



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

ANALÝZA DUFFINGOVA OSCILLÁTORU

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Petr Sosna

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Ondřej Rubeš

BRNO 2019

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student: **Petr Sosna**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce: **Ing. Ondřej Rubeš**
Akademický rok: 2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Analýza Duffingova oscilátoru

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Cílem práce je zhotovit přehled fyzikálních systémů popsatelných Duffingovou rovnicí a popsat jejich chování. Má tak být učiněno pomocí matematického modelu Duffingova oscilátoru a jeho numerickou simulací.

Cíle bakalářské práce:

1. Rešerše nelineárních oscilátorů, zejména Duffingova oscilátoru.
2. Analýza fyzikálních systémů, jejichž chování může být aproximováno Duffingovou rovnicí.
3. Vytvořte matematický model Duffingova oscilátoru.
4. Pomocí simulace analyzujte možné chování systému popsatelných Duffingovou rovnicí.

Seznam doporučené literatury:

KRATOCHVÍL, Ctirad a Jaromír SLAVÍK. Mechanika těles: dynamika. Vyd. 4., V Akademickém nakl. CERM 2. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. ISBN 978-80-214-3446-2.

BREPTA, Rudolf, František TUREK a Ladislav PŮST. Mechanické kmitání. Praha: Sobotáles, c1994. Technický průvodce, 71. ISBN 80-901684-8-5.

ZEMAN, Vladimír a Zdeněk HLAVÁČ. Kmitání mechanických soustav. 2. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2004. ISBN 80-7043-337-X.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2018/19

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce se zabývá analýzou možného chování buzeného i nebuzeného Duffingova oscilátoru. V teoretické části jsou uvedeny základní teoretické poznatky o Duffingově rovnici.

Numerické řešení se zaměřuje na dynamiku oscilací hmotného bodu v dvojpotenciálové jámě, pro který je použita Duffingova rovnice se zápornou lineární tuhostí. Je ukázán vliv parametrů Duffingovy rovnice na chování systému. V práci jsou popsány periodické i chaotické atraktory, bifurkace systému. Pro konkrétní hodnoty parametrů je vytvořen bifurkační diagram a jsou simulovány oblasti přitažlivosti jednotlivých atraktorů pro různé hodnoty síly a frekvence buzení.

Klíčová slova

Duffingova rovnice, nelineární oscilátor, bifurkace, oblast přitažlivosti, oscilační mapa, chaotický atraktor

Abstract

This thesis analyses the simplest model of nonlinear oscillations, the Duffing oscillator. Methods of nonlinear dynamics are used for analysis of the Duffing equation which describes such oscillations.

Numerical solution focuses on the dynamics of twin-well potential oscillations. The effect of all the parameters of the Duffing equation on the system is shown. Coexisting periodic and chaotic attractors are discussed as well as possible bifurcations of the system. A bifurcation diagram for a specific system is created. The thesis concludes with simulation of basins of attraction for different values of excitation force and frequency.

Key words

Duffing equation, nonlinear oscillator, bifurcation, basin of attraction, behaviour chart, chaotic attractor

Poděkování

Děkuji vedoucímu práce Ing. Ondřeji Rubešovi za odborné konzultace při řešení. Dále děkuji svému bratrově Martinovi a jeho ženě Beatě za jazykové korektury.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto práci na téma "Analýza Duffingova oscilátoru" vypracoval pod vedením vedoucího bakalářské práce samostatně za použití zdrojů, které jsou uvedeny v seznamu zdrojů na konci dokumentu.

Obsah

1	Úvod.....	6
1	Duffingova rovnice v historickém kontextu.....	7
1.1	Nelineární oscilátory	7
1.2	Georg Duffing	7
1.3	Metody řešení.....	7
1.4	Fyzikální systémy	8
1.4.1.	Systémy s kladnou lineární tuhostí	8
1.4.2.	Systémy se zápornou lineární tuhostí	9
2	Teoretický rozbor	11
2.1	Nebuzený Duffingův oscilátor	11
2.1.1.	Základní pojmy	11
2.1.2.	Tuhostní charakteristika	11
2.1.3.	Energetické řešení netlumeného systému	14
2.1.4.	Rovnovážné body	15
2.1.5.	Stabilita rovnovážných bodů	16
2.1.6.	Globální fázové portréty	17
2.1.7.	Změny fázových portrétů.....	18
2.2	Buzený Duffingův oscilátor	20
2.2.1.	Energetické řešení.....	20
2.2.2.	Možná zobrazení.....	20
3	Analýza chování nebuzeného dvojpotenciálového oscilátoru	23
3.1	Numerické řešení	23
3.2	Oblasti přitažlivosti.....	23
3.3	Vliv hmotnosti	25
3.4	Vliv tlumení	25
3.4.1.	Lineární tlumení	25
3.4.2.	Jiné modely tlumení.....	26
3.5	Tuhost systému	26
4	Analýza chování buzeného dvojpotenciálového oscilátoru	28
4.1	Numerické řešení	28
4.2	Atraktory buzeného systému.....	28
4.2.1.	Nerezonanční atraktor S_n	28
4.2.2.	Rezonanční S_r	29
4.2.3.	Velký S_L	29

