



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV KONSTRUOVÁNÍ

INSTITUTE OF MACHINE AND INDUSTRIAL DESIGN

ANIMACE SILOVĚ DEFORMAČNÍHO CHOVÁNÍ ŠROUBOVITÝCH PRUŽIN

ANIMATION OF THE STRESS-STRAIN BEHAVIOUR OF HELICAL SPRINGS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Tomáš Gabriel

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. Ing. Martin Hartl, Ph.D.

BRNO 2018

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav konstruování
Student: **Tomáš Gabriel**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce: **prof. Ing. Martin Hartl, Ph.D.**
Akademický rok: 2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Animace silově deformačního chování šroubových pružin

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Mechanické pružiny jsou strojní součásti mající velkou schopnost akumulace mechanické energie. Při konstrukci strojů nacházejí uplatnění nejenom jako zdroj energie, ale zejména při zachycování a tlumení otřesů a rázů. Funkce pružiny je závislá na velikosti a průběhu deformace v závislosti na působícím zatížení. Představa o silově deformačním chování pružin má zásadní význam pro jejich správný návrh.

Typ práce: výzkumná

Cíle bakalářské práce:

Hlavním cílem je vytvoření animací objasňujících silově deformační chování staticky a dynamicky zatěžovaných šroubových pružin. Jedná se např. o vliv zakřivení závitů, únavovou pevnost, kmitání, vzpěrnou stabilitu nebo řazení pružin.

Dílčí cíle bakalářské práce:

- identifikace parametrů vhodných pro vytvoření animace,
- navržení výpočtových modelů,
- vytvoření animací.

Požadované výstupy: průvodní zpráva, digitální data.

Rozsah práce: cca 27 000 znaků (15 – 20 stran textu bez obrázků).

Struktura práce a šablona průvodní zprávy jsou závazné:

http://dokumenty.uk.fme.vutbr.cz/BP_DP/Zasady_VSKP_2018.pdf

Seznam doporučené literatury:

SHIGLEY, J.E., MISCHKE, Ch.R., BUDYNAS, R.G. Konstruování strojních součástí. Překlad 7. vydání, VUTUM, Brno 2010, 1186 s, ISBN 978-80-214-2629-0.

NORTON R. L. Machine design: an integrated approach. Fifth edition. Boston: Prentice Hall, 2014. ISBN 01-333-5671-X.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Martin Hartl, Ph.D.

ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.

děkan fakulty

ABSTRAKT

Tato práce je věnována tvorbě výukových animací popisujících problematiku návrhu šroubovitých pružin. Obsahem práce je shromáždění potřebných podkladů, dokumentace tvorby animací a prezentace jejich konečné podoby. Hlavní řešená témata jsou průběh napětí v řezu zatížené pružiny, únavová pevnost a vlastní frekvence při kmitání pružin.

KLÍČOVÁ SLOVA

Šroubovitá pružina, poměr vinutí, Wahlův součinitel, tuhost, Haighův diagram, Weyrauchův diagram, kmitání, vlastní frekvence, animace

ABSTRACT

This thesis is dedicated to the creation of educational animations depicting issues with the design of helical springs. Thesis contains collection of the necessary materials, describes the animating process and presents the final results. Main topics of the work are the stress across a cross-section of a loaded spring, fatigue and natural frequency of an oscillating spring.

KEY WORDS

Helical spring, spring index, Wahl factor, spring rate, Haigh diagram, Weyrauch diagram, oscillation, natural frequency, animation

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

GABRIEL, T. *Animace silově deformačního chování šroubových pružin*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 42 s. Vedoucí bakalářské práce prof. Ing. Martin Hartl, Ph.D..

PODĚKOVÁNÍ

Zde bych rád poděkoval vedoucímu práce prof. Ing. Martinu Hartlovi, Ph.D. za jeho odborné vedení, cenné rady a ochotu věnovat čas konzultacím při řešení práce.

PROHLÁŠENÍ

Tímto čestně prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma *Animace silově deformačního chování šroubových pružin* vypracoval samostatně pod odborným dohledem vedoucího práce prof. Ing. Martina Hartla, Ph.D. a veškeré použité zdroje jsem uvedl v příslušném seznamu.

V Brně dne 18.5.2018

.....
Tomáš Gabriel

OBSAH

1 ÚVOD	2
2 PŘEHLED SOUČASNÉHO STAVU POZNÁNÍ	3
2.1 Napětí a deformace šroubovitě pružiny při statickém zatížení	3
2.1.1 Odvození Wahlova součinitele	5
2.1.2 Deformace šroubovitě pružiny	10
2.2 Únavová pevnost šroubovitých pružin	11
2.2.1 Haighův diagram pro šroubovitě pružiny	12
2.2.2 Použití Weyrauchova diagramu	13
2.3 Kmitání pružin	15
2.3.1 Rezonanční frekvence pružiny	16
2.3.2 Amplitudová charakteristika	17
3 ANALÝZA PROBLÉMU A CÍL PRÁCE	19
4 MATERIÁL A METODY	20
4.1 Příprava	20
4.2 Tvorba animace	20
4.3 Dokončení	22
5 VÝSLEDKY	23
5.1 První animace	23
5.2 Druhá animace	26
5.3 Třetí animace	30
6 DISKUZE	35
7 ZÁVĚR	37
8 SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ	38
9 SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK, SYMBOLŮ A VELIČIN	39
10 SEZNAM OBRÁZKŮ A GRAFŮ	41
11 SEZNAM TABULEK	42

1 ÚVOD

Pružiny jsou strojní součásti, které slouží k akumulaci a vydání mechanické energie. Slouží například k vyvození určité síly, tlumení rázů či kmitání, pružnému spojení částí stroje atp. Mechanické pružiny akumulují energii v podobě vnitřní napjatosti při elastické deformaci. Závislost vyvinuté síly pružiny na její deformaci ovlivňuje materiál a geometrie pružiny. Je mnoho typů mechanických pružin, tato práce se věnuje tomu nejčastějšímu – válcovité šroubovité pružiny [1].

Cílem práce je vytvoření animací, které objasní problematiku návrhu šroubových pružin. Animace jsou určeny pro podporu výuky předmětu *Konstruování strojů – strojní součásti* na VUT FSI. Je tedy důležité, aby animace byly názorné a adekvátně zobrazovaly řešené situace.

Tato práce je soustředěna zejména na témata, která jsou náročná na představení a pochopení. Při zatěžování pružin je kvůli jejich zakřivení nelze považovat za prutová tělesa, dochází totiž ke koncentraci napětí na jejich vnitřním průměru [2]. Dále při cyklickém zatěžování pružin hrozí mezní stav únavy, který se podle evropských norem hodnotí specifickým způsobem (popsáno v další kapitole) [3]. Také mohou být v pružině vyvolané dynamické děje, které nejsou na první pohled zřejmé. Animace představují příležitost zobrazit komplexní situace zřetelně a v pohybu a umožnit tak studentům snáze pochopit princip probíraného děje.

První část práce je věnována rešerši informací, matematických vztahů a grafů potřebných při tvorbě animací. Poté je podrobněji popsán cíl práce a postup při jeho plnění. V poslední části jsou prezentovány výsledky animování.

2 PŘEHLED SOUČASNÉHO STAVU POZNÁNÍ

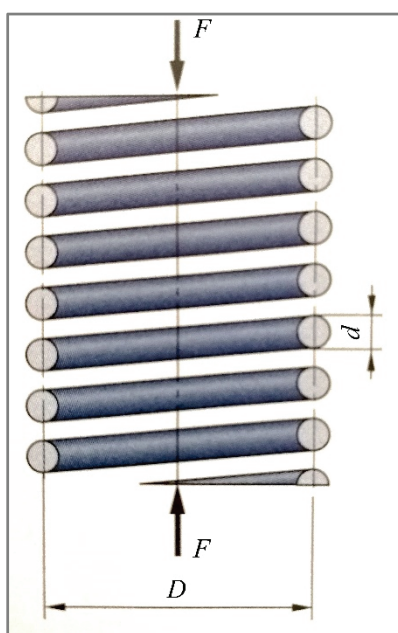
2

První kapitola je věnována teoretickým poznatkům, které byly využity při tvorbě animací. Kapitola je rozdělena na jednotlivá témata, kterým jsou věnovány animace. Nachází se zde mnoho vztahů převzatých z různých zdrojů, které mají různá značení stejných veličin. Pro přehlednost textu jsem většinu značení sjednotil podle [1].

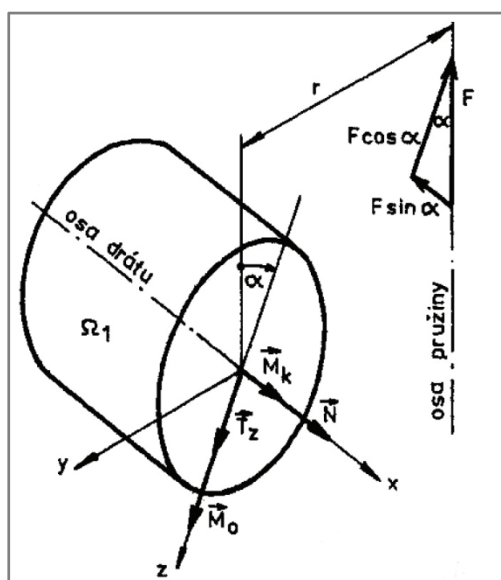
2.1 Napětí a deformace šroubovitě pružiny při statickém zatížení

2.1

Výchozím matematickým modelem šroubovitě pružiny je prutové těleso, nicméně pružina nesplňuje předpoklad malého zakřivení střednice drátu a tak musí být výpočet modifikován, jak bude popsáno níže. Na *obr. 2-1* lze vidět řez tlačnou šroubovitou pružinou zatíženou silou F . Střední průměr pružiny je D a průměr drátu d .



Obr. 2-1 Řez šroubovitou pružinou [1]



Obr. 2-2 Uvolněný prvek s VVÚ [4]

Obr. 2-2 ukazuje uvolněný prvek pružiny Ω_I , který vznikl řezem kolmým na osu drátu. Zobrazené vektory M_k , N , T_z a M_o představují výsledné vnitřní účinky. Z podmínek statické rovnováhy plynou následující vztahy:

$$N = F \sin(\alpha) \quad (2-1)$$

$$T_z = F \cos(\alpha) \quad (2-2)$$

$$M_o = Fr \sin(\alpha) \quad (2-3)$$

$$M_k = -Fr \cos(\alpha) \quad (2-4)$$

kde:

F	N	- zatěžovací síla
α	°	- úhel stoupání závitů pružiny
r	mm	- střední poloměr pružiny

Tyto silové a momentové vnitřní účinky v příčných průřezech vyvolají napětí:

$$\sigma_N = \frac{N}{S} = \frac{4F \sin(\alpha)}{\pi d^2} \quad (2-5)$$

$$\sigma_{M_o} = \frac{M_o}{W_o} = \frac{32Fr \sin(\alpha)}{\pi d^3} \quad (2-6)$$

$$\tau_T = \frac{4T_z}{3S} = \frac{16F \cos(\alpha)}{3\pi d^2} \quad (2-7)$$

$$\tau_{M_k} = \frac{M_k}{W_k} = \frac{16Fr \cos(\alpha)}{\pi d^3} \quad (2-8)$$

kde:

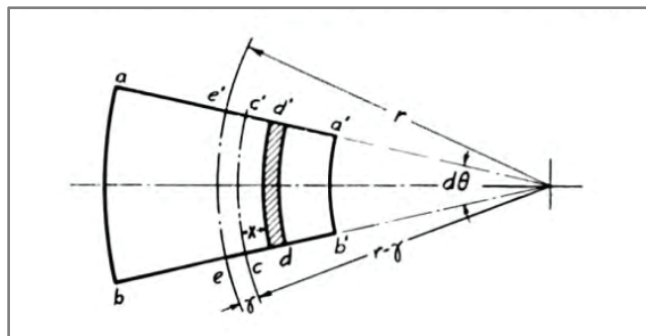
σ_N	MPa	- normálové napětí způsobené tlakovou silou
σ_{M_o}	MPa	- normálové napětí způsobené ohybovým momentem
τ_T	MPa	- smykové napětí způsobené posouvající silou
τ_{M_k}	MPa	- smykové napětí způsobené kroučícím momentem
S	mm ²	- plocha průřezu drátu
W_o	mm ³	- modul průřezu drátu v ohybu
W_k	mm ³	- modul průřezu drátu v křutu
d	mm	- průměr drátu pružiny

[4]

Normálová napětí jsou kvůli malým úhlům stoupání α velmi nízká a při výpočtu se zanedbávají. Výsledné napětí tak vychází ze smykových napětí a přídavného napětí způsobeného zakřivením drátu. Přesné analytické řešení průběhu napětí od zakřivení by bylo velmi komplikované. Výpočet odvozený A.M.Wahlem dosahuje přibližných výsledků s chybou do 2% pro praktické pružiny [2].

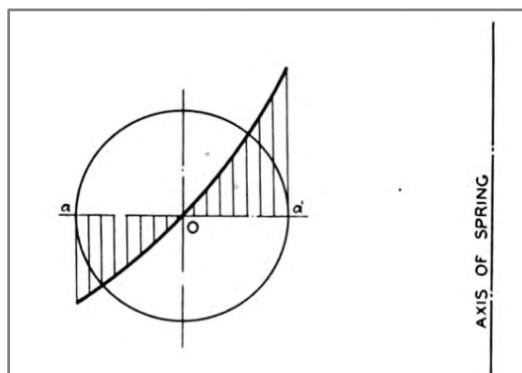
2.1.1 Odvození Wahlova součinitele

Pokud není uveden jiný zdroj, jsou vztahy v této kapitole převzaté z [2]. Na *obr. 2-3* je shora zobrazen elementární prvek pružiny. Úsečky aa' a bb' vyznačují krajní řezy prvku. Řez bb' je vůči aa' posunutý okolo osy pružiny o úhel $d\theta$. Oblouk ee' je osa drátu, od osy pružiny je vzdálena o střední poloměr r .

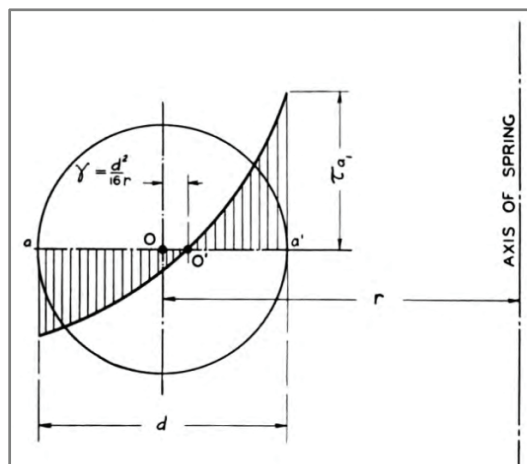


Obr. 2-3 Elementární prvek pružiny [2]

Vlivem zatížení pružiny se elementární prvek zdeformuje tak, že se řezy aa' a bb' vzájemně pootočí o úhel $d\beta$. Kdyby toto pootočení probíhalo okolo osy drátu ee' , vypadal by průběh napětí v řezu jako na *obr. 2-4*.

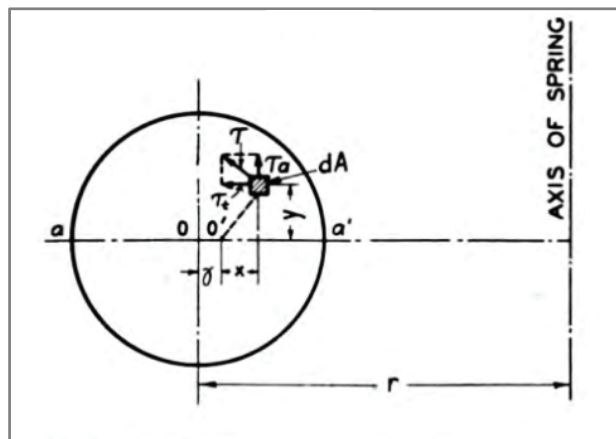


Obr. 2-4 Průběh napětí při rotaci okolo středu [2]



Obr. 2-5 Průběh napětí při rotaci okolo O' [2]

Podle Timoshenkovy teorie průhybu nosníku, kterou Wahl aplikoval na výpočet pružiny, se musí celková plocha pod grafem napětí v průřezu rovnat 0 [5]. Tuto podmínku splňuje průběh na *obr. 2-5*, který vznikl posunutím osy vzájemné rotace řezů aa' a bb' blíže k ose pružiny o vzdálenost γ . Nová osa rotace je v *obr. 2-3* značena obloukem cc' .



