovém stole. Práce obsahuje souhrn fyzikálních jevů, metod simulace a animačních technik. Dále je uveden stručný popis vybraných programů pro modelování. V práci je vytvořen fyzikální model, který popisuje pohyb koulí pomocí upravených vztahů pro účely animace. Výsledná animace je obsažena na přiloženém CD.

Abstract

This thesis deals with production of three-dimensional animated model. It's about visualisation of balls motion on billiard table. The thesis contains summary of physical phenomena, simulation methods and animation techniques. Next there is introduced elementary description of chosen modelling software. In this work the physical model of balls motion is created, using modified equations for animation purpose. The final animation is contained on attached CD.

Klíčová slova

Simulace, počítačová grafika, animace, fyzikální model, kulečník.

Keywords

Simulation, computer graphics, animation, physical model, billiard.

Citace

Konečný Kamil: Animovaný 3D model, bakalářská práce, Brno, FIT VUT v Brně, 2014

Animovaný 3D model

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením prof. Dr. Ing. Pavla Zemčíka.

Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

.....

Kamil Konečný

19.5.2014

Poděkování

Děkuji prof. Dr. Ing. Pavlu Zemčíkovi za vedení práce.

© Kamil Konečný, 2014

Tato práce vznikla jako školní dílo na Vysokém učení technickém v Brně, Fakultě informačních technologií. Práce je chráněna autorským zákonem a její užití bez udělení oprávnění autorem je nezákonné, s výjimkou zákonem definovaných případů.

Obsah

Obsah.....	1
1 Úvod.....	2
2 Počítačová simulace.....	3
2.1 Simulační metody.....	3
2.2 Animační techniky.....	5
2.3 Fyzikální model pohybu koule	9
3 Možnosti tvorby animace.....	14
3.1 Koncepce simulace	14
3.2 Prostředky pro modelování.....	15
4 Realizace simulace a animace.....	16
4.1 Upravený model koule.....	17
4.2 Implementace simulačního modelu	22
4.3 Vizualizace	23
5 Závěr	25
6 Literatura.....	26

1 Úvod

Počítačová animace je v současné době využívána v mnoha různých odvětvích. Hlavním cílem prostorové animace je často věrné napodobení nějakého jevu ze skutečného světa. Prostorové modely nachází využití například v medicíně, meteorologii či astronomii. Kromě vědních oborů je však dnes vytváření animací hojně využíváno například ve filmovém průmyslu nebo počítačových hrách. V těchto případech však často není hlavním cílem napodobení jednoho jevu, nýbrž vytváření velmi rozsáhlých scén či celého fiktivního světa. Existuje velké množství nástrojů, které slouží pro tvorbu realistických trojrozměrných modelů a pro jejich následné „oživení“ pomocí různých animačních technik.

Tato práce si klade za cíl vytvoření prostorového animovaného modelu, který bude napodobovat chování koulí na kulečnickovém stole. Tento problém jsem vybral na základě vlastní obliby této hry. Problematika pohybu koulí se může laikovi jevit, jako jednoduché uplatnění několika fyzikálních zákonů. Ve skutečnosti je však úplný popis pohybující se koule velmi složitá úloha s mnoha úskalími. Účelem modelu v této práci však není přesné a úplné zobrazení daného jevu, a proto zde dochází k určitým zjednodušením případně zanedbání některých složitějších jevů. Pro splnění cíle práce je nutné se seznámit s fyzikálními vlastnostmi, které mají vliv na chování koulí při pohybu po povrchu hrací plochy kulečnickového stolu. Pro vytvoření dobře vypadajícího modelu je vhodné využít některý z programů pro tvorbu modelů a animací, kterých je v současné době k dispozici celá řada. Pro dostatečný popis chování modelu je nezbytné využít počítačové simulace, která využívá znalosti získané o modelovaném jevu a pomocí jedné z metod popsaných v této práci provádí napodobení chování tak, aby do určité míry vystihovalo realitu.

Jádro práce je možné rozdělit na tři základní části. V první z nich je obsaženo shrnutí v současnosti známých faktů a technik, které je možné využít pro tvorbu animovaného modelu. Tato část obsahuje obecný popis simulačních metod určených pro různé druhy simulace v závislosti na vlastnostech modelu. Dále se zde nachází shrnutí nejčastěji využívaných animačních technik a rozbor vlastností několika vybraných prostředí pro tvorbu trojrozměrných modelů. V této části je také v neposlední řadě uveden souhrn fyzikálních jevů, využitých pro vytvoření modelu, nutný pro pochopení zbytku práce. V druhém oddíle jádra práce se nachází zhodnocení popsaných metod a srovnání dostupných programů pro tvorbu modelů a animací. Dochází zde k výběru použitých nástrojů a technik a určení vlastností, které výsledný model bude splňovat. Poslední ze tří hlavních částí práce obsahuje popis vlastního postupu při vytváření animace. Je zde mimo jiné provedena úprava fyzikálního popisu kulečnickových koulí pro následné zapsání formou programu.

2 Počítačová simulace

Tato kapitola obsahuje základní přehled znalostí počítačové simulace. Nejedná se o detailní rozbor dané problematiky, nýbrž o souhrn základních fakt nutných pro pochopení zbytku této práce.

Cílem počítačové simulace je napodobení chování určitého systému za účelem získání nových informací o systému, či vizualizaci nějakého jevu. Systémem zde rozumíme množinu elementárních prvků propojených vzájemnými vazbami. Výhodou počítačové simulace může být například cena oproti experimentování se skutečným systémem (např. crash testy automobilů). Dalším důvodem k využití počítačové simulace může být bezpečnost či nemožnost provést experiment v reálném světě. Kromě využití simulace pro získávání důležitých informací v nejrůznějších vědních oborech je dnes simulace hojně využívána například při tvorbě počítačových her nebo ve filmovém průmyslu. [1]

Pro provedení simulace je nutné vytvořit model systému, který chceme zkoumat, případně pouze napodobit. Reálné systémy jsou ovšem často velmi komplexní a pro účely simulace zbytečně složité. Proto je vhodné reálný systém popsat takovým modelem, který má podobné chování jako modelovaný systém, avšak vynechává popis různých vlastností, které nejsou pro zkoumaný jev podstatné. Tento model nemusí obsahovat kompletní detailní popis modelovaného systému, nýbrž pouze ty vlastnosti, které jsou podstatné pro fungování systému tak, abychom při provádění simulace dosáhli relevantních výsledků. Hovoříme zde o jisté úrovni abstrakce. Díky tomuto zjednodušení reálného světa jsme schopni snadněji popsat zkoumaný systém a vytvořit tzv. abstraktní model. [1]

Na základě abstraktního modelu je možné vytvořit model konceptuální. V případě konceptuálního modelu se nejedná o formální popis modelovaného systému, nýbrž o návrh formou slovního popisu, náčrtků, popř. grafů. Konceptuální model slouží pro vytvoření představy o modelovaném systému v počáteční fázi modelování a poskytuje základ pro další fáze modelování.

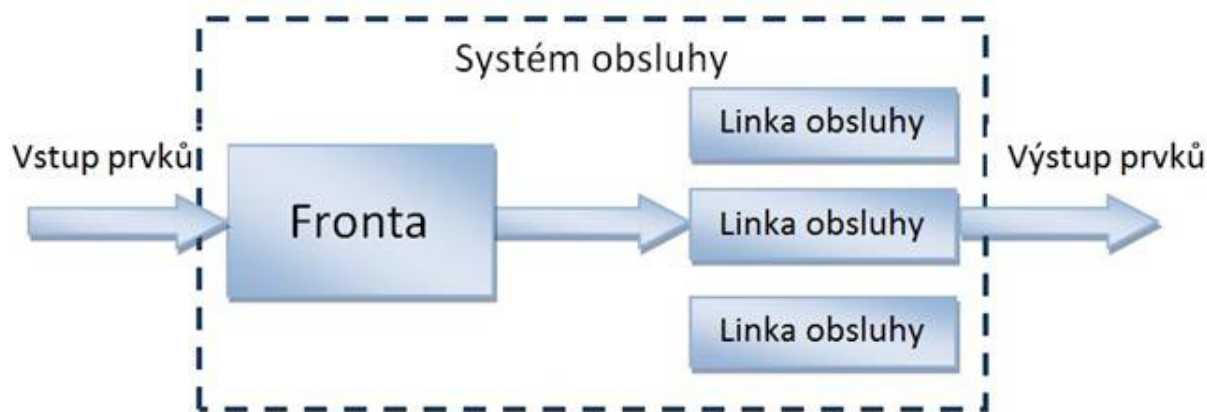
Na základě konceptuálního modelu je vytvořen simulační model. V případě počítačové simulace se jedná o program napsaný v nějakém programovacím jazyce. Pro vytvoření simulačního modelu využíváme implementační metody v závislosti na typu modelovaného systému. [1]

2.1 Simulační metody

Pro různé simulační modely můžeme použít odlišné metody implementace. Obecně je možné simulaci rozdělit do tří základních typů. Jedná se o klasifikaci dle chování jednotlivých prvků systému. Každý prvek, který je součástí námi modelovaného systému, může mít spojité, či diskrétní chování. V závislosti na popisu jednotlivých prvků systému je tedy nutné určit, zda budeme provádět diskrétní, spojitou či kombinovanou simulaci. [1]

O typu simulace rozhoduje chování jednotlivých prvků modelovaného systému. Pro diskrétní simulaci platí, že každý modelovaný prvek má diskrétní chování. Diskrétní chování znamená, že se prvky systému mění svůj stav tzv. skokově. Taková skoková změna stavu prvku je reakcí na určitou událost. Časová množina pro tento typ simulace může být definována konečnou množinou časových okamžiků. [1]

Nejčastějším příkladem diskrétního modelu je tzv. systém hromadné obsluhy. Jedná se o systém, který obsahuje určitá zařízení, které obsluhují procesy přicházející do systému. Situaci znázorňuje obrázek (Obrázek 1). Jako konkrétní příklad lze uvést obchod s pultovým prodejem, kde zákazník je prvek vstupující do systému a každá pokladna je obslužná linka.



