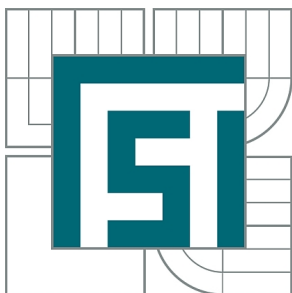


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ENERGETICKÝ ÚSTAV

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
ENERGY INSTITUTE

MATEMATICKÝ MODEL EXPERIMENTÁLNÍ SMYČKY KRITICKÝCH TEPELNÝCH TOKŮ

MATHEMATICAL MODEL OF TEST FACILITY FOR STUDY CRITICAL HEAT FLUX

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

DAVID BARTŮNĚK

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

Ing. LADISLAV SUK

BRNO 2015

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Energetický ústav

Akademický rok: 2014/15

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): David Bartůněk

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Základy strojního inženýrství (2341R006)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č. 111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Matematický model experimentální smyčky kritických tepelných toků

v anglickém jazyce:

Mathematical model of test facility for study critical heat flux

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Seznámení se s výpočtovým prostředím Matlabu nebo LabView .

Tvorba matematického modelu přechodových stavů experimentální smyčky kritických tepelných toků (KTT).

Cíle bakalářské práce:

1. Základní popis jednotlivých komponent experimentální smyčky (ES)
2. Rešerše matematických postupů řešení přechodových jevů reálných zařízení.
3. Matematické popsání přechodových funkcí základních komponent (ES)

Seznam odborné literatury:

Švarc, Ivan.: Automatické řízení

Databáze technických článků ScienceDirect.

Výzkumné zprávy z experimentálních měření krize varu.

Databáze publikací World Nuclear Association.

Databáze publikací International Atomic Energy Agency.

Heřmanský B.: Termomechanika jaderných reaktorů, SNTL Praha:1986

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Ladislav Suk

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2014/15.

V Brně dne 15. 4. 2015



doc. Ing. Jiří Pospíšil, Ph.D.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan

Abstrakt

Práce je ve své první části zaměřena na popis experimentální smyčky měřícího standu krize přestupu tepla, umožňujícího vizualizaci dvoufázového proudění ve vertikálním kanále. V další části jsou uvedeny základní matematické postupy pro řešení přechodových jevů reálných zařízení. Poslední praktická část této práce se věnuje aplikaci předešlých postupů na elektrický ohřívák v rámci experimentální smyčky a vytvoření matematického modelu tohoto zařízení.

Abstract

In the first part, the bachelor thesis is focused on the description of test facility used for studying critical heat flux and for visualizing two-phase flow in the vertical canal. In the next part, there are the basic mathematical methods that are used for solving transient behavior of real devices. The last practical part of the thesis deals with applying of preceding methods to the preheater as part of the experimental loop and creating mathematical model of this device.

Klíčová slova

Přechodová funkce, přechodová charakteristika, identifikace, kritický tepelný tok

Key words

Step function, step response, identification, critical heat flux

Bibliografická citace

BARTŮNĚK, D. *Matematický model experimentální smyčky kritických tepelných toků*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 70 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Ladislav Suk.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Matematický model experimentální smyčky kritických tepelných toků“ vypracoval samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který tvoří přílohu této práce.

Datum: 29.05.2015

Jméno a příjmení: David Bartůněk

Podpis:

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval těm, kteří mi byli při vypracování bakalářské práce nápomocni. Obzvlášť bych chtěl poděkovat Ing. Ladislavu Sukovi za poskytnuté informace a odborné vedení této bakalářské práce. Mimo jiné bych rád poděkoval i panu Janu Kohútovi, za to, jakým způsobem mě naučil dívat se na svět kolem nás a vnímat jeho fyzikální podstatu. V neposlední řadě pak velký dík patří mým rodičům za podporu a zázemí, které mi při studiu poskytli.

Obsah

1	Úvod	15
2	Experimentální smyčka	16
2.1	Základní popis	16
2.2	Základní komponenty experimentální smyčky	17
2.2.1	Čerpadlo primárního okruhu	17
2.2.2	Elektrický ohřívák	18
2.2.3	Topné těleso	19
2.2.4	Kondenzátor	19
2.2.5	Tepelný výměník	19
2.2.6	Čerpadlo sekundárního okruhu	20
3	Základní pojmy automatického řízení	21
3.1	Dělení řízení	21
3.2	Spojité lineární řízení	22
3.2.1	Regulační člen	23
3.2.1.1	Diferenciální rovnice systému	23
3.2.1.2	Přenos	24
3.2.1.3	Impulsní funkce a charakteristika	25
3.2.1.4	Přechodová funkce a charakteristika	25
3.2.2	Rozdělení regulačních členů	26
3.2.3	Dopravní zpoždění	27
4	Identifikace systému	29
4.1	Analytická identifikace	30
4.2	Experimentální identifikace	32
4.2.1	Klasifikace metod	32
4.2.1.1	Druhy metod dle vstupního testovacího signálu	32
4.2.1.2	Druhy metod dle zpracování výsledků experimentu	33
4.2.1.3	Druhy metod dle zvoleného druhu modelu	33
4.2.2	Vyhodnocování přechodových charakteristik	34
4.2.2.1	Aproximace soustavou prvního řádu bez dopravního zpoždění	35
4.2.2.2	Aproximace soustavou prvního řádu s dopravním zpožděním	36
4.2.2.3	Aproximace nekmitavých soustav vyšších řádů	38
4.2.2.4	Aproximace kmitavého členu druhého řádu	42
4.2.3	Další metody vyhodnocování	44
5	Analytická identifikace elektrického ohříváku	45
5.1	Sestavení matematického modelu	45
6	Experimentální identifikace elektrického ohříváku	54
6.1	Popis experimentu	54
6.2	Aproximace naměřené přechodové charakteristiky	56
7	Závěr	61
8	Seznam použitých zdrojů	62
9	Seznam použitých zkratk a symbolů	63
10	Seznam příloh	66
11	Přílohy	67
11.1	Příloha 1 – Laplaceova transformace	67
11.2	Příloha 2 – Odvození vybraných vztahů	69
11.3	Příloha 3 – Výkres elektrického ohříváku	70

1 Úvod

Často diskutovaným problémem posledních let je stále rostoucí poptávka po energii a stále výraznější energetická závislost dnešní populace, odvíjející se od průměrné životní úrovně. Toto je důsledkem nárůstu populace a využívání strojních, elektrotechnických a mnohých dalších zařízení, využívajících elektrickou energii.

Jedním z neopomenutelných zdrojů energie je energie jaderná. K přeměně energie jaderné na energii tepelnou slouží jaderné reaktory, v jejichž aktivních zónách se uvolňuje energie štěpením. Teplo vzniklé štěpením jader uranu ^{235}U zahřívá palivový článek a přestupuje přes jeho pokrytí do chladiva. Tepelná energie, kterou chladivo získalo štěpením jaderného paliva v reaktoru, je předávána látce sekundárního okruhu. Tato pára vznikající v parogenerátoru dále postupuje na turbínu spojenou s generátorem, kde dochází k přeměně tepelné energie páry na energii mechanickou a dále pak elektrickou.

Vývoj jaderných reaktorů byl poměrně rychlý. Od okamžiku, kdy byl postaven první jaderný reaktor pod tribunou stadionu Chicagské univerzity v roce 1942, dospěl do současného stádia výroby na běžné komerční bázi. Zejména pak mluvíme o vývoji reaktorů chlazených tlakovou vodou, které v současné době patří mezi nejrozšířenější jaderné reaktory, za což vděčí nemalým dílem svému postavení v jaderném průmyslu. Při návrhu těchto reaktorů je nutné zohlednit veškerá bezpečnostní hlediska, ke kterým se postupem času připojila i hlediska ekonomická. S tím jsou neoddelitelně spojené tendence zvyšování jednotkových výkonů, zvyšování teploty a tlaku chladiva a mimo jiné i nárůst tepelného zatížení paliva. Existují ovšem faktory omezující tyto trendy. Například faktorem, omezujícím výši tepelného zatížení palivových tyčí, je krize přestupu tepla. Při ní dochází k výraznému snížení koeficientu přestupu tepla z paliva do chladiva. To se projevuje nárůstem teploty paliva, což může vést až k poškození palivových tyčí. Tyto skutečnosti nasvědčují tomu, že problematika vzniku krize přestupu tepla je fenomén, který je třeba zvládnout co nejdokonaleji při dalším vývoji tlakovodních reaktorů.

Vzhledem k velké složitosti fyzikální podstaty výše zmíněného jevu jsou úspěchy jak na poli teoretickém tak i na poli experimentálním značně omezené. V experimentální oblasti je krize přestupu tepla zkoumána na experimentálních smyčkách postavených cíleně za tímto účelem. Jejich slabou stránkou je, že podmínky těchto experimentálních smyček se mohou značně lišit od podmínek provozních. Aplikace výsledků z jednodušších geometrií na svazky tyčí a dále z podmínek rovnoměrného tepelného toku na nerovnoměrný je proto problematická. Na základě výsledků získaných na experimentálních smyčkách, vznikají různé korelační vztahy pro určení kritických tepelných toků s různými omezeními obory platnosti.

2 Experimentální smyčka

Tato část práce se zabývá základním popisem konkrétní experimentální smyčky. Popis se vztahuje na základní komponenty primárního a sekundárního okruhu.

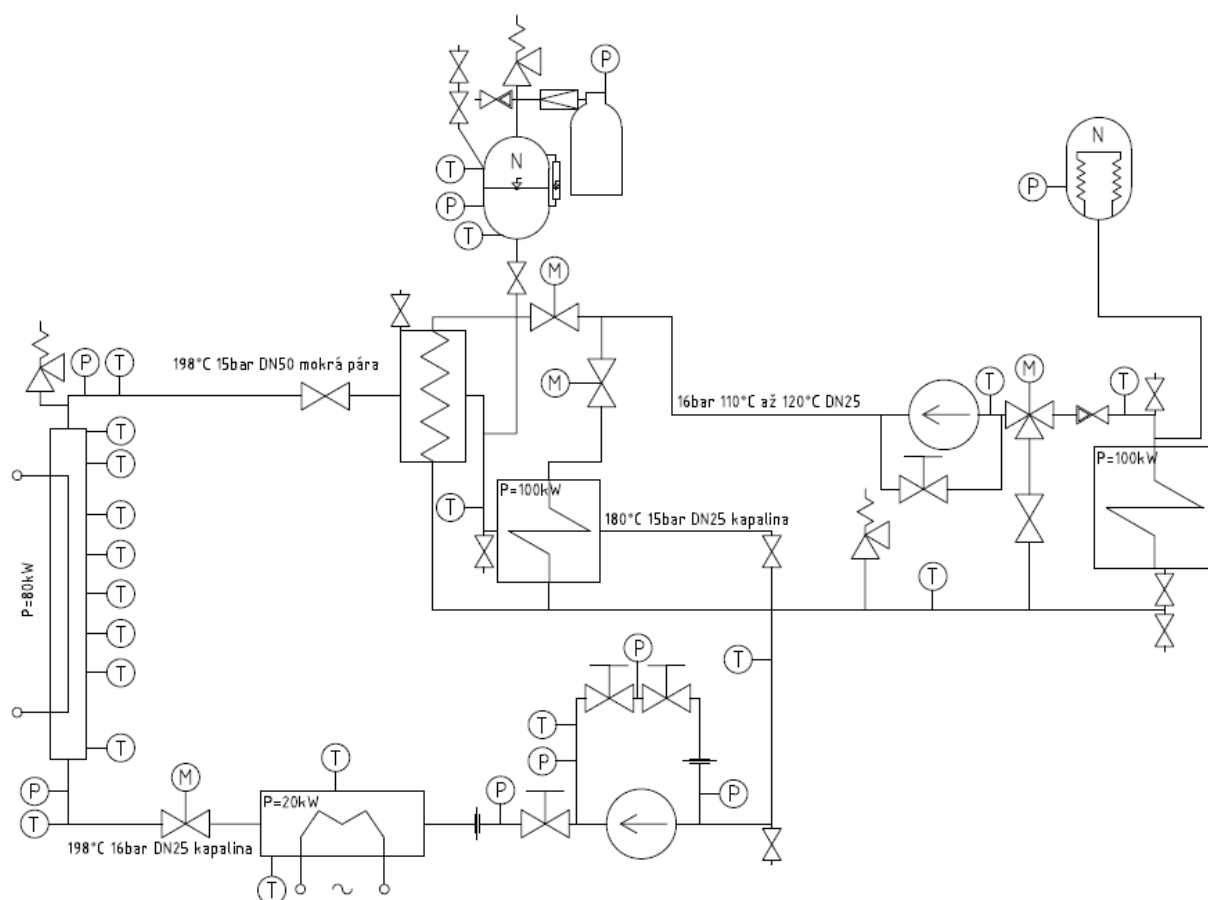
2.1 Základní popis

Pod záštitou energetického ústavu je v rámci jedné dizertační práce rozpracován projekt, jehož náplní je stavba a provoz experimentální smyčky kritických tepelných toků. Tuto experimentální smyčku lze rozdělit na dvě části – primární a sekundární okruh. Součástí primárního okruhu je testovací sekce, která umožňuje vizualizaci dvoufázového proudění ve vertikálním kanále. Hlavním úkolem sekundárního okruhu je zajistit chlazení okruhu primárního.

Pracovním médiem experimentální smyčky je demineralizovaná voda. Mimo ní lze při experimentech tohoto typu užít i freon, který byl však v tomto případě zamítnut z důvodu složité legislativy a finanční náročnosti pokusů, užívajících tento druh pracovního média. Demineralizovaná voda je pomocí čerpadla primárního okruhu poháněna smyčkou. Vstupuje do elektrického ohříváku, kde je její teplota upravena na předdefinovanou hodnotu na vstupu do testovací sekce. Uvnitř experimentální sekce proudí médium vzhůru a obtéká povrch potrubí, vedoucího středem měřicí sekce, který je zahříván elektrickým proudem. Dodáváním dostatečného tepla voda vaří na povrchu. Z testovací sekce vystupuje mokrá pára, která dále pokračuje na kondenzátor, kde vzniklý parní objem zkondenzuje a dále do tepelného výměníku vstupuje už pouze kapalina. Z tepelného výměníku vstupuje pracovní médium znovu do čerpadla a cyklus se opakuje. Součástí primárního okruhu je i kompenzátor objemu, který slouží k vyrovnávání tlakových změn v okruhu. Často jde o tlakovou nádobu s uzavřeným pomocným objemem a plynovým nebo parním polštářem nad hladinou chladiva.

Sekundární chladicí cyklus je nutný k provozování kondenzátoru a chladiče. Tepelná energie dodaná do primárního okruhu je nejprve převedena do sekundárního chladicího okruhu a potom se rozptýlí do okolí. Pracovní médium sekundárního okruhu je opět poháněno skrze smyčku čerpadlem. Voda o teplotě okolo 110 °C prostupuje sekundárním okruhem, který se za čerpadlem dělí na dvě větve. První větev prostupuje výměníkem primárního okruhu, druhá větev vstupuje do kondenzátoru. Tyto větve se za zmíněnými zařízeními spojí v jedinou, která dále vede do tepelného výměníku sekundárního okruhu.

Součástí experimentální smyčky je i filtr tuhých částic a ionexový filtr užívaný pro demineralizaci, popř. pro změkčení vody. Tyto filtry jsou zařazeny v obtoku vedle přehříváče a v případě potřeby čištění vody jsou otevřeny.



Obr. 2.1 Schéma primárního a sekundárního okruhu experimentální smyčky

2.2 Základní komponenty experimentální smyčky

Výše zmíněná experimentální smyčka obsahuje široké spektrum částí a zařízení, mezi které je nutné zařadit i měřicí techniku, snímače a v neposlední řadě i armatury tvořící trať. Dále bude pojednáno pouze o základních komponentách tvořících tuto smyčku.

2.2.1 Čerpadlo primárního okruhu

Úkolem čerpadla primárního okruhu je pohánět médium skrze smyčku. Zároveň musí splňovat požadavky spojené s jeho užitím, tj. v daném případě maximální průtok, maximální teplota na čerpadle, popř. maximální absolutní tlak systému. V našem případě je požadovaný průtok 0,55092 l/s, požadovaná maximální teplota na čerpadle 180 °C a požadovaný maximální absolutní tlak systému 15 bar. Pro výše danou smyčku bylo zvoleno vertikální článkové odstředivé čerpadlo značky Grundfos, typ CRN 1-25 F-FGJ-G-F HQQE 1,5kW.

„Jelikož teploty vyšší než 120 °C mají za normálních okolností za následek podstatné snížení životnosti hřídelové ucpávky čerpadla v důsledku nedostatečného mazání těsnících ploch ucpávky, užívá se zde systém vzduchového chlazení ucpávkové komory čerpadla „Air-Cooled Top“, který je vhodný pro provozní aplikaci do teplot v okolí hodnoty 180 °C.“[9]

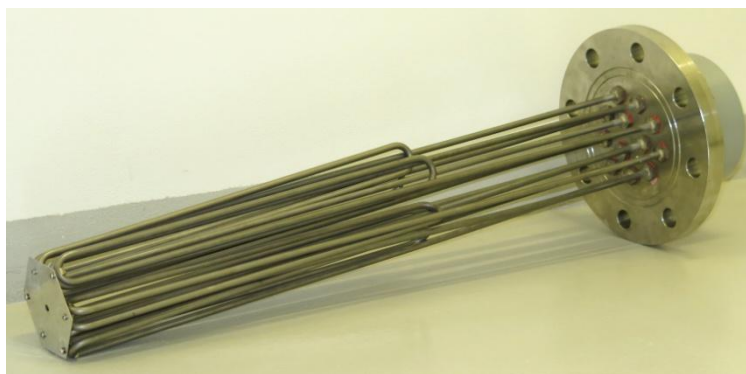
Výše zmíněným systémem proudí čerpaná kapalina pod vysokým tlakem. V oblasti mechanické ucpávky se snižuje její tlak a současně i její teplota sytosti, vlivem čehož začíná vařit. Teplota v ucpávkové komoře klesá na teplotu sytosti za atmosférického tlaku, neboť je komora spojena s atmosférou přes separátor vlhkosti.



Obr. 2.2 *Fotografie čerpadla primárního okruhu*

2.2.2 Elektrický ohřívák

Za čerpadlem primárního okruhu následuje elektrický ohřívák, který upravuje teplotu pracovního média na požadovanou hodnotu. V daném případě bylo zvoleno topné těleso pro přímý ohřev vody, dodávané firmou ELTOP. Maximální provozní tlak topného tělesa je po úpravě 2,5 MPa. Topné větve jsou nerezové z materiálu AISI 304, stejně jako příruba. Napájecí napětí je 3x400 V, jmenovitý výkon 19 200 W.