Obr. 2-4 Řez pružinou [2]

Na *obr. 2-6* je vyznačena plocha dA v souřadném systému x, y s počátkem v místě nulového napětí. Na tuto plochu působí napětí τ . Plocha dA je řezem vlákna dd' v *obr. 2-3*. Konce tohoto vlákna se vlivem deformace pružiny vzájemně posunou o vzdálenost

$$\delta = d\beta\sqrt{x^2 + y^2} \quad (2-9)$$

kde:

$d\beta$ rad - úhel natočení
 x, y mm - souřadnice plochy dA

Délka vlákna dd'

$$l = (r - \gamma - x)d\theta \quad (2-10)$$

kde:

r mm - střední poloměr pružiny
 γ mm - vzdálenost OO' (*obr. 2-6*)
 x mm - souřadnice plochy dA
 $d\theta$ rad - elementární úhel vymežující zkoumaný prvek

Poté lze sestavit rovnici pro smykové napětí působící na dA

$$\tau = G \frac{\delta}{l} = G \frac{d\beta\sqrt{x^2 + y^2}}{(r - \gamma - x)d\theta} \quad (2-11)$$

Axiální složka tohoto napětí

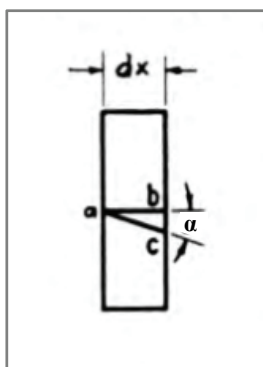
$$\tau_a = \frac{\tau x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = G \frac{xd\beta}{(r - \gamma - x)d\theta} \quad (2-12)$$

Vzdálenost γ lze vypočítat pomocí podmínky nulového integrálu $\tau_a dA$ podle Timoshenkovy teorie [5].

$$\gamma = \frac{d^2}{16r} \left(\frac{1}{1 + \frac{d^2}{16r^2}} \right) \approx \frac{d^2}{16r} \quad (2-13)$$

kde:

d mm - průměr drátu pružiny
 r mm - střední poloměr pružiny



Obr. 2-5 Délkový elementární prvek pružiny [2]

Na obr. 2-7 je znázorněno vlákno ab na povrchu elementárního prvku drátu pružiny vymezeného elementární vzdáleností dx . Vlákno ab se vlivem torzní deformace pootočí o úhel α do polohy ac . Podle teorie elasticity

$$\alpha = \frac{\tau}{G} = \frac{16Fr}{\pi d^4 G} \quad (2-14)$$

kde:

F N - síla zatěžující pružinu
 r mm - střední poloměr pružiny
 d mm - průměr drátu pružiny
 G Pa - modul pružnosti ve smyku

Délka vlákna bc lze spočítat

$$bc = \alpha dx \quad (2-15)$$

Následně je možné vyjádřit úhel vzájemného pootočení dvou řezů $d\beta$ s použitím vztahů (2-14) a (2-15)

$$d\beta = \frac{bc}{\frac{d}{2}} = \frac{2\alpha dx}{d} = \frac{32Fr dx}{\pi d^4 G} \quad (2-16)$$

Dosazením rovnosti

$$dx = r d\theta \quad (2-17)$$

do vztahu (2-16) lze vyjádřit poměr úhlů

$$\frac{d\beta}{d\theta} = \frac{\frac{32Fr^2 d\theta}{\pi d^4 G}}{d\theta} = \frac{32Fr^2}{\pi d^4 G} \quad (2-18)$$

Vztahy (2-18) a (2-13) dosadíme do (2-12) a získáme tak

$$\tau_a = G \frac{32xFr^2}{\pi d^4 \left(r - \frac{d^2}{16r} - x \right)} \quad (2-19)$$

Napětí τ_a dosahuje maxima na vnitřním vlákně drátu pružiny, kde

$$x = \frac{d}{2} - \gamma = \frac{d}{2} - \frac{d^2}{16r} \quad (2-20)$$

Dále byl zaveden poměr vinutí pružiny

$$C = \frac{2r}{d} \quad (2-21)$$

Dosazením (2-20) a (2-21) do (2-19) a následnou úpravou dostane výsledný vztah podobu

$$\tau_{amax} = \frac{16Fr}{\pi d^3} \left(\frac{4C - 1}{4C - 4} \right) \quad (2-22)$$

kde:

F	N	- síla zatěžující pružinu
r	mm	- střední poloměr pružiny
d	mm	- průměr drátu pružiny
C	-	- poměr vinutí pružiny

Pro celkovou hodnotu τ_{max} je nutné přičíst napětí od posouvající síly. Wahl využil vztah odvozený Timoshenkem

$$\tau_T = \frac{(1 + 2\eta)Fd^2}{16(1 + \eta)J} \quad (2-23)$$

kde:

F	N	- síla zatěžující pružinu
d	mm	- průměr drátu pružiny
J	mm ⁴	- kvadratický moment průřezu k neutrální ose
η	-	- Poissonova konstanta

V případě ocelové pružiny je Poissonova konstanta přibližně 0,3 [1]. Potom může být vztah (2-23) upraven

$$\tau_T \approx \frac{1,6Fd^2}{20,8J} \approx \frac{4,92F}{\pi d^2} \quad (2-24)$$

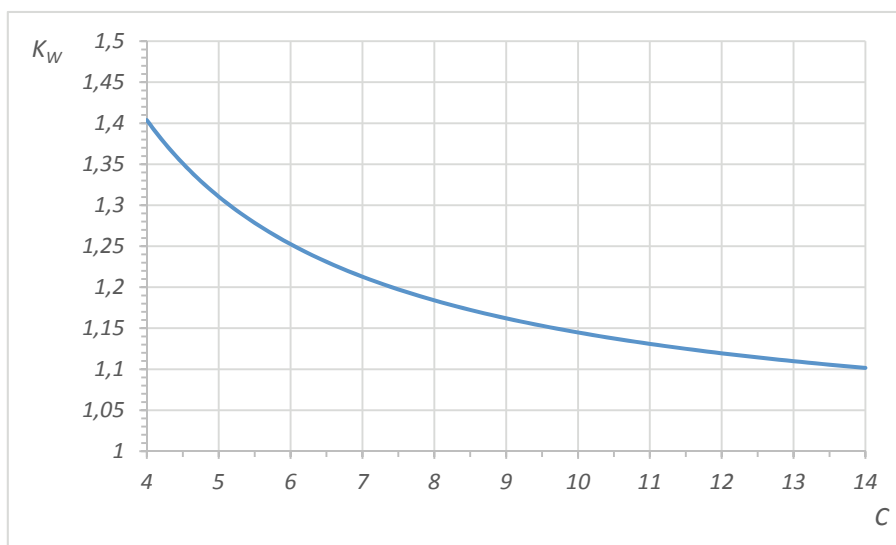
Součtem napětí (2-22) a (2-24) a následnou úpravou dostaneme finální vztah pro maximální napětí v řezu pružiny

$$\begin{aligned} \tau_{max} &= \frac{16Fr}{\pi d^3} \left(\frac{4C - 1}{4C - 4} \right) + \frac{4,92F}{\pi d^2} = \\ &= \frac{16Fr}{\pi d^3} \left(\frac{4C - 1}{4C - 4} + \frac{4,92d}{16r} \right) = \\ &= \frac{16Fr}{\pi d^3} \left(\frac{4C - 1}{4C - 4} + \frac{0,615}{C} \right) \end{aligned} \quad (2-25)$$

Výraz před závorkou představuje smykové napětí v prutovém tělese o průměru d , zatíženém silou F na rameni r . Závorka je definována jako Wahlův součinitel

$$K_W = \frac{4C - 1}{4C - 4} + \frac{0,615}{C} \quad (2-26)$$

První člen součinitele vyjadřuje vliv zakřivení závitů pružiny. Druhý člen pak vliv posouvající síly. Průběh K_w v závislosti na C je v *obr. 2-8*.



Obr. 2-6 Závislost Wahlova součinitele na poměru vinutí

Použití Wahlova součinitele značně zjednodušuje výpočet napětí ve šroubovitě pružině, protože dovoluje použít klasický vztah pro prutové těleso [6] a vynásobit ho součinitelem, který je závislý pouze na poměru vinutí pružiny. Místo Wahlova součinitele lze použít Bergsträsserův součinitel.

$$K_B = \frac{4C + 2}{4C - 3} \quad (2-27)$$

Tento vztah vede k přibližně stejným výsledkům, je však o jeden člen kratší [1].

2.1.2 Deformace šroubovitě pružiny

Vztah mezi zatěžovací silou a deformací pružiny lze odvodit pomocí energie napjatosti, pro kterou platí vztah

$$W = \frac{M_k^2 l}{2GJ_p} + \frac{F^2 l}{2GS} \quad (2-28)$$

kde:

W	J	- energie napjatosti
M_k	Nm	- zatěžující kroučící moment
l	mm	- délka drátu pružiny
G	Pa	- modul pružnosti ve smyku
J_p	mm ⁴	- polární kvadratický moment průřezu k těžišti
F	N	- zatěžující síla
S	mm ²	- plocha průřezu

[6]

Dosazením následujících vztahů

$$M_k = \frac{FD}{2} \quad (2-29)$$

$$l = \pi Dn \quad (2-30)$$

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} \quad (2-31)$$

$$S = \frac{\pi d^2}{2} \quad (2-32)$$

získáme výraz

$$W = \frac{4F^2 D^3 n}{d^4 G} + \frac{2F^2 D n}{d^2 G} \quad (2-33)$$

kde:

D mm - střední průměr pružiny
n - - počet činných závitů
d mm - průměr drátu pružiny

Užitím Castiglianovy věty lze vyjádřit vztah pro délkovou deformaci pružiny

$$y = \frac{\partial W}{\partial F} = \frac{8FD^3 n}{d^4 G} + \frac{4FDn}{d^2 G} \approx \frac{8FD^3 n}{d^4 G} \quad (2-34)$$

U praktických pružin je střední průměr D 4 až 12 krát větší, než průměr drátu d [7]. Proto je druhý člen vztahu (2-34) řádově menší, než první člen a tudíž je možné jej zanedbat. Pomocí tohoto vztahu lze vyjádřit tuhost pružiny

$$k = \frac{F}{y} = \frac{d^4 G}{8D^3 n} \quad (2-35)$$

Tuhost válcové šroubovitě pružiny je ve většině případů v oblasti jejího použití konstantní [7].

2.2 Únavová pevnost šroubovitých pružin

2.2

Selhání pružiny v důsledku statického zatížení je velmi neobvyklý incident. Naopak mezní stav únavy je výrazně nebezpečnější, jelikož pružiny jsou ve většině aplikací cyklicky namáhané. Požadovaná životnost pružin se liší v závislosti na předpokládaném počtu cyklů. Například ventilové pružiny spalovacích motorů musejí splňovat téměř neomezenou životnost [1].

Hodnocení únavové pevnosti lze provést pomocí Goodmanova kritéria v modifikovaném Haighově diagramu pro torzní namáhání. Tento postup vyžaduje naměřené hodnoty meze únavy při torzním cyklickém namáhání pro daný drát pružiny [7].

Evropská norma využívá Weyrauchova diagramu s vyznačenou mezní křivkou pro konkrétní typ pružiny a drátu [3].

2.2.1 Haighův diagram pro šroubovitě pružiny

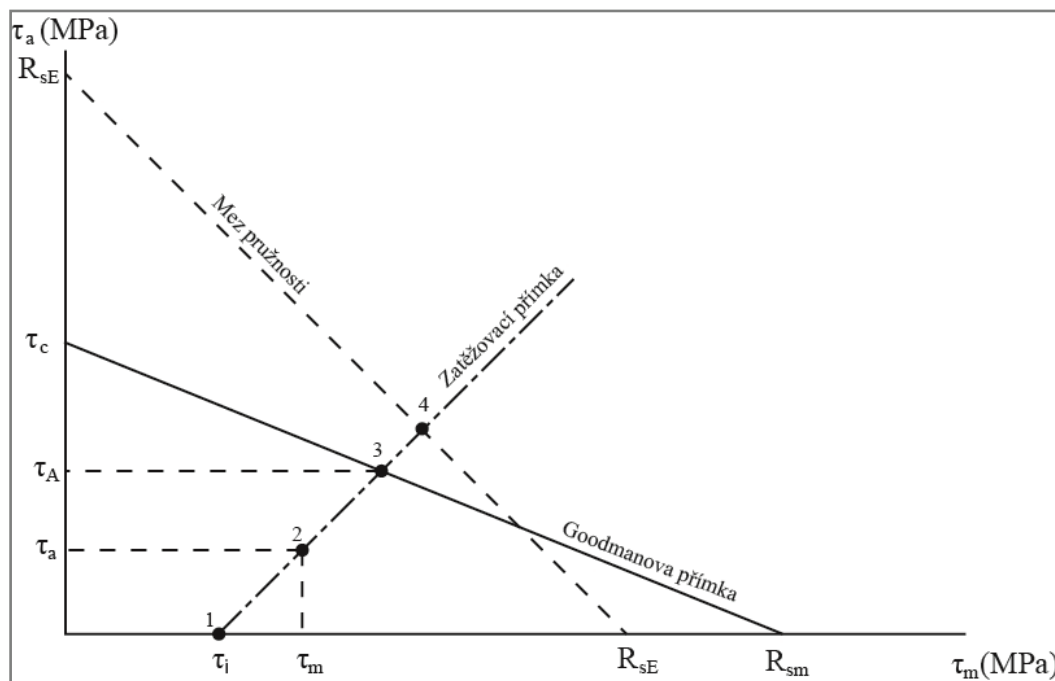
Vztahy v této kapitole jsou převzaté z [7]. V případě cyklického zatížení osciluje zatěžovací síla mezi hodnotami F_{min} a F_{max} . Pro konstrukci Haighova diagramu je potřeba vypočítat amplitudu napětí τ_a a střední napětí τ_m , které vychází z amplitudy a střední síly F_a a F_m .

$$F_a = \frac{F_{max} - F_{min}}{2} \quad (2-36)$$

$$F_m = \frac{F_{max} + F_{min}}{2} \quad (2-37)$$

Pro výpočet jednotlivých napětí lze použít vztah (2-25).

Vlastní diagram se sestojí podle obr. 2-9. Vertikální osa reprezentuje amplitudu napětí τ_a a horizontální střední napětí τ_m . Goodmanovo kritérium určuje mezní přímku spojující mez únavy v krutu τ_c a mez pevnosti ve smyku R_{sm} . Stav pružiny reprezentuje bod na zatěžovací přímce, která má za předpokladu prostého zatěžování sklon 45° .



Obr. 2-7 Náčrt Haighova diagramu

Zatěžovací přímka vychází z bodu 1, který představuje předepjatou pružinu zatíženou silou F_{min} a korespondujícím napětím τ_i . Pružina v provozním stavu, zatížena amplitudou napětí τ_a a středním napětím τ_m se v diagramu nachází v bodě 2. Mezní stav únavy nastane při dosažení Goodmanova kritéria v bodě 3. Bod 4 leží za mezí únavy a reprezentuje překročení meze pružnosti ve smyku R_{sE} . V případě vysokého předpětí pružiny τ_i by mohl mezní stav pružnosti nastat dříve, než mezní stav únavy, nicméně takovou situaci lze snadno odhalit výpočtem statického zatížení pružiny silou F_{max} .