Obrázek 1: Znáznornění systému hromadné obsluhy¹

Zákazníci se objevují v systému skokově na základě tzv. kalendáře událostí, který obsahuje uspořádaný seznam záznamů, seřazených vzestupně podle času výskytu. Modelový čas tedy neubíhá po pravidelných krocích, ale je zvýšen vždy na hodnotu nejbližšího výskytu události. Pro formální popis systémů hromadné obsluhy nejčastěji slouží grafy známé jako Petriho sítě. Jedná se o speciální grafy pro reprezentaci diskretních systémů, které jsou složeny z tzv. míst a přechodů vzájemně propojených orientovanými hranami. [1]

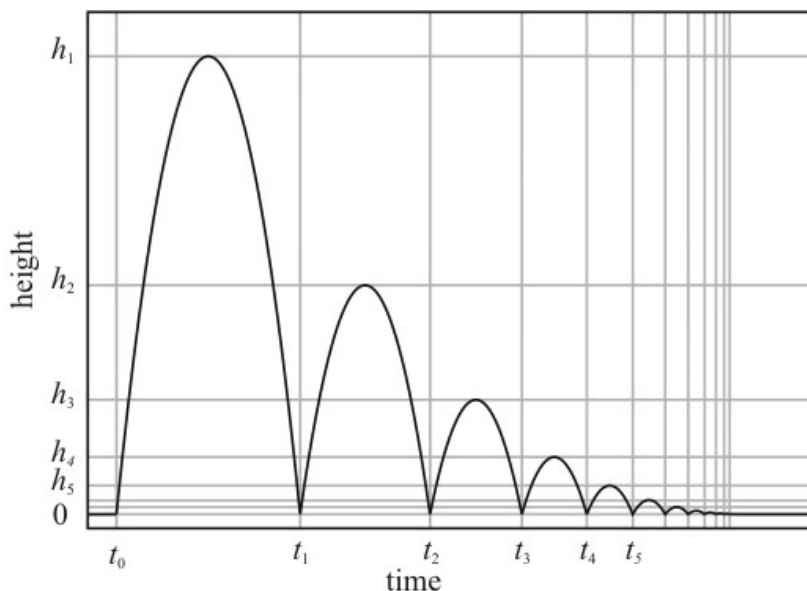
Dalším typem simulace je tzv. simulace spojitá. V případě spojité simulace mají všechny prvky spojitě chování a časová množina může být definována vhodným intervalem. Modelový čas je tak navyšován po určitých dostatečně malých krocích a v každém takovém čase je přepočítán stav celého modelu. Navzdory tomu, že čas v této situaci považujeme za spojitou veličinu, v případě spojité simulace na číslicovém počítači dochází vždy k její diskretizaci. Spojité modely bývají často popsány soustavou diferenciálních či algebraických rovnic, případně blokovým schématem. Takové schéma formálně popisuje chování spojitého systému propojením jednotlivých funkčních bloků (například integrátorů). Pro řešení rovnic popisujících spojitý systém, které není možné řešit analyticky (příp. je to příliš náročné), jsou využívány různé numerické integrační metody. Tyto metody lze rozdělit na jednokrokové a vícekové. Jednokrokové metody vychází pouze z aktuálního stavu, přičemž vícekové využívají tzv. historii stavů. Mezi jednokrokové integrační metody patří například Eulerova metoda, či metody Runge-Kutta druhého nebo čtvrtého řádu. U vícekových metod nastává problém na začátku výpočtu, kdy není k dispozici žádná historie stavů. V takovém případě je možné ze začátku využít nějaké jednokrokové metody. [1]

Spojité modely bývají využívány v mnoha různých odvětvích, jako je například fyzika, astronomie či elektrotechnika. Příklad takového spojitého systému může být třeba simulace letu letadla v počítačové hře, či model elektrického obvodu.

Třetí ze základních typů simulace je simulace kombinovaná. Tento typ simulace spojuje prvky s diskretním i spojitým chováním. Jedná se o kombinaci numerické integrační metody a událostí. I přes spojitý průběh části modelu je nutné reagovat na události vyvolané například změnou stavových podmínek. Změna stavové podmínky může nastat v průběhu výpočtu integračního kroku. V takovém případě je nezbytné provést výpočet znovu a délku kroku zkrátit tak, aby se čas konce kroku shodoval s časem stavové události. Hovoříme zde o tzv. „dokročení“. Při ošetřování stavových událostí až po provedení klasického integračního kroku bez dokročení může docházet k podstatným výpočetním chybám. [1]

¹ Obrázek byl převzat z webu <http://www.celysvet.cz/model/matematicky-model>

Příkladem kombinované simulace může být model popisující výšku skákajícího míčku, jehož graf je zobrazen na obrázku (Obrázek 2). Pohyb padajícího míčku lze považovat za spojitou část simulace, avšak je zde nutné ověřovat, zda se míček stále nachází nad zemí. V případě překročení spodní hranice je nutné reagovat změnou směru pohybu míčku. Graf na obrázku (Obrázek 2) popisuje časový průběh výšky míčku, odrážejícího se od podložky.



Obrázek 2: Skákající míček²

2.2 Animační techniky

Pojmem animace označujeme posloupnost statických obrázků vyjadřujících pohyb. Jedná se o určitý druh iluze, kdy při rychlém postupném zobrazování jednotlivých snímků (například 24 snímků za sekundu) vnímá lidské oko tuto sekvenci jako plynulý pohyb.

Jak je již patrné z předchozího odstavce, základní animační jednotkou je snímek. Počet takových snímků zobrazovaných během jedné sekundy záleží na výstupním médiu. V případě počítačové animace s normální rychlostí se často jedná o 30 snímků za sekundu. [2],[3]

Nejčastěji používanou technikou pro vytváření animovaných scén je tzv. klíčování. Při použití této techniky je animovaná sekvence popsána souborem jejích stěžejních okamžiků. Tyto okamžiky se nazývají klíčové snímky.

Klíčové snímky jsou zpravidla vkládány do tzv. časové osy animace, která uchovává polohu a další vlastnosti objektů, které budeme animovat. [2],[3]

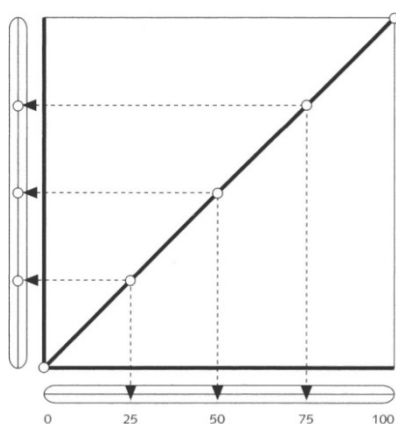
Pro vyplnění mezer mezi klíčovými snímky se využívá techniky označované jako doplnění mezifází. Tato technika obnáší vytvoření všech přechodných obrazů mezi jednotlivými klíčovými snímky. V oblasti počítačové animace je možné tohoto doplnění docílit pomocí techniky označované jako interpolace. Touto technikou je možné vytvářet snímky zprůměrováním parametrů zadaných v klíčovém snímku. Interpolaci lze využít například pro výpočet změny polohy či tvaru objektů ve scéně. [2]

² Ilustrační obrázek je převzat ze článku „The Mystery of the Bouncing Ball“ na stránce http://feucht.us/writings/bouncing_ball.php

Pro interpretaci interpolace jsou nejčastěji využívány grafy. Tyto grafy zachycují závislost parametru, který animujeme, na čase. Čas se nachází na ose vodorovné, animovaný parametr pak na ose svislé. Výsledná křivka popisuje rychlost změny daného údaje. Příklady takových grafů je možné vidět na obrázku.

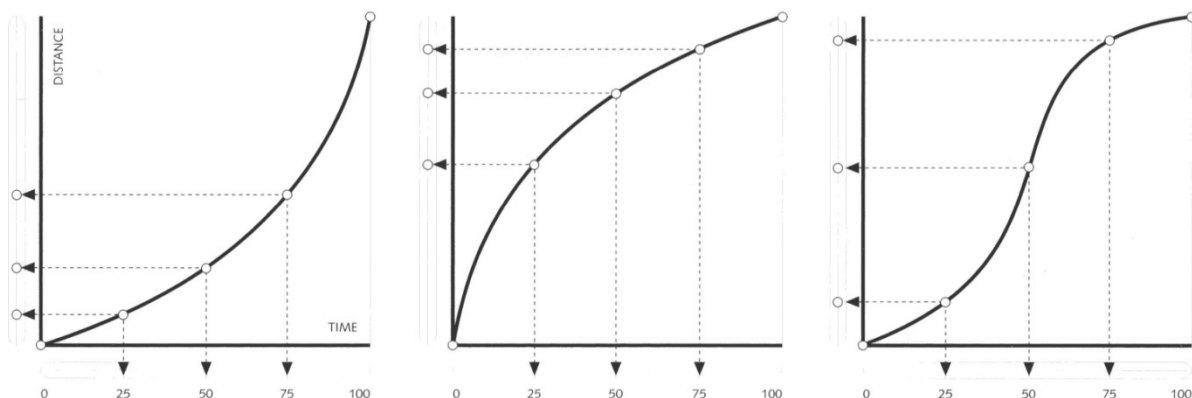
Za nejčastější typy interpolace můžeme považovat interpolaci lineární a křivkovou.

Nejjednodušší metodou pro doplnění mezifází je interpolace lineární, která počítá průměrné hodnoty parametrů klíčových snímků a vytváří potřebné množství rovnoměrně rozložených přechodových snímků. Lineární interpolace pracuje s konstantní rychlostí mezi klíčovými snímky, která je v grafu znázorněna rovnou čarou. Z důvodu konstantní rychlosti však není možné touto metodou zpracovat prudké změny rychlosti. Příklad lineární interpolace je na obrázku (Obrázek 3). [2]



Obrázek 3: Graf závislosti vzdálenosti (osa y) na čase (osa x) [2]

Druhou nejpoužívanější technikou je výše uvedená interpolace křivkou. Tato technika je oproti předchozí metodě mnohem výkonnější. Kromě průměrné hodnoty parametrů klíčových snímků bere v úvahu, na rozdíl od lineární interpolace, i tzv. zrychlení, které je definováno jako změna rychlosti v čase. Pokud není křivkou interpolace v grafu přímka (tzn., že rychlost není konstantní) a zároveň se jedná o křivku zakřivenou směrem vzhůru, rychlost změny se postupně zvyšuje. V případě opačného zakřivení interpolační křivky dochází ke snižování rychlosti změny parametru animace. Příklady grafů interpolace křivkou jsou vyobrazeny na obrázku (Obrázek 4). Pro určení tvaru interpolační křivky může být využita počítačová simulace. [2]