Obr. 2.3 *Fotografie tělesa elektrického ohříváku*

2.2.3 Topné těleso

Topné těleso je umístěno podélně ve středu měřicí sekce. Je zahříváno elektrickým proudem a jeho povrch je obtékán pracovním médiem, čímž dochází k přenosu tepla z topného tělesa do případné parovodní směsi. Délka topné trubice je 0,808 m, průměr topené trubice je 0,009 m, průměr obáلكové trubice je 0,0147 m a projektový výkon stejnosměrného zdroje je 80 kW.

2.2.4 Kondenzátor

Dvoufázová parovodní směs vystupující z měřicí sekce dále vstupuje do kondenzátoru, kde dříve vzniklý parní objem zkondenzuje. Jako kondenzátor byla zvolena tlaková nádoba o objemu 150 l a hmotnosti 233 kg dodaná společností Step Trutnov. Nádoba je opatřena hrdly pro vstup a výstup pracovního média obou okruhů. Zkušební přetlak pláště nádoby je 25,5 baru, vložky potom 27,2 baru. Pracovní přetlak pláště nádoby je 15,0 baru, vložky pak 16,0 baru.



Obr. 2.4 Fotografie nádoby kondenzátoru

2.2.5 Tepelný výměník

Za kondenzátorem je umístěn deskový výměník tepla typu B28H-90. Jedná se o klasický deskový pájený výměník pro menší výkony s 90 deskami. Desky jsou vyrobeny z nerezové oceli AISI 316, pájecím materiálem je měď. Mezní pracovní podmínky deskového výměníku jsou v rozmezí od 155 °C/25 bar/16 bar do 225 °C/22 bar/14 bar, což zleva doprava značí teplotu a tlaky na vnitřním a vnějším okruhu. Pro připojení jsou na výměníku 4 vnější závity G 5/4“.



Obr. 2.5 *Fotografie tepelného výměníku*

2.2.6 Čerpadlo sekundárního okruhu

Pro pohon pracovního média skrze sekundární okruh je v dané smyčce instalováno druhé čerpadlo značky Grundfos, typ CRN 5-3 A-FGJ-G-E HQQE 0,55 kW 400 V. Stejně jako v případě čerpadla primárního okruhu se jedná o vertikální článkové odstředivé čerpadlo s nižším výkonem.



Obr. 2.6 *Fotografie čerpadla sekundárního okruhu*

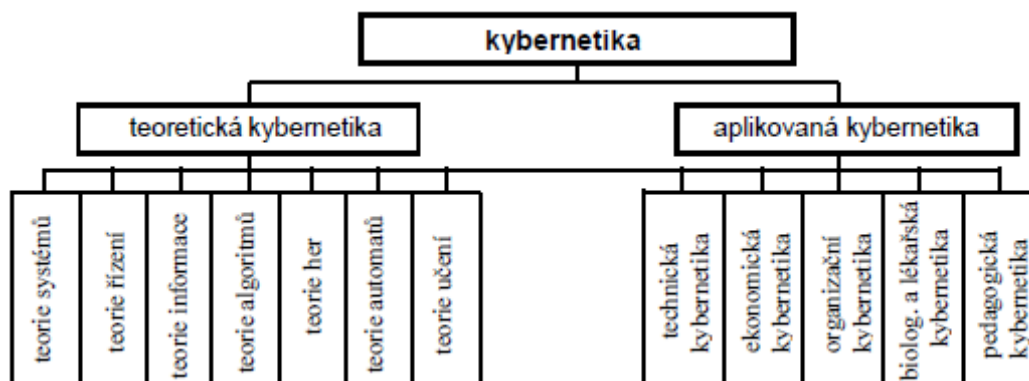
3 Základní pojmy automatického řízení

V této kapitole bude pojednáno o základních pojmech z oblasti automatického řízení, které budou v dalším textu užívány a se kterými budeme pracovat jak v teoretické, tak v experimentální části.

3.1 Dělení řízení

Jednoznačným trendem v nejen průmyslové oblasti je snaha o neustálé zvyšování produktivity práce. S tím je nutně spojena snaha zjednodušovat pracovní úkony a snižovat jejich časovou náročnost. Zároveň často vyžadujeme nahrazení lidské práce činností strojů. Proces, při kterém nahrazujeme lidskou řídicí činnost činností různých přístrojů a zařízení, nazýváme automatizací.

S automatizací je neoddělitelně spjat pojem řízení. Řízením se zabývá vědní obor zvaný kybernetika. Tato teoretická disciplína v dnešní době zkoumá obecné vlastnosti systémů a zákonitosti jejich řízení. Základní dělení je na teoretickou kybernetiku a na její aplikace. Tyto větve lze dále dělit, jak je vidět na obrázku Obr. 3.1.



Obr. 3.1 Schéma dělení kybernetiky [1]

Řízení lze definovat a dělit následovně. Proces řízení lze chápat jako vědomé působení na řízený objekt takovým způsobem, aby bylo dosaženo předem definovaného cíle. To lze intuitivně dělit na řízení ruční a automatické. Další hledisko, dle kterého lze řízení dělit, zohledňuje, zda-li výsledek řízení zpětně kontrolujeme či nikoliv. Dle výše uvedeného lze řízení dělit na ovládání, kdy řízení probíhá bez zpětné vazby, dále na regulaci, kdy řízení probíhá se zpětnou vazbou a danou fyzikální veličinu udržujeme na konstantní hodnotě, a v poslední řadě na vyšší formy řízení.

Princip, kterým řídicí systém působí na systém řízený, se může mnohdy lišit. Pak automatické řízení dělíme na:

Logické řízení – řídíme pomocí dvouhodnotových veličin popisujících stav o řízeném objektu, využíváme pravidla výrokové logiky.

Spojité řízení – tento typ řízení využíváme v okamžiku, kdy informace o řízeném systému je spojitá veličina stejně jako akční zásah. Důsledkem je neustálá vazba vstupu a výstupu.

Diskrétní řízení – na rozdíl od řízení spojitého je signál diskrétní, tj. hodnoty vstupů a výstupů jsou známy jen v určitých časových okamžicích, které se od sebe liší o tzv. vzorkovací periodu.

Fuzzy řízení – založeno na odborné znalosti o řízení konkrétního systému, která je zastoupena počítačovým algoritmem. Potom lze na základě určitých pravidel vyvodit ke konkrétním vstupům vhodné výstupy.

3.2 Spojité lineární řízení

Jak bylo zmíněno v předešlé kapitole 3.1, jedním z typů řízení je tzv. regulace. Toto řízení probíhá se zpětnou vazbou a cílem je zajistit, aby konkrétní fyzikální veličina nabývala požadované hodnoty, i při působení poruch. Systém, ve kterém regulace probíhá, se nazývá regulační obvod. Jeho dvě základní části jsou regulátor, někdy také řídicí systém, a regulovaná soustava, někdy též řízený systém.

Regulátor uskutečňuje proces regulace, zatímco objektem regulace je regulovaná soustava.

Regulovaná veličina, kterou značíme y , je taková veličina, kterou se v regulačním obvodu prostřednictvím regulátoru snažíme udržovat na požadované hodnotě.

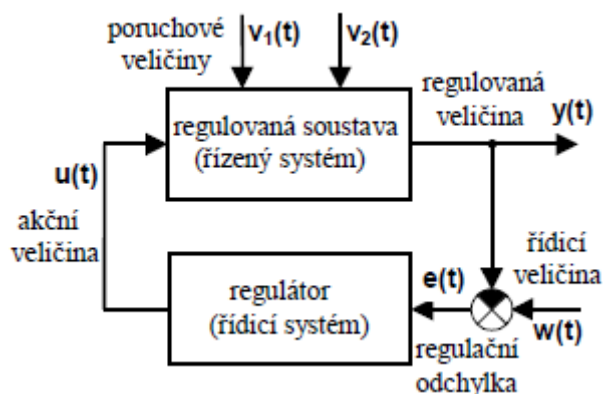
Na druhou stranu žádaná hodnota, často také řídicí veličina označovaná w , je ta hodnota, které má prostřednictvím regulátoru regulovaná veličina dosahovat.

Regulační odchylka e je rozdíl řídicí veličiny a regulované veličiny. V okamžiku, kdy je hodnota regulační odchylky nenulová, regulátor provádí akční zásah takovým způsobem, aby se hodnota regulační odchylky minimalizovala nebo byla rovna nule. Vypočítá se dle vztahu:

$$e = w - y \quad (1)$$

Akční veličinu u lze chápat jako vstupní veličinu regulované soustavy a současně jako výstupní veličinu regulátoru. Prostřednictvím akční veličiny zmenšujeme regulační odchylku.

Poruchové veličiny v_i nepředvídatelným způsobem působí na hodnotu regulační veličiny a mění ji. Proto jsou jednou z příčin samotné regulace.



Obr. 3.2 Blokové schéma regulačního systému [1]

Regulaci lze dále dělit z hlediska chování regulačního obvodu na regulaci na konstantní hodnotu, programovou regulaci a vlečnou regulaci a servomechanismy.

Nejběžnější z výše zmíněných typů regulace je regulace na konstantní hodnotu, kdy řídicí veličina a tedy i veličina regulovaná mají konstantní hodnotu $w = konst.$, popř. $y = konst.$

Programová regulace se liší od regulace na konstantní hodnotu v tom, že požadujeme, aby se regulovaná veličina měnila dle předem definovaných pravidel s předepsanou časovou závislostí, tj. $w = f(t)$, popř. $y = f(t)$.

Vlečná regulace a servomechanismy je odlišná od obou výše zmíněných v tom, že řídicí veličina je funkcí jiné tzv. vnější fyzikální veličiny, tj. $w = f(X)$, popř. $y = f(X)$, kde X je daná vnější fyzikální veličina.

3.2.1 Regulační člen

Termín regulační člen označuje obecně základní člen regulačního obvodu a tudíž jako regulační člen můžeme chápat jak regulátor, tak regulovanou soustavu apod. Nutně se však musí skládat z dalších částí. Regulační člen má jak vstupní veličinu $u(t)$, tak výstupní veličinu $y(t)$, přičemž nemusí být nutně vždy jedna vstupní veličina a jedna výstupní veličina.

V případě regulačního členu lze dále hovořit o jeho statických a dynamických vlastnostech. Vlastnosti statické interpretuje statická charakteristika, která představuje závislost výstupní veličiny y na vstupní veličině u , přičemž se vždy jedná o hodnoty v ustáleném stavu. Dynamické vlastnosti lze interpretovat buď vnějším nebo vnitřním popisem. Vnější popis systému interpretuje dynamické vlastnosti pouze vztahem vstupní veličina – výstupní veličina. Zkoumání je zaměřeno pouze na reakci výstupu na vstup. Vnitřní popis navíc k vztahu vstup – výstup operuje s pojmem stav systému.

Dále bude pojednáno pouze o vnějším popisu, zejména pak o jeho základních způsobech, mezi které patří:

- diferenciální rovnice systému
- přenos
- impulsní funkce a charakteristika
- přechodová funkce a charakteristika
- frekvenční přenos
- frekvenční charakteristika
- poloha pólů a nul přenosu

Poslední tři zmíněné způsoby vnějšího popisu regulačních členů nebudou dále rozvedeny, neboť v dalších částech této práce nenajdou uplatnění.

3.2.1.1 Diferenciální rovnice systému

Nechť máme lineární spojitý systém nebo regulační člen, jehož vstupní veličina je $u(t)$ a výstupní veličina $y(t)$, pak jej lze obecně popsat diferenciální rovnicí (2).

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_1 u' + b_0 u \quad (2)$$

K rovnici (2) je třeba doplnit podmínku fyzikální realizovatelnosti, která musí být vždy splněna a je dána vztahem

$$m \leq n \quad (3)$$

Slovně lze podmínku fyzikální realizovatelnosti chápat tak, že nejvyšší derivace výstupní veličiny $y(t)$ musí být vyššího nebo stejného řádu jako nejvyšší derivace veličiny vstupní $u(t)$, přičemž hodnota n v rovnicích (2) a (3) udává tzv. řád systému. Pomocí rovnice (2) lze již určit závislost $y(t)$, známe-li průběh $u(t)$. Pro vyřešení této diferenciální rovnice jsou potřeba počáteční podmínky.

Prakticky lze najít diferenciální rovnici na základě fyzikálních zákonitostí v daném systému, přičemž se postupně zbavíme veličin jiných, než jsou veličiny vstupní a výstupní.

3.2.1.2 Přenos

Tento způsob vnějšího popisu regulačních členů patří mezi nejběžněji užívané. Obecně ho získáme aplikací Laplaceovy transformace vstupní a výstupní funkce na diferenciální rovnici (2), tj. nahradíme je vhodnými funkcemi komplexní proměnné s . Přenos je potom definován následovně:

$$G(s) = \frac{L\{y(t)\}}{L\{u(t)\}} = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (4)$$

Dále lze aplikací základních vět Laplaceovy transformace na diferenciální rovnici popsanou vztahem (2) obecný vztah (4) rozvést do následující formy:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad (5)$$

O problematice Laplaceovy transformace spolu s odvozením výše uvedeného vztahu je pojednáno v příloze 1 a 2.

Přenos lze vyjádřit dalšími dvěma způsoby a to pomocí nul a pólů a pomocí časových konstant. Přenos vyjádřený pomocí nul a pólů vypadá následovně:

$$G(s) = k \frac{(s - n_1)(s - n_2) \dots (s - n_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad (6)$$

Proměnné v čitateli zastoupené písmenem n označují nuly přenosu, zatímco proměnné ve jmenovateli označené písmenem p nazýváme póly přenosu.

Přenos vyjádřený pomocí časových konstant:

$$G(s) = K \frac{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \dots (\tau_m s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) \dots (T_n s + 1)} \quad (7)$$

Koeficienty τ_i a T_i nazýváme časovými konstantami přenosu. Mají časový rozměr.

3.2.1.3 Impulsní funkce a charakteristika

„Impulsní funkce je odezva systému na jednotkový (Diracův) impuls $\delta(t)$ na vstupu systému a značíme ji $g(t)$. Její graf je impulsní charakteristika.“ [1]

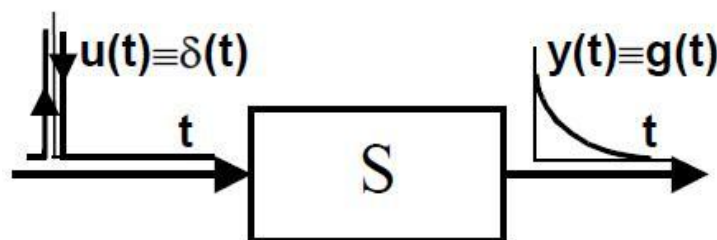
Ve výše uvedené definici impulsní funkce se nachází pojem Diracův impuls. Ten lze chápat jako funkci, která vyjma jediného bodu svého definičního oboru má nulovou hodnotu. Ve zmiňovaném bodě je její hodnota rovna nekonečnu. Jedná se tak o nekonečně krátký impuls s nekonečně velkou amplitudou. Plocha pod křivkou $\delta(t)$ je rovna jedné. Z toho plyne, že hodnota Laplaceova obrazu této funkce je rovna jedné.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (8)$$

$$L\{\delta(t)\} = 1 \quad (9)$$

Vztah mezi impulsní funkcí a přenosem je následující:

$$g(t) = L^{-1}\{G(s)\} \quad (10)$$



Obr. 3.3 Diracův impuls na vstupu [1]

3.2.1.4 Přejchodová funkce a charakteristika

„Přejchodová funkce je odezva systému na jednotkový skok $\eta(t)$ na vstupu a značíme ji $h(t)$. Její graf je přejchodová charakteristika.“ [1]

Ve výše uvedené definici přejchodové funkce pracujeme s pojmem jednotkový skok $\eta(t)$. Ten zde interpretuje funkci, která na svém definičním oboru nabývá dvou hodnot. Budeme-li na osu nezávisle proměnné vynášet čas t , potom lze jednotkový skok $\eta(t)$ chápat tak, že v intervalu $t \in (-\infty; 0)$ je hodnota funkce rovna nule a v intervalu $t \in \langle 0; \infty \rangle$ je hodnota funkce rovna jedné. Velkou výhodou přejchodové charakteristiky je, že ji lze experimentálně poměrně snadno získat.

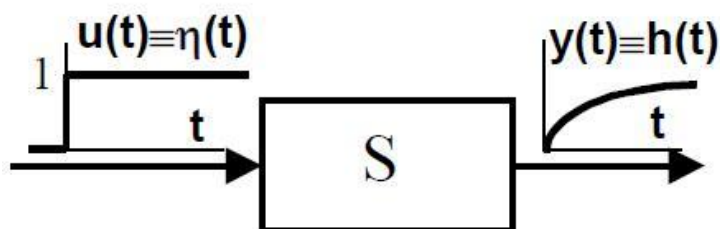
Vztah mezi přechodovou funkcí a přenosem je následující:

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \quad (11)$$

Vztah mezi přechodovou funkcí a impulsní funkcí a naopak je následující:

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau \quad (12)$$

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad (13)$$



Obr. 3.4 Jednotkový skok na vstupu [1]

3.2.2 Rozdělení regulačních členů

Regulační členy můžeme rozdělit na tři základní skupiny. Dělení regulačních členů provádíme na základě hodnoty, na které se ustálí přechodové charakteristiky jednotlivých regulačních členů. Tuto hodnotu lze vyjádřit vztahem:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = h(\infty) \quad (14)$$

Dále dle věty o konečné hodnotě funkce (viz příloha 1) lze vyjádřit ustálenou hodnotu přechodové funkce následovně:

$$h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) \quad (15)$$

a po dosazení základního vztahu pro přenos (5) lze rovnici (15) upravit:

$$h(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s^1 + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s^1 + a_0} = \frac{b_0}{a_0} \quad (16)$$

Hodnotu, na které se přechodová funkce ustálí, lze tedy vyjádřit jako podíl ve vztahu (16). Pomocí tohoto vyjádření rozdělíme regulační členy do tří základních skupin.

Regulační člen je:

- proporcionální – pro $a_0 \neq 0; b_0 \neq 0$, přechodová funkce se ustálí na konečné hodnotě
- derivační – pro $a_0 \neq 0; b_0 = 0$, přechodová funkce se ustálí na nule
- integrační (astatické) – pro $a_0 = 0; b_0 \neq 0$, přechodová funkce se neustálí

Řád regulačního členu je roven hodnotě mocniny proměnné s , kterou lze vytknout v čitateli (v případě derivačního členu), popřípadě ve jmenovateli (v případě integračního členu).