Bezpečnost vůči meznímu stavu únavy je vyjádřena poměrem vzdálenosti bodů 13 a 12. Protože velikosti úseček na zatěžovací přímce jsou lineárně závislé na vzdálenosti ordinát jejich krajních bodů, je poměr 13:12 stejný jako $\tau_A:\tau_a$, kde τ_A je ordináta bodu 3. Goodmanovu přímku lze popsat rovnicí

$$y = -\frac{\tau_c}{R_{sm}}x + \tau_c \quad (2-38)$$

a zatěžovací přímku

$$y = \frac{\tau_a}{\tau_m - \tau_i}x - \frac{\tau_a\tau_i}{\tau_m - \tau_i} \quad (2-39)$$

kde

x, y	MPa	proměnné souřadnice na osách
τ_a, τ_m	MPa	provozní amplituda a střední smykové napětí
τ_i	MPa	předpětí pružiny

Pro zjištění hodnoty τ_A je nutné nalézt průsečík těchto přímek. Porovnáním vztahů (2-38) a (2-39) a vyjádřením x dostaneme výsledek

$$x = \frac{R_{sm}(\tau_c(\tau_i - \tau_m) - \tau_a\tau_i)}{\tau_c(\tau_i - \tau_m) - R_{sm}\tau_a} \quad (2-40)$$

Tento vztah můžeme dosadit zpět do (2-38) nebo (2-39) a získáme tak hodnotu τ_A

$$\tau_A = y = \frac{\tau_a\tau_c(R_{sm} - \tau_i)}{\tau_c(\tau_m - \tau_i) + R_{sm}\tau_a} \quad (2-41)$$

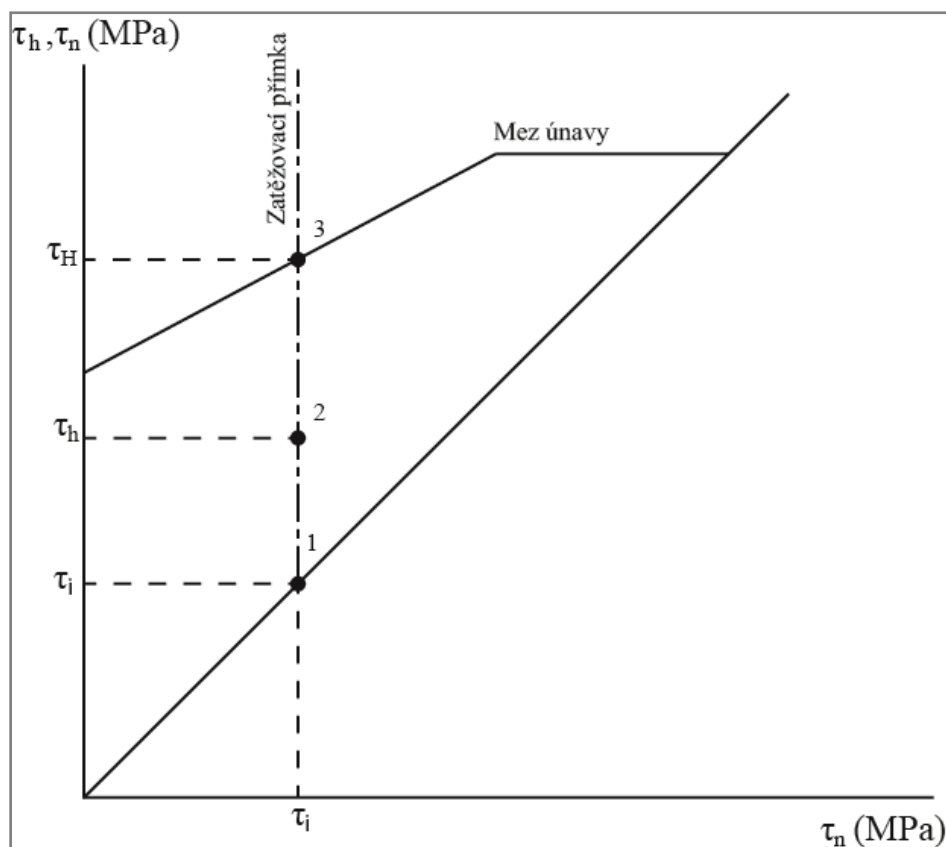
A konečně výsledná bezpečnost je

$$k_u = \frac{\tau_A}{\tau_a} = \frac{\tau_c(R_{sm} - \tau_i)}{\tau_c(\tau_m - \tau_i) + R_{sm}\tau_a} \quad (2-42)$$

Tento výpočet předpokládá, neměnnost předpětí τ_i v průběhu života součásti a prosté zatěžování pružiny (stálý poměr mezi τ_a a τ_m).

2.2.2 Použití Weyrauchova diagramu

Weyrauchův diagram je principiálně podobný Haighovu diagramu, ale na jeho osy se vynášejí jiné charakteristické veličiny. Z obr. 2-10 je zřejmé, že na vodorovné ose je



Obr. 2-8 Nákres Weyrauchova diagramu

dolní napětí τ_n a na svislé horní napětí τ_h . Tato napětí lze snadno spočítat podle vztahu (2-25), pokud známe charakteristiky pružiny a zatížení F_{max} a F_{min} .

Vynesením dolního napětí $\tau_n = \tau_i$ na obou osách vznikne bod 1, zastupující předepjatý stav pružiny, před přidáním cyklického zatížení. Protože během zatěžovacího cyklu zůstává předpětí stejné, vede zatěžovací přímka svisle nahoru z bodu 1. Ordináta provozního bodu 2 je horní napětí τ_h . Průsečík zatěžovací a mezní přímky 3 vyznačuje mezní horní napětí τ_H . Pro bezpečný provoz nesmí provozní rozkmit napětí

$$\Delta\tau = \tau_h - \tau_n \quad (2-43)$$

překročit mezní rozkmit

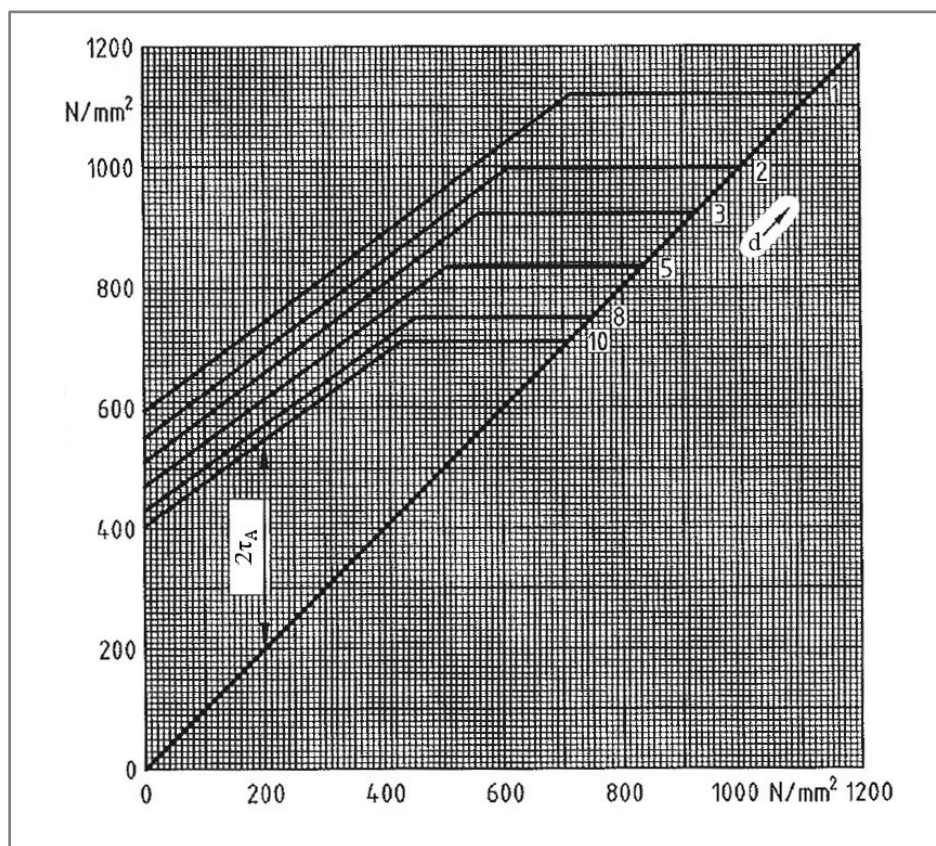
$$2\tau_A = \tau_H - \tau_N \quad (2-44)$$

kde:

- $2\tau_A$ MPa - dvojnásobek mezní amplitudy (mezní rozkmit)
- τ_H MPa - mezní horní napětí určeno podle diagramů v [3]
- τ_N MPa - mezní dolní napětí, stejné jako τ_n

Mezní čára v diagramu je závislá na typu pružiny, jejím materiálu a výrobě. Diagramy běžných pružin jsou uvedené v [3] (pro příklad je na *obr. 2-11* uveden diagram pro šroubovitě tlačné pružiny vinuté za studena, vyrobené ze třídy DH nebo SH

patentovaného a taženého pružinového ocelového drátu specifikovaného v EN 10270-1, krátce přechované).



Obr. 2-9 Diagram rozsahu meze únavové pevnosti [3]

Norma nespecifikuje výpočet koeficientu bezpečnosti, nicméně lze ho zavést jako poměr mezního a provozního rozkmitu [1].

$$k_u = \frac{2\tau_A}{\Delta\tau} \quad (2-45)$$

Tento postup používá jiná vstupní data pro určení mezních hodnot, než výše popsany postup podle Haighova diagramu a obecně platí, že je mírně konzervativnější, nicméně výsledky se výrazně neliší [1].

2.3 Kmitání pružin

Při navrhování dynamicky zatěžovaných pružin je nutné zajistit, aby vnější budící frekvence byla 15 až 20 krát nižší, než rezonanční frekvence pružiny [1]. Pokud se tyto dvě frekvence přiblíží, dojde k superpozici vlnění pružiny, což nevyhnutelně vede k extrémním napětím a selhání pružiny [8].

2.3.1 Rezonanční frekvence pružiny

Při stlačení pružiny vnější silou (např. otočením vačky stlačující ventilovou pružinu) se nedeformuje celá pružina rovnoměrně. Síla vyvolá v pružině vlnu, která se šíří rychlostí a po směru drátu pružiny. Tato rychlost je závislá na geometrii a materiálu pružiny, pro ocelové pružiny lze vyjádřit

$$a = d \sqrt{\frac{G}{\rho \left(8 \frac{D^2}{4} + d^2 \right)}} \approx 2278 \frac{d}{D} \quad (2-46)$$

kde:

a	ms^{-1}	- rychlost šíření vlny
d	m	- průměr drátu
D	m	- střední průměr pružiny
G	Pa	- modul pružnosti ve smyku
ρ	kgm^{-3}	- hustota materiálu pružiny

Vlna se pohybuje rychlostí a drátem pružiny až na její druhý konec, kde se odrazí a stejnou rychlostí se pohybuje zpět. Takto by se odrážela neustále, nicméně vlivem vnitřního tlumení pružiny a dalších, běžně zanedbávaných ztrát, se vlnění časem uklidní.

Problém rezonance nastává v případě, kdy se perioda zatěžovací síly shoduje s časem, za který se vlna dostane zpět na konec pružiny, ve kterém vznikla. V takovém případě se tato vlna sečte s nově vznikající vlnou a dále se šíří společně stále stejnou rychlostí a . Tímto způsobem se vlna neustále zvětšuje a tak dochází ke kritickým hodnotám deformace a napětí pružiny. Vlastní frekvenci tedy lze vyjádřit

$$f = \frac{a}{2l} \quad (2-47)$$

Pro délku drátu pružiny l platí

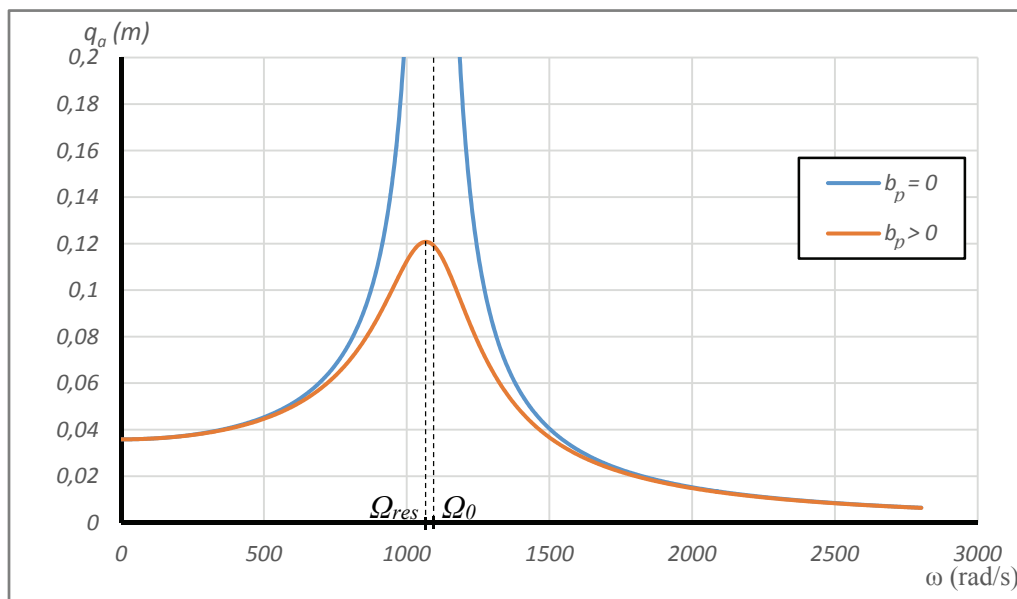
$$l = \pi D n \quad (2-48)$$

kde:

D	m	- střední průměr pružiny
n	-	- počet činných závitů
[8]		

V případě zanedbání tlumení pružiny se rezonanční frekvence rovná vlastní frekvenci pružiny [9].

2.3.2 Amplitudová charakteristika



Obr. 2-10 Příklad amplitudové charakteristiky

Pro znázornění závislosti amplitudy výchylky kmitajícího systému na frekvenci budící síly je vhodná amplitudová charakteristika. V případě systému s jedním stupněm volnosti, jakým je například pružina vetknutá na jednom konci a zatížena budící silou na konci druhém, lze pro konstrukci amplitudové charakteristiky využít funkci

$$q_a = \frac{A}{k \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\Omega_0^2}\right)^2 + \left(2b_p \frac{\omega}{\Omega_0}\right)^2}} \quad (2-49)$$

kde:

q_a	m	- amplituda výchylky
A	N	- amplituda budící síly
k	Nm ⁻¹	- tuhost systému
ω	rads ⁻¹	- úhlová frekvence budící síly
Ω_0	rads ⁻¹	- vlastní úhlová frekvence systému
b_p	-	- poměrný útlum

Dva průběhy této funkce jsou vykresleny na obr. 2-12. Jeden průběh zobrazuje případ systému bez tlumení ($b_p = 0$), kdy druhý člen jmenovatele v rovnici (2-49) bude nulový a tím funkce dosáhne maxima (nekonečna) při budící frekvenci ω rovné vlastní frekvenci Ω_0 . Druhý průběh byl vykreslen při $b_p > 0$, čímž došlo k omezení maxima amplitudy a zároveň jeho posunu k nižším frekvencím. Rezonanční frekvence, při které dojde k maximálnímu výkyvu tlumeného systému

$$\Omega_{res} = \sqrt{\Omega_0^2 - 2\delta^2} \quad (2-50)$$

Kde δ je konstanta doznívání, pro niž platí vztahy

$$b_p = \frac{\delta}{\Omega_0} \quad (2-51)$$

$$\delta = \frac{b}{2m} \quad (2-52)$$

kde:

b Nsm^{-1} - součinitel tlumení systému

m kg - hmotnost systému

Vztahy v této kapitole byly převzaty z [9].