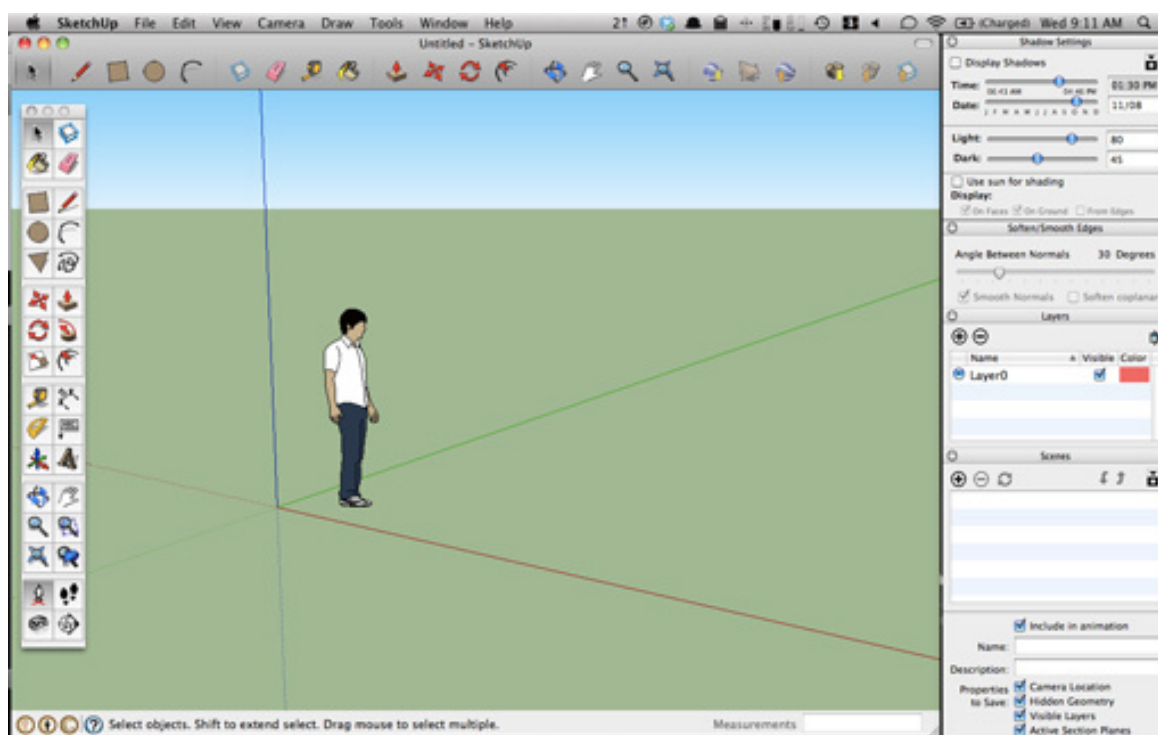


Obrázek 4: Příklady grafů pro interpolaci křivkou [2]

Techniky interpolace bývají využity pro popis změn různých parametrů objektů ve scéně. Cílem změny může být například umístění či orientace objektu v 3D prostoru, jeho tvar nebo jiné atributy, jako jsou třeba barva či průhlednost. [2],[3]

Pro vytvoření modelu, který bude animován, je vhodné využít některý z nabízených modelovacích nástrojů. V současné době je k dispozici mnoho kvalitních softwarových řešení pro tvorbu trojrozměrných modelů a animací. Poměrně široký výběr je jak mezi placenými nástroji, tak i mezi těmi, které jsou poskytovány zcela zdarma. Následující výběr zahrnuje programy, které se řadí právě do druhé skupiny.

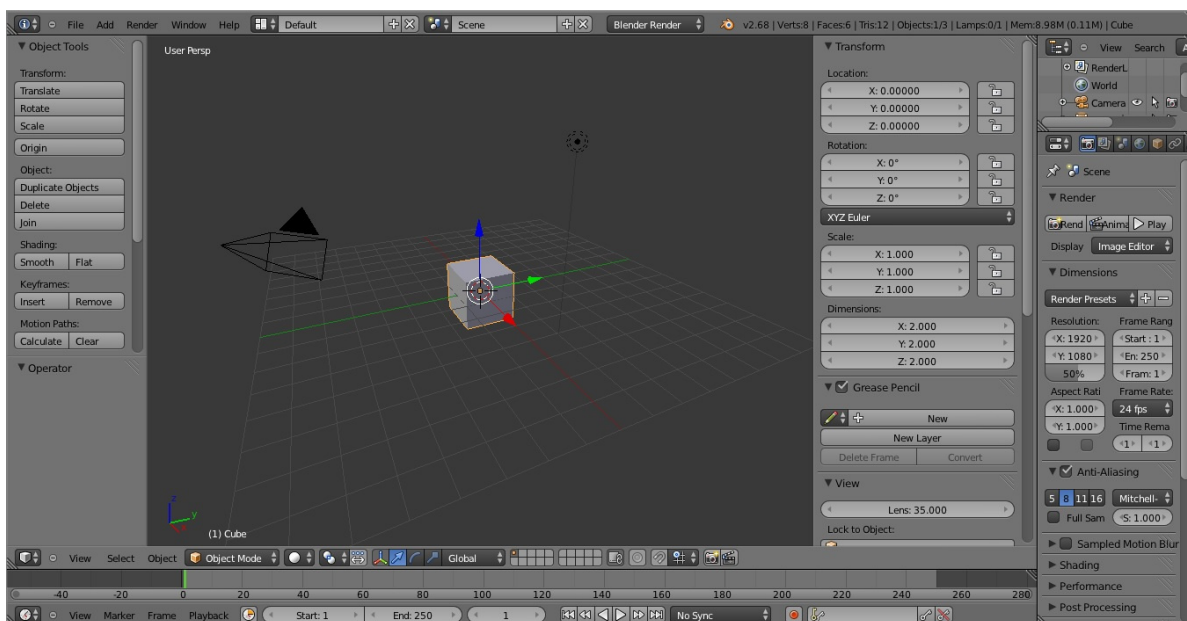
První z programů je nástroj společnosti Google Inc., který nabízí možnost snadného modelování i naprostým začátečníkům. Jedná se o Google SketchUp. Tento program disponuje přehledným prostředím, snadným ovládáním a mimo jiné i českou lokalizací. Pojmenování jednotlivých nástrojů je rovněž velmi intuitivní a srozumitelné i laikovi v oblasti 3D modelování. Program je vhodný zejména pro modelování budov, je možné ho uplatnit při tvorbě počítačových her, filmů i v architektuře. Google SketchUp také umožňuje rychle vytvořit virtuální prohlídku modelovaného objektu. Obrázek (Obrázek 5) ukazuje uživatelské prostředí tohoto nástroje. [9],[10]



Obrázek 5: Uživatelské prostředí Google SketchUp³

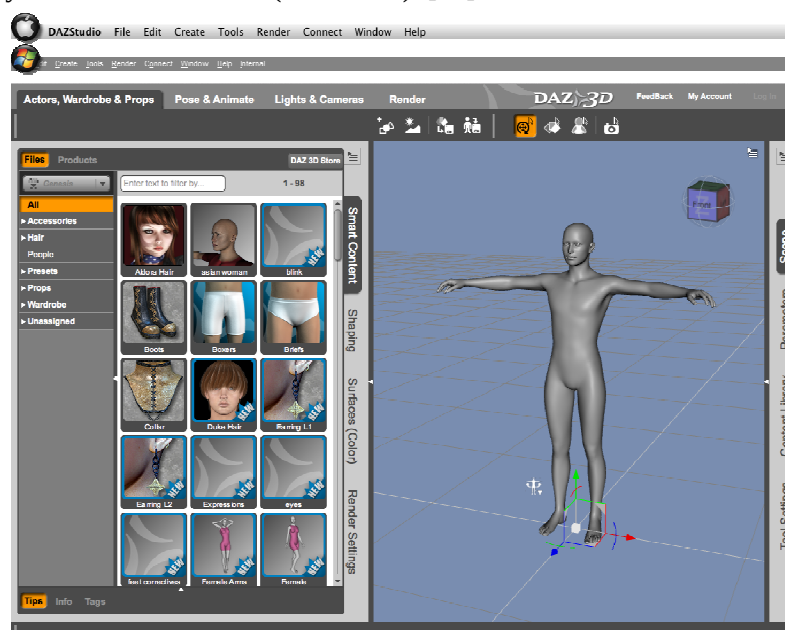
Dalším programem určeným pro vytváření 3D modelů je Blender. Tento program je multiplatformní open source modelovací software. Jedná se o univerzální program s mnoha možnostmi využití. Obsahuje nástroje pro modelování, simulaci, animaci i tvorbu her. Obsahuje mimo jiné i interpret skriptovacího jazyka Python, který slouží pro pokročilejší práci s modelem pomocí vytváření různých skriptů. Uživatelské rozhraní je možné vidět na obrázku (Obrázek 6) níže.

³ Obrázek byl převzat z článku „Create Stunning 3D Text Free With SketchUp“ na <http://designshack.net/articles/graphics/create-stunning-3d-text-free-with-sketchup/>



Obrázek 6: Prostředí programu Blender v2.68

Posledním vybraným programem je DAZ Studio. Jedná se o další z řady modelovacích a animačních programů vhodných pro začátečníky i pokročilé. Výhodou je možnost stahování nejrozličnějších šablon, které je možné posléze individuálně upravit. Program je vhodný zejména na tvorbu trojrozměrných postav, různé ilustrace i tvorbu animovaných videí. Rozložení ovládacích prvků programu je vyobrazeno na obrázku (Obrázek 7). [10]



Obrázek 7: Program DAZ Studio⁴

V poslední části této kapitoly uvedu příklad již hotového modelu kulečnicku. Jedná se o počítačovou hru Billiard Simulator, která vznikla v roce 2005 v dílně českého týmu Darxide Games. Hra byla vytvořena pomocí programovacího jazyka C++ s využitím OpenGL pro vytvoření 3D

⁴ Obrázek prostředí převzat z oficiálních stránek DAZ 3D na <http://docs.daz3d.com/doku.php/public/software/dazstudio/4/referenceguide/interface/start>

vizualizace. Tento projekt obsahuje velmi realistickou simulaci kulečnicku. Jak již bylo zmíněno, jedná se o hru, tudíž lze počítat s interaktivním ovládáním simulace, na rozdíl od animace vytvářené v této práci, která slouží pouze pro vizualizaci pohybu koulí. Tato simulace nabízí mimo nastavení směru a síly i možnost nastavit náklonu tága, či faleš. Všechny tyto nastavení mohou ovlivnit následné chování celého modelu. Náhled z této hry je možné vidět na obrázku (Obrázek 8). [12],[13]



Obrázek 8: Billiard Simulator⁵

2.3 Fyzikální model pohybu koule

Tato kapitola obsahuje základní popis chování jednotlivých částí modelovaného systému. Jedná se o abstraktní model, který používá pro popis systému matematické vztahy. V této kapitole je kladen důraz na matematický popis všech fyzikálních veličin, které mohou působit na jednotlivé prvky modelované soustavy.