člen	ideální	se zpožděním 1.řádu	se zpožděním 2.řádu	obecný
proporcio- nální	$G(s) = k$	$G(s) = \frac{k}{Ts + 1}$	$G(s) = \frac{k}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$	$G(s) = \frac{b_ms^m + \dots + b_1s + b_0}{a_ns^n + \dots + a_1s + a_0}$
derivační	$G(s) = ks$	$G(s) = \frac{ks}{Ts + 1}$	$G(s) = \frac{ks}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$	$G(s) = \frac{s(b_ms^m + \dots + b_1s + b_0)}{a_ns^n + \dots + a_1s + a_0}$
integrační	$G(s) = \frac{k}{s}$	$G(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)}$	$G(s) = \frac{k}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$	$G(s) = \frac{b_ms^m + \dots + b_1s + b_0}{s(a_ns^n + \dots + a_1s + a_0)}$

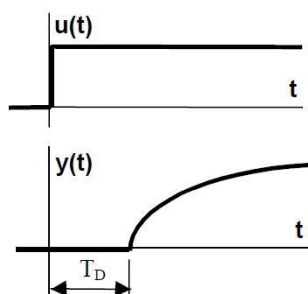
Tab. 3.1 Přenosy regulačních členů [1]

3.2.3 Dopravní zpoždění

Doposud jsme předpokládali okamžitou reakci výstupní veličiny na veličinu vstupní. V praxi se však můžeme často setkat s regulovanými soustavami, u kterých po změně na vstupu nenásleduje bezprostřední změna na výstupu. Odezva na změnu vstupní veličiny se projeví až po uplynutí jisté doby, kterou nazýváme dopravní zpoždění T_D .

Zjednodušeně lze říci: „Dopravní zpoždění T_D u regulovaných soustav je zpožděná reakce výstupní veličiny (tj. regulované veličiny y) na změnu vstupní veličiny (tj. akční veličiny u).“ [1]

Dopravní zpoždění je třeba zahrnout do úvah při výpočtu regulačních pochodů, obzvláště tehdy, je-li jeho hodnota srovnatelná s časovými konstantami soustavy.



Obr. 3.5 Přechodová charakteristika soustavy se zpožděním prvního řádu [1]

Otázkou však je, jaký je tvar přenosu soustavy, který zahrnuje informaci o dopravním zpoždění. Uvažujme soustavu se setrvačností 1. řádu a s dopravním zpožděním T_D . Diferenciální rovnice předpokládané soustavy bez vlivu dopravního zpoždění je:

$$a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \quad (17)$$

V případě, že se však skutečně jedná o soustavu s dopravním zpožděním, můžeme říct, že hodnota výstupní veličiny y reaguje na hodnotu akční veličiny u nikoliv v čase t , ale v čase $t - T_D$.

To lze matematickým zápisem interpretovat následovně:

$$a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t - T_D) \quad (18)$$

Vztah (18) lze zobecnit následovně:

$$a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t - T_D) + \dots + b_1 u'(t - T_D) + b_0 u(t - T_D) \quad (19)$$

Na diferenciální rovnici (19) lze aplikovat Laplaceovu transformaci a užitím základních vět transformace lze analogicky jako vztah (5) odvodit:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} e^{-T_D s}, \quad (20)$$

Čímž dostáváme vztah pro přenos soustavy s dopravním zpožděním T_D .

4 Identifikace systému

V této kapitole je definován pojem identifikace systému a pojmy s ním související. Dále je zde poukázáno na způsoby řešení přechových jevů reálných zařízení a obecně na způsoby nalezení matematického modelu dynamických regulovaných soustav.

V technické praxi je nahrazování skutečných zařízení a systémů modelem běžná záležitost. Důležité je zajistit, aby námi vytvořený model systému postihoval důležité vazby mezi příčinami a důsledky, které lze v návaznosti na předcházející kapitolu chápat jako vstupy a výstupy systému. Pojem identifikace pak rozumíme proces hledání vhodného modelu.

Při procesu hledání a tvorby matematického modelu nejprve definujeme identifikovaný systém, v rámci kterého probíhají sledované jevy. Jak bylo řečeno v předešlém odstavci, vnější příčiny pokládáme za vstupy, sledované příznaky pak za výstupy. Současně dochází k zjednodušení daného problému prostřednictvím předpokladů a omezení se pouze na zkoumané souvislosti. Dále pak zanedbáváme nepodstatné děje a nevýznamné vstupy systému.

Obecně existují dva přístupy hledání matematického modelu:

- analytická identifikace (často tzv. matematicko-fyzikální analýza)
- experimentální identifikace

Z praktického hlediska je vhodné nejprve využít první zmíněný přístup a teoretickou cestou získat přibližný matematický popis a následně užitím experimentální identifikace upřesnit parametry daného modelu.

Samotné modely lze klasifikovat na základě různých hledisek. Dále jsou uvedeny některé z nich, přičemž samotná klasifikace je převzata z pramenu [2].

Modely mohou být:

- abstraktní – popisuje souvislost mezi příčinami a důsledky pomocí grafu, tabulky, slovně, matematickými rovnicemi či softwarovým modelem
- hmatatelný (fyzický) – modely s fyzikální podstatou, tj. laboratorní zařízení apod.

Dále dělíme na:

- morfologické – „zde patří modely vytvořené z originálu takovou projekcí, při které se zachovává forma, tedy geometrická stránka a sleduje se adekvátnost vnějších dimenzí“ [2]
- kybernetické – při zobrazení dbáme na shodu či podobnost samotného chování dané soustavy

Na základě výše uvedené klasifikace modelů pramen [2] chápe samotný matematický model jako logický průnik abstraktních a kybernetických modelů. V okamžiku, kdy jsme zařadili matematické modely, lze je dále dělit na:

- statické – vztahy mezi ustálenými hodnotami vstupů a výstupů
- dynamické – vztahy mezi vstupy a výstupy popisují diferenciální, popř. diferenční rovnice

Dle závislosti koeficientů výše zmíněných rovnic na čase dělíme modely na:

- časově nezávislé (t – invariantní)
- časově závislé (t – variantní)

Dále z hlediska linearity lze rozlišit:

- lineární
- nelineární

Na základě spojitosti informace o systému rozlišujeme modely:

- spojité
- diskrétní – změny jsou známy v diskrétních časových okamžicích

Dále lze rozlišit modely:

- neparametrické – vyjádřeny pomocí přechodové, impulsní, popř. frekvenční charakteristiky
- parametrické – analytické vyjádření funkce s konečným počtem parametrů

Parametrické modely lze dělit na modely:

- se soustředěnými parametry – parametry, které hledáme mají stejnou hodnotu v celém zkoumaném objektu
- s rozloženými parametry – hledané parametry mají různou hodnotu v závislosti na své poloze ve zkoumaném objektu

Z hlediska přístupu k hledání modelu rozlišujeme modely:

- analytické – získané užitím dedukce
- experimentální – získané užitím indukce

Experimentální modely lze na závěr rozdělit mezi:

- deterministické – při hledání deterministických modelů přivádíme na vstup systému známý, přesně definovaný testovací signál (jedná se zpravidla o identifikaci systémů, na které nepůsobí poruchové veličiny)
- stochastické – jsou to modely, kdy testovací signál není přesně znám vlivem poruchových veličin či náhodného působení vnějšího okolí na daný systém, často stejným vstupům není přiřazen stejný výstupní signál (při řešení je poté třeba uplatnit pravděpodobnostní přístup)

Na samotný závěr klasifikace modelů je vhodné zmínit, že dle způsobu identifikace můžeme sestavit tzv. off-line model, který je vytvořen na základě fyzikálních zákonů, technologických procesů apod. Na druhou stranu on-line model je sestaven při činnosti daného zařízení a je neustále zpřesňován probíhajícím experimentem.

4.1 Analytická identifikace

Jak již bylo uvedeno výše, analytická identifikace, často též označovaná jako matematicko-fyzikální analýza, je jedním ze způsobů nalezení přibližného matematického modelu identifikovaného systému. K nalezení modelu využívá fyzikální, chemické, empirické a jiné zákonitosti. Velkou výhodou analytické identifikace proti experimentální, je ta, že nevyžaduje existenci skutečné soustavy a tudíž může být nasazena už v okamžiku projektové přípravy zařízení. Na druhou stranu lze užít tuto metodu jen tehdy, máme-li o regulované soustavě speciální apriorní znalosti. Důležitá je i otázka předpokladů a zjednodušení, které při řešení zavádíme. Je třeba si uvědomit, že zjednodušení, které při hledání modelu aplikujeme na konkrétní soustavu, nelze aplikovat na soustavu podobnou, ale ne zcela totožnou. Stejně tak někdy dané předpoklady do výpočtů zahrnout lze, jindy nikoliv. Proto je třeba ke každé úloze přistupovat zvlášť a vhodně volit postup, který vede ke správnému cíli.

„Má-li hledaný matematický model dostatečně přesně vystihovat všechny důležité vlastnosti a nemá-li být přitom zbytečně komplikovaný, musí být předem známo, k jakému účelu bude matematického modelu dále použito.“ [3]

Z předešlého plyne, že pro nalezení korektního matematického modelu se od řešitele očekává jistá dávka zkušeností, intuice a praxe.

Při hledání matematických vztahů popisujících chování identifikovaného systému lze vycházet z několika základních obecných rovnic, vyjadřujících bilanci hmotnosti, energie a sil. Jsou to:

1. Rovnice kontinuity

časová změna hmotnosti uvnitř dané soustavy	=	celkový přívod hmotnosti do soustavy	–	celkový odvod hmotnosti ze soustavy
--	---	---	---	--

2. Rovnice energetická

časová změna energie uvnitř soustavy	=	celkový přívod energie do soustavy	–	celkový odvod energie ze soustavy
---	---	---------------------------------------	---	--------------------------------------

3. Rovnice pohybová

časová změna hybnosti	=	Součet všech působících sil
-----------------------	---	--------------------------------

4. Rovnice vazební

- případné rovnice vazební mohou udávat vztahy mezi jednotlivými veličinami

Proces samotné matematicko-fyzikální analýzy se případ od případu zásadně liší, ale jistá osnova bývá zpravidla zachována. Obecně lze říci, že hledání matematického modelu touto cestou začíná vždy vypsáním jedné z rovnic uvedených výše. Postupnými úpravami se snažíme vyjádřit přenos regulované soustavy a najít a vyčíslit jeho časové konstanty.

Zdroj [2] uvádí tzv. metodu blokových schémat (někdy též blokové algebry). Obecný postup této metody je následující:

1. Sestavíme schéma modelovaného objektu.
2. Uvedeme všechny veličiny v systému a smysl jejich působení.
3. Vazbu jednotlivých veličin získáme sestavením diferenciálních rovnic, jejichž konstanty jsou obecné, přičemž veličiny výstupní pokládáme za závislé proměnné, zatímco veličiny vstupní za nezávislé proměnné.
4. Na základě těchto vazeb mezi jednotlivými veličinami vytvoříme blokové schéma.
5. V případě, že jsou vztahy mezi těmito veličinami lineární, popřípadě linearizovatelné v oblasti, která nás zajímá, nahradíme bloky přenosy.
6. Aplikací pravidel blokové algebry získáme výsledný přenos, který udává poměr mezi obrazy daného výstupu a vstupu či vstupů, je-li takových víc.

Konkrétní příklad procesu hledání matematického modelu prostřednictvím matematicko-fyzikální analýzy je uveden v kapitole 5. V rámci tohoto příkladu jsou nastíněny základní rysy analytické identifikace.

4.2 Experimentální identifikace

Druhým přístupem při hledání matematického modelu dynamické regulované soustavy je experimentální identifikace. Na rozdíl od identifikace analytické se v tomto případě model vytváří na základě údajů získaných z měření a pozorování chování identifikovaného systému. Z toho logicky plyne, že pro experimentální identifikaci je nutná existence identifikovaného systému. Tento přístup identifikace často nastupuje v okamžiku, kdy je zkoumaný systém složitější a nelze pro něj vytvořit dostatečně jednoduchý a spolehlivý ekvivalentní model předchozí metodou. Praktické zkušenosti ukazují, že často vyhovují poměrně jednoduché modely, jejichž parametry byly určeny přímo v pracovních podmínkách, ve kterých má být modelu užito. Proto modely získané experimentální identifikací bývají zpravidla jednodušší než modely sestavené analytickou identifikací. Menší časová náročnost této metody spolu s výše uvedenými fakty jsou základní výhody experimentální identifikace.

V průběhu vývoje teorie identifikace vznikla řada metod experimentální identifikace. Od těch nejjednodušších se postupem času souběžně s rozvojem výpočetní techniky přechází k dokonalejším metodám určení parametrů modelu. Dále bude následovat stručný přehled hledisek pro rozdělení experimentálních identifikačních metod, jehož cílem je nastínit základní rozdíly v přístupu k experimentální identifikaci.

4.2.1 Klasifikace metod

Zpravidla lze metody experimentální identifikace obecně dělit na základě testovacího signálu, způsobu zpracování dat, kritéria ekvivalence modelu a identifikovaného systému, popřípadě typu zvoleného modelu.

4.2.1.1 Druhy metod dle vstupního testovacího signálu

Experimentální identifikační metody lze rozlišit na základě testovacího budicího signálu, který přivádíme na vstup identifikovaného systému. Pozorujeme odezvu, tj. výstupní veličinu a získáváme představu o vazbě vstup – výstup.

Vstupní signál můžeme chápat jako přirozený v okamžiku, jedná-li se o běžný signál, který probíhá při provozu zařízení a hovoříme pak o tzv. pasivním experimentu. Logicky musí existovat i signál umělý. V tomto případě uměle vytvořený signál účelně zavádíme na vstup identifikovaného systému a provádíme tzv. aktivní experiment. Signál může být:

- deterministický – průběh deterministického signálu je v čase známá funkce, tudíž lze v jakémkoliv okamžiku určit jeho hodnotu, lze dále rozlišit periodické a aperiodické deterministické signály

- náhodný – průběh takového signálu je zcela náhodný a určují se pouze statistické či pravděpodobnostní charakteristiky
- pseudonáhodný – průběh pseudonáhodného signálu je v čase známý, liší se v rámci jedné periody zastupující dopředu známou realizaci náhodného procesu

Aperiodický deterministický signál nejčastěji využívají metody založené na vyhodnocování přechodových a impulsních charakteristik. Při těchto metodách je doba měření odezvy poměrně krátká a samotné vyhodnocení není příliš složité. Periodický deterministický signál se užívá při měření frekvenční charakteristiky identifikovaného objektu.

Metody, které jsou založené na vyhodnocování odezvy na náhodný či pseudonáhodný signál, zpravidla využíváme na stochastické objekty. S tím je neoddelitelně spjata statistické vyhodnocování získaných hodnot a doba měření se tím prodlužuje.

4.2.1.2 Druhy metod dle zpracování výsledků experimentu

Výsledek experimentálního měření lze chápat jako jistý záznam, který obsahuje informaci o vstupních signálech a příslušných odezvách identifikovaného objektu. Ty mohou být v závislosti na vstupním signálu spojité, tj. známe jejich hodnoty v celém časovém pásmu, a nebo mohou být diskrétní, v tom případě známe hodnoty pouze v konkrétních časových okamžicích oddělených od sebe vždy stejně velkým časovým úsekem. Spojité signály bývají vyhodnocovány jednoduššími metodami například v rámci analýzy přechodové charakteristiky. Jsou-li data zpracovávána číslicovými počítači, je nutné zajistit diskrétní signál.

Dále lze metody na základě způsobu zpracování dat rozdělit na implicitní a explicitní. Explicitní metody jsou někdy označovány jako jednorázové, nerekurzivní, nerekurentní či jako metody otevřené smyčky. Jak naznačují názvy, při těchto metodách probíhá vyhodnocení naměřených dat až po ukončení měření. V průběhu měření data uchováváme v paměti a kompletní zpracování přichází na řadu jakmile je experiment u konce. Implicitní metody nesou obvykle názvy jako rekurentní, rekurzivní, průběžné či metody uzavřené smyčky. Z názvů lze opět usuzovat princip těchto metod, který je založený na postupném zpracování dat. Na základě několika málo naměřených dat se vytvoří model a ten je postupně dále zpřesňován novými změřenými údaji. Zároveň s tímto postupem není spojena potřeba všechna data uchovávat v paměti, jak je tomu u metod explicitních.

4.2.1.3 Druhy metod dle zvoleného druhu modelu

Metody experimentální identifikace lze klasifikovat i na základě zvoleného modelu, neboť s konkrétním modelem je často spojen i vstupní signál aj.

Model daný diferenciální rovnicí či spojitým přenosem často koresponduje s modely získanými analytickou identifikací. Metody experimentální identifikace jsou v těchto případech relativně jednoduché a může to být aproximace přechodové charakteristiky či vyhodnocování impulsních charakteristik.

Chceme-li získat model ve tvaru diferenční rovnice či diskrétního přenosu, užíváme statistické a pravděpodobnostní metody odhadu parametrů. Výpočet bývá často poměrně složitý a proto je převážně zpracován výpočetní technikou.

Model daný frekvenční charakteristikou lze získat často jen u identifikovaných systémů, u kterých je vhodné, aby měl vstupní signál harmonický průběh (vhodné v případě elektrického napětí apod.). Tento typ modelu získáváme Fourierovou analýzou odezvy na jednodušší vstupní signály harmonického průběhu.

Model může mít jindy tvar impulsní charakteristiky. Tento typ modelu získáváme přesným měřením odezvy identifikovaného systému na Diracův impuls. Tato metoda je opět vhodná pouze pro určité systémy a to systémy bez šumových signálů, kde je odezva výraznější než u objektů, na které působí náhodný šum. Pro takové objekty je vhodnější použít metodu korelační analýzy, kterou zmiňuje pramen [2] spolu s dalšími klasifikačními hledisky i podrobnějším výkladem jednotlivých metod.

4.2.2 Vyhodnocování přechodových charakteristik

V této kapitole budou uvedeny základní postupy analýzy přechodových charakteristik v návaznosti na následující část této práce, kde bude uvedena jejich aplikace na reálné zařízení. Jedná se o historicky nejstarší metody identifikace, které zůstávají významným podílem užívány nejen kvůli minimální námaze při tvorbě modelu, ale mimo jiné i kvůli užitečným orientačním výsledkům, které poskytují.