3 ANALÝZA PROBLÉMU A CÍL PRÁCE

Většina studentů vysoké školy strojnického zaměření se s problematikou pružin setká již na střední škole. Obvykle se pomocí pružiny definuje základní forma Hookeova zákona nebo se na jednoduchém experimentu demonstruje efekt rezonance. Na vysoké škole jsou studenti hlouběji seznámeni s pružinou jako strojní součástí a naučí se základy výpočtu potřebných k návrhu pružiny pro určitou aplikaci. Tyto výpočty jsou však na první pohled poněkud abstraktní a bez hlubšího porozumění hrozí, že studentům unikne podstata probírané problematiky.

Efektivní výklad mnoha komplexnějších témat je náročný pro profesora i studenty. Profesor musí být velmi kreativní, schopný nahlédnout na danou látku z mnoha úhlů pohledu a v neposlední řadě schopný rétor. Na druhé straně od studentů je vyžadována konstantní pozornost a vysoká představivost. Zároveň může být celý proces vysvětlení a pochopení dané problematiky velmi časově náročný pro všechny zúčastněné.

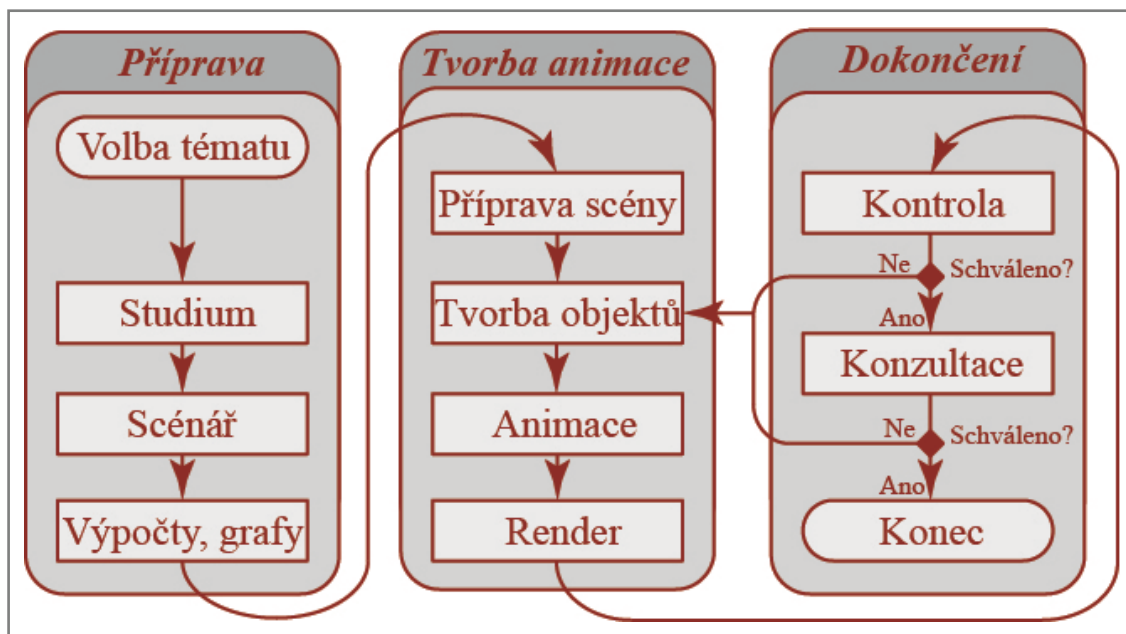
U náročných témat je tedy vhodné výklad doplnit názornými ukázkami. Jednou z moderních možností je využít počítačové animace, které umožňují graficky velmi názorně zobrazit komplexní problematiku a to v poměrně krátkém čase.

Cílem této práce je vytvořit animace, které doplní výklad o pružinách (primárně v předmětu *Konstruování strojů – strojní součásti* na FSI VUT) a pomohou tak studentům pochopit podstatu dějů, o kterých se učí. Pro jednotlivé animace byla vybrána následující témata:

1. Statické zatížení šroubovitě pružiny a vliv zakřivení jejích závitů na průběh napětí v řezu pružiny.
2. Únavová pevnost cyklicky zatěžovaných šroubovitých pružin s využitím Weyrauchova a Haighova diagramu.
3. Kmitání harmonicky buzených šroubovitých pružin, znázornění rezonanční frekvence a amplitudové charakteristiky.

4 MATERIÁL A METODY

Postup práce při tvorbě animací je zřejmý z diagramu na *obr. 4-1*.



Obr. 4-1 Potup práce

4.1 Příprava

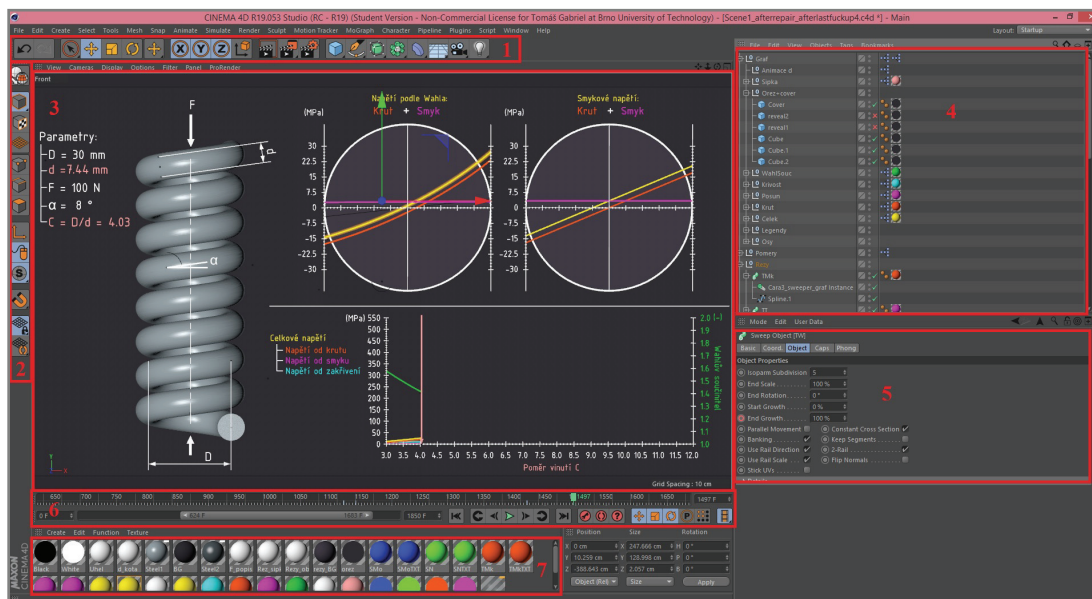
Nejdříve bylo potřeba vybrat konkrétní téma pro každou animaci. K animování jsou vhodné zejména problémy, které nelze snadno popsat slovy a které jsou náročné na představení. Každé vybrané téma bylo nutné nastudovat – pochopit problematiku, nalézt potřebné vztahy a naučit se je aplikovat. Tomu je věnována druhá kapitola této práce.

Poté jsem vytvořil přibližný scénář, kde jsem vybral konkrétní grafické prvky pro animaci a nastínil jejich pořadí a způsob vzájemné interakce. Tím bylo jasné, které výpočty a grafy bude nutné zpracovat jako podklady pro animaci, což byl další krok. Veškeré použité vztahy byly implementovány v programu Excel 2013 od společnosti Microsoft. Tento tabulkový procesor jsem vybral z důvodů snadné změny vstupních dat a intuitivní tvorby grafů, které lze následně importovat do animace.

4.2 Tvorba animace

Pro vlastní animování jsem zvolil program Cinema 4D od společnosti Maxon. Jedná se o profesionální 3D nástroj pro modelování i animaci. Při osvojování tohoto softwaru jsem využil videolekce dostupné na [10].

Na obr. 4-2 je zobrazeno základní pracovní prostředí programu:



Obr. 4-2 Prostředí programu Cinema 4D

1. Hlavní nástrojová lišta
2. Vedlejší nástrojová lišta
3. Pracovní náhled animace
4. Hierarchie objektů
5. Parametry vybraného objektu
6. Časová osa a její ovládání
7. Manažer materiálů a textur

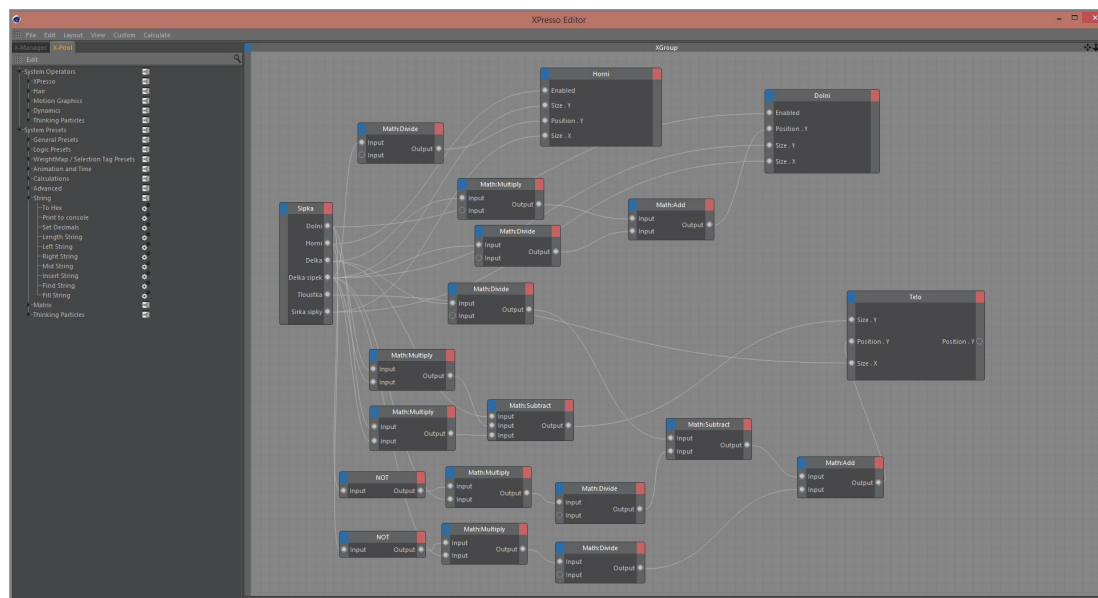
Na začátku bylo potřeba nastavit scénu animace. Vybral jsem pravoúhlé zobrazování bez perspektivy, protože zobrazení v perspektivě by velmi komplikovalo práci s dvojrozměrnými prvky animace, které mají často největší výpovědní hodnotu (vzorečky, grafy, popis, atd.). V animacích používám pro názornost různé barvy a proto jsem zvolil tmavé pozadí, na kterém lépe vyniknou rozdíly v odstínech. Technické parametry animací jsou vypsány v tab. 4-1.

Tab. 4-1 Parametry animací

Rozlišení v pixelech	720x1280
Poměr stran	16:9
Počet snímků za sekundu	24
Barevná hloubka	32 bit
Formát souboru	.mov
Kodek	H.264

Do nastavené scény jsem vytvořil jednotlivé prvky animace jako je trojrozměrný model pružiny, grafy, šipky, textová pole apod. V této části práce jsem využil programovací prostředí Cinemy 4D. V programu je implementovaný jazyk C.O.F.F.E.E. a uzlový editor XPresso (viz obr. 4-3) pro jeho snadné použití. Díky

tomuto systému jsem mohl vytvořit vlastní interaktivní objekty a později je při animování ovládat pomocí parametrů, které jsem objektům definoval. Například interaktivní změna měřítka grafu, kterou jsem použil v první animaci, by bez programování byla prakticky nemožná.



Obr. 4-3 Prošředí XPresso

Hotové objekty bylo nakonec potřeba rozpohybovat. Animace se uskutečňuje pomocí definování klíčových bodů jednotlivých parametrů objektu v čase a případné úpravy křivek přechodu mezi danými hodnotami. Základními animovanými parametry jsou souřadnice objektů, jejich velikost a rotace, nicméně animovat lze jakékoliv proměnné, popisující jednotlivé objekty. Dále je možné objekty skládat do hierarchických stromů, čímž se definují závislosti mezi jejich vlastnostmi a proces animace se zjednodušuje. Po dokončení animování lze zadat render a vytvořit tak výsledné video. Render má mnoho různých nastavení, na kterých závisí výsledný formát, kvalita a vzhled obrazu. Obecně pro většinu parametrů platí, že vyšší kvalita obrazu způsobí delší čas renderování a větší výsledný soubor. V mém případě na notebooku s procesorem *Intel® Core™ i7* a grafickou kartou *GeForce® GTX 860M* trval finální výpočet 30 až 60 minut.

4.3 Dokončení

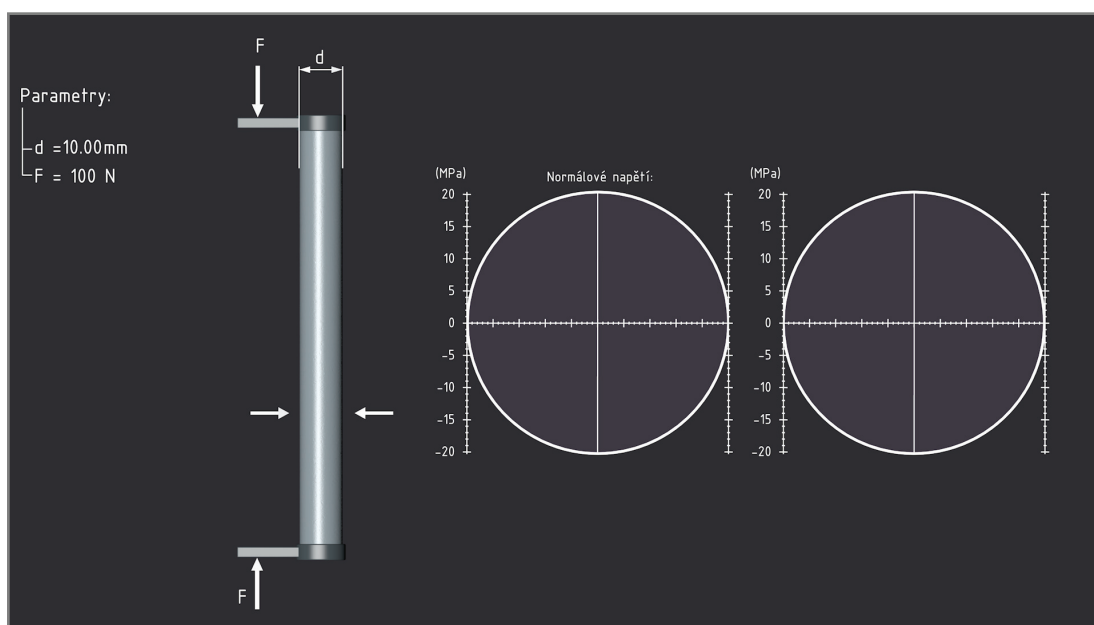
Celý proces tvorby animace probíhá v pracovním náhledu. Výsledný obraz je vidět až po renderu a může obsahovat chyby, které se v náhledu neprojeví. Proto je nutné výsledek důkladně zkontrolovat a opravit případné nedostatky. Je vhodné během tvorby animace a před spuštěním finálního renderu nechat vykreslit některé okamžiky z animace jako statické obrázky. Tím je možné odhalit chyby ještě před finálním renderem a vyvarovat se tak opakování celého výpočtu.

5 VÝSLEDKY

V této kapitole jsou prezentovány jednotlivé animace. Postup, kterým byly vytvořeny, je popsán v předchozí kapitole a matematické vztahy, ze kterých animace vychází v kapitole 2.

5.1 První animace

První animace zobrazuje analýzu statického zatížení pružiny. Zvláštní pozornost je věnována vlivu zakřivení drátu pružiny na napětí v řezu. Animace začíná s přímým prutem, který se později svine do pružiny. Prut je zatížen mimo svou osu, v budoucí ose pružiny (*obr. 5-1*).