Jelikož se jedná o práci s abstraktním modelem, může dojít k zanedbání určitých vlastností reálného systému, které nejsou výrazně nutné pro požadovanou funkci simulačního modelu. [1]

Jednou z nejdůležitějších částí této práce je popis samotného pohybu koule po podložce v trojrozměrném prostoru. Pro popis takového pohybu je nutné znát fyzikální závislosti, které pohyb koule umožňují a dále ovlivňují.

Pro uvedení objektu do pohybu je vždy nutné na něj působit určitou silou po nějaký časový úsek. Jedná se o vektorovou veličinu, která vyjadřuje míru vzájemného působení těles. Síla v tomto modelu slouží k uvedení tělesa do pohybu a dále se vyskytuje jako třecí síla při vzájemné interakci koule s povrchem, po němž se pohybuje.

Obecně se síla označuje jako

$$F = m \cdot a, \quad (1)$$

⁵ Obrázek byl převzat z webu <http://www.cshry.cz/hry/sportovni/billiard-simulator/>

kde a je zrychlení objektu vzniklé působením síly a m značí hmotnost objektu, na který síla působí. Jednotkou síly je newton se značkou N . [5]

Další veličinou, která může ovlivnit trajektorii pohybu je tedy zrychlení. Tato vektorová veličina charakterizuje změnu rychlosti v daném časovém úseku. Okamžité zrychlení hmotného bodu je možné vyjádřit jako

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (2)$$

kde Δv značí změnu rychlosti hmotného bodu v časovém intervalu Δt .

Těleso v pohybu je charakterizováno jeho rychlostí. I v tomto případě hovoříme o vektorové fyzikální veličině, která udává změnu polohy objektu za jednotku času.

Pro rovnoměrný přímočarý pohyb, kdy se těleso pohybuje po vodorovné dráze a nepůsobí na něj síly, které by zrychlovaly nebo zpomalovaly jeho pohyb, je možné vyjádřit velikost změny dráhy objektu jako

$$\Delta s = v \cdot \Delta t, \quad (3)$$

kde Δs značí velikost dráhy v metrech (značíme m) a Δt je časový interval. Jednotka rychlosti je metr za sekundu ($m \cdot s^{-1}$). [5]

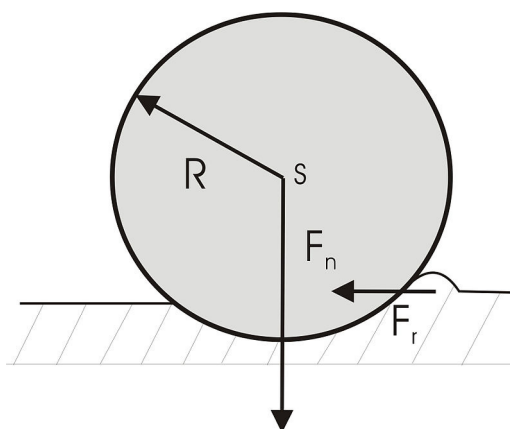
Důležitou veličinou ovlivňující změnu rychlosti objektu je smykové tření. Toto tření vzniká při vzájemném působení dvou těles v místě plochy jejich dotyku. Projevuje se výskytem tzv. třecí síly, která působí proti směru pohybu tělesa. Velikost třecí síly můžeme vyjádřit jako

$$F_t = f \cdot F_n, \quad (4)$$

kde F_n je síla, která je kolmá ke stykové ploše těles a její velikost udává sílu, kterou jsou k sobě tělesa přitahována. Koeficient f je obvyčejné číslo a jedná se o tzv. součinitel smykového tření v pohybu. Jeho velikost závisí na materiálu dotýkajících se těles a také na jakosti povrchu ploch, kterými se tělesa dotýkají. [5]

Smykové tření má hlavní vliv na pohyb v případě, kdy se objekt posunuje, neboli smýká po podložce. V případě koule však toto tření způsobuje nárůst rychlosti rotace koule až do okamžiku, kdy se koule začne valit po podložce bez smýkání.

Při valivém pohybu se projevuje další síla působící proti směru pohybu koule. Tuto sílu vyvolává tzv. valivý odpor.



Obrázek 9: Valivý odpor při deformaci podložky⁶

⁶ Ilustrace byla převzata z <http://cs.wikipedia.org/wiki/Tření>

Tato síla vzniká při tzv. valení pevného oblého tělesa po podložce. Velikost síly valivého odporu lze vypočítat následovně:

$$F_r = \frac{\xi}{R} \cdot F_n. \quad (5)$$

Síla valivého odporu je tedy přímo úměrná normálové tlakové síle F_n a nepřímo úměrná poloměru koule. Řecké písmeno ξ zde značí součinitel valivého tření nebo také rameno valivého odporu. Tento koeficient je závislý zejména na materiálu dotýkajících se objektů a na jakosti jejich stykových ploch. Normálová tlaková síla je taková síla, kterou působí valící se těleso na podložku. V případě pohybu koule po vodorovné podložce lze tedy zapsat jako

$$F_n = m \cdot g, \quad (6)$$

kde m je hmotnost tělesa a g značí konstantu, která je označována jako tíhové zrychlení. [5]

Jak již bylo zmíněno výše, vlivem smykového tření dochází k rotaci koule. Je tedy vhodné se nyní zaměřit na chování bodů koule při rotačním pohybu. Při rotaci kolem pevné osy opisují všechny body koule kruhové oblouky, které mají středy v ose rotace. Osa rotace je přímka, která prochází tělesem a určuje směr rotace. Všechny body ležící na této přímce jsou v klidu. Všechny ostatní body tělesa pak mají, kromě bodů v ose rotace, stejnou úhlovou rychlost, kterou můžeme vyjádřit jako

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \quad (7)$$

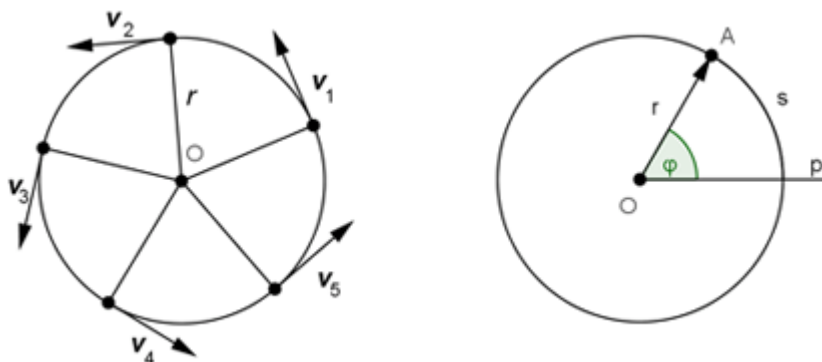
kde $\Delta\varphi$ značí změnu středového úhlu bodu v závislosti na změně času Δt . [6]

Závislost obvodové rychlosti bodu na povrchu koule a jeho úhlové rychlosti lze vyjádřit následovně:

$$v = \omega \cdot r, \quad (8)$$

$$\omega = \frac{v}{r}, \quad (9)$$

kde r je poloměr kruhové dráhy, v tomto případě tedy poloměr koule. Rychlost (v) a dráha (s) bodu A při pohybu po kružnici je znázorněna na následujícím obrázku.



Obrázek 10: Rychlost bodu při pohybu po kružnici⁷

⁷ Použitý obrázek byl převzat ze článku „Pohyb po kružnici“ na webu http://www.techmania.cz/edutorium/art_exponaty.php?xkat=fyzika&xsar=4d656368616e696b61h&key=187

Tyto vztahy závislosti rychlostí platí při valivém pohybu koule po podložce bez smýkání také pro obvodovou rychlost bodu na jejím povrchu a rychlost posuvného pohybu samotné koule.

Další důležitou veličinou pro popis chování koule, zejména při srážkách s okrajem případně jinou koulí je hybnost. Hybnost je vektorová veličina, která označuje míru posuvného pohybu tělesa a je přímo úměrná jeho rychlosti a hmotnosti. Směr hybnosti je shodný se směrem rychlosti tělesa.

Hybnost je definována vztahem

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}. \quad (10)$$

Při vzájemném silovém působení dvou těles je možné získat výslednou hybnost soustavy součtem hybností jednotlivých působících těles. To můžeme zapsat jako

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2. \quad (11)$$

Je nutné si uvědomit, že hybnost jednotlivých těles v izolované soustavě se může měnit pouze v závislosti na hybnosti jiného tělesa. Jinak řečeno musí platit tzv. zákon zachování hybnosti. Ten udává, že vzájemným silovým působením těles se jejich výsledná hybnost nemění.

$$\vec{p}_{01} + \vec{p}_{02} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2. \quad (12)$$

V této rovnici $\vec{p}_{01}$ a $\vec{p}_{02}$ představují hybnosti dvou těles před vzájemným působením, $\vec{p}_1$ a $\vec{p}_2$ značí hybnosti po ukončení vzájemné interakce. [5],[6]

Zákon zachování energie patří mezi nejdůležitější přírodní zákony a udává, že energie v izolované soustavě těles může přecházet z jednoho tělesa na druhé, případně se měnit na jinou formu energie. Celková energie soustavy však musí být zachována.

Pohybovou neboli kinetickou energii tělesa lze vyjádřit jako

$$E_k = \frac{1}{2} m \cdot \vec{v}^2. \quad (13)$$

Zákon zachování energie pak podobně jako zákon zachování hybnosti má tvar

$$E_k = E_{k1} + E_{k2}. \quad (14)$$

Po dosazení příslušných hybností pak získáme vztah

$$\frac{1}{2} m_k \cdot \vec{v}_{k0}^2 + \frac{1}{2} m_s \cdot \vec{v}_{s0}^2 = \frac{1}{2} m_k \cdot \vec{v}_k^2 + \frac{1}{2} m_s \cdot \vec{v}_s^2. \quad (15)$$

Další veličinou, která bude v této kapitole uvedena, je moment setrvačnosti. Tato veličina popisuje rozložení látky tuhého tělesa vzhledem k ose rotace. Moment setrvačnosti koule lze tedy vyjádřit jako

$$J = \frac{2}{5} m \cdot r^2, \quad (16)$$

kde m značí hmotnost koule a r je její poloměr.