Vstupním signálem, jak již bylo několikrát uvedeno výše, je v případě přechodových charakteristik skoková funkce. Experimentální získání přechodové charakteristiky spočívá v přivedení identifikovaného objektu do ustáleného stavu a následným zavedením vhodného testovacího vstupního signálu. Po ustálení objektu na nové hodnotě lze měření ukončit. Změnu vstupní veličiny je nutné přepočítat na jednotkovou a následný časový průběh této změny je ona hledaná přechodová funkce.

Takovýto způsob měření je vždy doprovázen jistou chybou a měřená přechodová charakteristika často úplně přesně neodpovídá s dalšími naměřenými charakteristikami. Proto je nutné měření opakovat a pro vyhodnocení využít jakýsi střední průběh. Pramen [2] uvádí vztah pro hodnoty výstupní veličiny výsledné přechodové charakteristiky na základě hodnot z jednotlivých měření. Vztah má následující podobu:

$$Y_k = \frac{\sum_{i=1}^N \text{sign}(\Delta u_i) y_{ik}}{\sum_{i=1}^N |\Delta u_i|} \quad (21)$$

Ve vztahu (21) představuje Y_k hodnotu odezvy výpočtem získané výsledné přechodové funkce středního průběhu v čase $t = kT_0$, kde T_0 je tzv. perioda vzorkování a dále:

N – počet měření přechodové charakteristiky

I – pořadové číslo měření $i = 1, 2, \dots, N$

Δu_i – skoková změna veličiny na vstupu v rámci i -tého měření přechodové charakteristiky

y_{ik} – hodnota výstupní funkce (tj. odezvy) při i -tém měření v k -tém intervalu vzorkování, kde $k = 0, 1, \dots, m$ je pořadové číslo vzorkovací periody

V dalších částech této podkapitoly budou uvedeny základní metody aproximace přechodových charakteristik tak, jak je uvádí zdroj [2].

4.2.2.1 Aproximace soustavou prvního řádu bez dopravního zpoždění

Naměřenou přechodovou charakteristiku lze nahradit nebo lépe řečeno aproximovat soustavou prvního řádu bez dopravního zpoždění pouze za jistých předpokladů. Zásadní předpoklad je ten, že v okolí času $t = 0$ je přechodová charakteristika téměř skoková. Soustavu prvního řádu bez dopravního zpoždění lze popsat zjednodušením diferenciální rovnice (2) do tvaru:

$$a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \quad (22)$$

Tu z důvodů dalších úprav ještě přepíšeme do tvaru obsahujícího časovou konstantu a zesílení soustavy. Tento tvar je následující:

$$Ty'(t) + y(t) = Ku(t) \quad (23)$$

Ve výše uvedeném vztahu je časová konstanta označená koeficientem T a zesílení soustavy reprezentuje člen K . Na základě znalostí o přenosu soustavy z kapitoly 3.2.1.2 by následovala Laplaceova transformace obou stran rovnice a vyjádření jejich poměru. Je vhodné si všimnout, že pokud má diferenciální rovnice tvar (2) lze přenos soustavy rovnou psát, neboť koeficienty u členů na pravé straně rovnice odpovídají koeficientům v čitateli přenosu. Tyto koeficienty zapisujeme vždy tak, aby mocnina proměnné s odpovídala stupni derivace členu diferenciální rovnice, ke kterému daný koeficient přísluší. Analogická je i vazba mezi koeficienty levé strany diferenciální rovnice a koeficienty proměnné s ve jmenovateli přenosu. Aplikujeme-li tento postup na rovnici (23) dostáváme přenos:

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1} \quad (24)$$

Ze vztahu (11) lze dále získat rovnici přechodové funkce. V našem případě je zapotřebí argument Laplaceovy transformace rozdělit na parciální zlomky a pomocí slovníku Laplaceovy transformace pak dostáváme předpis pro přechodovou funkci:

$$h(t) = \left(1 - e^{-\frac{1}{T}t} \right) \quad (25)$$

Jedinými neznámými ve výše uvedených vztazích jsou konstanty T a K . Druhý uvedený koeficient, tedy zesílení soustavy, lze určit ze statické rovnováhy soustavy, neboť pokud je vstupní veličina skoková funkce, kdy daný „skok“ má velikost 1, potom v ustáleném

stavu, tedy v čase $t \rightarrow \infty$ platí, že hodnota výstupní funkce bude rovna danému zesílení soustavy. To můžeme matematicky zapsat následovně $y(\infty) = K$. Nemůžeme-li brát vstupní signál jako jednotkový skok, pak je konstanta K jednoduše rovna rozdílu výstupního signálu podělenému změnou vstupního signálu. To vyjadřuje matematický zápis (26).

$$K = \frac{y(\infty) - y(0)}{\Delta u(t)} \quad (26)$$

Zbývá už jen určit časovou konstantu T . K tomu stačí zvolit konkrétní bod na naměřené přechodové charakteristice o obecných souřadnicích $[t_A; y_A]$. Pro takový bod A potom platí vztah (25) upravený do tvaru:

$$y_A = K \left(1 - e^{-\frac{t_A}{T}} \right) \quad (27)$$

Člen z neznámou T převedeme na jednu stranu a dostáváme:

$$e^{-\frac{t_A}{T}} = 1 - \frac{y_A}{K} \quad (28)$$

Rovnici (28) už zbývá jen zlogaritmovat a vyjádřit časovou konstantu T .

$$T = -\frac{t_A}{\ln \left(1 - \frac{y_A}{K} \right)} \quad (29)$$

4.2.2.2 Aproximace soustavou prvního řádu s dopravním zpožděním

Chceme-li aproximovat soustavou prvního řádu s dopravním zpožděním, nelze pracovat pouze s rovnicí (22). Vliv dopravního zpoždění popisuje v kapitole 3.2.3 rovnice (18). Tuto rovnici upravíme obdobně jako jsme upravili rovnici (22) zavedením časové konstanty a zesílení soustavy. Pak dostáváme:

$$Ty'(t) + y(t) = Ku(t - T_D) \quad (30)$$

Následně opět vyjádříme přenos soustavy, kterou popisuje výše uvedená diferenciální rovnice. Aplikujeme-li Laplaceovu transformaci, hledaný přenos bude mít tvar:

$$G(s) = \frac{Ke^{-T_D s}}{Ts + 1} \quad (31)$$

A obdobně vyjádříme předpis pro přechodovou charakteristiku na základě vztahu mezi přenosem soustavy a danou přechodovou funkcí viz také vztah (11). Přechodová funkce pak má předpis:

pro $t \in (-\infty; T_D)$:

$$h(t) = 0 \quad (32)$$

pro $t \in \langle T_D; \infty \rangle$:

$$h(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t-T_D}{T}} \right) \quad (33)$$

Stejně jako tomu bylo v předchozí kapitole i zde je dále třeba určit časovou konstantu T , zesílení soustavy K a navíc k tomu konstantu T_D . Zesílení soustavy určíme na základě stejného komentáře jako v předešlé kapitole dle vztahu (26). Zbylé dvě konstanty budeme určovat analogicky, ale jelikož se jedná o dvě neznámé, tak budeme potřebovat dvě rovnice. Nabízí se místo jednoho bodu naměřené přechodové charakteristiky zvolit dva, čímž získáme soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé. Pro body $A = [t_A; y_A]$ a $B = [t_B; y_B]$ tedy platí:

$$y_A = K \left(1 - e^{-\frac{t_A-T_D}{T}} \right) \quad (34)$$

$$y_B = K \left(1 - e^{-\frac{t_B-T_D}{T}} \right) \quad (35)$$

Dále zbývá řešit soustavu dvou exponenciálních rovnic pro dvě neznámé. Z obou rovnic si převedeme členy s neznámými na jednu stranu a dostáváme:

$$e^{-\frac{t_A-T_D}{T}} = 1 - \frac{y_A}{K} \quad (36)$$

$$e^{-\frac{t_B-T_D}{T}} = 1 - \frac{y_B}{K} \quad (37)$$

Obě rovnice zlogaritmujeme a získáme:

$$-\frac{t_A-T_D}{T} = \ln \left(1 - \frac{y_A}{K} \right) \quad (38)$$

$$-\frac{t_B-T_D}{T} = \ln \left(1 - \frac{y_B}{K} \right) \quad (39)$$

Rovnice (38) a (39) mezi sebou vydělíme, čímž se nám vykrátí neznámá T dostáváme jednu rovnici pro jednu neznámou, kterou je v našem případě dopravní zpoždění T_D . Po vydělení rovnic tedy jednoduchými úpravami vyjádříme konstantu T_D a dostáváme:

$$T_D = \frac{t_B \ln\left(1 - \frac{y_A}{K}\right) - t_A \ln\left(1 - \frac{y_B}{K}\right)}{\ln\left(1 - \frac{y_A}{K}\right) - \ln\left(1 - \frac{y_B}{K}\right)} \quad (40)$$

Zbývá už jen vyjádřit poslední neznámou, tj. časovou konstantu T . Vzhledem k tomu, že dopravní zpoždění již známe, stačí si konstantu T vyjádřit z kterékoliv z rovnic (38) či (39). Výsledný vztah má tedy tvar:

$$T = \frac{T_D - t_A}{\ln\left(1 - \frac{y_A}{K}\right)} \quad (41)$$

4.2.2.3 Aproximace nekmitavých soustav vyšších řádů

Jedná-li se o soustavu vyšších řádů, bývá aproximace její přechodové funkce poměrně náročným procesem. I v případě, že se přechodová charakteristika ustálí na určité hodnotě, nelze z jejího průběhu určit ani řád ani jiné parametry dané soustavy. V tomto okamžiku nastupují přibližné metody, díky nimž můžeme získat alespoň aproximační přenosy dané soustavy.

Jedna z nejjednodušších a často užívaných metod aproximace přechodových charakteristik je dílem profesora V. Strejce, který působil na pražské technice v polovině 20. století. Při této metodě předpokládáme, že danou soustavu lze aproximovat proporcionální soustavou 2. řádu s různými časovými konstantami a nebo proporcionální soustavou n -tého řádu s přibližně stejnými časovými konstantami. To, kterou aproximační soustavu zvolit, nám prozrazuje tečna sestavená v inflexním bodě naměřené přechodové charakteristiky na základě úseků, které vytíná na časové ose a na ose, ke které se přechodová charakteristika blíží a kterou považujeme za nový ustálený stav.

Přenos proporcionální soustavy n -tého řádu se stejnými časovými konstantami bude mít tvar:

$$G(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^n} \quad (42)$$

Přenos proporcionální soustavy 2. řádu s různými časovými konstantami bude mít tvar:

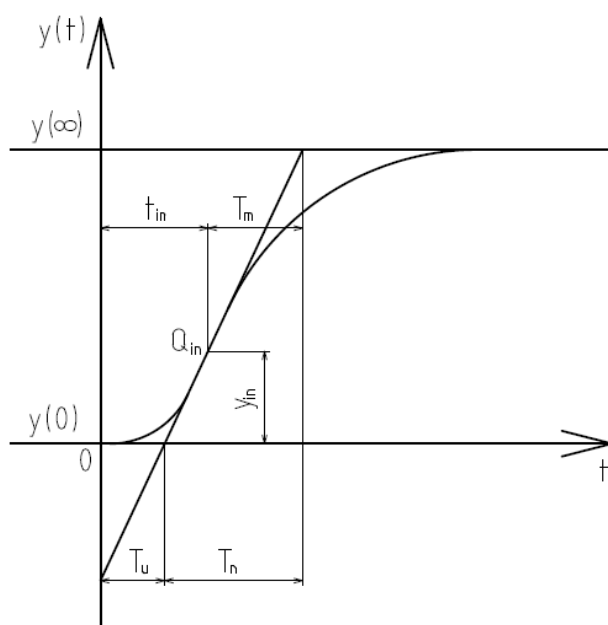
$$G(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad (43)$$

Zesílení soustavy K v obou případech určíme ze vztahu (26).

Pracujeme-li s normovanou přechodovou charakteristikou, tj. ustálená hodnota průběhu výstupní funkce je rovna 1 a platí:

$$\Delta y(t)_{\max} = y(\infty) - y(0) = 1, \quad (44)$$

můžeme předpokládat, že v okolí inflexního bodu takovéto přechodové charakteristiky je její průběh téměř lineární. Průsečík tečny přechodové charakteristiky v inflexním bodě a časové osy nám právě na časové ose vymezuje úsek, který označujeme jako doba průtahu T_u . Na již zmíněné ose, kterou pokládáme za nový ustálený stav, nám ta stejná tečna vytne druhý průsečík, který vymezuje další časový úsek označovaný jako doba náběhu T_n (viz obrázek Obr. 4.1). Úsek T_m nazýváme doplňkovou dobou.



Obr. 4.1 Přechodová charakteristika soustavy vyšších řádů

Podrobnější popis vztahů, které budou dále užívány, spolu s jejich odvozením a s důkazy platnosti lze nalézt například v literatuře [2], která danou metodu podrobněji vysvětluje. V další části této kapitoly bude uveden pouze praktický postup řešení.

Při hledání modelu pomocí Strejcovy metody na základě přechodové charakteristiky, která nemusí být nutně normovaná, lze postupovat následovně:

1) Sestrojíme tečnu k přechodové charakteristice procházející inflexním bodem Q_{in} a určíme dobu průtahu T_u a dobu náběhu T_n . Na základě těchto hodnot určíme jejich poměr, který označíme:

$$\tau = \frac{T_u}{T_n} \quad (45)$$

Dále zavedeme pomocný porovnávací parametr, který zohlední zda-li je daná přechodová charakteristika normovaná či nikoliv. Jeho hodnotu získáme ze vztahu:

$$\tau_u = \frac{T_u}{T_n} \Delta y(t)_{\max} \quad (46)$$

Hodnotu výrazu $\Delta y(t)_{\max}$ určíme ze vztahu (44).

2a) V případě, že platí $\tau_u \geq 0.104$, pak budeme danou přechodovou charakteristiku aproximovat soustavou n -tého řádu se stejnými časovými konstantami.

Z přechodové charakteristiky jsme schopni určit přibližné hodnoty výrazů $\Delta y(t)_{\max}$, t_{in} , y_{in} , T_u , T_n a T_m . Známe-li hodnoty těchto výrazů, vytvoříme podíly $\frac{T_u}{T_n}$, $\frac{y_{in}}{\Delta y(t)_{\max}}$, $\frac{T_m}{T_n}$ a pomocí nich a tabulky Tab. 4.1 určíme řád diferenciální rovnice n . Známe-li už řád n , lze jednoduše určit časovou konstantu T . Z tabulky Tab. 4.1 vybereme výrazy $\frac{T_n}{T}$, $\frac{T_u}{T}$, $\frac{t_{in}}{T}$, $\frac{T_m}{T}$ pro příslušný řád n a jelikož výše zmíněná tabulka poskytuje hodnoty těchto výrazů, jedinou neznámou zůstává časová konstanta T , kterou lze jednoduše dopočítat.

n	$\frac{T_u}{T_n}$	$\frac{y_{in}}{y_{\infty}}$	$\frac{T_m}{T_n}$	$\frac{T_n}{T}$	$\frac{T_u}{T}$	$\frac{t_{in}}{T}$	$\frac{T_m}{T}$
1	0	0	1	1	0	0	1
2	0.104	0.264	0.736	2.178	0.282	1	2.000
3	0.218	0.323	0.677	3.695	0.805	2	2.500
4	0.139	0.353	0.647	4.463	1.425	3	2.888
5	0.410	0.371	0.629	5.119	2.100	4	3.219
6	0.493	0.384	0.616	5.699	2.811	5	3.510
7	0.570	0.394	0.606	6.226	3.549	6	3.775
8	0.642	0.401	0.599	6.711	4.307	7	4.018
9	0.709	0.407	0.593	7.164	5.081	8	4.245
10	0.773	0.413	0.587	7.590	5.869	9	4.458

Tab. 4.1 Hodnoty pro vyhodnocování nekmitavých soustav n -tého řádu [2]

V okamžiku, kdy známe časovou konstantu T , lze zapsat diferenciální rovnici aproximační soustavy, jejíž tvar je následující:

$$\binom{n}{0} T^n y^{(n)}(t) + \binom{n}{1} T^{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + \binom{n}{n-1} T y' + \binom{n}{n} y(t) = K u(t) \quad (47)$$

Jak již bylo uvedeno dříve, zesílení K určíme ze vztahu (26).

2b) V případě, že platí $\tau_u \leq 0.104$, pak budeme danou přechodovou charakteristiku aproximovat soustavou 2. řádu s různými časovými konstantami.

Dále postupujeme tak, že pro hodnotu přechodové funkce definovanou vztahem:

$$y(t_1) = 0.702 \Delta y_{\max} \quad (48)$$

najdeme příslušnou hodnotu t_1 na časové ose. Určíme součet časových konstant, pro které platí:

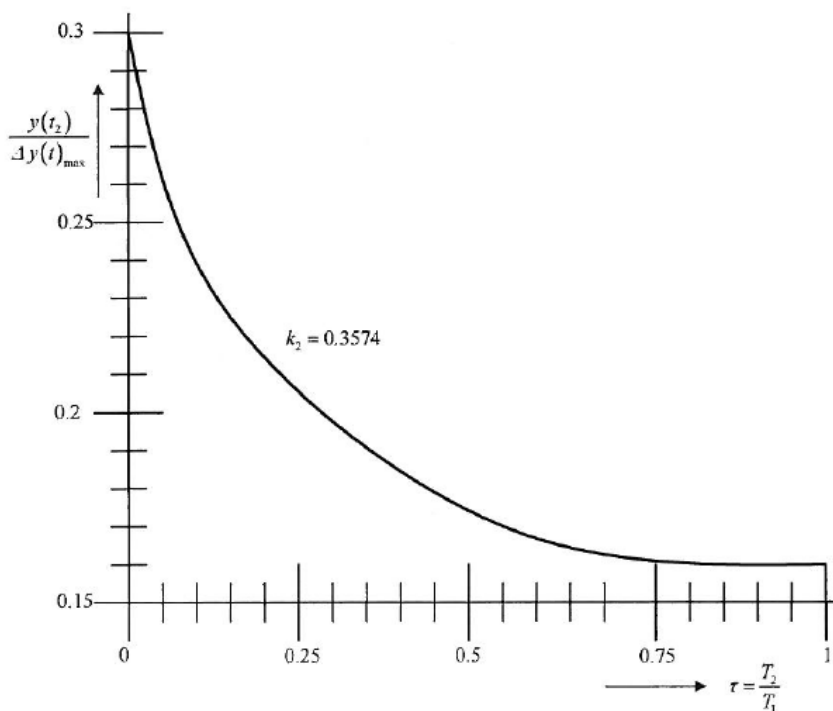
$$T_1 + T_2 = \frac{t_1}{1.2564} \quad (49)$$

V dalším kroku vypočítáme časový úsek t_2 dle vztahu:

$$t_2 = 0.3574(T_1 + T_2) \quad (50)$$

přičemž za výraz v závorce dosadíme právě hodnotu součtu těchto časových konstant ze vztahu (49). Z naměřené přechodové charakteristiky zpětně určíme hodnotu $y(t_2)$. Z grafu interpretujícím závislost $f(\tau) = \frac{y(t_2)}{\Delta y(t)_{\max}}$ určíme hodnotu poměru časových konstant, který je definovaný vztahem:

$$\tau = \frac{T_2}{T_1} \quad (51)$$



Obr. 4.2 Graf pro určení poměru časových konstant [2]

Na základě hodnoty odečtené z grafu na obrázku Obr. 4.2 získáváme dostatečný počet rovnic pro nalezení našich dvou neznámých časových konstant. Pomocí rovnic (51), (50) a případně i (49) určíme hledané hodnoty časových konstant T_1 , T_2 .