Obr. 5-1 První animace - začátek

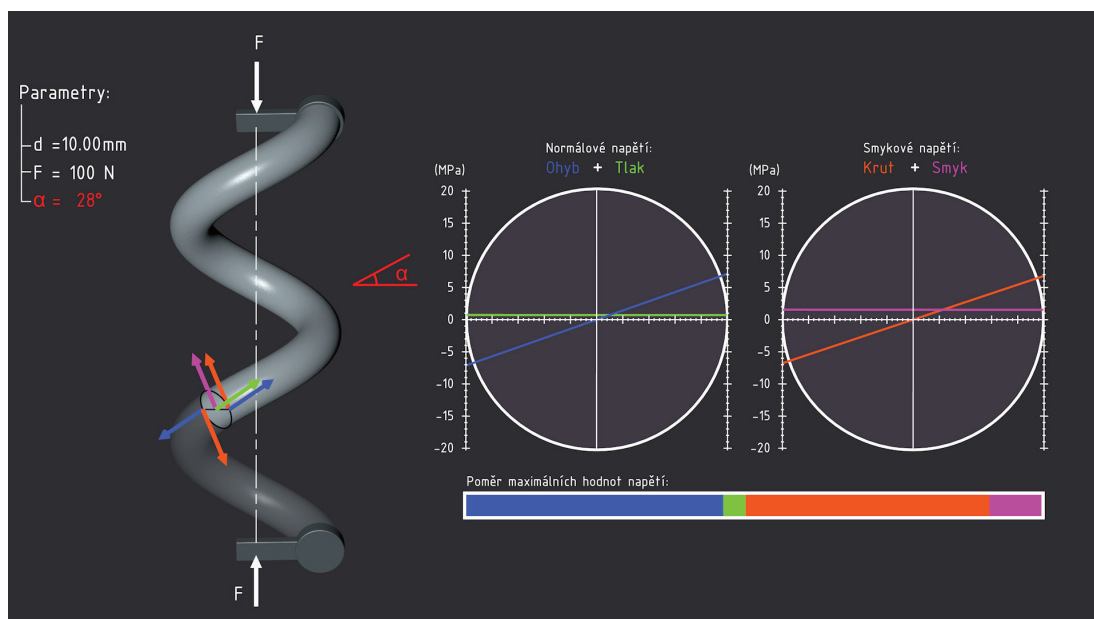
Zatížení v prutu vyvolá normálové napětí od ohybového momentu a od tlakové síly. V animaci se zobrazí dva řezy prutu. V jednom se vykreslí průběh normálového napětí napříč řezem, druhý je připraven pro smykové napětí. Dále se část prutu zprůhlední, pro lepší vyznačení vyšetřovaného řezu a vykreslí se vektory zobrazující směr jednotlivých napětí. V průběhu celé animace jsou napětím přiřazeny konkrétní barvy podle *tab. 5-1*.

Tab. 5-1 Barvy napětí

Napětí od ohybového momentu	Modrá
Napětí od tlaku	Zelená
Napětí od krouťicího momentu	Oranžová
Napětí od posouvající síly	Fialová

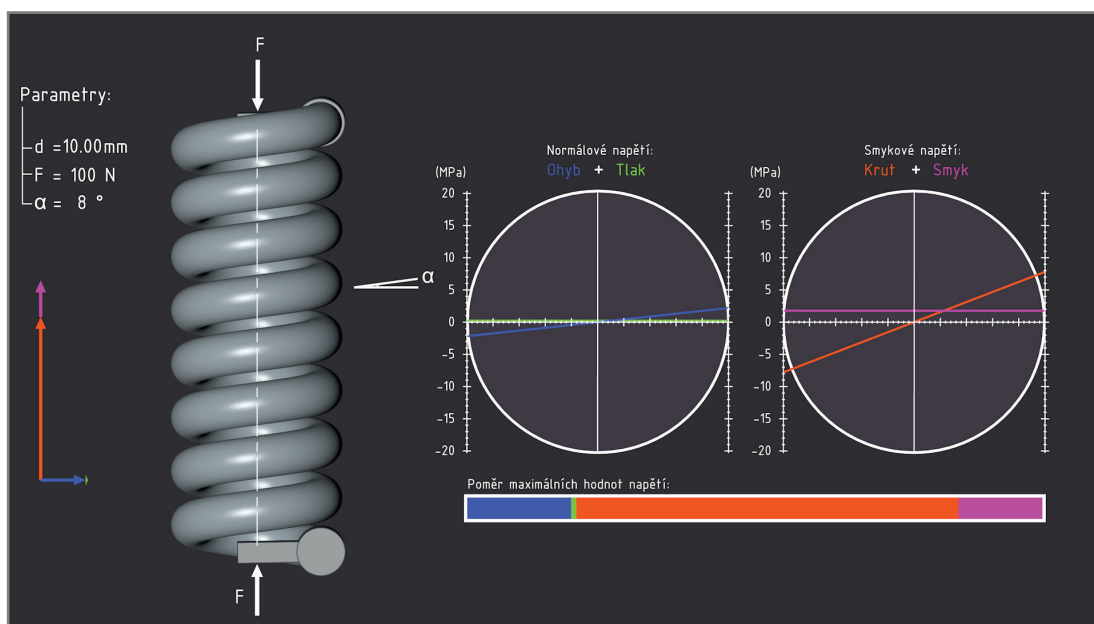
Pod řezy se zobrazí obdélník vyplněný barvami jednotlivých napětí. Poměr velikostí barevných oblastí reprezentuje poměr maximálních absolutních hodnot napětí na kraji řezu. Toto grafické srovnání slouží pouze pro představu o velikosti napětí, protože

normálová a smyková napětí nelze z žádného hlediska takto jednoduše porovnávat [6]. Dále se vyznačí úhel stoupání závitů pružiny (v tento moment 90°) a drát se začne svíjet do podoby pružiny (obr. 5-2).



Obr. 5-2 První animace - svíjení drátu

Během svíjení drátu se interaktivně mění průběhy napětí v zobrazených řezech a poměry jejich maximálních velikostí pod řezy. Když drát dostane konečnou podobu pružiny, odsunou se vektory zobrazující směry napětí vedle pružiny a změní velikost tak, aby reprezentovaly poměry mezi velikostmi napětí na vnitřním kraji řezu (tj. v místě jejich maxima). V tento moment je z řezů, poměrů barevných obdélníků

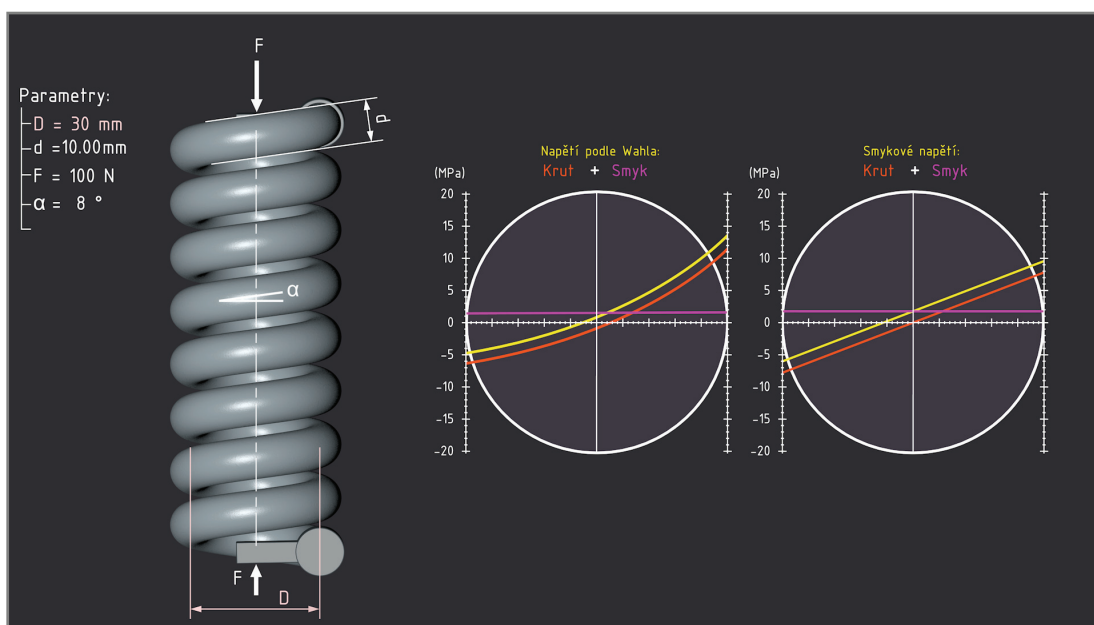


Obr. 5-3 První animace - svinutá pružina

a šipek vektorů jasně vidět, že smyková napětí mají v pružině mnohem větší význam, než napětí normálová (*obr. 5-3*).

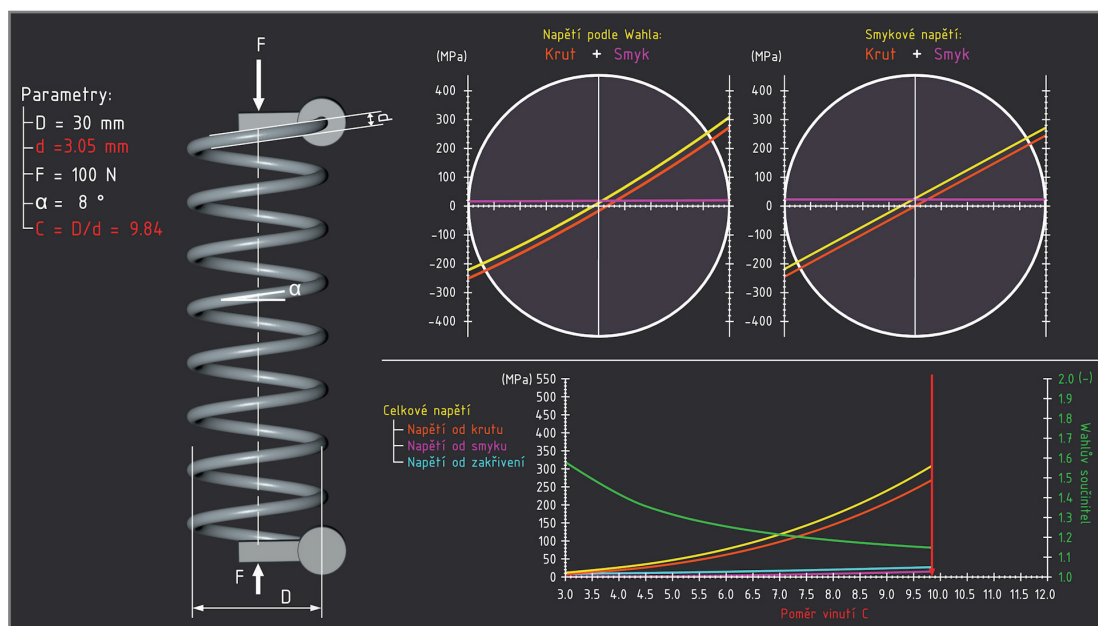
Hlavním smyslem této části animace je zobrazit, která napětí ve šroubovitě pružině jsou a proč se zanedbávají napětí způsobená tlakem a ohybovým momentem. Pro výpočet napětí v této části byly využity vztahy (2-5) až (2-8), které platí pro jednoduché prutové těleso [4]. Efekt zakřivení závitů pružiny na smyková napětí je zobrazen v následující části.

Animace pokračuje odstraněním průběhu normálových napětí v řezu, místo kterých se zobrazí průběh smykových napětí s efektem zakřivení závitů podle vztahu (2-19). Rozměry pružiny byly záměrně zvoleny tak, aby byl nízký poměr vinutí, což vede k velkému vlivu zakřivení pružiny na napětí (podle vztahu (2-26)). Nyní jsou vedle sebe průběhy smykových napětí s efektem zakřivení a bez něj, takže je zřetelně vidět zakřivení a posunutí průběhu napětí v řezu, které je způsobeno koncentrací napětí na vnitřní straně pružiny. Situace je zobrazená na *obr. 5-4*. Žlutá čára značí součet napětí od krutu a od posouvající síly.



Obr. 5-4 První animace - zobrazení efektu zakřivení

Dále se řezy posunou na obrazovce výš, aby vzniklo místo na nový graf, který se pod nimi vykreslí. Drát pružiny se začne ztenčovat, čímž se mění poměr vinutí a napětí v pružině. Nový graf zobrazuje na jedné ose průběh jednotlivých složek napětí (složka od zakřivení drátu je také vykreslena zvlášť) v závislosti na poměru vinutí. Na druhé ose grafu je vykreslen Wahlův součinitel ve stejné závislosti (*obr. 5-5*). Zároveň s vykreslováním nového grafu se interaktivně mění průběhy napětí v řezech, aby odpovídaly současné situaci. Protože se napětí v průběhu této animace řádově zvětší, bylo nutné zároveň měnit měřítka os napětí v řezech. Této situace jsem využil a grafy nastavil tak, aby se absolutní pozice křivek v grafu téměř neměnila, čímž vynikla změna tvaru průběhu napětí s vlivem zakřivení, který končí jako téměř lineární při finálním poměru vinutí $C = 12$. Účelem této části animace je zobrazit proč nelze pružinu zcela považovat za prutové těleso a zároveň zdůraznit závislost vlivu zakřivení závitů pružiny na poměru vinutí.



Obr. 5-5 První animace - změna poměru vinutí

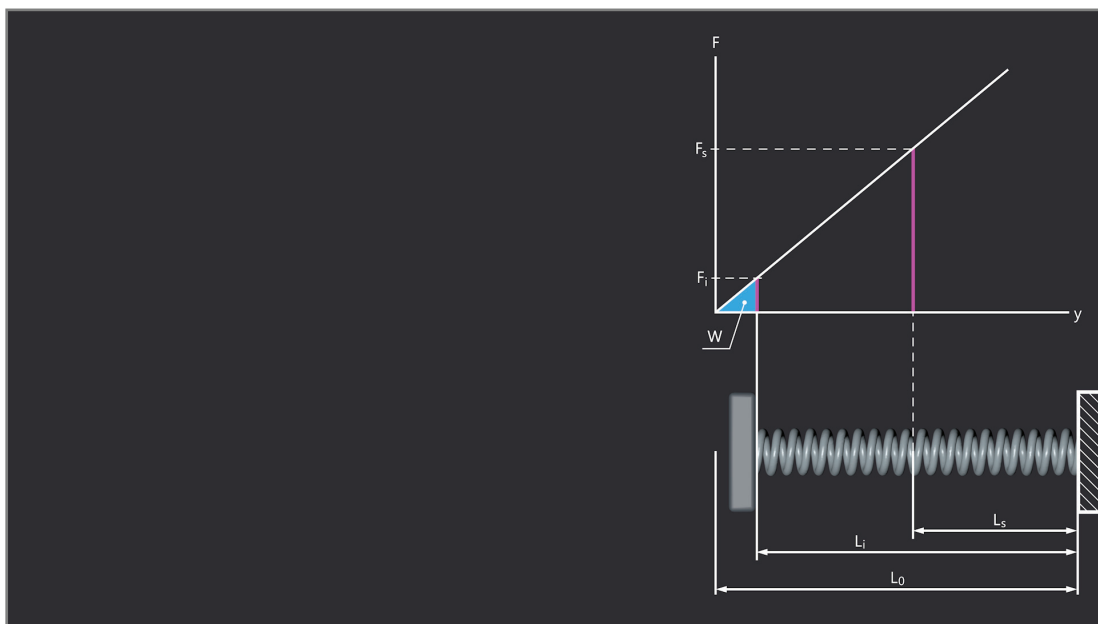
Vzhledem k tomu, že se v průběhu animace rozměry pružiny extrémně mění, není možné, aby pružina reprezentovala reálnou součást. Počet aktivních závitů a konečný úhel stoupání jsem zvolil podle průměrných hodnot v katalogu tlačných pružin společnosti Century Spring [11]. Velikost statického zatížení je zvolena tak, aby napětí v pružině před změnou průměru drátu bylo v řádech jednotek až desítek MPa, protože při snížení průměru drátu dojde k výraznému růstu napětí. Důležité parametry výpočtu jsou shrnuty v tab. 5-2.