Výše uvedené vztahy poslouží pro odvození rovnic popisujících pohyb koule s využitím vektorů v jedné z dalších částí této práce. [7]

Dalším údajem, který je vhodné uchovávat, je orientace objektu v prostoru. Tuto vlastnost lze vyjádřit tzv. maticí rotace. Její tvar pro rotaci tělesa kolem libovolné osy otáčení a v jednotkovém tvaru můžeme vyjádřit jako:

$$R = \begin{bmatrix} a_1^2 + C \cdot (1 - a_1^2) & a_1 \cdot a_2(1 - C) - a_3 \cdot S & a_1 \cdot a_3(1 - C) + a_2 \cdot S \\ a_1 \cdot a_2(1 - C) + a_3 \cdot S & a_2^2 + C \cdot (1 - a_2^2) & a_2 \cdot a_3(1 - C) - a_1 \cdot S \\ a_1 \cdot a_3(1 - C) - a_2 \cdot S & a_2 \cdot a_3(1 - C) + a_1 \cdot S & a_3^2 + C \cdot (1 - a_3^2) \end{bmatrix}, \quad (17)$$

kde

$$C = \cos(\alpha), \quad (18)$$

$$S = \sin(\alpha). \quad (19)$$

Úhel α zde značí úhel, o který se těleso otočí. [11]

3 Možnosti tvorby animace

Tato kapitola se zabývá hlavní ideou vytvoření trojrozměrné animace pohybu koulí po kulečnickovém stole. V případě této práce se nejedná o klasickou animaci kompletně vytvořenou v prostředí pro tvorbu 3D modelů a animací, nýbrž o počítačovou simulaci chování reálného systému a následnou vizualizaci výsledků této simulace.

3.1 Koncepce simulace

Nejdříve je nutné zvolit vhodnou metodu simulace. Vzhledem k fyzikální podstatě modelovaného systému se nabízí metoda spojitě simulace, ale při bližším pohledu je možné vidět jistou diskontinuitu. Když se zaměříme na jednotlivé prvky systému, tj. každou ze sady koulí, je možné zkoumat jejich vlastnosti.

Koule v pohybu na hrací ploše kulečnickového stolu je v rámci této práce charakterizována několika základními charakteristikami. První z elementárních částí popisu stavu koule je aktuální rychlost pohybu. Vzhledem k tomu, že se koule pohybuje v prostoru, je nutné kromě rychlosti uvažovat také směr, kterým se koule danou rychlostí pohybuje. Pro popis rychlosti je tedy vhodné využít popisu vektorem, který značí směr pohybu koule a jeho velikost odpovídá aktuální rychlosti. Rychlost koule se mění v závislosti na velikosti a směru třecí síly, případně valivého odporu. Velikost těchto sil se v reálném světě s rostoucí rychlostí může měnit. V této práci dochází ke zjednodušení pohybu, a proto velikost těchto sil bude považována za konstantní.

Druhou zásadní charakteristikou, která ovlivňuje trajektorii koule je její rotace. Stejně jako u rychlosti pohybu i zde je možné využít k celkovému popisu aktuálního stavu rotace koule jediného vektoru. Směr takového vektoru značí polohu osy rotace a jeho velikost udává úhlovou rychlost, kterou dosahuje bod na povrchu koule.

Výše zmíněné veličiny mají spojitý průběh, a proto je možné tvrdit, že chování koulí je spojitě. Pro finální volbu simulační metody je však nezbytné zkoumat i další okolnosti.

Každá koule musí být schopna reagovat na interakci s okolím, ať už se jedná o odraz od okraje stolu, či vzájemnou srážku koulí. Každá taková interakce je chápána jako mimořádná událost, která se projeví jako změna tzv. stavových podmínek. Tyto podmínky je nutné testovat po každém provedení změny polohy koule. V této práci jsou pro zjednodušení považovány srážky koule s okrajem i vzájemné srážky koulí za dokonale pružné.

Výskyt takových událostí můžeme označit jako diskrétní chování. Jelikož se v modelu mísí prvky spojitě i diskrétní, je nutné zvolit simulační metodu kombinovanou.

Dalším problémem, který musí být vyřešen, je stanovení délky jednoho simulačního kroku. Nejjednodušší řešení je zvolit velmi malý krok a provádět simulaci s tzv. pevným krokem. Během této simulace není nutné nijak zvláštně ošetřovat výskyt mimořádných událostí, jako je například překročení mezí hrací plochy při nárazu koule do okraje. V případě prvního překročení meze je možné okamžitě provést reakci na danou situaci. Tento způsob je sice jednoduchý, avšak ne moc efektivní, jelikož i při rovnoměrném pohybu bez výskytu jakékoliv události musí být provedeno velké množství kroků integrační metody.

Jinak je tomu při provádění simulace s pohyblivým krokem. V tomto případě můžeme zvolit větší krok. Potom je možné provádět krok integrační metody pro větší časový úsek najednou a ušetřit tak strojový čas. Problém však nastává při výskytu události uprostřed takového dlouhého časového

okamžiku. Tuto situaci však lze vyřešit navrácením simulačního modelu do stavu před provedením integračního kroku, zmenšit krok simulace a „dokročit“ na výskyt diskrétní události, jak bylo zmíněno v předchozí kapitole o metodách počítačové simulace.

V rámci simulace, která je součástí této práce, je použita první ze zmíněných metod, a sice simulace s pevným krokem. Tato metoda byla vybrána kvůli jednodušší implementaci s ohledem na rozhraní mezi simulačním programem a modelem pro vizualizaci.

Pro výslednou animaci, tedy vizualizaci výsledků je potřeba, aby simulační program zaznamenával různé charakteristiky objektů v daných časových okamžicích. Proto je nezbytné, aby pro každý snímek animace existoval záznam, který úplně charakterizuje modelovaný objekt. Jak již bylo dříve zmíněno, pro popis stavu koule, jejíž chování chceme animovat, musíme znát její polohu a orientaci v prostoru.

Výstupem programu tedy může být soubor, který obsahuje záznamy seřazené dle času. Každý záznam dané koule pak může obsahovat každou souřadnici její polohy v prostoru a dále informaci o aktuální orientaci.

Takový soubor musí být následně rozhraním vytvořeným mezi simulačním programem a vizualizačním modelem interpretován a zpracován nástrojem určeným pro modelování a tvorbu animací.

3.2 Prostředky pro modelování

Nyní přichází na řadu výběr vhodného modelovacího prostředí. V předchozí kapitole byly uvedeny bezplatné programy pro modelování. První z uvedených, Google SketchUp, je sice uživatelsky velmi přívětivý a nenáročný. Velkou výhodou tohoto programu může být česká lokalizace a také rozsáhlá komunita kolem tohoto nástroje. Pro tvorbu animace fyzikálních jevů však dle mého názoru není příliš vhodný. Jak již bylo výše zmíněno, jeho hlavní síla tkví v modelování budov a interiérů. Dále je nutno podotknout, že program je sice zdarma, ale pro vytvoření animace v nějakém z běžně používaných výstupních formátů je třeba zaplatit rozšířenou verzi.

Další uvedený program byl Blender. Zde se jedná velmi pokročilý software s řadou užitečných nástrojů. Tento program obsahuje kromě prostředí pro tvorbu modelu také speciální režim, kde je možné vytvářet animaci. Další důležitou vlastností programu je již zmíněný vestavěný interpret jazyka Python, který může být využit pro vytvoření rozhraní mezi výstupem simulačního programu a vizualizačním modelem. Komunita kolem tohoto nástroje je také velmi rozsáhlá, a tak je možné na webu nalézt velké množství informací o práci v tomto prostředí.

Poslední jmenovaný software byl DAZ Studio. Velkou výhodou tohoto programu je možnost stahování velkého množství různých šablon a hotových objektů. Jeho specializací je však zejména tvorba postav, což není výhodné pro tvorbu modelu v této práci.

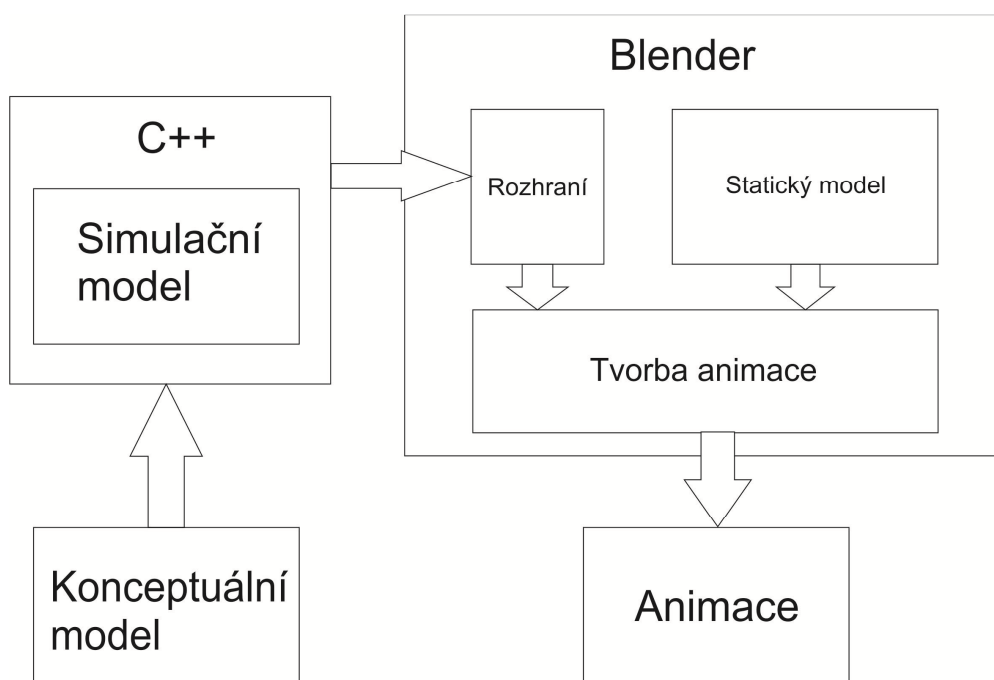
Z výše uvedených programů byl tedy pro vizualizaci modelu kulečnicku zvolen program Blender.

4 Realizace simulace a animace

Vlastní tvorba animace je problém, který lze rozdělit na několik základních částí. Jedná se o několik modulů, které spolu komunikují a vytváří tak výslednou animaci. Hlavním důvodem pro toto rozdělení bylo oddělit samotnou programovou část, která provádí simulaci chování modelu, od vizualizační části. Tato dekompozice je znázorněna schématem na obrázku (Obrázek 11).