V samotném závěru zbývá už jen vyjádřit diferenciální rovnici aproximační soustavy, která má tvar:

$$T_1 T_2 y''(t) + (T_1 + T_2) y'(t) + y(t) = Ku(t) \quad (52)$$

Zesílení K opět dopočítáme pomocí vztahu (26).

4.2.2.4 Aproximace kmitavého členu druhého řádu

V případě soustavy, u které se nachází dva akumulátory energie dochází k „přelévání“ energie z jednoho akumulátoru do druhého. Takovou soustavu, respektive její dynamické vlastnosti, popisujeme systémem druhého řádu. Jistou analogií této situace, která dostatečně názorně vystihuje daný problém je „přelévání“ energie v elektrických RLC obvodech. Přechodová charakteristika takovéto soustavy je kmitavá.

Soustavu druhého řádu lze popsat zjednodušenou diferenciální rovnicí ze vztahu (2), který přejde do tvaru:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b_0 u \quad (53)$$

Tuto rovnici ještě upravíme:

$$T^2 y'' + 2\xi T y' + y = Ku \quad (54)$$

a pro koeficienty pak platí:

$$T^2 = \frac{a_2}{a_0}, 2\xi T = \frac{a_1}{a_0}, K = \frac{b_0}{a_0} \quad (55)$$

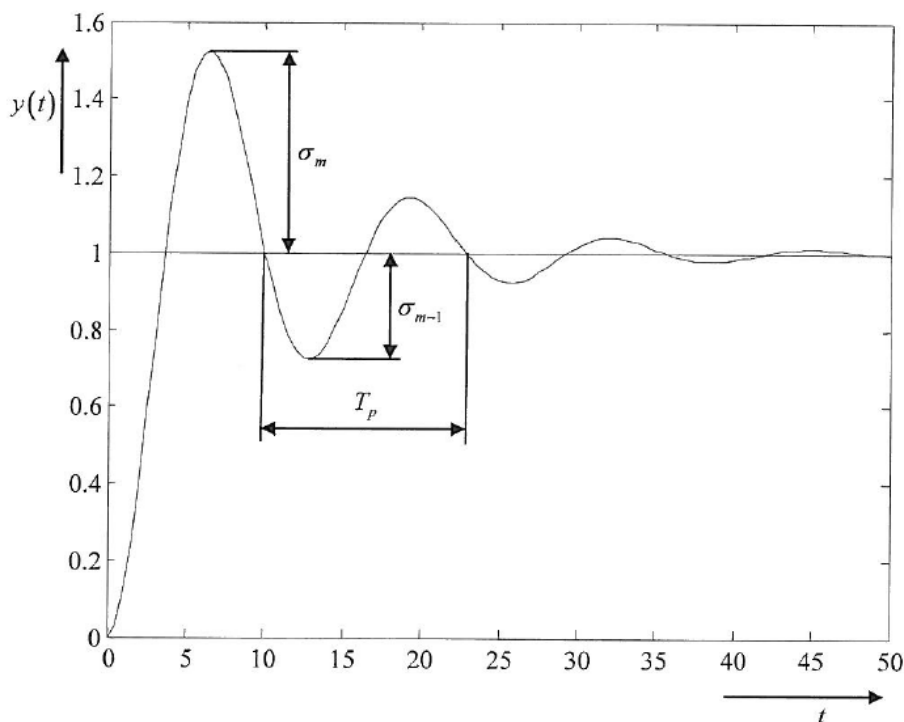
Jedná-li se o kmitavou soustavu, platí, že koeficient tlumení ξ leží v intervalu $(0;1)$ a pramen [2] uvádí předpis pro její přechodovou funkci:

$$h(t) = K \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T} t} \sin \left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t + \arctg \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \right] \quad (56)$$

Přenos takovéto kmitavé soustavy udávají zdroje [1] a [2] ve tvaru:

$$G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} \quad (57)$$

Na obrázku Obr. 4.3 je vykreslený průběh přechodové charakteristiky dané předpisem (56) pro konkrétní hodnoty zesílení K , časovou konstantu T a koeficient tlumení ξ .



Obr. 4.3 Přechodová charakteristika kmitavého členu [2]

Na grafu z obrázku Obr. 4.3 jsou vyznačeny veličiny, které budou dále užity při hledání hodnot jednotlivých konstant. Tyto veličiny jsou:

- σ_m – maximální překmit
- σ_{m-1} – překmit v následující periodě
- T_p – doba kmitu

Chceme-li naměřenou přechodovou charakteristiku podobného průběhu jako na obrázku Obr. 4.3 aproximovat rovnicí (56), popřípadě popsat ji přenosem, který je dán vztahem (57), je nutné určit neznámé konstanty, tj. zesílení, časovou konstantu a koeficient tlumení. Zesílení soustavy K lze určit obdobně jako v předešlých případech, tedy pomocí rovnice (26). Dále zdroj [2] uvádí vztah pro výpočet koeficientu tlumení na základě veličin určených z naměřené přechodové charakteristiky. Poté platí:

$$\xi = \frac{\ln \frac{\sigma_m}{\sigma_{m-1}}}{\sqrt{\pi^2 + \left(\ln \frac{\sigma_m}{\sigma_{m-1}} \right)^2}} \quad (58)$$

Poslední neznámou je časová konstanta T . Stejný literární pramen uvádí výpočetní vztah, rovněž založený na veličinách odměřených z grafu na obrázku Obr. 4.3, který má následující podobu:

$$T = \frac{T_p \sqrt{1 - \xi^2}}{2\pi} \quad (59)$$

4.2.3 Další metody vyhodnocování

V kapitole 4.2.2 jsou uvedeny experimentální metody, sloužící k nalezení matematického modelu, které se opírají pouze o aproximaci přechodových charakteristik. Důvodem je návaznost na praktickou část této práce.

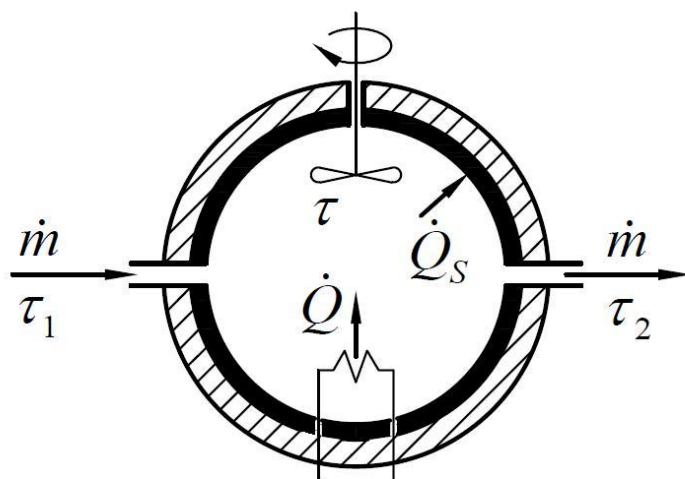
Obecně však v rámci experimentálních metod často aproximujeme nejen přechodové, ale i frekvenční, popřípadě impulsní charakteristiky. Přehled takovýchto základních metod lze nalézt v literárním prameni [2]. V témže zdroji jsou dále uvedeny experimentální metody stochastické, které lze charakterizovat mimo jiné tím, že pracují s pojmem „náhodný testovací signál“. Jedná se o poměrně složitější aparát, který má oproti výše uvedeným metodám deterministickým (aproximace přechodové charakteristiky apod.) několik zásadních výhod. Jednou z výhod je, že při samotném měření není nutné daný objekt vyřazovat z normálního provozu. Nevýhodou stochastických metod je velké množství náročných výpočtů, které často nezbyvá řešit jinou cestou než pomocí výpočetní techniky. Jak již bylo zmíněno výše, zdroj [2] poskytuje základní přehled i těchto metod spolu s doplňujícím vysvětlením.

5 Analytická identifikace elektrického ohříváku

V následující kapitole bude praktická ukázka analytické identifikace elektrického topidla, které je součástí experimentální smyčky popsané v kapitole 2. Postup bude následovat a podrobněji rozvádět kroky uvedené ve zdroji [3], který se problematikou analytické identifikace dynamických soustav nejen v oblasti tepelné energetiky blíže zabývá a v následujícím textu na něj bude dále odkazováno.

5.1 Sestavení matematického modelu

Při tvorbě matematického modelu pomocí analytické identifikace je nutné zavádět v průběhu výpočtu několik předpokladů, které nám daný fyzikální jev zjednoduší natolik, abychom ho byli schopni popsat. Základním předpokladem je, že se jedná o dokonalou kapalinu, jejíž měrná hmotnost nezávisí na teplotě a tlaku, kterou ohříváme v uzavřené nádobě za současného dokonalého míchání. V našem případě pracujeme s elektrickým ohřívákem, do něhož vstupuje kapalina o teplotě τ_1 a vystupuje s teplotou τ_2 , jak je vidět na obrázku Obr. 5.1.



Obr. 5.1 Schématický náčrt dynamického systému – elektrického ohříváku

Veličiny na obrázku značí:

$\dot{m}[\text{kg s}^{-1}]$	- hmotnostní průtok kapaliny
$\tau_1[\text{K}]$	- teplota kapalina na vstupu do ohříváku
$\tau_2[\text{K}]$	- teplota kapalina na výstupu z ohříváku
$\tau[\text{K}]$	- teplota kapaliny uvnitř ohříváku
$\dot{Q}[\text{W}]$	- tepelný tok z topného tělesa do kapaliny
$\dot{Q}_s[\text{W}]$	- tepelný tok z kapaliny do stěny nádoby

Zdrojem tepla je odporový ohříváč a tepelný tok je tedy dán velikostí elektrického proudu dle vztahu:

$$\dot{Q} = RI^2 \quad (60)$$

Při tvorbě modelu budeme vycházet ze vztahu tepelné bilance uvnitř nádoby a současně pro zjednodušení zanedbáme teplo způsobené třením či vířením kapaliny. Současně za předpokladu dokonalého míchání lze uvažovat, že teplota média uvnitř nádoby bude mít stejnou hodnotu jako teplota kapaliny na výstupu. Potom nutně platí, že rozdíl tepelného toku, který do daného systému vstupuje a tepelného toku, který z téhož systému vystupuje je roven časové změně tepelné energie média uvnitř nádoby. Tuto skutečnost lze matematicky vyjádřit následovně:

$$\dot{Q} - \dot{Q}_S - \dot{m}c(\tau_2 - \tau_1) = mc \frac{d\tau_2}{dt} \quad (61)$$

kde $c[Jkg^{-1}K^{-1}]$ je měrná tepelná kapacita vody a $m[kg]$ je celková hmotnost kapaliny v nádobě.

Při provozu tohoto zařízení budeme požadovat udržování teploty na konkrétní hodnotě, kterou budeme značit τ_{20} . Dosáhne-li kapalina této teploty, pak předpokládáme, že nastane jakýsi ustálený stav, kterému bude příslušet určitý hmotnostní průtok $\dot{m}_0$, určitá hodnota teploty kapaliny na vstupu τ_{10} a dále ustálená hodnota tepelného toku z topidla do kapaliny $\dot{Q}_0$. Uvažujeme-li dokonale izolovanou nádobu od okolí, můžeme pokládat tepelný tok z kapaliny do stěny nádoby rovný nule. Rovnici (61) lze tedy pro výše zmíněný ustálený stav přepsat do tvaru:

$$\dot{Q}_0 - \dot{Q}_{S0} - \dot{m}_0 c(\tau_{20} - \tau_{10}) = 0 \quad (62)$$

Pro tepelný tok z kapaliny do stěny nádoby v souladu s výše zmíněným platí $\dot{Q}_{S0} = 0$.

Dále je třeba si uvědomit, že jakákoliv změna hmotnostního průtoku $\dot{m}$, tepelného toku z ohříváku do kapaliny $\dot{Q}$ či teploty média na vstupu do systému τ_1 bude mít za následek změnu teploty média na výstupu τ_2 , tj. odchylku od požadované hodnoty τ_{20} . Jak již bylo řečeno v kapitole 3, prostřednictvím automatické regulace a jejích nástrojů se snažíme tuto odchylku minimalizovat, případně ji zcela odstranit. Za tímto účelem je potřeba získat dynamickou závislost odchylky regulované veličiny (tj. teploty kapaliny na výstupu τ_2) na výše uvedených změnách, které danou odchylku způsobují.

V návaznosti na právě uvedené si vyjádříme všechny veličiny v ustáleném stavu s příslušnými přírůstky následovně:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_0 + \Delta\dot{Q}, \quad \dot{Q}_S = \dot{Q}_{S0} + \Delta\dot{Q}_S, \quad \dot{m} = \dot{m}_0 + \Delta\dot{m}, \quad \tau_1 = \tau_{10} + \Delta\tau_1, \quad \tau_2 = \tau_{20} + \Delta\tau_2 \quad (63)$$

Takto vyjádřené veličiny (tj. pomocí jejich hodnoty v ustáleném stavu a příslušného přírůstku) dosadíme do rovnice (61), čímž získáme rovnici:

$$\dot{Q}_0 + \Delta\dot{Q} - \dot{Q}_{S0} - \Delta\dot{Q}_{S0} - (\dot{m}_0 + \Delta\dot{m})c(\tau_{20} + \Delta\tau_2 - \tau_{10} - \Delta\tau_1) = mc \frac{d}{dt}(\tau_{20} + \Delta\tau_2) \quad (64)$$

Rovnici (64) lze dále vhodně upravit a následně od ní odečíst rovnici (62) popisující ustálený stav. Po odečtení rovnice (62) od vhodně upravené rovnice (64) lze získat výslednou rovnici ve tvaru:

$$\Delta\dot{Q} - \Delta\dot{Q}_S - \dot{m}_0 c(\Delta\tau_2 - \Delta\tau_1) - \Delta\dot{m}c(\tau_{20} - \tau_{10}) - \Delta\dot{m}c(\Delta\tau_2 - \Delta\tau_1) = mc \frac{d\Delta\tau_2}{dt} \quad (65)$$

Zdroj [3] uvádí, že v rámci regulace zpravidla postačí, omezíme-li se ve svých výpočtech na relativně malé odchylky. Jelikož je poslední člen levé strany rovnice (65) zanedbatelně menší než členy ostatní, lze jej na základě výše uvedeného vypustit a rovnici (65) tak zjednodušit na tvar:

$$\Delta\dot{Q} - \Delta\dot{Q}_S - \dot{m}_0 c(\Delta\tau_2 - \Delta\tau_1) - \Delta\dot{m}c(\tau_{20} - \tau_{10}) = mc \frac{d\Delta\tau_2}{dt} \quad (66)$$

V dalším kroku převedeme danou závislost do bezrozměrného tvaru a nebudeme tak pracovat s absolutními, ale s poměrnými přírůstky daných fyzikálních veličin. Absolutní přírůstky vztáhneme na rozdíl výstupní a vstupní teploty média v ustáleném stavu, případně na užitečný tepelný příkon viz níže. Absolutní přírůstek hmotnostního toku pak vztáhneme k jeho hodnotě v ustáleném stavu. Veličiny tedy převedeme do bezrozměrného tvaru následovně:

$$\varphi_{\dot{Q}} = \frac{\Delta\dot{Q}}{\dot{Q}_0 - \dot{Q}_{S0}}, \varphi_{\dot{Q}_S} = \frac{\Delta\dot{Q}_S}{\dot{Q}_0 - \dot{Q}_{S0}}, \varphi_{\tau_1} = \frac{\Delta\tau_1}{\tau_{20} - \tau_{10}}, \varphi_{\tau_2} = \frac{\Delta\tau_2}{\tau_{20} - \tau_{10}}, \varphi_{\dot{m}} = \frac{\Delta\dot{m}}{\dot{m}_0} \quad (67)$$

Pro zavedení těchto bezrozměrných veličin do rovnice (66) je ještě vhodné si uvědomit, že vztah (62) lze prostým převedením jednoho z členů upravit na rovnost výrazů:

$$\dot{Q}_0 - \dot{Q}_{S0} = \dot{m}_0 c(\tau_{20} - \tau_{10}) \quad (68)$$

Dále pak rovnici (66) vydělíme výrazem na levé popřípadě na pravé straně rovnice (68). V případě, že jde o člen tepelného toku, ať už z elektrického ohříváku do kapaliny nebo z kapaliny do stěny nádoby, vydělíme daný člen výrazem na levé straně rovnice (68). V případě, že se jedná o člen obsahující jakoukoliv z teplot, dělíme ho výrazem na pravé straně rovnice (68). Tuto úpravu si lze dovolit, neboť hodnota těchto výrazů je ekvivalentní. Po tomto dělení má rovnice tvar:

$$\frac{\Delta\dot{Q}}{\dot{Q}_0 - \dot{Q}_{S0}} - \frac{\Delta\dot{Q}_S}{\dot{Q}_0 - \dot{Q}_{S0}} - \frac{\dot{m}_0 c(\Delta\tau_2 - \Delta\tau_1)}{\dot{m}_0 c(\tau_{20} - \tau_{10})} - \frac{\Delta\dot{m}c(\tau_{20} - \tau_{10})}{\dot{m}_0 c(\tau_{20} - \tau_{10})} = \frac{mc}{\dot{m}_0 c(\tau_{20} - \tau_{10})} \frac{d\Delta\tau_2}{dt} \quad (69)$$

Po jednoduchých úpravách a vhodném vykrácení nám v rovnici (69) zůstanou pouze ty poměry, kterými jsme definovali bezrozměrné veličiny v rámci rovnic (67) a jedna konstanta. To už pomocí bezrozměrných veličin vyjádříme následovně:

$$\varphi_{\dot{Q}} - \varphi_{\dot{Q}_s} - \varphi_{\tau_2} + \varphi_{\tau_1} - \varphi_{\dot{m}} = T_m \frac{d}{dt}(\varphi_{\tau_2}) \quad (70)$$

kde konstanta $T_m = \frac{m}{\dot{m}_0}$.