Tab. 5-2 Parametry výpočtu první animace

střední průměr pružiny	30	mm
maximální průměr drátu	10	mm
minimální průměr drátu	2,5	mm
úhel stoupání pružiny	8	°
zatěžovací síla	100	N

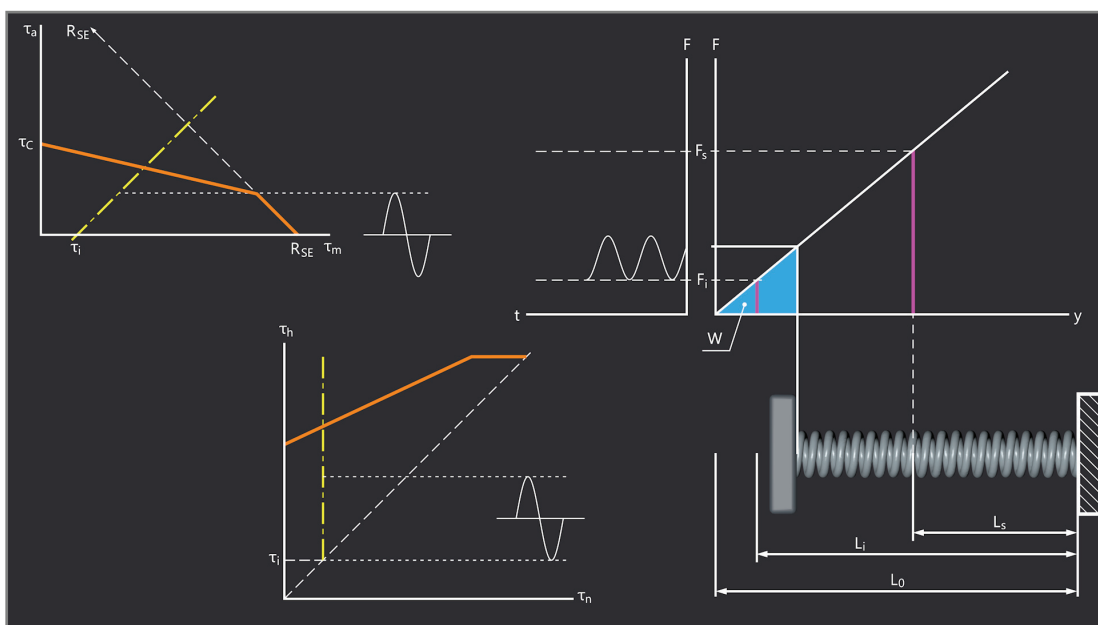
5.2 Druhá animace

Druhá animace popisuje kontrolu únavové životnosti cyklicky zatěžované pružiny. Zobrazuje pružinu v několika stavech, zatíženou cyklickou silou s konstantním minimem a různým maximem. Na začátku animace se zobrazí šroubovitá tlačná pružina vetknutá na jednom konci a vyznačí se její délka L_0 ve volném a L_s v plně stlačeném stavu. Poté se vykreslí graf závislosti délkové deformace y na zatěžovací síle F . Směrnice přímky, po které se bude pohybovat bod reprezentující současný stav pružiny je tuhost k . Pro realistické zobrazení deformací a grafu byl použit vztah (2-35). Pružina je zatížena silou předpětí F_i , čímž se stlačí na délku L_i . Ze vztahu (2-34) vyplývá, že potenciální energie W uložena v pružině je plocha pod grafem síla-deformace. Tato energie je v animaci zvýrazněna modrou barvou. Dále se v grafu



Obr. 5-6 Druhá animace - začátek

vyznačí síla F_s , která způsobí maximální stlačení pružiny. Síly F_i a F_s tak ohraničují oblast, ve které se může pohybovat maximální síla F_{max} budoucího zátěžného cyklu (obr. 5-6).

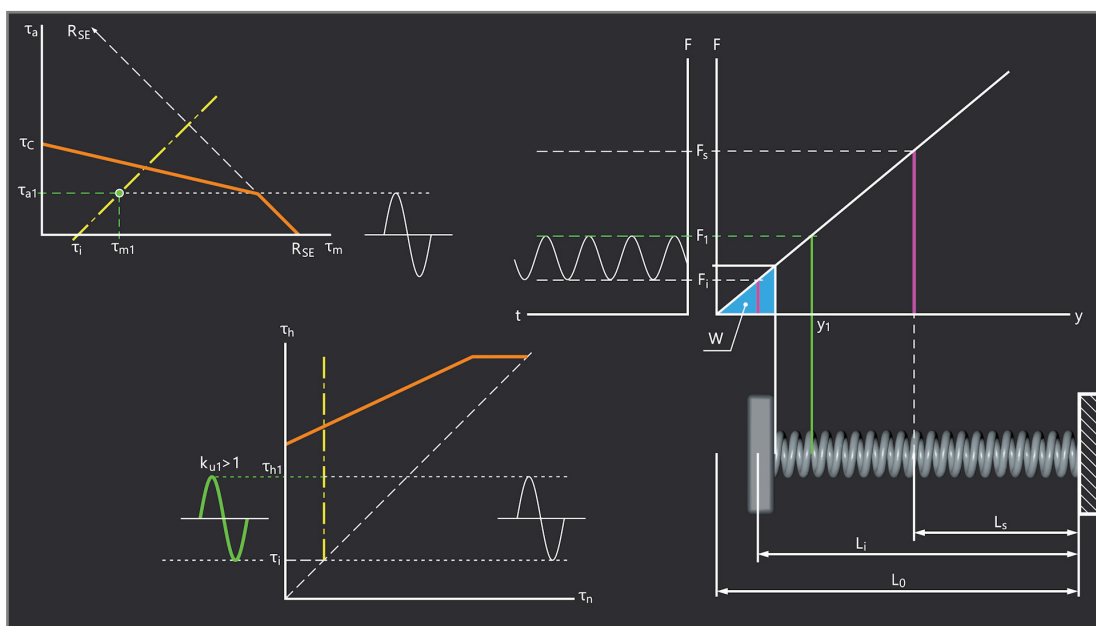


Obr. 5-7 Druhá animace - zobrazení diagramů

Animace pokračuje podle obr. 5-7 zobrazením Haighova a Weyrauchova diagramu s vyznačenými zátěžnými přímkami (žluté, čerchované) a úsečkami značící mezní stav únavy (oranžové). Vedle grafu závislosti síly na deformaci se vykreslí průběh síly v čase, který později během cyklování síly vykresluje její minulost, díky čemuž je vidět její sinusový průběh.

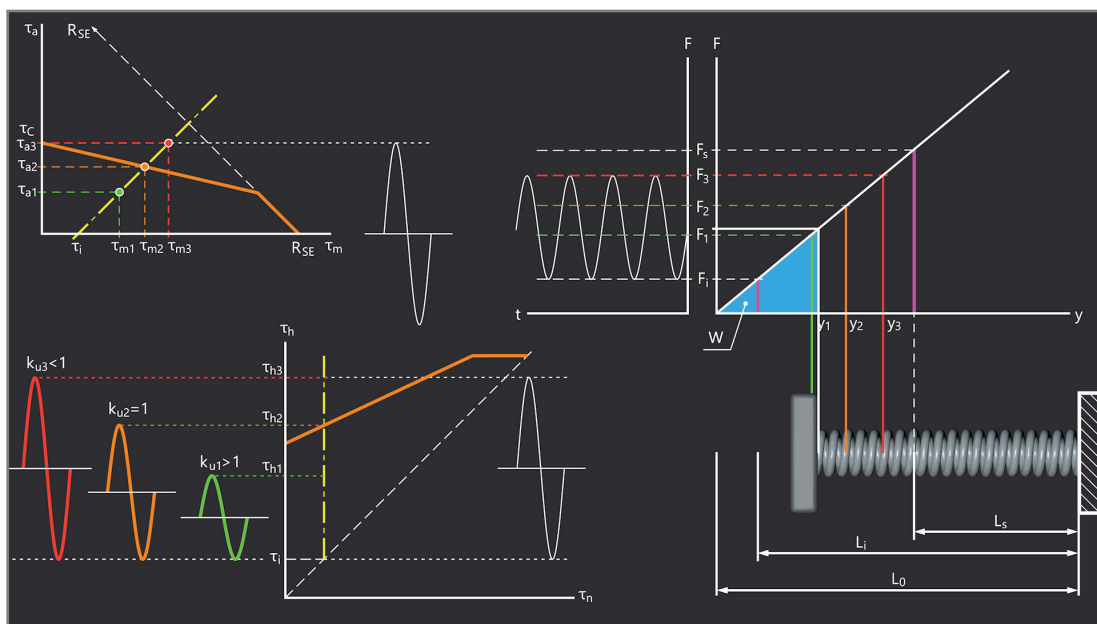
Následně je pružina zatížena hypotetickým provozním cyklem, takže se síla začne periodicky pohybovat mezi F_i a $F_{max} = F_l$. Toto vyvolá v pružině cyklus napětí podle vztahů (2-36), (2-37) a (2-25). Napětíový cyklus je vyznačen v obou diagramech a později se interaktivně mění se změnou zatížení. Tím je snadno pochopitelné, že oba diagramy slouží k hodnocení stejných veličin, pouze jinak umístěných.

Během cyklování síly se zelenou barvou vyznačí současný cyklus ve Weyrauchově diagramu a přesune se vedle grafu pro pozdější srovnání. U tohoto cyklu se vypíše koeficient bezpečnosti k_u , který v zobrazeném stavu podle (2-45) musí být větší než 1. V Haigově diagramu se vyznačí aktuální bod na zátěžné přímce a v grafech $F-t$ a $F-y$ se zeleně zvýrazní situace při F_l . Obrázek 5-8 ukazuje animaci v tomto momentu.



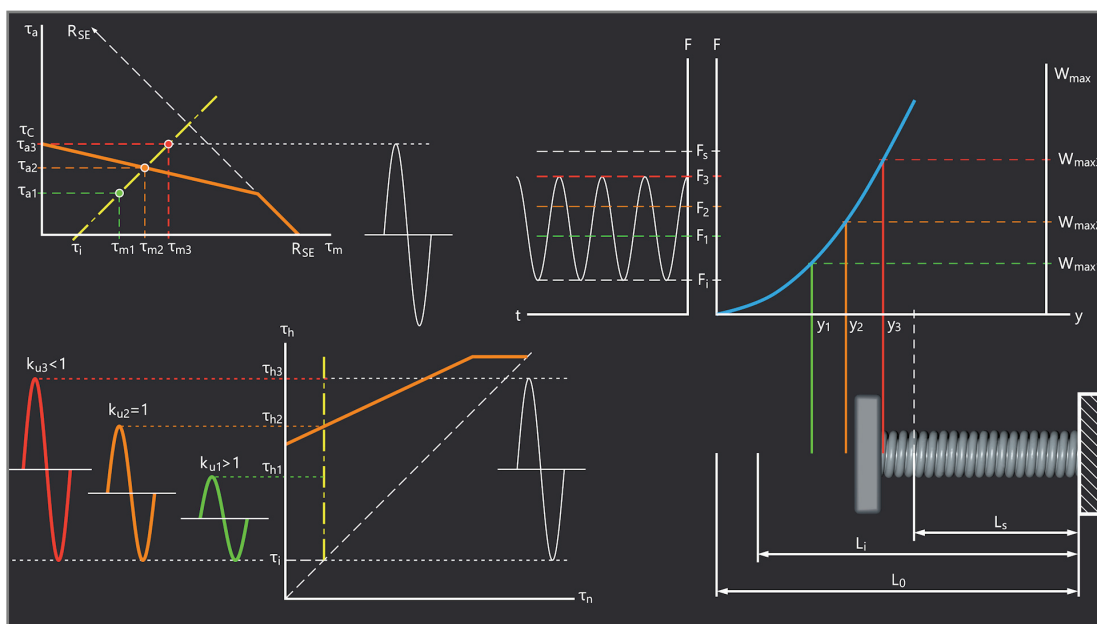
Obr. 5-8 Druhá animace - provozní stav

Dalším stádiem animace je zvýšení maxima zátěžného cyklu síly z F_l na F_2 , což vyvolá napětí odpovídající mezi únavy ve Weyrauchově diagramu. Stejným způsobem jako v předcházejícím stavu je vyznačena aktuální situace oranžovou barvou. Poté animace přejde do posledního stavu, který reprezentuje cyklus za mezi únavy. Jeho značení je červené. Moment, kdy jsou v animaci všechny tři stavy je na obr. 5-9. Díky současným změnám v zátěžném cyklu a obou diagramech lze názorně vidět význam vztahů (2-42) a (2-45). Zároveň vyniká vhodnost Weyrauchova diagramu pro aplikaci na předepjatou pružinu. Cyklus ve Weyrauchově diagramu definuje dolní a horní napětí, korespondující se silou předpětí a maximální silou. Haighův diagram vychází ze střední hodnoty a amplitudy, které je nutné dopočítat.



Obr. 5-9 Druhá animace - všechny stavy

Na závěr animace se vyčistí graf f - y , zobrazí se nová osa reprezentující maximální uloženou energii v pružině W_{max} a vykreslí se závislost W_{max} na délkové deformaci y (obr. 5-10). Tento graf slouží k zvýraznění exponenciálního průběhu maximální akumulované energie při zvyšující se maximální deformaci pružiny během cyklu. Na ose W_{max} jsou vyznačeny hodnoty maximální akumulované energie při jednotlivých stavech, kterými animace prošla.



Obr. 5-10 Druhá animace - průběh energie

Rozměry pružiny v této animaci byly převzaty z příkladu 10-4 v knize [1]. Příklad je věnován výhradně hodnocení únavové pevnosti tlačné šroubovitě pružiny. Důležité parametry výpočtu jsou shrnuty v tab. 5-3. Mezní hodnota horního smykového napětí

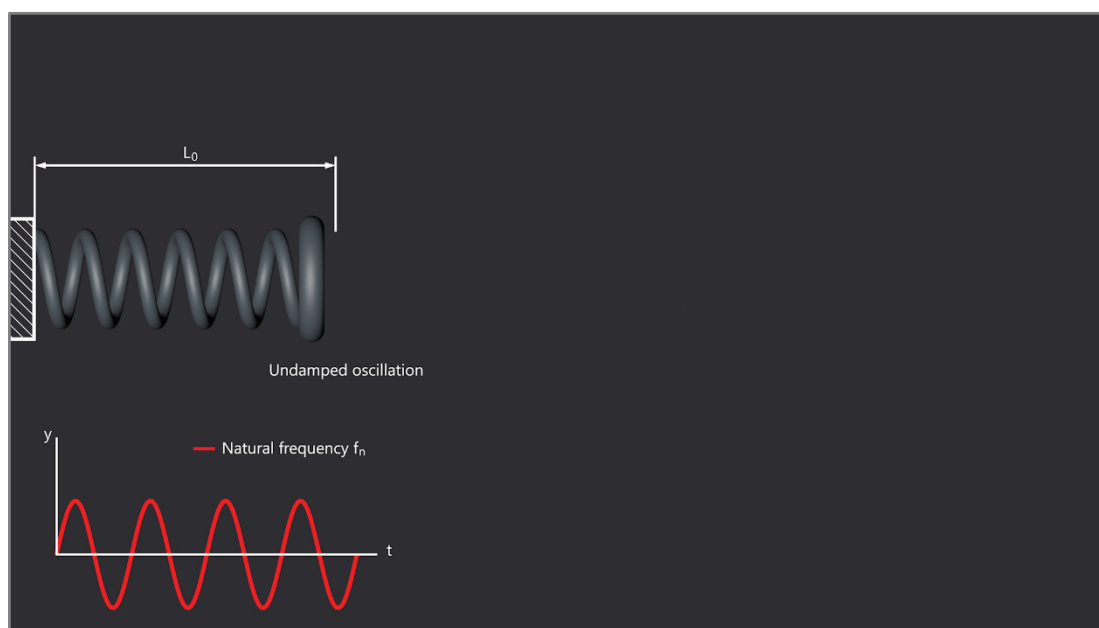
cyklu byla odečtena z diagramu v [3] pro vypočítané dolní napětí způsobené silou předpětí. Protože rozdíly v délkových deformacích pružiny zatížené silami F_1 až F_3 jsou opticky malé, což způsobilo nepřehlednost animace, byly hodnoty deformace uměle upraveny, aby byla animace zřetelnější. Poměry mezi F_1 až F_3 a y_1 až y_3 však zůstávají stejné a transformace mezi F a y přes tuhost k podle (2-35) tak stále platí.