V první fázi práce je tedy specifikován konceptuální model kulečnicku, který shrnuje informace o modelu do přehledné formy. Specifikují se zde konkrétní hodnoty použité v simulaci a je zde uveden neformální popis modelovaného systému důležitý pro tvorbu simulačního programu. Na konceptuální model navazuje upravený fyzikální model, který definuje chování modelu s využitím upravených fyzikálních vztahů.

Druhá část specifikuje samotnou implementaci simulačního modelu v programovacím jazyce C++. Tato část zahrnuje vytvoření programu, který provádí algoritmus kombinované simulace. Celou implementaci animovaného modelu můžeme rozdělit na dvě základní části. V první části se jedná o samotný simulační model, který slouží pro popis chování samotného modelu. Druhá část implementuje rozhraní mezi simulačním modelem a modelovacím nástrojem pro vizualizaci výsledků simulace. Výstupem simulačního modelu je soubor s informacemi důležitými pro vizualizaci v grafickém programu.



Obrázek 11: Dekompozice problému

Další část tvoří práce v prostředí modelovacího prostředí Blender. V tomto programu byl zpočátku vytvořen trojrozměrný model, který bude díky provedenému simulačnímu experimentu uveden do pohybu. Pomocí vestavěného interpretu jazyka Python je vytvořeno rozhraní, které zpracovává výsledky simulace uložené v souboru a vytváří klíčové snímky animace na základě těchto dat. Blok „Tvorba animace“ ve schématu zahrnuje finální upravení modelu a výsledné renderování animace, která je výstupem celého výrobního procesu.

4.1 Upravený model koule

Jak bylo uvedeno výše, konceptuální model shrnuje vlastnosti modelovaného systému a pomocí neformálního popisu dává základ k vytvoření simulačního modelu. Pro vytvoření konceptuálního modelu je nutné mít všechny podstatné informace, které je možné získat abstrakcí znalostí o reálném systému. Je tedy nezbytné zvolit vhodnou úroveň abstrakce tak, aby chování modelu odpovídalo našim požadavkům.

Aby bylo možné se věnovat popisu chování modelu v daném časovém úseku, je nezbytné nejdříve definovat samotné prostředí, ve kterém bude simulace probíhat. Jedná se například o rozměry hrací plochy a rozmístění koulí na počátku simulace. Dále je nutné uvést koule do pohybu počátečním úderem do jedné z koulí.

Základní částí modelu je kulečnickový stůl. Povrch stolu je pokryt plátnem, kde součinitel smykového tření koule na tomto plátně je 0,2⁸. Pokud jde o rozměry hrací plochy, pro tento model byl vybrán stůl s hrací plochou o velikosti 6ft, tzn. 180 x 90 cm⁹. Pro zjednodušení modelu neobsahuje hrací plocha díry, které jsou nadbytečné pro účely simulace pohybu koulí.

Pro simulaci je použito šestnáct koulí, z nichž je patnáct barevných a jedna bílá. Všechny koule považujeme za homogenní objekty, tzn. celý jejich objem je tvořen jedním materiálem. Hmotnost jedné koule v modelu je 170g a každá z těchto koulí má průměr 57,2 mm.¹⁰

Počátečním úderem je rozpořehybována právě bílá koule, která může interagovat s ostatními barevnými koulemi. Pro zjednodušení předpokládáme úder do přesného středu koule.

Když je koule uvedena do pohybu dostatečně silným úderem, začíná se pohybovat počáteční rychlostí a směrem. Působením třecí síly o konstantní velikosti na povrch koule proti směru jejího pohybu dochází postupně k nárůstu rychlosti její rotace.

V případě simulace pohybu koulí po kulečnicku je nutné definovat pohyb každé jednotlivé koule na kulečnickovém stole. Dále musí koule reagovat na interakci s okolím, ať už se jedná o styk s povrchem stolu, odraz od okraje, či srážku dvou nebo více koulí. Pro tyto srážky je použito zjednodušení. Všechny srážky v tomto modelu jsou tedy považovány za dokonale pružné.

V následujícím textu bude popsáno zjednodušené chování koule s využitím vektorů. Tento popis uvažuje jisté zjednodušení a zanedbání určitých jevů, jako je například odpor vzduchu působící na kouli. Rovnice jsou upravené tak, aby sloužily pro vytvoření animovaného modelu, nepopisují proto přesné chování reálného systému. Dále je předpokládáno použití velmi malého kroku simulace, aby bylo možné uvažovat v každém kroku konstantní rychlost i rotaci kolem pevné osy a využít tak výše uvedené rovnice. Pro změnu polohy koule bude tedy využívána rovnice (3).

Hlavní charakteristikou, která bude určovat výsledný směr pohybu, je tedy rychlost koule. Její změnu oproti počáteční rychlosti je možné uvést následovně:

$$\vec{v}_{k+\Delta t} = \vec{v}_k + \vec{a}_t \cdot \Delta t. \quad (20)$$

Tento vztah byl odvozen z rovnice č. 2 s využitím vektorové algebry. Na základě rovnice č. 1 lze tedy zrychlení vyjádřit jako

$$\vec{a}_t = \frac{\vec{F}}{m}, \quad (21)$$

⁸ Tento koeficient byl získán na webu <http://billiards.colostate.edu/threads/physics.html>

⁹ Tyto údaje byly zjištěny na webu <http://www.kulecnik-shop.cz/vse-o-kulecniku/>

¹⁰ Rozměry a hmotnosti koulí převzaty z webu <http://www.kulecnik-shop.cz/vse-o-kulecniku/>

kde $\vec{F}$ označuje celkovou sílu působící proti pohybu koule. Pro výpočet této síly je nezbytné znát rychlost (zejména její směr), jakou se pohybuje bod na povrchu koule v místě styku koule s podložkou. Aktuální rychlost tohoto může být určena vektorem $\vec{v}_b$ takto:

$$\vec{v}_b = \|\vec{n} \times \vec{r}\| \cdot (|\vec{r}| \cdot R) \quad (22)$$

V této rovnici udává normovaný vektorový součin vektorů $\vec{n}$ a $\vec{r}$ směr pohybu bodu na povrchu koule, kde vektor $\vec{n}$ je jednotkový vektor kolmý k podložce a $\vec{r}$ je vektor rotace. Směr vektoru rotace udává polohu osy rotace a jeho velikost popisuje úhlovou rychlost. Rychlost tohoto bodu udává součin úhlové rychlosti (velikost vektoru rotace) a poloměru koule R .

Pro výpočet přírůstku rotace je potřeba znát dráhu, kterou vykoná bod povrchu koule smýkáním po povrchu hrací plochy. Tuto dráhu je možné získat součtem rychlosti bodu na povrchu vlivem rotace a rychlosti samotné koule a násobením časovým úsekem, jak je uvedeno níže.

$$\vec{l} = (v_k + v_b) \cdot \Delta t \quad (23)$$

Dosazením rychlosti bodu z rovnice (22) dostaneme

$$\vec{l} = [v_k + \|\vec{n} \times \vec{r}\| \cdot (|\vec{r}| \cdot R)] \cdot \Delta t \quad (24)$$

Nyní je důležité spočítat velikost třecí síly, která bude působit proti výslednému pohybu bodu na povrchu koule. Tuto sílu lze vyjádřit pomocí vztahů (4) a (6) následovně:

$$|\vec{F}_t| = f \cdot m \cdot g \quad (25)$$

Její směr působí opačným směrem oproti pohybu bodu na povrchu koule v místě styku koule s podložkou. Směr síly lze vyjádřit jako

$$\|\vec{F}_t\| = \|\vec{v}_k + \vec{v}_b\| \cdot (-1) \quad (26)$$

kde $\vec{v}_k$ značí rychlost pohybu koule a $\vec{v}_b$ je rychlost bodu.

Vektor třecí síly lze tedy celkově vyjádřit takto:

$$\vec{F}_t = (f \cdot m \cdot g) \cdot [\|\vec{v}_k + \vec{v}_b\| \cdot (-1)] \quad (27)$$

Dále následuje výpočet vektoru rotace. Tento vektor se mění v závislosti na dráze uražené bodem na povrchu koule a podílu třecí síly a momentu setrvačnosti. Jeho přírůstek je možné zapsat následovně:

$$\vec{r}_{t+\Delta t} = \vec{r}_t + \left(\frac{|\vec{F}_t|}{J} \cdot \vec{l} \right) \times \vec{n} \quad (28)$$

Vektorový součin zde udává směr osy rotace.

Výše uvedené vztahy popisují změnu polohy a rotace koule v čase. Tento popis je zjednodušený a zanedbává určité jevy, které nejsou podstatné pro účely modelu v této práci.

Další důležitou částí matematického modelu je popis chování koule při nárazu do stěny. I v této části dochází ke zjednodušení či zanedbání jistých jevů.

V tomto modelu je považována taková srážka koule s okrajem za dokonale pružnou. V důsledku toho je možné uvažovat, že úhel, pod kterým narazí koule do okraje hrací plochy je roven úhlu, pod kterým se koule odrazí.

Pro získání výsledné rychlosti po dokonale pružné srážce koule s okrajem stolu je možné využít zákon zachování hybnosti a zákon zachování energie.

V první fázi je vhodné patřičně upravit rovnici pro zákon zachování hybnosti. Při nárazu koule do stěny stolu je možné považovat stůl a kouli za dvě tělesa s různými hybnostmi, které na sebe vzájemně působí silou. Dosazením do rovnice (12) tedy platí

$$m_k \cdot \vec{v}_{k0} + m_s \cdot \vec{v}_{s0} = m_k \cdot \vec{v}_k + m_s \cdot \vec{v}_s \quad (29)$$

kde m_k , značí hmotnost koule a m_s je hmotnost stolu. V tomto případě není nutné rozlišovat hmotnosti před a po srážce, jelikož hmotnost koule ani stolu se při vzájemné interakci nezmění.