Danou rovnici ještě upravíme do vhodnějšího tvaru:

$$T_m \varphi'_{\tau_2}(t) + \varphi_{\tau_2}(t) = \varphi_{\dot{Q}}(t) - \varphi_{\dot{Q}_s}(t) + \varphi_{\tau_1}(t) - \varphi_{\dot{m}}(t) \quad (71)$$

V dalším kroku aplikujeme Laplaceovu transformaci, přičemž uijeme věty o linearitě a věty o obrazu derivace (viz přílohy) a tím přejde rovnice (71) z oblasti časové proměnné t do oblasti komplexní proměnné s a má tvar:

$$\bar{\varphi}_{\tau_2}(s) = \frac{1}{T_m + 1} (\bar{\varphi}_{\dot{Q}}(s) - \bar{\varphi}_{\dot{Q}_s}(s) + \bar{\varphi}_{\tau_1}(s) - \bar{\varphi}_{\dot{m}}(s)) \quad (72)$$

Následně je nutné zavést předpoklad konstantní hodnoty součinitele přestupu tepla α mezi ohřivanou kapalinou a pláštěm nádoby. Před dalším krokem je nutné si uvědomit následující. Všechny členy, které lze nyní chápat jako vstupní veličiny jsou funkcí času. Výjimku tvoří pouze tepelný tok z kapaliny do stěny, který je navíc i funkcí teploty uvnitř nádoby, tj. v našem případě teploty na výstupu z ohříváku. Nutně musí tedy existovat dynamická závislost mezi tepelným tokem z kapaliny do stěny a výstupní teplotou. Jednoduše řečeno, teplota kapaliny na výstupu (zde chápána jako vstupní veličina) ovlivňuje tepelný tok z kapaliny do stěny nádoby, který reprezentuje výstupní veličinu. Tuto vazbu, lze vyjádřit pomocí obecného přenosu následovně:

$$\bar{\varphi}_{\dot{Q}_s} = W(s) \bar{\varphi}_{\tau_2} \quad (73)$$

Vyjádření přenosu uvedeného v rovnici (73) je poměrně pracná záležitost s časově náročným výpočtem. Postup celého výpočtu je uveden ve zdroji [3] v kapitole 4. Výsledné vztahy tedy budou převzaty právě odtud.

Uvažujeme-li nádobu, kterou lze přibližně považovat za rovinnou (tj. platí, že poloměr křivosti nádoby je dostatečně větší než její tloušťka), a má-li tato nádoba ve všech místech konstantní tloušťku, potom zdroj [3] uvádí vztah pro daný přenos:

$$W(s) = \frac{T_w s}{1 + T_q s} \quad (74)$$

Konstanty ve vztahu (74) lze dopočítat opět na základě vztahů získaných výpočtem v kapitole 4 zdroje [3]:

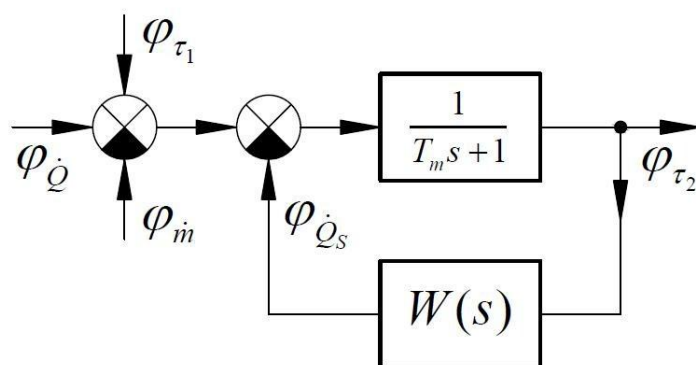
$$T_w = \frac{m_s c_s}{\dot{m}_0 c} \quad (75)$$

V rovnici (75) vystupují dvě nové veličiny, $c_s [Jkg^{-1}K^{-1}]$ představuje měrnou tepelnou kapacitu stěny nádoby a $m_s [kg]$ značí hmotnost této stěny.

$$T_q = \rho_s c_s \delta_s \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\delta_s}{2\lambda_s} \right) \quad (76)$$

Nově zavedené symboly v rovnici (76) jsou $\rho_s [kgm^{-3}]$ hustota stěny nádoby, $\delta_s [m]$ tloušťka stěny nádoby, $\alpha [Wm^{-2}K^{-1}]$ součinitel přestupu tepla mezi ohřívanou kapalinou a stěnou nádoby a $\lambda_s [Wm^{-1}K^{-1}]$ tepelná vodivost stěny nádoby.

Na základě předešlého postupu lze říci, že se jedná o zpětnovazební dynamický systém, jehož blokové schéma je znázorněno na obrázku Obr. 5.2.



Obr. 5.2 Blokové schéma systému se zpětnou vazbou

Blokové schéma obecně slouží k vizualizaci vazeb v systému. Mezi obecné zásady při tvorbě blokových schémat patří, že vstup systému značíme čarou se šipkou, která směřuje do bloku, výstup značíme čarou se šipkou, která naopak směřuje z bloku. Spojovací čáry představují šíření signálu. V případě, že se signál rozděluje, je dané místo označeno tečkou. Kroužky představují místa, kde signály sčítáme, popřípadě odečítáme. Je-li oblast vyčerněná, pak signál, který přichází na tuto oblast od ostatních odečítáme. Bílá pole znamenají součet signálů.

Dále budeme chtít tento systém se zpětnou vazbou vyjádřit pouze pomocí jediného přenosu. Za tímto účelem dosadíme člen popisující tepelný tok z kapaliny do stěny z rovnice (73) do rovnice (72), čímž dostaneme:

$$\bar{\varphi}_{\tau_2}(s) = \frac{1}{T_m s + 1} (\bar{\varphi}_{\dot{Q}}(s) - \bar{\varphi}_{\dot{m}}(s) + \bar{\varphi}_{\tau_1}(s) - W(s) \bar{\varphi}_{\tau_2}(s)) \quad (77)$$

Tuto rovnici upravíme tak, aby na jedné straně byla výstupní veličina s příslušným koeficientem a na straně druhé vstupní veličiny. Tomu odpovídá tvar:

$$\bar{\varphi}_{\tau_2}(s) \left(1 + \frac{1}{T_m s + 1} W(s) \right) = (\bar{\varphi}_{\dot{Q}}(s) - \bar{\varphi}_{\dot{m}}(s) + \bar{\varphi}_{\tau_1}(s)) \frac{1}{T_m s + 1} \quad (78)$$

Jak již bylo dříve zmíněno, výsledný přenos vyjádříme v souladu se vztahem (4) následovně:

$$G(s) = \frac{\bar{\varphi}_{\tau_2}}{\bar{\varphi}_{\dot{Q}} - \bar{\varphi}_{\dot{m}} + \bar{\varphi}_{\tau_1}} = \frac{\frac{1}{T_m s + 1}}{1 + \frac{1}{T_m s + 1} W(s)} \quad (79)$$

Jednoduchou úpravou vyjádříme výsledný přenos takto:

$$G(s) = \frac{1}{T_m s + 1 + W(s)} \quad (80)$$

Do rovnice (80) dosadíme vztah (74) definující přenos zpětné vazby a po jednoduché úpravě bude výsledný přenos systému vyjádřen pouze pomocí časových konstant:

$$G(s) = \frac{T_q s + 1}{T_m T_q s^2 + (T_m + T_q + T_w) s + 1} \quad (81)$$

Na samotný závěr vztah (81) upravíme v souladu se vztahem (7), tj. kvadratický trojčlen ve jmenovateli upravíme na součin. Po vhodné úpravě dostaneme:

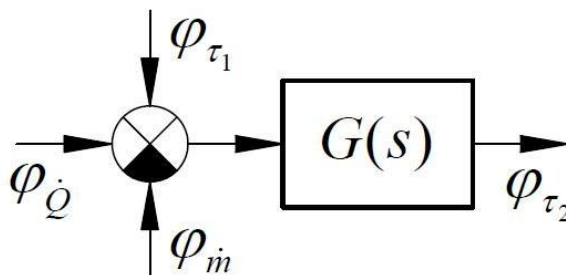
$$G(s) = \frac{T_q s + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \quad (82)$$

Časové konstanty lze vyjádřit pomocí dříve definovaných časových konstant následovně:

$$T_1 = \frac{1}{2} (T_m + T_q + T_w) + \frac{1}{2} \sqrt{[(T_m + T_q + T_w)^2 - 4T_m T_q]} \quad (83)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} (T_m + T_q + T_w) - \frac{1}{2} \sqrt{[(T_m + T_q + T_w)^2 - 4T_m T_q]} \quad (84)$$

Tento dynamický systém popsáný jediným přenosem dle vztahu (82) lze znázornit blokovým schématem na obrázku Obr. 5.3.



Obr. 5.3 Blokové schéma systému s jediným přenosem

Pomocí vztahů uvedených v průběhu výpočtu lze dopočítat konkrétní hodnoty jednotlivých veličin a dosadit je do výsledného vztahu pro přenos (84). Stanovíme-li hmotnost vody uvnitř nádoby $m = 20 \text{ kg}$ a příslušný hmotnostní průtok $\dot{m}_0 = 0,47 \text{ kgs}^{-1}$, můžeme dopočítat časovou konstantu T_m .

$$T_m = \frac{m}{\dot{m}_0} = \frac{20 \text{ kg}}{0,47 \text{ kgs}^{-1}} \cong 42,55 \text{ s} \quad (85)$$

Plášť nádoby se skládá z válcové trubky, dna a příruby, přičemž zanedbáme prostor uzavřený topidlem. Přibližná hodnota hmotnosti tohoto pláště bude potom $m_s = 31,08 \text{ kg}$. Měrná tepelná kapacita pláště nádoby je $c_s = 461 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$ a pro vodu uvažujeme $c = 4182 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$. Na základě těchto hodnot lze pomocí vztahu (75) dopočítat časovou konstantu T_w .

$$T_w = \frac{m_s c_s}{\dot{m}_0 c} = \frac{(31,08 \text{ kg})(461 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1})}{(0,47 \text{ kgs}^{-1})(4182 \text{ Jkg}^{-1}\text{K}^{-1})} \cong 7,29 \text{ s} \quad (86)$$

Hustotu materiálu pláště nádoby uvažujeme pro běžnou ocel $\rho_s = 7850 \text{ kgm}^{-3}$. Tloušťka stěny nádoby je $\delta_s = 5 \text{ mm}$ a tepelná vodivost při 20°C je $\lambda_s = 57,5 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$. Součinitel přestupu tepla mezi kapalinou a pláštěm nádoby závisí na mnoha faktorech (režim proudění v nádobě, způsob a intenzita míchání aj.) a jeho určení je proto obtížnější. Proto místo konkrétní hodnoty budeme uvažovat vhodný rozsah hodnot (stejně jako uvažuje zdroj [3]). Potom stanovíme $\alpha \in \langle 465,22 ; 2326,11 \rangle \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$. Na základě výše uvedených hodnot a vztahu (76) lze vypočítat časovou konstantu T_q , která bude stejně jako součinitel přestupu tepla dána rozsahem hodnot.

Pro $\alpha = 465,22 \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-1}$ dostaneme:

$$T_q = \rho_s c_s \delta_s \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\delta_s}{2\lambda_s} \right) =$$

$$= (7850 \text{ kgm}^{-3}) (461 \text{ Jkg}^{-1} \text{ K}^{-1}) (0,005 \text{ m}) \left[\frac{1}{(465,22 \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-1})} + \frac{(0,005 \text{ m})}{2 \cdot 57,5 \text{ Wm}^{-1} \text{ K}^{-1}} \right] \cong 39,68 \text{ s} \quad (87)$$

Pro $\alpha = 2326,11 \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-1}$ dostaneme:

$$T_q = \rho_s c_s \delta_s \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\delta_s}{2\lambda_s} \right) =$$

$$= (7850 \text{ kgm}^{-3}) (461 \text{ Jkg}^{-1} \text{ K}^{-1}) (0,005 \text{ m}) \left[\frac{1}{(2326,11 \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-1})} + \frac{(0,005 \text{ m})}{2 \cdot 57,5 \text{ Wm}^{-1} \text{ K}^{-1}} \right] \cong 8,57 \text{ s} \quad (88)$$

Časová konstanta T_q je tedy dána rozsahem hodnot $T_q \in \langle 39,68 ; 8,57 \rangle \text{ s}$, odpovídajícím postupně hodnotám součinitele přestupu tepla. S takto vyčíslenými časovými konstantami lze již konečně dopočítat časové konstanty z výsledného vztahu pro přenos dle rovnice (82). Opět získáme rozsahy hodnot a výpočet pro to rozdělíme na dvě části:

Pro $T_q = 39,68 \text{ s}$ dostaneme:

$$T_1 = \frac{1}{2} (T_m + T_q + T_w) + \frac{1}{2} \sqrt{[(T_m + T_q + T_w)^2 - 4T_m T_q]} =$$

$$\frac{1}{2} [(42,55 \text{ s}) + (39,68 \text{ s}) + (7,29 \text{ s})] + \frac{1}{2} \sqrt{[(42,55 \text{ s}) + (39,68 \text{ s}) + (7,29 \text{ s})]^2 - 4(42,55 \text{ s})(39,68 \text{ s})}$$

$$\cong 62,51 \text{ s} \quad (89)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} (T_m + T_q + T_w) - \frac{1}{2} \sqrt{[(T_m + T_q + T_w)^2 - 4T_m T_q]} =$$

$$\frac{1}{2} [(42,55 \text{ s}) + (39,68 \text{ s}) + (7,29 \text{ s})] - \frac{1}{2} \sqrt{[(42,55 \text{ s}) + (39,68 \text{ s}) + (7,29 \text{ s})]^2 - 4(42,55 \text{ s})(39,68 \text{ s})}$$

$$\cong 27,01 \text{ s} \quad (90)$$

Pro $T_q = 8,57 \text{ s}$ dostaneme:

$$T_1 = \frac{1}{2} (T_m + T_q + T_w) + \frac{1}{2} \sqrt{[(T_m + T_q + T_w)^2 - 4T_m T_q]} =$$

$$\frac{1}{2} [(42,55 \text{ s}) + (8,57 \text{ s}) + (7,29 \text{ s})] + \frac{1}{2} \sqrt{[(42,55 \text{ s}) + (8,57 \text{ s}) + (7,29 \text{ s})]^2 - 4(42,55 \text{ s})(8,57 \text{ s})}$$

$$\cong 51,30 \text{ s} \quad (91)$$

$$T_2 = \frac{1}{2}(T_m + T_q + T_w) - \frac{1}{2}\sqrt{[(T_m + T_q + T_w)^2 - 4T_m T_q]} =$$
$$\frac{1}{2}[(42,55 \text{ s}) + (8,57 \text{ s}) + (7,29 \text{ s})] - \frac{1}{2}\sqrt{[(42,55 \text{ s}) + (8,57 \text{ s}) + (7,29 \text{ s})]^2 - 4(42,55 \text{ s})(8,57 \text{ s})}$$
$$\cong 7,11 \text{ s} \quad (92)$$

Nyní už máme vše potřebné pro vyjádření výsledných tvarů přenosů dané soustavy. Tyto přenosy platí pro krajní meze intervalu, popisujícího rozsah součinitele přestupu tepla a tím potažmo i rozsah časových konstant. Výsledné přenosy mají po dosazení konkrétních číselných hodnot do vztahu (82) následující tvary:

$$G(s) = \frac{39,68s + 1}{(62,51s + 1)(27,01s + 1)} \quad (93)$$

$$G(s) = \frac{8,57s + 1}{(51,30s + 1)(7,11s)} \quad (94)$$

Výsledné vztahy (93) a (94) definují rozsah přenosu, který představuje matematický model dynamické regulované soustavy definované v zadání. Jak je vidět ze vztahu pro oba přenosy, výsledný matematický model je ve formě přenosu proporcionálního regulačního členu se setrvačností 2. řádu. Tato soustava jistým způsobem popisuje reálné zařízení, kterým je elektrický ohřívák v dříve popisované experimentální smyčce. Jak již bylo uvedeno v rešeršní části této práce, analytická identifikace je poměrně náročná disciplína, která klade vysoké nároky na znalost fyzikální podstaty daného děje. Velice často se opírá o intuici a praxi řešitele, obzvláště v místech výpočtu, kde je třeba zavést příslušné předpoklady, které nám onen výpočet vhodným způsobem zjednoduší. Její řešení je jen přibližné a někdy může být užito jako výchozí bod pro následnou experimentální identifikaci.

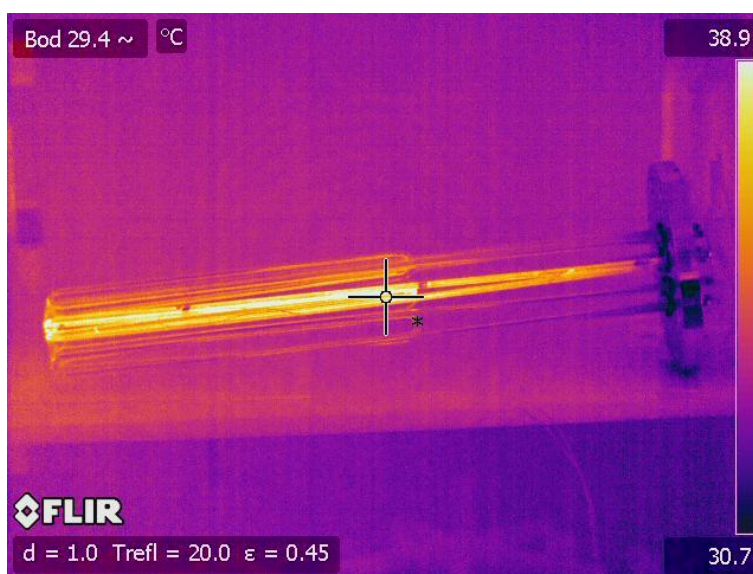
6 Experimentální identifikace elektrického ohříváku

Následující kapitola je věnována praktické ukázce experimentální identifikace elektrického ohříváku. Při hledání matematického modelu využijeme poznatky z kapitoly 4.2.2, která se věnuje vyhodnocování přechodových charakteristik. V první části jsou popsány podmínky experimentu, jehož výstupem byla naměřená přechodová charakteristika elektrického ohříváku. V další části je uveden proces aproximace této přechodové charakteristiky a nalezení matematického modelu tohoto reálného zařízení.