Tab. 5-3 Parametry výpočtu druhé animace

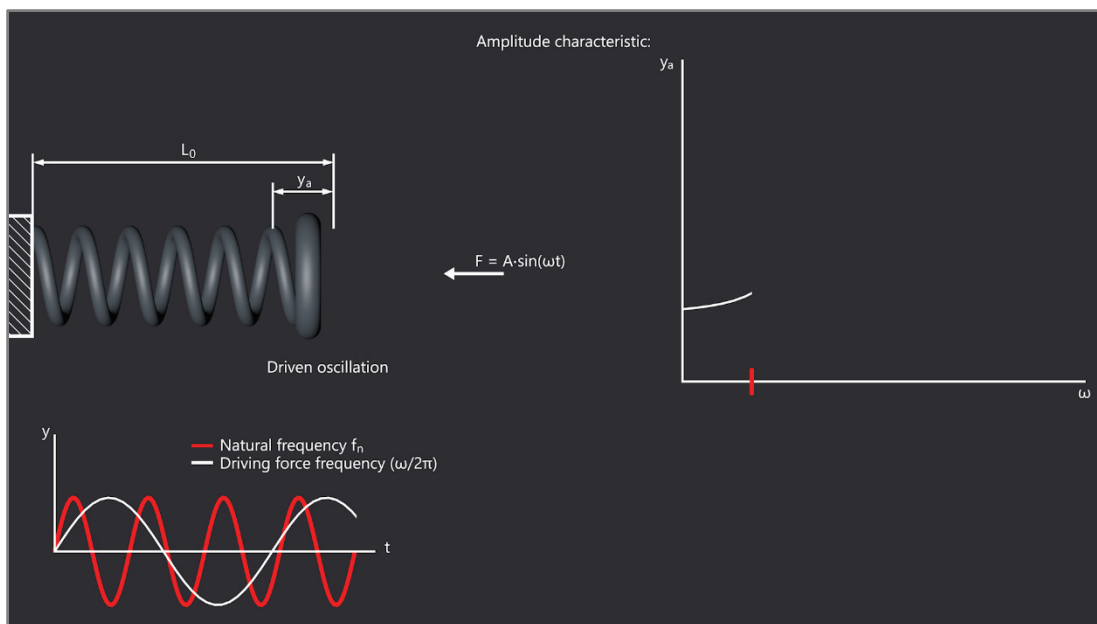
střední průměr pružiny	11,5	mm
průměr drátu	2,5	mm
volná délka pružiny	110	mm
počet činných závitů	21	-
síla předpětí	25	N
maximum provozní síly	155	N
maximum síly mezního cyklu	226	N
maximum síly cyklu přesahující mez únavy	270	N
smyskové napětí způsobeno předpětím	62	MPa
mezní hodnota horního smyskového napětí	562	MPa
tuhost pružiny	12,45	Nmm ⁻¹

5.3 Třetí animace

Účelem třetí animace je znázornit problematiku rezonance při použití harmonicky buzené pružiny. Animace začíná zobrazením šroubovité tlačné pružiny vetknuté na jednom konci. Do pružiny „strčí“ dočasně zobrazená síla F , bez dalšího působení. To v pružině vyvolá volné kmity o vlastní frekvenci podle vztahu (2-47). Tato vlastní frekvence se znázorní průběhem délkové deformace v čase v grafu pod pružinou.



Obr. 5-11 Třetí animace - začátek

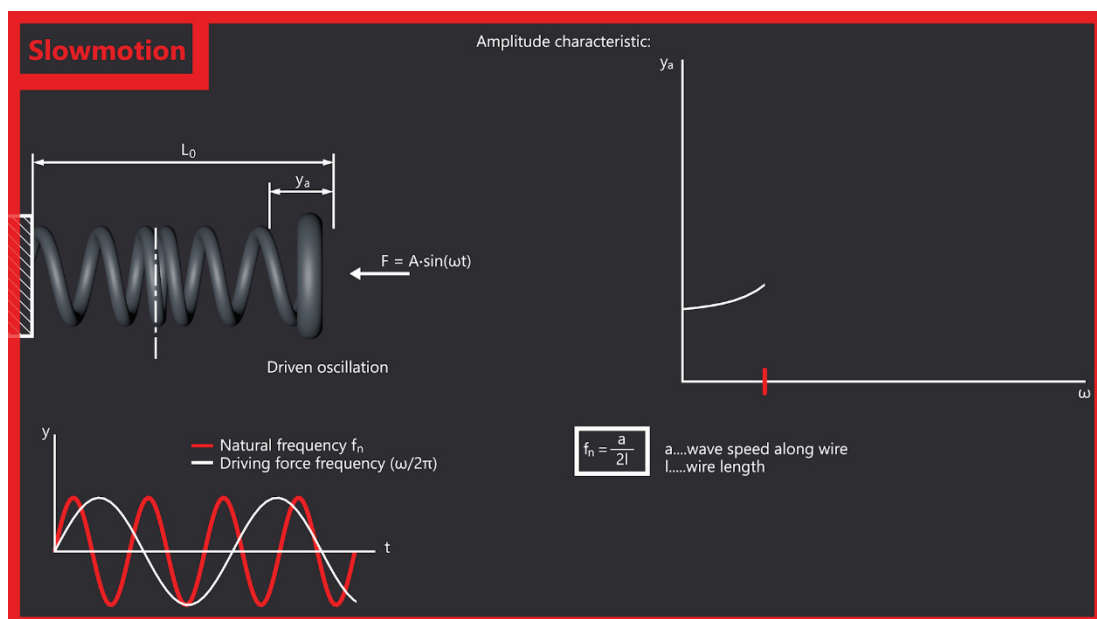


Obr. 5-12 Třetí animace - začátek buzení

Graf je statický (časová osa se nepohybuje), slouží pro grafické zobrazení a později srovnání frekvencí. Snímek animace v tomto stavu je na *obr. 5-11*.

Pružina chvíli kmitá vlastní frekvencí netlumenými kmity. Poté se kmitání uměle změní na tlumené, což slouží ke krátké demonstraci tlumení a zároveň k plynulému uklidnění pružiny.

Když pružina přestane kmitat, je vykreslen graf závislosti amplitudy délkové deformace y_a na frekvenci budící síly ω – příprava pro vykreslení amplitudové charakteristiky. Následně je pružina zatížena symetrickým silovým cyklem s rostoucí frekvencí. Pružina kmitá s rostoucí výchylkou a do grafu se vykresluje amplitudová

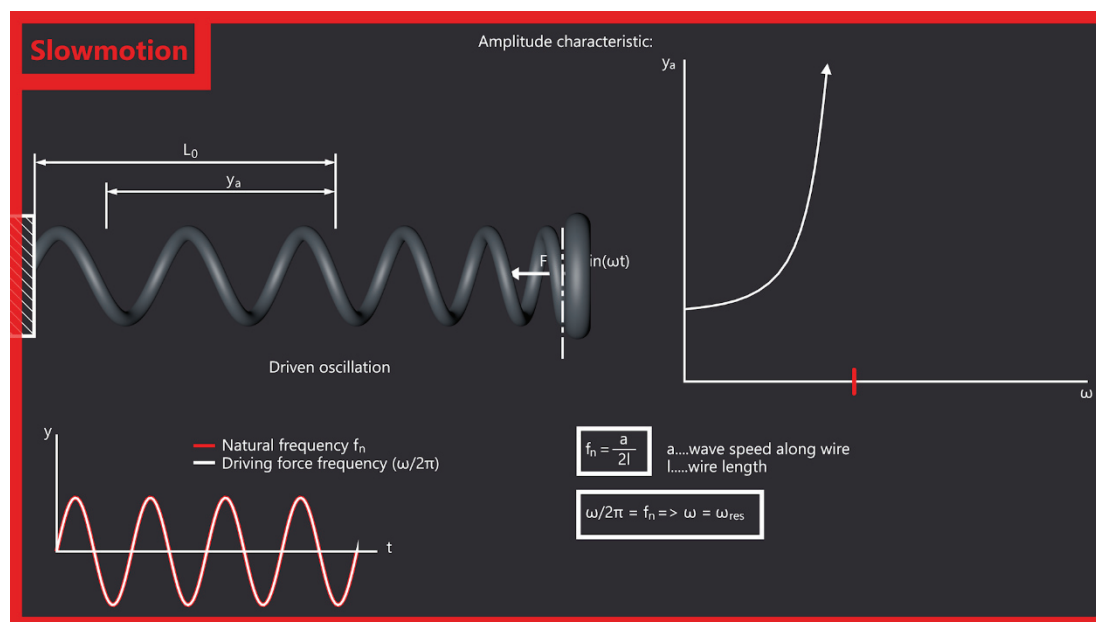


Obr. 5-13 Třetí animace - zpomalený detail před rezonancí

charakteristika podle rovnice (2-49) (*obr. 5-12*). Zároveň se v grafu zobrazující vlastní frekvenci pružiny vykreslí proměnná budící frekvence síly.

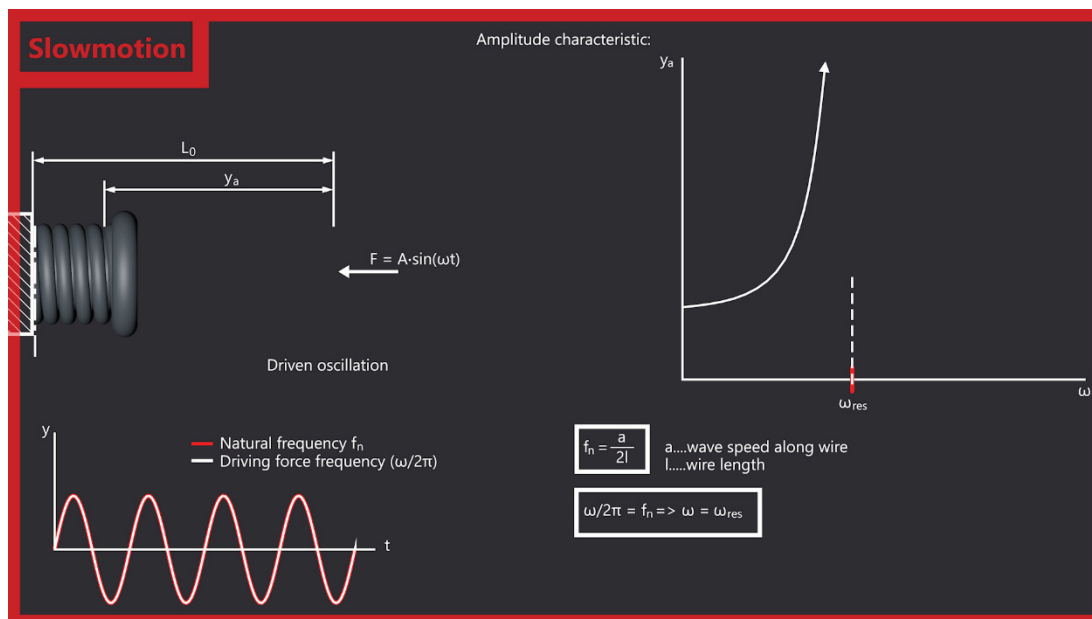
Při frekvenci budící síly odpovídající zhruba polovině vlastní frekvence pružiny animace přepne do zpomaleného režimu, při kterém je vykreslena deformační vlna cestující drátem pružiny rychlostí a podle vztahu (2-46). Vlna v této situaci projde celou délkou pružiny dvakrát výrazně rychleji, než dojde k vybuzení nové vlny, takže nedochází k rezonanci. Tento jev je poněkud zkreslený, aby plnil účel, kterým je graficky znázornit důvod rezonance. Vlnová délka zobrazené deformační vlny je velmi krátká, v reálném případě je většinou delší než pružina [8]. Kdyby byla použita reálná vlnová délka, nebyla by vlna graficky zřetelná. Pro ještě větší názornost je střed vlny vyznačen čerchovanou čarou. Dalším vzdálením od reality je utlumení každé vlny před iniciováním nové vlny, opět z důvodu grafické názornosti. Ve ventilových pružinách lze detekovat rezonanci při harmonických frekvencích až devátého řádu, což znamená devět zároveň se šířících vln v pružině. Taková situace by byla velmi nepřehledná [8]. *Obrázek 5-13* je snímek animace ve zpomaleném režimu.

Po zobrazení několika vln animace pokračuje zpět v normálním režimu času. Frekvence budící síly se zvyšuje až na hodnotu vlastní frekvence pružiny, která je podle vztahu (2-50) při zanedbání tlumení zároveň rezonanční frekvencí. Amplituda výchylky je teoreticky nekonečná. V animaci pružina kmitá s maximální možnou výchylkou, při které na sebe dosedají její závit. V reálné situaci by pravděpodobně došlo k selhání pružiny. V tomto momentu animace opět přepne do zpomaleného režimu a zobrazí se vlna, která svou rychlostí a tentokrát překoná dvě délky pružiny za stejný čas, jakým je perioda budící síly. Je tudíž zřejmé, že vlna se nikdy neutlumí a naopak se bude zvětšovat při každém cyklu. *Obrázky 5-14 a 5-15* ukazují momenty, kdy je vlna na různých koncích pružiny.



Obr. 5-14 Třetí animace - rezonance 1

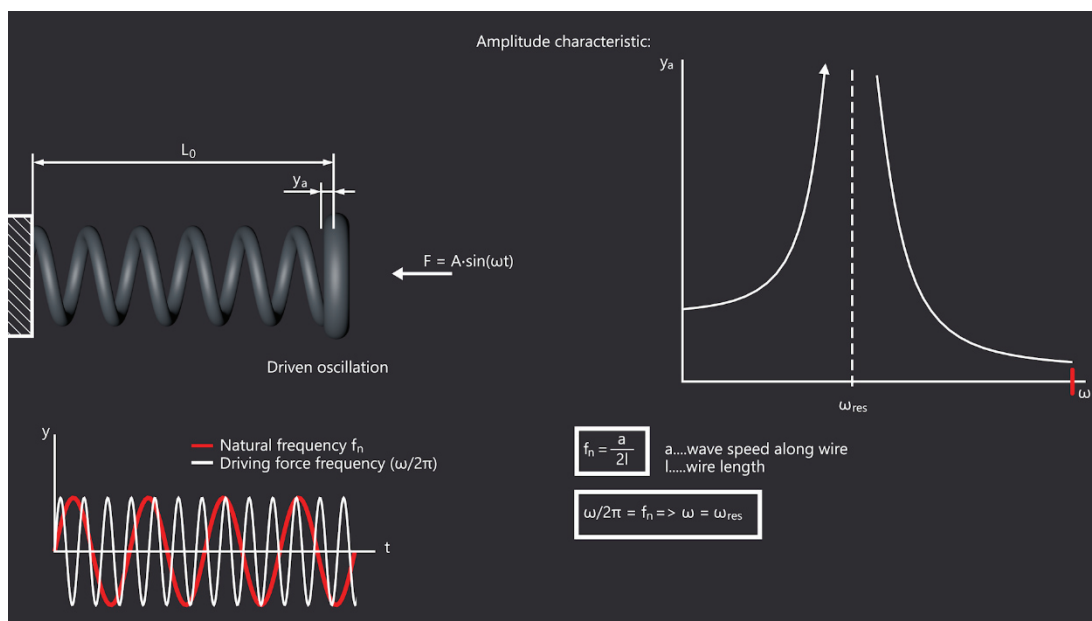
Po chvíli se animace vrátí opět do normálního režimu času a frekvence budící síly se dále zvyšuje, čímž se amplituda deformace snižuje podobně jako na *obr. 2-12*. Vysoká amplituda kmitání v reálném čase způsobuje nezřetelnost při pohledu na pružinu, takže



Obr. 5-15 Třetí animace - rezonance 2

hlavní výpovědní hodnotu ke konci animace má frekvenční charakteristika a kótovaná vzdálenost y_a na pružině. *Obrázek 5-16* je snímek z konce animace.