Po úpravě rovnic pro zákon zachování hybnosti (29) a zákon zachování kinetické (15) získáme soustavu

$$m_k \cdot (\vec{v}_{k0} - \vec{v}_k) - m_s \cdot (\vec{v}_{s0} - \vec{v}_s) = 0 \quad (30)$$

$$m_k \cdot (\vec{v}_{k0}^2 - \vec{v}_k^2) - m_s \cdot (\vec{v}_{s0}^2 - \vec{v}_s^2) = 0 \quad (31)$$

Vydělením druhé rovnice první dostaneme

$$(\vec{v}_{k0} + \vec{v}_k) - (\vec{v}_{s0} + \vec{v}_s) = 0 \quad (32)$$

a odtud je možné vyjádřit výslednou rychlost koule po odrazu jako

$$\vec{v}_k = \vec{v}_{s0} + \vec{v}_s - \vec{v}_{k0} \quad (33)$$

Po dosazení rychlosti do rovnice (29) získáme

$$\vec{v}_k = \frac{\vec{v}_{k0} \cdot (m_k - m_s) + 2 \cdot m_s \cdot \vec{v}_{s0}}{m_k + m_s} \quad (34)$$

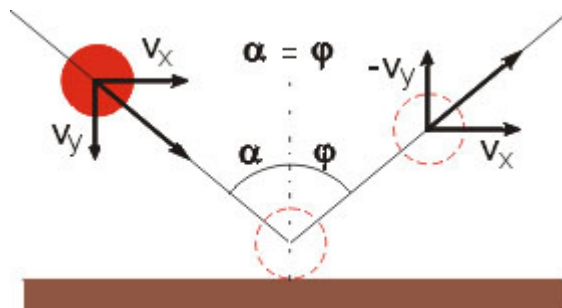
Vzhledem k velmi velkému hmotnostnímu rozdílu mezi stolem a koulí je možné v tomto případě hmotnost koule zanedbat. Potom je možné vyjádřit rychlost koule po srážce jako

$$\vec{v}_k = -\vec{v}_{k0} \quad (35)$$

Ze stejného důvodu je zřejmé, že rychlost stolu se po srážce s koulí nijak nezmění a zůstává nulová.

Z rovnice (35) vyplývá, že výsledná rychlost koule po srážce s okrajem stolu bude stejně velká jako rychlost koule před srážkou, pouze opačného směru. To však neplatí pro celkovou rychlost

koule, nýbrž jen pro jednu z jejích složek (jak znázorňuje obrázek). V tomto případě je využit princip nezávislosti pohybů a tak je možné rychlost rozložit do třech složek podle každé z os souřadné soustavy. Při nárazu do stěny ve směru osy x nebo proti jejímu směru bude ovlivněna pouze ta složka rychlosti, která odpovídá této ose. To samé platí i v případě nárazu ve směru osy y . Odraz koule od stěny v ose y znázorňuje obrázek (Obrázek 12).



Obrázek 12: Odraz koule od okraje ve směru osy y ¹¹

Další interakcí, na kterou koule musí reagovat, je srážka s jinou koulí. V této kapitole bude popsána srážka pohybující se koule s koulí, která je v klidu. Pro pohybující se obě koule je nutné provést výpočet dvakrát, kde pokaždé bude uvažována v pohybu pouze jedna z koulí. Výsledné rychlosti každé koule se pak sečtou pomocí vektorového součtu. V první fázi je nutné zjistit, jaký úhel budou svírat výsledné hybnosti jednotlivých koulí po vzájemné srážce. Tento úhel je vyznačen jako ϕ na obrázku (Obrázek 13).



Obrázek 13: Směr hybností koulí před a po srážce¹²

I zde bude platit zákon zachování hybnosti, jenž je popsán vztahem (12). Hybnosti v této rovnici nyní vyjadřují hybnosti jednotlivých koulí, které se účastní střetu.

Pro zjištění úhlu je možné využít kosinové věty, pomocí které lze spočítat, kterýkoliv úhel v rovinném trojúhelníku na základě znalosti všech jeho stran. Kosinovou větu lze pro tento případ zapsat jako

$$\vec{p}^2 = \vec{p}_1^2 + \vec{p}_2^2 + 2 \cdot \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 \cdot \cos(\varphi). \quad (36)$$

Po dosazení získáme

$$m^2 \cdot \vec{v}^2 = m^2 \cdot \vec{v}_1^2 + m^2 \cdot \vec{v}_2^2 + 2 \cdot m^2 \cdot \vec{v}_1 \cdot m^2 \cdot \vec{v}_2 \cdot \cos(\varphi). \quad (37)$$

Ve vztahu (37) je předpokládána stejná hmotnost obou koulí.

Dále stejně jako v případě odrazu koule od stěny platí také zákon zachování energie. Jeho podoba je uvedena v rovnici (14). Při dosazení do vztahů (13) a (14) získáme vztah

¹¹ Zdroj obrázku je na webu httpfyzweb.czmaterialsrazky_a_rotacek13.php

¹² Obrázek byl převzat z webu http://fyzweb.cuni.cz/dilna/krouzky/sr_rot/k12.htm

$$\frac{1}{2}m \cdot \vec{v}^2 = \frac{1}{2}m \cdot \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2}m \cdot \vec{v}_2^2 \quad (38)$$

Po upravení obou vztahů získáme soustavu rovnic

$$\vec{v}^2 = \vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2 + 2 \cdot \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \cdot \cos(\varphi) \quad (39)$$

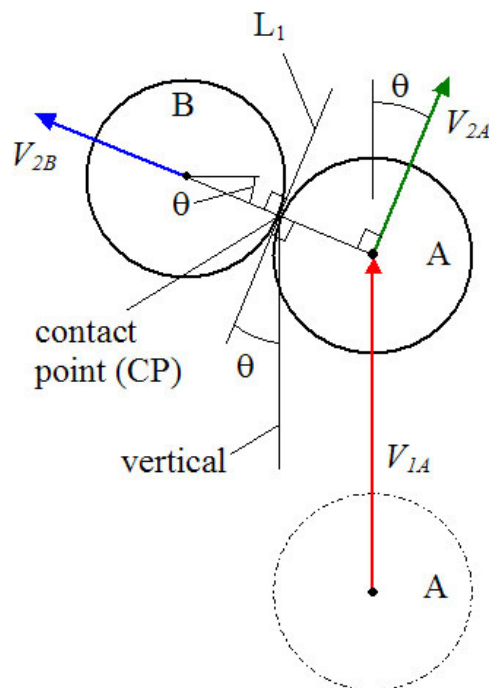
$$\vec{v}^2 = \vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2. \quad (40)$$

Z toho vyplývá, že pro zachování rovnosti musí platit, že

$$\cos(\varphi) = 0. \quad (41)$$

Tomuto výsledku odpovídají dva různé úhly, a to sice 90° a 0° , kde druhý výsledek odpovídá srážce, kdy rychlost koule v pohybu je rovnoběžná s přímkou, na které obě koule leží. Tento úhel se týká rozkladu rychlosti pohybující se koule, jak znázorňuje obrázek (Obrázek 14). Výsledná velikost úhlu mezi jednotlivými hybnostmi koulí pak bude určena vektorovým součtem s rychlostmi koulí před srážkou. [8]

Tímto však problém srážky koulí nekončí. I když je znám směr, kterým se koule po srážce budou pohybovat, je nezbytné určit výsledné velikosti rychlostí obou koulí. K tomu poslouží rozklad počáteční rychlosti koule iniciující srážku na dvě kolmé složky. Tento rozklad je znázorněn na obrázku (Obrázek 14).



Obrázek 14: Rozklad rychlosti při srážce dvou koulí¹³

¹³ Ilustrace byla převzata ze článku „The Physics of Billiards“ na webu <http://www.real-world-physics-problems.com/physics-of-billiards.html>

Na tomto obrázku rychlost V_{1A} značí rychlost koule způsobující srážku. Rychlosti V_{2A} a V_{2B} jsou výsledné rychlosti koulí po srážce. Převedením vektoru rychlosti koule A a vektoru spojnice obou koulí do polárních souřadnic získáme jejich úhly v rovině. Z těchto úhlů je možné odvodit (způsobem závislým na vzájemné poloze koulí) úhel θ , který poslouží k vyjádření velikostí jednotlivých rychlostí.

Pokud je znám úhel θ , je možné rychlosti odvodit pomocí goniometrických funkcí z pravoúhlého trojúhelníka, kde

$$\vec{V}_{2A} = \cos(\theta), \quad (42)$$

$$\vec{V}_{2B} = \sin(\theta). \quad (43)$$

Směr rychlosti V_{2A} je roven směru spojnice obou koulí a směr rychlosti V_{2B} je kolmý na směr této spojnice. Tuto kolmici lze vyjádřit vektorovým součinem

$$\|\vec{V}_{2A}\| = \|\vec{u} \times \vec{V}_{2B}\|, \quad (44)$$

kde $\vec{u}$ je jednotkový vektor kolmý k povrchu stolu.

4.2 Implementace simulačního modelu

Tato kapitola obsahuje popis základní struktury programu provádějícího simulaci chování koulí. Pro implementaci simulačního modelu jsem zvolil programovací jazyk C++.

Základním elementem, který uchovává aktuální parametry koule, je datová struktura `koule`. V této struktuře jsou kromě neměnných parametrů koule, jako jsou průměr, hmotnost, či moment setrvačnosti, uloženy také aktuální stavy veličin, charakterizující samotný pohyb koule. Jedná se zde o vektor okamžité rychlosti, vektor rotace a v neposlední řadě také o aktuální souřadnice dané koule.

Simulace poté probíhá se sadou koulí uložených v poli o šestnácti prvcích typu datové struktury `koule`.

Kromě popisu jednotlivých koulí je nedílnou součástí implementace také popis parametrů stolu. Patří sem rozměry hrací plochy, součinitel smykového tření plátna s koulí na ploše stolu a další neměnné parametry. Tyto parametry nejsou uloženy v žádné zvláštní datové struktuře, nýbrž jako globální proměnné a konstanty pro snadný přístup k jednotlivým hodnotám.

Jako jádro celé implementace můžeme označit algoritmus pro provádění kombinované simulace. Jedná se o cyklus, ve kterém jsou postupně prováděny integrační kroky a reakce na mimořádné události vyvolané například překročením nastavených mezí. Tento cyklus je ukončen v požadovaném čase simulace, který je v programu nastaven jako globální proměnná.

Jelikož se jedná o simulaci s pevným krokem, je integrační krok nastaven na 1/240s. Tento krok je dostatečně malý na to, aby bylo možné včas reagovat na události vyvolané během provádění kroku výpočtu. Po každém takovém úseku je provedena kontrola stavových podmínek, a to jak pro průnik koule okrajem, tak vzájemnou srážku koulí. Pokud dojde k takovému překročení mezí, je provedena reakce na danou událost.

Kontrola, zda došlo ke změně stavových podmínek je obstarána v samostatných funkcích, které jsou volány po provedení výpočtu nových souřadnic všech koulí. Tyto funkce kromě kontroly také

provádějí reakci na danou změnu tím, že upraví parametry zúčastněných koulí na hodnoty po provedení interakce.