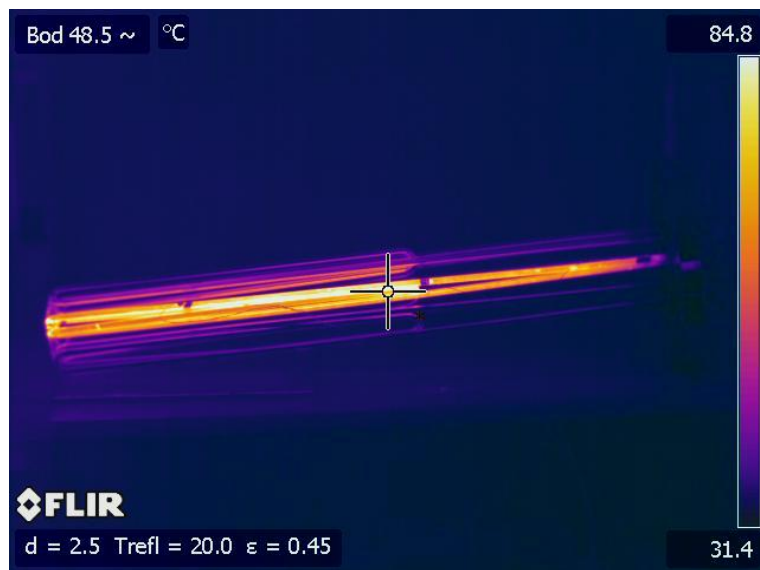
6.1 Popis experimentu

V rámci experimentální identifikace elektrického ohříváku je třeba v první řadě naměřit přechodovou charakteristiku daného zařízení. Při procesu měření přechodové charakteristiky postupujeme tak, že dané zařízení necháme v okolních podmínkách ustálit a poté na vstup systému přivedeme jednotkový skok a sledujeme odezvu systému. V případě, že se nejedná o jednotkový skok, můžeme danou charakteristiku po ukočení měření vydělit příslušným počtem dílků, jak bude ukázáno dále.

Elektrický ohřívák popsaný v kapitole 2.2.2 se skládá z několika topných spirál zapojených do trojúhelníku. V rámci tohoto experimentu byla jedna větev topidla napájena přes autotransformátor napětím 20 V a po ustálení byla na vstup přivedena skoková změna o velikosti 47 V. Současně jsme měřili teplotu na povrchu topné spirály elektrického ohříváku na čtyřech místech pomocí termočlánků. První termočlánek byl umístěn 3 cm od příruby a zbylé tři vždy po 33 cm. Spolu s termočládky jsme užili termovizní kameru pro přibližnou vizualizaci teplotního pole. Snímky pořízené termovizní kamerou na počátku experimentu a v konečné fázi jsou zobrazeny na obrázcích Obr. 6.1 a Obr. 6.2.



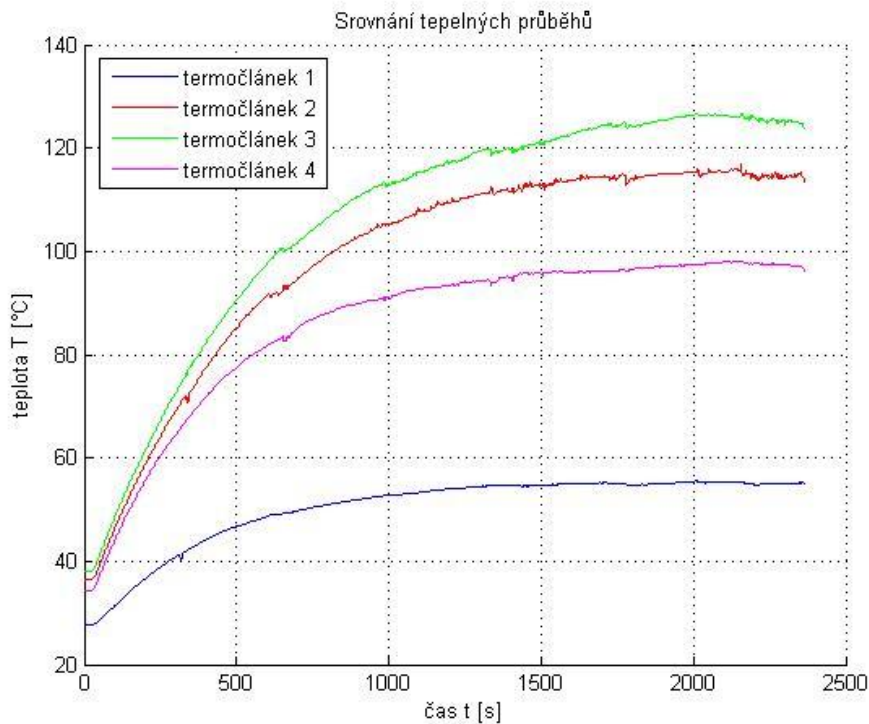
Obr. 6.1 Záznam termovizní kamery na počátku měření



Obr. 6.2 Záznam termovizní kamery v konečné fázi měření

Hodnoty naměřených teplot byly pomocí sady společnosti National Instruments zpracovány a v prostředí softwaru LabVIEW zobrazeny a následně zaznamenány ve formě tabulky hodnot. Všechny další údaje a grafy byly zpracovány v softwaru MATLAB.

Měřením jsme získali čtyři průběhy teplot v čase. Tyto průběhy se vzájemně lišily z důvodu různého umístění termočlánků na topné větvi. Všechny tyto průběhy teplot jsou pro hrubou představu znázorněny na obrázku Obr. 6.3.

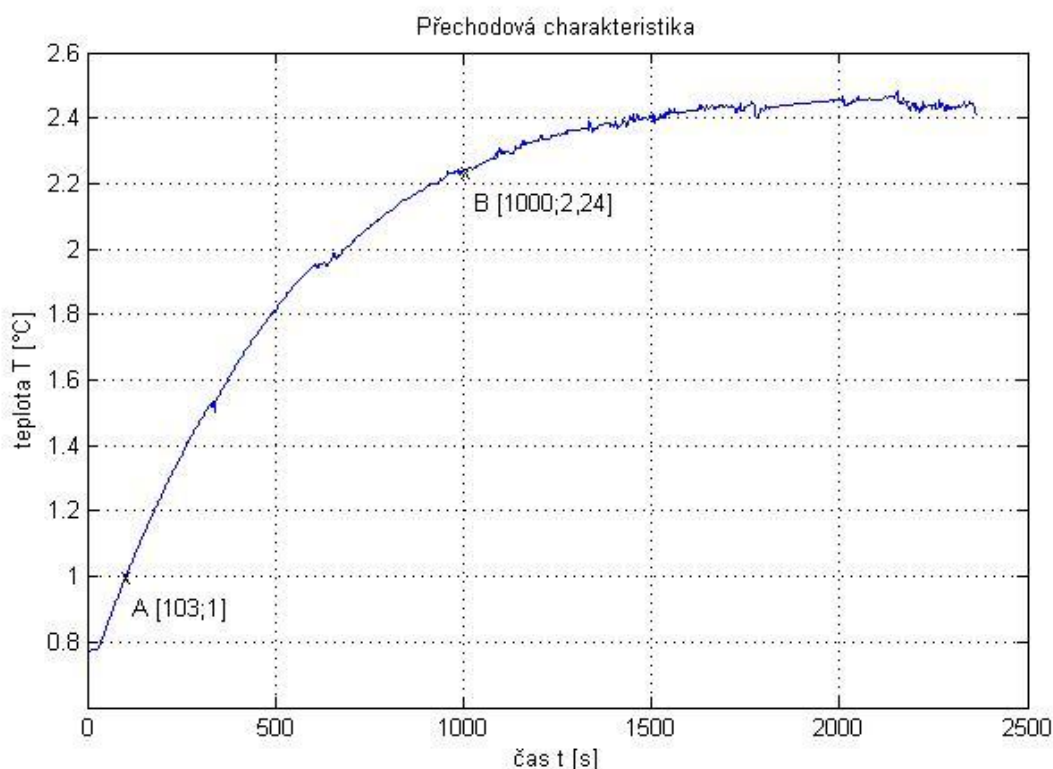


Obr. 6.3 Průběhy teplot naměřených jednotlivými termočlánky

Teploty na termočlánek 1 jsou ve srovnání s ostatními nižší. Důvodem je umístění samotného termočláneku v malé vzdálenosti za přírubou. Nejvyšší naměřené teploty byly získány termočlánekem 3. Tato skutečnost je dána tím, že se v relativně blízké vzdálenosti od daného termočláneku nacházela jiná část vyhřívané spirály napájené větve ohříváku. Pro analýzu tohoto zařízení jsme zvolili hodnoty získané termočlánekem 2, jehož umístění bylo optimální vzhledem k sledovanému záměru a ve srovnání s ostatními daty mají právě tyto nejlépe vypovídající hodnotu.

6.2 Aproximace naměřené přechodové charakteristiky

Jak již bylo uvedeno výše, z naměřených přechodových charakteristik jsme pro další analýzu zvolili charakteristiku změřenou termočlánekem 2. Jelikož je vhodnější pracovat s charakteristikou, která je normovaná (tj. vstupní signál je jednotkový skok), je třeba naměřená data upravit. Jelikož skok na vstupu měl hodnotu 47 V, pak se touto úpravou rozumí vydělení všech hodnot naměřených teplot právě číslem 47. Touto operací získáváme normovanou přechodovou charakteristiku systému, tj. odezvu zařízení na jednotkový skok (obrázek Obr. 6.4).



Obr. 6.4 Naměřená přechodová charakteristika (normovaná)

Z obrázku Obr. 6.4 je patrné, že průběh je poměrně dosti blízký přechodové charakteristice soustavy prvního řádu s dopravním zpožděním. Z toho důvodu se pokusíme tuto křivku aproximovat právě přechodovou charakteristikou soustavy prvního řádu s dopravním zpožděním. Při postupu budeme respektovat kroky uvedené v kapitole 4.2.2.2.

Přenos soustavy prvního řádu s dopravním zpožděním je dán vztahem (31) a pro zopakování je ve tvaru:

$$G(s) = \frac{Ke^{-T_D s}}{Ts + 1} \quad (31)$$

Přechodová funkce této soustavy je dána předpisy (32) a (33) a pro zopakování jsou ve tvaru:

pro $t \in (-\infty; T_D)$:

$$h(t) = 0 \quad (32)$$

pro $t \in \langle T_D; \infty \rangle$:

$$h(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t-T_D}{T}} \right) \quad (33)$$

Našimi neznámými je zesílení soustavy K , dopravní zpoždění T_D a časová konstanta T . Naším cílem je tyto konstanty vyjádřit a získat tak konkrétní aproximační křivku a přenos.

Je nutné si uvědomit, že počáteční teplota měření nebyla nulová, ale vyšší, čemuž odpovídá počáteční ustálený stav na obrázku Obr. 6.4. Z toho pramení jisté úpravy vztahů uvedených v kapitole 4.2.2.2. Z toho důvodu je nutné vztáhnout nulovou hladinu právě na úroveň tohoto ustáleného stavu a další souřadnice a rozměry odečítat od této posunuté „nulové osy“. Počátek souřadného systému tedy pomyslně posuneme po teplotní ose přibližně o 0,77 dílku vzhůru, což odpovídá teplotě počátečního ustáleného stavu po normování naměřené přechodové charakteristiky.

Zesílení soustavy určíme na základě vztahu (26), přičemž dosazené hodnoty jsou vhodně odečteny z grafu, popřípadě z tabulky naměřených hodnot:

$$K = \frac{y(\infty) - y(0)}{\Delta u(t)} \cong \frac{(2,45^\circ\text{C}) - (0,77^\circ\text{C})}{1} = 1,68^\circ\text{C} \quad (95)$$

Dále se budeme snažit získat hodnoty dopravního zpoždění a časové konstanty. Za tímto účelem si v grafu naměřené přechodové charakteristiky zvolíme dva body, abychom dále byli schopni řešit soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé. Zvolené body označíme $A = [t_A; y_A]$ a $B = [t_B; y_B]$ viz obrázek Obr. 6.4. Jejich souřadnice v absolutním souřadném systému jsou $A = [103; 1]$ a $B = [1000; 2,24]$ jak je uvedeno v grafu. Pro naše potřeby je však nutné souřadnice těchto bodů určit pro námi posunutý souřadný systém, přičemž opodstatnění bylo uvedeno výše. Souřadnice těchto dvou bodů po tom budou $A = [103; 1 - 0,77] = [103; 0,23]$ a $B = [1000; 2,24 - 0,77] = [1000; 1,47]$. V okamžiku kdy známe souřadnice dvou bodů naměřené přechodové charakteristiky, lze dopočítat obě zbylé neznámé pomocí vztahů (40) a (41), přičemž odvození těchto vztahů je uvedeno v kapitole 4.2.2.2.

Pro dopravní zpoždění tedy platí:

$$T_D = \frac{t_B \ln\left(1 - \frac{y_A}{K}\right) - t_A \ln\left(1 - \frac{y_B}{K}\right)}{\ln\left(1 - \frac{y_A}{K}\right) - \ln\left(1 - \frac{y_B}{K}\right)} = \frac{(1000 \text{ s}) \cdot \ln\left(1 - \frac{0,23 \text{ }^\circ\text{C}}{1,68 \text{ }^\circ\text{C}}\right) - (103 \text{ s}) \cdot \ln\left(1 - \frac{1,47 \text{ }^\circ\text{C}}{1,68 \text{ }^\circ\text{C}}\right)}{\ln\left(1 - \frac{0,23 \text{ }^\circ\text{C}}{1,68 \text{ }^\circ\text{C}}\right) - \ln\left(1 - \frac{1,47 \text{ }^\circ\text{C}}{1,68 \text{ }^\circ\text{C}}\right)} \cong 34,65 \text{ s} \quad (96)$$

a pro časovou konstantu pak:

$$T = \frac{T_D - t_A}{\ln\left(1 - \frac{y_A}{K}\right)} = \frac{(34,65 \text{ s}) - (103 \text{ s})}{\ln\left(1 - \frac{0,23 \text{ }^\circ\text{C}}{1,68 \text{ }^\circ\text{C}}\right)} \cong 464,24 \text{ s} \quad (97)$$

Konkrétní předpis pro přenos potom vypadá následovně:

$$G(s) = \frac{1,68e^{-34,65s}}{464,24s + 1} \quad (98)$$

a vyjádření přechodové funkce takto:

pro $t \in (-\infty; 34,65)$:

$$h(t) = 0 \quad (99)$$

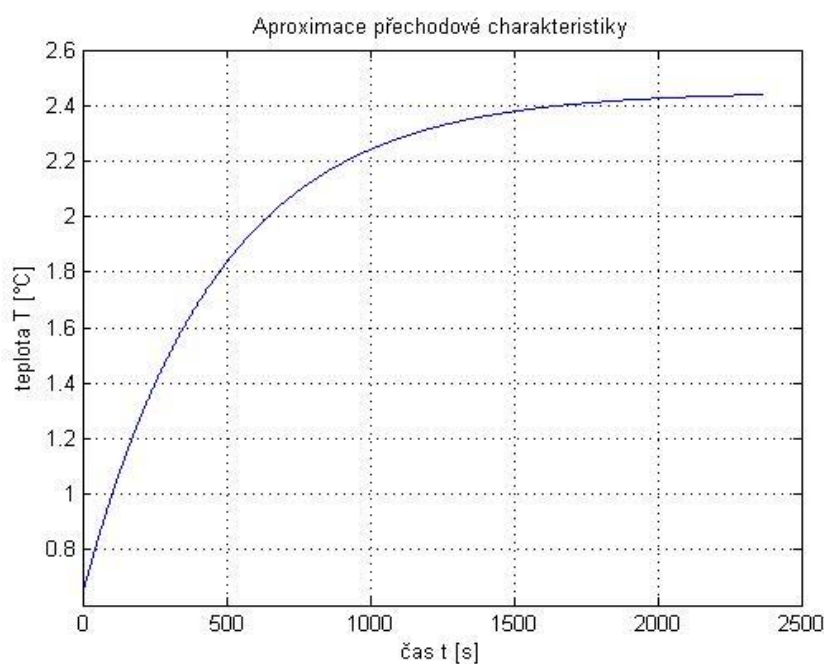
pro $t \in \langle 34,65; \infty \rangle$:

$$h(t) = 1,68 \left(1 - e^{-\frac{t-34,65}{464,24}} \right) \quad (100)$$

Převédeme-li danou funkci do původního souřadného systému, bude mít předpis přechodové charakteristiky upravený tvar:

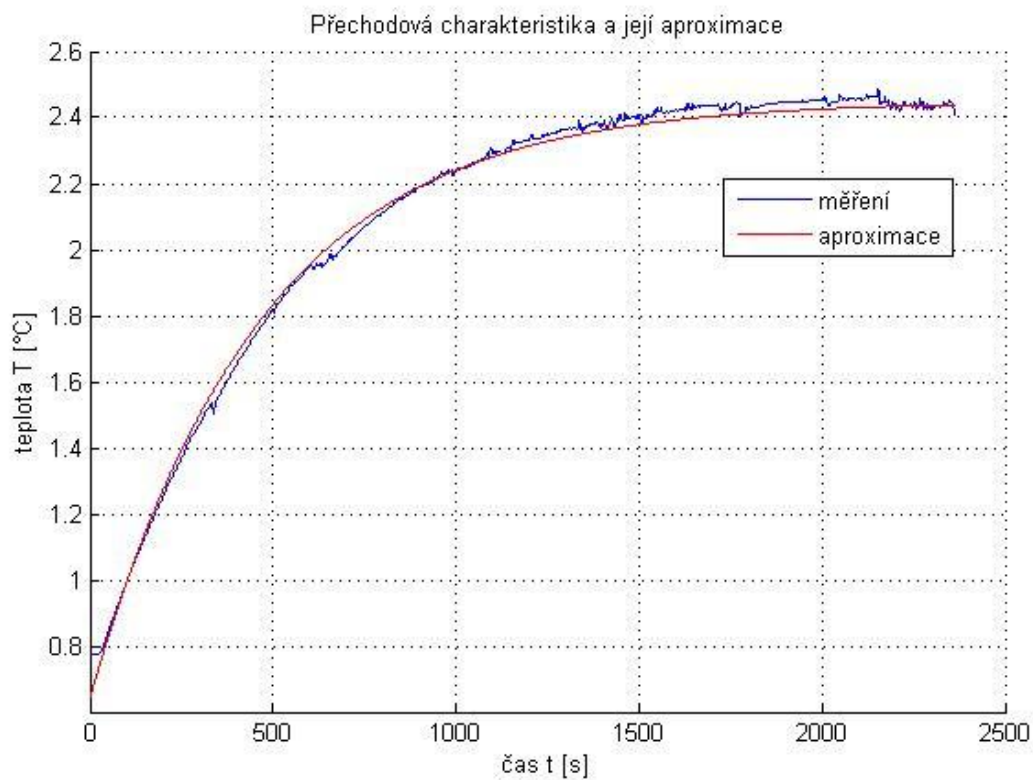
$$h(t) = 1,68 \left(1 - e^{-\frac{t-34,65}{464,24}} \right) + 0,77 \quad (101)$$

Průběh přechodové charakteristiky daný rovnicí (101) je zobrazen na následující straně na obrázku Obr. 6.5.