Pro třetí animaci jsem zvolil rozměry vnitřní ventilové pružiny PAC-1200 společnosti Peterson Spring [12]. Ventilová pružina byla vybrána proto, že je běžně namáhána cykly o vysokých frekvencích a rezonance je tedy relevantní problém. Kompletní pružina PAC-1200 je však složena z vnitřní a vnější pružiny s třecím tlumičem mezi nimi, takže rezonanční frekvence reálné součástky je výrazně vyšší, než vlastní frekvence vnitřní pružiny, se kterou v animaci počítám. Použití obou pružin s tlumičem



Obr. 5-16 Třetí animace - konečný stav

je pro animaci nevhodné, jelikož jejím účelem je zobrazení principu rezonance při harmonickém buzení. Frekvenční analýza kompletní součástky je pro animaci příliš komplikovaná a nepřehledná. Vstupní parametry animace jsou v *tab. 5-4*.

Tab. 5-4 Parametry výpočtu třetí animace

střední průměr pružiny	19,6	mm
průměr drátu	1,14	mm
volná délka pružiny	51,53	mm
modul pružnosti ve smyku	81000	MPa
hustota materiálu	7850	kgm ⁻³
vypočítaná vlastní frekvence podle (2-47)	178,6	s ⁻¹

6 DISKUZE

Animace jako doplněk výuky jsou v posledních letech oblíbeným nástrojem, zejména v zahraničí. Oproti jiným doplňkům výkladu mají totiž řadu výhod. Na rozdíl od výkresů a obrázků ukazují děje v čase, takže pozorovatel si nemusí domýšlet co se odehrává v popisované situaci. Ze stejného důvodu není nutné v animaci značit pohyb a může tak být přehlednější, než statické obrázky.

Podobnou pomůckou jsou také natočená videa, nicméně ta bez úpravy (doplnění videa animovanými prvky) nejsou tak názorná a přehledná, jako animace. Videa dále na rozdíl od animace umožňují pohled pouze zvenčí. Animovat lze naprosto cokoli a tak je možné zobrazit děje například v řezech, nebo v pohledech, které není možné zachytit na natáčené video.

Dalším oblíbeným nástrojem učitelů a profesorů jsou experimenty. Mnoho dějů lze studentům názorně ukázat přímo při výuce. I tato alternativa má však několik nedostatků. Teoretický výklad často pojednává o vztazích a dějích v idealizovaných podmínkách, se zanedbáním mnoha vedlejších vlivů. Experiment probíhá v reálném prostředí a jeho výsledky tak nebudou přesně odpovídat teorii, což může studentům dát více otázek, než odpovědí. To však může být i žádoucí, záleží na povaze a účelu výkladu. Dalším nedostatkem je nutnost připravovat experiment před každou demonstrací.

Tvorba animací je zdoluhavý proces, nicméně moderní softwarové nástroje jako Cinema 4D nabízejí poměrně intuitivní prostředí, ve kterém se po chvíli může zorientovat i člověk bez předchozích zkušeností s počítačovou grafikou.

V této práci jsem vytvořil animace, jejichž účelem je pomoci studentům pochopit podstatu některých dějů ve šroubovitých pružinách. Protože je pravděpodobné, že všechny animace budou přehrány během jednoho výkladu, jsou ve všech použity k demonstraci šroubovité tlačné pružiny. Změna pružiny na tažnou nebo zkrutnou by nepřidala nové informace a narušila by konzistenci animací. Zejména pro zkrutné šroubovité pružiny platí jiné vztahy – dominantní jsou normálová napětí a většina dějů by probíhala v jiných osách, nicméně princip dějů je stejný [1].

Při tvorbě byl kladen důraz v první řadě na názornost, nicméně veškeré zobrazované děje a grafy odpovídají výsledkům výpočtů podle vztahů shromážděných v druhé kapitole práce (s výjimkou druhé animace, kde velikost deformace pružiny z důvodu názornosti nesouhlasí s výpočtem). V animacích většinou nejsou uvedené konkrétní číselné hodnoty parametrů, protože pro pochopení principu nejsou důležité a jejich výčet by pouze odváděl pozornost od demonstrovaného děje. Naopak důležité jsou tvary křivek grafů, poměry zkoumaných vzdáleností, směry vektorů atp., protože tato grafická interpretace matematiky je právě hlavním smyslem animace.

První animace představuje úvod do problematiky návrhu pružiny. Ukazuje a odůvodňuje charakter napětí v pružině způsobený statickým zatížením. Pro korekci na zakřivení drátu byl použit Wahlův součinitel. Jeho alternativou je Bergsträsserův součinitel (2-27), který je Wahlůvu prakticky rovnocenný [1]. Výhodou Wahlůva součinitele je snadné rozdělení výsledného napětí na složky od posouvající síly a od zakřivení, proto bylo jeho použití vhodné pro tvorbu animace. Bergsträsserův součinitel může být preferován v praxi, protože se jedná o jednodušší výraz. Oba postupy vedou k přibližnému, ale pro běžné účely dostatečně přesnému výsledku.

Ve druhé animaci jsou ukázány dvě možnosti hodnocení únavové životnosti pružiny. Animace znázorňuje souvislost použitých diagramů. Teoreticky by bylo možné analogickým způsobem využít ještě Smithův diagram, jedná se pouze o další zobrazení

stejného prostoru. Někteří studenti si neuvědomují zaměnitelnost těchto diagramů a jsou zmateni jejich různým použitím. Jedním z důvodů může být fakt, že různé zdroje používají jako vstupní data k vyhodnocení únavy jiné mezní hodnoty. Důsledkem jsou rozdíly ve výsledcích, které mohou být mylně připisovány volbě diagramu. Názornost animace může pomoci k odstranění tohoto problému.

Třetí animace demonstruje proces rezonance. Použitý vztah (2-47) pro zjištění vlastní frekvence není častý a většina studentů strojírenství se s ním pravděpodobně nesetká, takže animace může vyžadovat doplňující vysvětlení. Vztah však vychází z rychlosti šíření deformačních vln pružinou a právě tyto vlny jsou důvodem rezonance. Běžně používané vztahy pro vlastní frekvenci vycházejí z hmotnosti a tuhosti pružiny, což jsou veličiny, které vystupují i v jiných výpočtech a tak je jejich použití praktičtější. Z jejich tvaru však není jasné, jak rezonance vzniká. A právě to animace ukazuje.

7 ZÁVĚR

7

Cílem práce bylo vytvořit názorné animace popisující ta témata týkající se šroubových pružin, která jsou náročnější na představení a pochopení. Animace jsou primárně určené pro použití při výkladu v předmětu *Konstruování strojů – strojní součásti* na FSI VUT.

Práce začíná kapitolou *Přehled současného stavu poznání*, kde jsou popsány a vysvětleny matematické vztahy a postupy použité při tvorbě animací. Další kapitola *Analýza problému a cíl práce* je věnována vysvětlení účelu animací a jejich stručnému popisu. V kapitole *Materiál a metody* popisují postup práce při vytváření animací, které jsou poté prezentovány v kapitole *Výsledky*. Práce je zakončena *Diskuzí* shrnující přínos animací a jejich srovnání s podobnými učebními pomůckami. V této kapitole také odůvodňují formu zobrazení vybraných dějů v jednotlivých animacích.

Cíl práce byl splněn vytvořením tří animací, které popisují problematiku napětí ve staticky zatížené pružině, únavovou pevnost cyklicky zatížených pružin a nebezpečí rezonance u harmonicky buzených pružin. Zvláštní důraz byl kladen na grafickou zřetelnost hlavního principu popisovaných dějů. Hotové animace lze použít k doplnění výuky na FSI VUT.

8 SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] SHIGLEY, Joseph Edward, Charles R. MISCHKE a Richard G. BUDYNAS. *Konstruování strojních součástí*. Přeložil Martin HARTL, Miloš VLK. V Brně: VUTIUM, 2010. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 978-80-214-2629-0.
- [2] WAHL, Arthur Munzenmaier. *Mechanical springs*. Cleveland (Ohio): Penton Publishing Company, 1944.
- [3] ČSN EN 13906-1. *Šroubovitě válcové pružiny vyráběné z drátů a tyčí kruhového průřezu – Výpočet a konstrukce – Část 1: Tlačné pružiny*. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2014. 36s. Třídící znak 02 6001.
- [4] JANÍČEK, Přemysl a Zdeněk FLORIAN. *Mechanika těles: úlohy z pružnosti a pevnosti I*. 4.přepřac. vyd. V Brně: CERM, 2004. ISBN 80-214-2655-1.
- [5] TIMOSHENKO, S. a J. N. GOODIER. *Theory of elasticity*. New York (New York): McGraw-Hill, 1951.
- [6] JANÍČEK, Přemysl, Emanuel ONDRÁČEK, Jan VRBKA a Jiří BURŠA. *Mechanika těles: pružnost a pevnost I*. V Brně: CERM, 2004. ISBN 80-214-2592-x.
- [7] NORTON, Robert L. *Machine design: an integrated approach*. 5th ed. Boston: Prentice Hall, 2014. ISBN 01-333-5671-X.
- [8] BLAŽEK, Václav. *Pružiny a svazky pružnic*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1953.
- [9] HARRISON, H. R. a T. NETTLETON. *Principles of engineering mechanics*. 2nd ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1994. ISBN 0-340-56831-3.
- [10] GREYSCALEGORILLA. *Intro To Cinema 4D* [online]. Grayscalegorilla, 2018, [11.5.2018]. Dostupné z: <https://greyscalegorilla.com/intro-to-cinema-4d>
- [11] CENTURY SPRING CORP. *Web catalog* [online]. Los Angeles: Century spring corp, 2015, [11.5.2018] Dostupné z: www.centuryspring.com/media/wysiwyg/Century/csc_catalog_web.pdf
- [12] PAC RACING SPRINGS. *1200 Series - PAC Racing Springs* [online]. Southfield: ADVISO, 2018, [11.5.2018]. Dostupné z: <https://www.racingsprings.com/1200-Series/sku/35>

9 SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK, SYMBOLŮ A VELIČIN

9

aa'	mm	- řez elementárního prvku pružiny
bb'	mm	- řez elementárního prvku pružiny
cc'	mm	- vlákno s nulovým napětím
dd'	mm	- zkoumané vlákno
ee'	mm	- osa drátu
ab	mm	- původní poloha krajního vlákna
ac	mm	- otočená poloha krajního vlákna
δ	mm	- vzájemné posunutí konců vlákna dd'
d β	rad	- úhel natočení
x,y	mm	- souřadnice
r	mm	- střední poloměr pružiny
γ	mm	- vzdálenost místa nulového napětí od osy drátu
d θ	rad	- elementární úhel vymežující prvek pružiny
l	mm	- délka vlákna dd', délka drátu pružiny
τ	MPa	- smykové napětí
τ_a	MPa	- axiální složka smykového napětí
τ_T	MPa	- složka smykového napětí od posouvající síly
α	rad	- úhel pootečení vlákna ab
F	N	- zatěžující síla
d	mm	- průměr drátu
G	MPa	- modul pružnosti ve smyku
E	MPa	- modul pružnosti v tahu
C	-	- poměr vinutí
J	mm ⁴	- kvadratický moment průřezu k neutrální ose
η	-	- Poissonova konstanta
K _W	-	- Wahlův součinitel
W	J	- energie napjatosti
M _k	Nm	- zatěžující kroučící moment
J _p	mm ⁴	- polární kvadratický moment průřezu k neutrální ose
S	mm ²	- plocha průřezu
n	-	- počet činných závitů
y	mm	- délková deformace
F _{min}	N	- minimální síla cyklu
F _{max}	N	- maximální síla cyklu
F _a	N	- amplituda silového cyklu
F _m	N	- střední hodnota silového cyklu
$\tau_{\max}$	MPa	- maximální hodnota napětí
$\tau_{\min}$	MPa	- minimální hodnota napětí
τ_a	MPa	- amplituda napětí
τ_m	MPa	- střední hodnota napětí
τ_i	MPa	- předpětí
F _i	N	- síla předpětí
R _{sm}	MPa	- mez pevnosti ve smyku
R _{sE}	MPa	- mez pružnosti ve smyku
a	ms ⁻¹	- rychlost šíření deformační vlny
ρ	kgm ⁻³	- hustota

f	Hz	- vlastní frekvence
Ω_0	rads^{-1}	- vlastní úhlová frekvence
Ω_{res}	rads^{-1}	- rezonanční úhlová frekvence
q_a	mm	- amplituda výchylky
A	N	- amplituda budicí síly
k	Nm^{-1}	- tuhost
ω	rads^{-1}	- úhlová frekvence budicí síly
b_p	-	- poměrný útlum
b	Nsm^{-1}	- součinitel tlumení
m	kg	- hmotnost
σ_N	MPa	- normálové napětí od tlaku
σ_{M_0}	MPa	- normálové napětí od ohybu
τ_{M_k}	MPa	- smykové napětí od krutu
α	$^\circ$	- úhel stoupání závitů pružiny
L_0	mm	- volná délka pružiny
L_s	mm	- délka pružiny při dosednutí závitů
F_s	N	- síla deformující pružinu na L_s
L_i	mm	- délka předejíté pružiny

10 SEZNAM OBRÁZKŮ A GRAFŮ

Obr. 2-1 Řez šroubovitou pružinou [1]	3
Obr. 2-2 Uvolněný prvek s VVÚ [4]	3
Obr. 2-3 Elementární prvek pružiny [2]	5
Obr. 2-4 Průběh napětí při rotaci okolo středu [2]	5
Obr. 2-5 Průběh napětí při rotaci okolo O' [2]	5
Obr. 2-6 Řez pružinou [2]	6
Obr. 2-7 Délkový elementární prvek pružiny [2]	7
Obr. 2-8 Závislost Wahlova součinitele na poměru vinutí	10
Obr. 2-9 Nákres Haighova diagramu	12
Obr. 2-10 Nákres Weyrauchova diagramu	14
Obr. 2-11 Diagram rozsahu meze únavové pevnosti [3]	15
Obr. 2-12 Příklad amplitudové charakteristiky	17
Obr. 4-1 Potup práce	20
Obr. 4-2 Prostředí programu Cinema 4D	21
Obr. 4-3 Prostředí XPresso	22
Obr. 5-1 První animace - začátek	23
Obr. 5-2 První animace - svíjení drátu	24
Obr. 5-3 První animace - svinutá pružina	24
Obr. 5-4 První animace - zobrazení efektu zakřivení	25
Obr. 5-5 První animace - změna poměru vinutí	26
Obr. 5-6 Druhá animace - začátek	27
Obr. 5-7 Druhá animace - zobrazení diagramů	27
Obr. 5-8 Druhá animace - provozní stav	28
Obr. 5-9 Druhá animace - všechny stavy	29
Obr. 5-10 Druhá animace - průběh energie	29
Obr. 5-11 Třetí animace - začátek	30
Obr. 5-12 Třetí animace - začátek buzení	31
Obr. 5-13 Třetí animace - zpomalený detail před rezonancí	31
Obr. 5-14 Třetí animace - rezonance 1	32
Obr. 5-15 Třetí animace - rezonance 2	33
Obr. 5-16 Třetí animace - konečný stav	33

11 SEZNAM TABULEK

Tab. 4-1 Parametry animací	21
Tab. 5-1 Barvy napětí	23
Tab. 5-2 Parametry výpočtu první animace	26
Tab. 5-3 Parametry výpočtu druhé animace	30
Tab. 5-4 Parametry výpočtu třetí animace	34