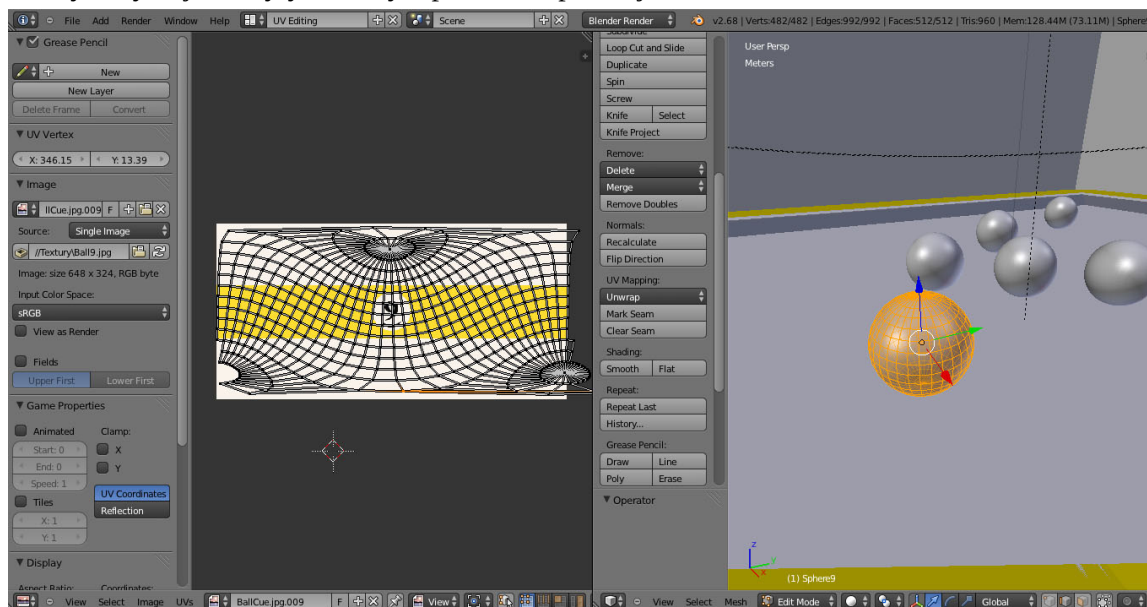
V závislosti na kroku simulace, který byl zvolen jako 1/240s, je po každém osmém kroku simulace proveden zápis stavu koulí do souboru. Je tomu tak proto, že počet snímků za sekundu ve výsledné animaci byl zvolen na 30. Pokud by teda existoval záznam pro každý krok simulace, vizualizační model by nebyl schopen takové množství snímků využít.

V matematickém modelu je pro popis chování koulí hojně využívána práce s různými vektory popisujícími stav koule. Pro práci s vektory, které jsou využívány k popisu tohoto stavu, byl vytvořen speciální modul `vektory.cpp` s rozhraním `vektory.h`, který definuje funkce pro operace prováděné s vektory v trojrozměrném prostoru. Obsahuje mimo jiné algoritmy pro vektorový součet, velikost vektoru, či skalární a vektorový součin. Všechny tyto funkce byly vytvořeny pro zjednodušení práce a v poslední řadě zpřehlednění kódu.

4.3 Vizualizace

Pro vizualizaci výsledků simulačního modelu v této práci byl vybrán program Blender.

V první fázi vizualizace byl modelováním v programu Blender vytvořen statický model. Tento model se skládá z objektu kulečnickového stolu umístěného v rohu místnosti a šestnácti objektů jednotlivých koulí. Kulečnickový stůl byl vytvořen bez otvorů v rozích, jak bylo zmíněno v jedné z předchozích kapitol. Povrch stolu a stěn byl pokryt texturami¹⁴. Všechny koule v tomto modelu mají stejnou velikost a jsou odlišeny texturou¹⁵. Tato textura byla aplikována pomocí tzv. UV mapování, kdy dochází k „rozbalení“ povrchu objektu do roviny a je na něj nanášena textura v podobě dvojrozměrného obrázku. Způsob umístění textury na kouli je možné vidět na obrázku (Obrázek 15). Všechny míry objektů byly zvoleny v poměru odpovídajícím realitě.



Obrázek 15: Ukázka aplikace textury na kouli

¹⁴ Textury dřeva a kulečnickového plátna byly získány na webu <http://subtlepatterns.com>, kde jsou poskytovány zdarma ke stažení

¹⁵ Textury jednotlivých koulí byly získány na webu <https://www.robinwood.com/Catalog/FreeStuff/Textures/TexturePages/BallMaps.html>

Pro interpretaci výsledků simulace formou animace bylo nezbytné vytvořit rozhraní mezi simulačním modelem a modelovacím nástrojem. Toho bylo docíleno pomocí skriptu v jazyce Python. Tento skript načítá po řádcích záznamy ze souboru vytvořeného simulačním programem. Každý záznam v souboru obsahuje souřadnice a transformační matici pro každou kouli. Hlavní částí skriptu je cyklus, který postupně převádí načtené řetězce na odpovídající hodnoty a každému objektu v každém snímku animace nastaví příslušné parametry. Transformační matice je v rámci skriptu převedena na Eulerovy úhly, které charakterizují natočení objektu podle jednotlivých os. Interpolací vytvořených snímků je možné následně vytvořit iluzi plynulého pohybu. Snímek statického modelu je možné vidět na obrázku (Obrázek 16).



Obrázek 16: Vytvořený statický model

5 Závěr

Cílem této práce bylo vytvoření trojrozměrného animovaného modelu, který napodobuje chování kulečnickových koulí při pohybu po hrací ploše. Tento cíl byl splněn.

Při této práci jsem studoval dostupnou literaturu na téma animace trojrozměrných modelů a dostupné programové vybavení pro tvorbu animací. Tyto poznatky byly shrnuty ve druhé kapitole. V práci byl navržen postup pro animaci pohybu koulí po kulečnickovém stole. Dále byl nastíněn způsob práce při vytváření simulace a následné prezentaci výsledků formou animace. V poslední části práce je popsána vlastní tvorba programu, který napodobuje chování koulí při pohybu po kulečnickovém stole. Dále je zde uveden způsob prezentace výsledků pomocí programu pro tvorbu prostorové animace.

Výsledkem práce je krátké animované video (cca 10s), model vytvořený v programu Blender a program napsaný v programovacím jazyce C++, který slouží pro popis chování modelu. Výsledné video je vytvořeno ve dvou verzích. První zachycuje chování modelu v reálném čase. Ve druhém je možné vidět totožnou simulaci s trojnásobným zpomalením. Model obsahuje sadu šestnácti koulí a byl rozpohybován úderem do bílé koule.

Zpočátku se mi model nezdál být příliš složitý, ale postupem času jsem došel k závěru, že pohyb koulí je velmi složitým jevem s mnoha problematickými pasážemi, jako je například přesné určení směru a rychlosti otáčení koule, či změna směru pohybu vlivem této rotace.

V práci je možné dále pokračovat a upřesnit popis fyzikálních vlastností koulí, aby výsledná animace více odpovídala realitě. Bylo by například možné navrhnout a použít realističtější výpočet rotace koule. Dále by mohlo být do modelu zahrnuto prohýbání okrajů hrací plochy vlivem nárazu koule, případně možnost „poskočení“ koule při rychlém nárazu do okraje. Model by dále mohl být rozšířen o interaktivní uživatelské rozhraní pro nastavení vlastností simulace.

6 Literatura

- [1] PERINGER, Petr. *Modelování a simulace IMS*, Studijní opora. Brno, 17.12.2012.
- [2] KERLOW, Isaac. *Mistrovství 3D animace*. Brno: Computer Press, 2011. ISBN 978-80-251-2717-9
- [3] *Wikipedie: Otevřená encyklopedie: Animace* [online]. 2014-01-28 [cit 2014-05-17]. Dostupný z:
<http://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Animace&oldid=11151762>
- [4] ŽÁRA, Jiří; BENEŠ, Bedřich; SOCHOR, Jiří; FELKEL, Petr. *Moderní počítačová grafika*. Brno: Computer Press, 2004. ISBN 80-251-0454-0
- [5] KOŠTÁL, Karel. *Sbírka fyzikálních vzorců a pouček*. Praha, 1970. ISBN 04-311-70
- [6] HORÁK, Zdeněk; KRUPKA, František. *Fyzika - Příručka pro fakulty strojního inženýrství*. Praha, 1966. ISBN 04-017-68
- [7] BEDNAŘÍK, Milan; ŠIROKÁ, Miroslava; BUJOK, Petr. *Fyzika pro gymnázia – Mechanika*. Praha: Prometheus, 1994. ISBN 80-901619-3-6
- [8] *Fyzweb – srážky a rotace: Šikmý ráz* [online]. [cit. 2014-05-16]. Dostupné z:
http://fyzweb.cz/materialy/srazky_a_rotace/k12.php
- [9] VOJÍŘ, Milan. V: *3D Modelování v Google SketchUp* [online]. 2009-09-10 [cit. 2014-05-16]. Dostupné z: <http://spomocnik.rvp.cz/clanek/12365/3D-MODELOVANI-V-GOOGLE-SKETCHUP.html>
- [10] KRAUS, Josef. V: *Nejlepší bezplatný program pro 3D modelování* [online]. 2012-05-27 [cit. 2014-05-16]. Dostupné z: <http://www.zive.cz/clanky/nejlepsi-bezplatny-program-pro-3d-modelovani/sc-3-a-163845/>
- [11] FARIN, Gerald; HANSFORD, Dianne. *Practical linear algebra – A Geometry Toolbox*. Wellesley, Massachusetts 2005. ISBN 1-56881-234-5
- [12] HAVLÍČEK, Luboš. V: *Rozhovor s týmem Darxide Games* [online]. 2005-09-05 [cit. 2014-05-16]. Dostupné z: http://plnehry.idnes.cz/rozhovor-s-tymem-darxide-games-dmf-/Magazin.aspx?c=A050904_062700_bw-plneHry-magazin_bw
- [13] HAUERLAND, Lubomír. V: *Billiard Simulator – skvělý český biliár* [online]. 2005-09-23 [cit. 2014-05-16]. Dostupné z: http://plnehry.idnes.cz/billiard-simulator-skvely-cesky-biliar-fcp-/Clanek.aspx?c=A050923_041207_bw-plneHry-simul_bw

Seznam příloh

Příloha 1. CD se zdrojovými texty programu a videem s vytvořenou animací