Obr. 6.5 Průběh nalezené aproximace přechodové charakteristiky

Pro srovnání jsou na obrázku Obr. 6.6 vykresleny obě charakteristiky, tj. charakteristika získaná měřením a charakteristika nalezená vhodnou apoximací.



Obr. 6.6 Porovnání obou přechodových charakteristik

Jak je vidět na obrázku Obr. 6.6, křivka získaná aproximačním procesem poměrně vhodným způsobem nahrazuje přechodovou charakteristiku získanou měřením a proto náhrada naměřené charakteristiky nekmitavou soustavou vyšších řádů zde nemá opodstatnění.

Tímto způsobem tedy získáváme matematický model daného zařízení v daných podmínkách ať už formou přenosu daného vztahem (98) nebo formou přechodové charakteristiky, jejíž průběh je popsán rovnicí (101) a obecněji pak rovnicemi (99) a (100).

7 Závěr

Jedním z problémů experimentální smyčky určené pro studium problematiky krize varu, která byla popsána v kapitole 2, je řízení jednotlivých zařízení za účelem nastavení požadovaných parametrů s ohledem na bezpečnost provozu. Pro samotné řízení užíváme regulátory o kterých blíže pojednává například zdroj [1]. Při nastavení regulátoru, který slouží k řízení konkrétního zařízení, přicházejí na řadu právě matematické modely. Typy matematických modelů a způsoby získání jsou obecně rozebrány v kapitole 4. Praktické ukázky nalezení konkrétního matematického modelu ať už cestou analytické nebo experimentální identifikace jsou v kapitolách 5 a 6. Cílem těchto kapitol bylo nastínit čtenáři postup a směr, kterým je třeba se zhruba ubírat, při sestavování matematického modelu právě za účelem následného řízení.

Seřízení regulátoru lze provést několika způsoby. Jednou z běžně užívaných metod je metoda Ziegler-Nicholsova. Tato metoda spočívá v přivedení dané soustavy na hranici stability, kdy obvod kmitá netlumenými kmity o konstantní amplitudě. Perioda těchto kmitů spolu se zesílením, kterým jsme obvod na hranici stability přivedli, jsou výchozí parametry pro seřízení konstant regulátoru. Podrobnější návod poskytuje pramen [1]. Jinou metodou, která je taktéž poměrně častá je seřízení regulátoru podle přechodové charakteristiky soustavy. Tato metoda je určena pouze pro proporcionální soustavy s nekmitavým průběhem přechodové charakteristiky. Principem je odměření doby průtahu a doby náběhu stejně, jak tomu bylo v kapitole 4.2.2.3. Tyto hodnoty jsou pak základem pro nastavení konkrétních konstant regulátoru. Bližší návod lze opět nalézt v literárním prameni [1].

Různost výsledků analytické a experimentální identifikace z kapitol 5 a 6 je zapříčiněna několika skutečnostmi. Jedním z důvodů této odlišnosti je různost prostředí provozu. Je nutné si uvědomit, že při měření byl elektrický ohřívák umístěn na vzduchu, zatímco při analytické identifikaci uvažujeme jeho uložení v nádobě zaplněné kapalinou. Už jen z této skutečnosti pramení několik zásadních odlišností, jako je například mechanismus přenosu tepla z ohříváku do okolního média, kterým je jednou kapalina a po druhé vzduch. Výsledky získané v kapitolách 5 a 6 mohou tedy posloužit jako výchozí bod při hledání neoptimálnějšího způsobu řízení, případně při sestavování dokonalejšího popisu tohoto zařízení.

8 Seznam použitých zdrojů

- [1] ŠVARC, Ivan. *Automatické řízení*. 2. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2011. ISBN 978-80-214-4398-3.
- [2] BOBÁL, Vladimír. *Identifikace systémů*. 1. vyd. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2009. ISBN 978-80-7318-888-7.
- [3] ČERMÁK, Jiří, Václav PETERKA a Jiří ZÁZVORKA. *Dynamika regulovaných soustav v tepelné energetice a chemii*. 1. vyd. Praha: Academia, 1968.
- [4] HOFREITER, Milan. *Identifikace systémů I*. 1. vyd. Praha: České vysoké učení technické, 2009. ISBN 978-80-01-04228-1.
- [5] HANUŠ, Bořivoj. *Číslicová regulace technologických procesů: algoritmy, matematicko-fyzikální analýza, identifikace, adaptace*. 1. vyd. Brno: VUTIUM, 2000. ISBN 80-214-1460-X.
- [6] PAVELEK, Milan. *Termomechanika*. 1. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2011. ISBN 978-80-214-4300-6.
- [7] HAAS, Christoph. *Critical Heat Flux for Flow Boiling of Water at Low Pressure on Smooth and Micro-Structured Zircaloy Tube Surfaces KIT Scientific Reports*. Karlsruhe, Baden: KIT Scientific Publishing, 2012. ISBN 978-386-6449-237.
- [8] *Kompenzátor objemu* [online]. 1998 [cit. 2015-03-08]. Dostupné z: http://www.cez.cz/edee/content/file/static/encyklopedie/vykladovy-slovník-energetiky/hesla/kompen_obj.html
- [9] *Technický katalog Grundfos* [online]. [cit. 2015-03-08]. Dostupné z: http://marcomplet.cz/docs/Grundfos/cr_cri_crn_pro_spec_aplikace.pdf
- [10] FREY, Hubert. *Výměníky tepla* [online]. c2008-2015 [cit. 2015-03-08]. Dostupné z: www.vymeniky-tepla.cz/files/obchod/Vymenik-tepla.php?vymenik=B28x96&typ=1

9 Seznam použitých zkratk a symbolů

značka	jednotka	popis
a_n	-	koeficient n-té derivace výstupní funkce
b_m	-	koeficient m-té derivace vstupní funkce
c	$Jkg^{-1}K^{-1}$	měrná tepelná kapacita
c_s	$Jkg^{-1}K^{-1}$	měrná tepelná kapacita stěny nádoby
e	různé	regulační odchylka
e	-	Eulerovo číslo, základ přirozeného logaritmu
$g(t)$	různé	impulsní funkce
$G(s)$	různé	přenos
$h(t)$	různé	přechodová funkce
I	A	elektrický proud
k	-	pořadové číslo vzorkovací periody
K	různé	zesílení soustavy
L	-	operátor Laplaceovy transformace
m	-	nejvyšší řád derivace vstupní veličiny u
m	kg	hmotnost kapaliny v nádobě elektrického ohříváku
m_s	kg	hmotnost pláště nádoby elektrického ohříváku
$\dot{m}$	$kg s^{-1}$	hmotnostní průtok kapaliny
$\dot{m}_0$	$kg s^{-1}$	hmotnostní průtok kapaliny v ustáleném stavu
$\Delta \dot{m}$	$kg s^{-1}$	přírůstek hmotnostního průtoku kapaliny
n	-	nejvyšší řád derivace výstupní veličiny y
n_i	-	i-tá nula přenosu
N	-	počet měření přechodové charakteristiky
p_i	-	i-tý pól přenosu
Q_{in}	-	inflexní bod přechodové charakteristiky
$\dot{Q}$	W	tepelný tok z topného tělesa do kapaliny
$\dot{Q}_0$	W	tepelný tok z topného tělesa do kapaliny v ustáleném stavu
$\dot{Q}_s$	W	tepelný tok z kapaliny do stěny nádoby
$\dot{Q}_{s0}$	W	tepelný tok z kapaliny do stěny nádoby v ustáleném stavu
$\Delta \dot{Q}$	W	přírůstek tepelného toku z topného tělesa do kapaliny
$\Delta \dot{Q}_s$	W	přírůstek tepelného toku z kapaliny do stěny nádoby
R	Ω	elektrický odpor
s	-	komplexní proměnná
t	s	časová proměnná
t_A	s	časová souřadnice bodu A
t_B	s	časová souřadnice bodu B
t_{in}	s	časová souřadnice inflexního bodu Q_{in}

T	s	časová konstanta
T_0	-	perioda vzorkování
T_1	s	časová konstanta
T_2	s	časová konstanta
T_D	s	dopravní zpoždění
T_m	s	časová konstanta
T_m	s	doplňková doba
T_n	s	doba náběhu
T_p	s	doba kmitu
T_i	s	i-tá časová konstanta
T_q	s	časová konstanta
T_u	s	doba průtahu
T_w	s	časová konstanta
u	různé	akční veličina
$U(s)$	různé	Laplaceův obraz vstupní funkce
Δu_i	různé	skoková změna vstupní veličiny při i-tém měření
v	různé	poruchová veličina
w	různé	žádaná hodnota
$W(s)$	-	přenos
y	různé	regulovaná veličina
y_A	°C	y-ová souřadnice bodu A
y_B	°C	y-ová souřadnice bodu B
y_{ik}	různé	hodnota výstupní funkce při i-tém měření v k-tém intervalu vzorkování
y_{in}	různé	y-ová souřadnice inflexního bodu Q_{in}
$\Delta y(t)_{\max}$	různé	maximální změna odezvy systému
$Y(s)$	různé	Laplaceův obraz výstupní funkce
Y_k	různé	hodnota odezvy systému v k-tém intervalu vzorkování
α	$Wm^{-2}K^{-1}$	součinitel přestupu tepla
δ_s	m	tloušťka stěny nádoby
$\delta(t)$	různé	jednotkový (Diracův) impuls
$\eta(t)$	různé	jednotková skoková funkce
λ_s	$Wm^{-1}K^{-1}$	teplotní vodivost stěny nádoby
ξ	-	koeficient tlumení
π	-	Ludolfovo číslo
ρ_s	kgm^{-3}	hustota materiálu stěny nádoby
σ_m	různé	maximální překmit
σ_{m-1}	různé	překmit v následující periodě

τ	-	poměr doby průtahu ku době náběhu
τ	K	teplota kapaliny uvnitř topidla
τ_1	K	teplota kapaliny na vstupu do topidla
τ_2	K	teplota kapaliny na výstupu z topidla
τ_{10}	K	teplota kapaliny na vstupu do topidla v ustáleném stavu
τ_{20}	K	teplota kapaliny na výstupu z topidla v ustáleném stavu
τ_i	s	časová konstanta
τ_u	různé	porovnávací parametr
$\Delta\tau_1$	K	přírůstek teploty kapaliny na vstupu do topidla
$\Delta\tau_2$	K	přírůstek teploty kapaliny na výstupu z topidla
$\varphi_{\dot{m}}$	-	poměrný přírůstek hmotnostního průtoku
$\varphi_{\dot{Q}}$	-	poměrný přírůstek tepelného toku z topidla do kapaliny
$\varphi_{\dot{Q}_s}$	-	poměrný přírůstek tepelného toku z kapaliny do stěny nádoby
φ_{τ_1}	-	poměrný přírůstek teploty kapaliny na vstupu do topidla
φ_{τ_2}	-	poměrný přírůstek teploty kapaliny na výstupu z topidla
$\overline{\varphi}_{\dot{m}}$	-	Laplaceův obraz poměrného přírůstku hmotnostního průtoku
$\overline{\varphi}_{\dot{Q}}$	-	Laplaceův obraz poměrného přírůstku tepelného toku z topidla do kapaliny
$\overline{\varphi}_{\dot{Q}_s}$	-	Laplaceův obraz poměrného přírůstku tepelného toku z kapaliny do stěny nádoby
$\overline{\varphi}_{\tau_1}$	-	Laplaceův obraz poměrného přírůstku teploty kapaliny na vstupu do topidla
$\overline{\varphi}_{\tau_2}$	-	Laplaceův obraz poměrného přírůstku teploty kapaliny na výstupu z topidla

10 Seznam příloh

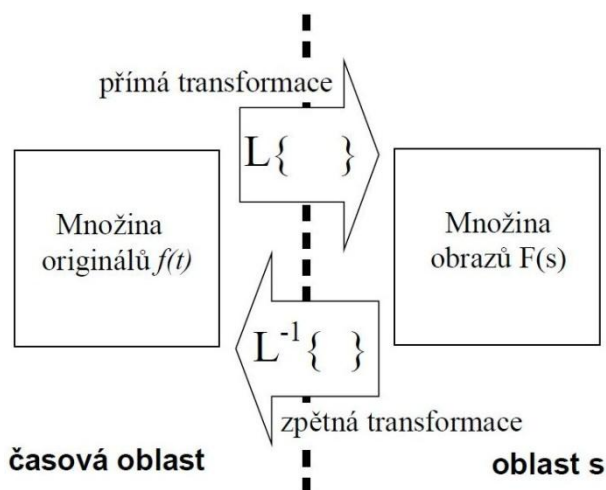
Příloha 1	Laplaceova transformace
Příloha 2	Odvození vybraných vztahů
Příloha 3	Výkres elektrického ohříváku

11 Přílohy

11.1 Příloha 1 – Laplaceova transformace

Jedná se o matematický aparát, jehož tvůrcem byl francouzský matematik Pierre Simon de Laplace, který tento pojem zavedl už někdy kolem roku 1820. Laplaceova transformace nám umožňuje řešit lineární diferenciální rovnice. Princip řešení těchto rovnic je takový, že transformací diferenciální rovnice získáme rovnici algebraickou a po vyřešení této rovnice a zpětné transformaci řešení obdržíme řešení původní diferenciální rovnice.

Samotný termín transformace funkce lze vysvětlit tak, že každé funkci $f(t)$, která je součástí množiny proměnné t přiřadíme na základě jistých pravidel a zákonitostí funkci $F(s)$ z množiny funkcí komplexní proměnné s (jak ukazuje obrázek Obr. P1.1). V tomto případě přiřazujeme tzv. originálu (tedy funkci $f(t)$) obraz (tedy funkci $F(s)$). Rozlišujeme přímou transformaci pro přiřazení obrazu k danému originálu a zpětnou transformaci pro přiřazení originálu k danému obrazu.



Obr. P1.1 Zjednodušené schéma Laplaceovy transformace [1]

Přímá transformace je definována vztahem:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (102)$$

To lze symbolicky vyjádřit následovně:

$$L\{f(t)\} = F(s) \quad (103)$$

Zpětnou transformaci lze pak definovat vztahem:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c F(s) e^{st} ds \quad (104)$$

A symbolicky analogicky vyjádříme:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} \quad (105)$$

Při hledání obrazů či originálů zpravidla nevyužíváme definičních vztahů, ale využíváme tzv. slovníku Laplaceovy transformace. Ten již obsahuje základní funkce $f(t)$, ke kterým jsou přiřazeny příslušné obrazy, tj. funkce $F(s)$. Spolu se slovníkem Laplaceovy transformace užíváme hlavní věty transformace, v souladu s tím, jak to uvádí zdroj [1], mezi které patří:

Věta o linearitě

$$L\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s) \quad (106)$$

Věta o obrazu derivace

$$L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \quad (107)$$

n-té derivace

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (108)$$

Věta o obrazu integrálu

$$L\left\{\int_0^t f(t) dt\right\} = \frac{1}{s} F(s) \quad (109)$$

Věta o počáteční hodnotě

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (110)$$

Věta o konečné hodnotě

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (111)$$

Věta o posunutí

$$L\{f(t-a)\} = e^{-as} F(s) \quad (112)$$

Mimo řešení diferenciálních rovnic lze však Laplaceovu transformaci užít i v teorii regulace, kdy jsme s její pomocí schopni popsat jistou skupinu regulačních systémů pomocí tzv. přenosů.

11.2 Příloha 2 – Odvození vybraných vztahů

Odvození vztahu (5):

Vydeme-li ze vztahu (2), na který aplikujeme Laplaceovu transformaci obdržíme:

$$L\{a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y\} = L\{b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_1 u' + b_0 u\} \quad (113)$$

Dále užijeme věty o linearitě (106) a věty o obrazu n-té derivace (108). Zároveň položíme všechny počáteční podmínky rovny nule. Dostáváme:

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + b_{m-1} s^{m-1} U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s) \quad (114)$$

V dalším kroku vytkneme vhodný člen na obou stranách rovnice a získáme tak:

$$Y(s)[a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0] = U(s)[b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0] \quad (115)$$

Pro výsledný přenos dle vztahu (4) už jen stačí vyjádřit daný poměr a dostáváme vztah (5):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (5)$$

Odvození vztahu (72):

Vydeme-li ze vztahu (71), na který aplikujeme Laplaceovu transformaci obdržíme:

$$L\{T_m \varphi'_{\tau_2}(t) + \varphi_{\tau_2}(t)\} = L\{\varphi_{\dot{Q}}(t) - \varphi_{\dot{Q}_s}(t) + \varphi_{\tau_1}(t) - \varphi_{\dot{m}}(t)\} \quad (116)$$

Dále využijeme věty o linearitě (106) a věty o obrazu derivace (107) a spolu s nulovými počátečními podmínkami dostáváme:

$$T_m [s \bar{\varphi}_{\tau_2}(s) - \varphi_{\tau_2}(0)] + \bar{\varphi}_{\tau_2}(s) = \bar{\varphi}_{\dot{Q}}(s) - \bar{\varphi}_{\dot{Q}_s}(s) + \bar{\varphi}_{\tau_1}(s) - \bar{\varphi}_{\dot{m}}(s) \quad (117)$$

Po vytknutí příslušného členu na levé straně rovnice (117) dostaneme:

$$\bar{\varphi}_{\tau_2}(s)[T_m s + 1] = \bar{\varphi}_{\dot{Q}}(s) - \bar{\varphi}_{\dot{Q}_s}(s) + \bar{\varphi}_{\tau_1}(s) - \bar{\varphi}_{\dot{m}}(s) \quad (118)$$

Osamocením příslušného členu na levé straně rovnice (118) pak dostáváme vztah (72):

$$\bar{\varphi}_{\tau_2}(s) = \frac{1}{T_m + 1} (\bar{\varphi}_{\dot{Q}}(s) - \bar{\varphi}_{\dot{m}}(s) + \bar{\varphi}_{\tau_1}(s) - \bar{\varphi}_{\dot{Q}_s}(s)) \quad (119)$$