4.2.4.	Chaotický atraktor CH.....	30
4.3	Bifurkace buzeného systému	31
4.3.1.	Sedlo-uzel (saddle-node)	31
4.3.2.	Dvojení periody (period doubling cascade).....	32
4.3.3.	Symmetry breaking crisis <i>cr1</i>	33
4.3.4.	Boundary crisis hb D_L	34
4.4	Bifurkační diagram	35
4.4.1.	Oblasti existence atraktorů	35
4.5	Oscilační mapa.....	37
4.5.1.	Oblasti přitažlivosti.....	37
4.6	Vliv fáze buzení	41
5	Závěr.....	43
6	Seznam použitých zdrojů.....	44
7	Seznam obrázků	46
8	Seznam příloh	48

1 Úvod

Dynamika jako taková se zabývá systémy, které se v čase vyvíjejí. Velkou část dynamiky tvoří teorie kmitání. V polovině 18. století Euler přišel s matematickým popisem lineárního oscilátoru. Brzy se ale zjistilo, že pro popis většiny systémů, dokonce tak obyčejných, jako je matematické kyvadlo, tato lineární teorie nestačí. Její matematická elegance je vykoupena omezenou použitelností. Například u kyvadla je vhodná pouze pro popis malých oscilací.

Jedním z průkopníků nelineární dynamiky se stal německý inženýr Georg Duffing. Jeho matematický model nelineárního oscilátoru se stal předmětem zájmu mnoha velkých osobností dynamiky 20. století. Od své publikace byla Duffingova rovnice podrobena četné analýze, ať už se jednalo o experimenty, analytická nebo numerická řešení.

Duffingova rovnice je nejjednodušší nelineární model, kdy k lineárnímu modelu je přidán pouze jeden člen, kubická tuhost. Její aplikovatelnost na fyzikální systémy je mnohem větší, může dokonce popisovat takové fenomény, jako jsou bifurkace nebo chaotické chování systémů. Proto je dnes Duffingův systém ukázkovým systémem, na kterém je vysvětlována řada fenoménů nelineární dynamiky.

1 Duffingova rovnice v historickém kontextu

1.1 Nelineární oscilátory

Kyvadlo bylo prvním nelineárním mechanickým systémem, který lidé zkoumali. Byl to Huygens, který o nelinearitě kyvadla rozhodl na základě závislosti vlastní frekvence na amplitudě výchylky, chyběl však matematický popis.

Důležitou figurou z hlediska matematického popisu dynamických systémů byl Poincaré, který upřednostňoval kvalitativní popis místo kvantitativního. Nebylo pro něj důležité vědět, jak bude v daném čase systém přesně vypadat, ale kam bude jeho vývoj směřovat. Myšlenka Poincarého se stala základním kamenem nelineární dynamiky, kterou můžeme shrnout do jedné věty: "Zjistit o systému co nejvíce podstatných věcí bez toho, abychom explicitně řešili jeho diferenciální rovnice".

Mnoho a mnoho dalších osobností se zasloužilo o vývoj nelineární dynamiky a chaosu, mezi nimi například Liapunov, Birkhoff, Smale, Melnikov, Feigenbaum, Hopf a další.

Podrobnější informace z historie nelineární dynamiky sepsal například Holmes [1]. Ucelený popis dynamických systémů podali Abraham a Shaw [2] nebo Nayfeh [3]. Učebnice Strogatze [4] bývá často považována za základní studijní materiál nelineární dynamiky.

1.2 Georg Duffing

Georg Duffing byl německý inženýr, ve své době poměrně známý jako experimentátor. Zabýval se především vibracemi spalovacích motorů, v této oblasti je také držitelem několika patentů. Je autorem devíti publikací, nelze tedy u něj hovořit o úspěšné akademické kariéře. Kniha, díky které se stal známým a ve které poprvé použil svou rovnici nelineárního oscilátoru s kubickým členem tuhosti, byla vydána v roce 1918 [5]. Navzdory svému "pouze" inženýrskému vzdělání je kniha po matematické stránce na vysoké úrovni. Několikrát v ní ale připouští svou neznalost a zdůrazňuje nutnost dalšího zkoumání. Hlavní systém, který Duffing analyzoval, byl pohyb buzeného kyvadla. Tuhostní charakteristiku kyvadla modeloval pomocí prvních dvou členů Taylorova rozvoje funkce sinus, tedy kladným lineárním a záporným kubickým členem. Což je Rovnice (1).

$$\ddot{y} + \beta\dot{y} + \alpha y + \gamma y^3 = F \cos(\omega t) \quad (1)$$

Pohybové rovnice odvodil analyticky pouze pro nebuzené kyvadlo. Využil k tomu metodu Weierstrassova eliptického integrálu. Od té doby byly rozvíjeny analytické metody řešení Duffingovy rovnice, některé z nich jsou uvedeny dále.

1.3 Metody řešení

Analytické metody řešení Duffingovy rovnice s kladným lineárním členem lze rozdělit do dvou skupin podle míry nelinearity.

Slabě nelineární Duffingův systém ($\gamma \ll \alpha$) je považován za perturbaci lineárního systému a může být řešen přepisem do mocninné řady (*expansion in power series*) [6] nebo metodou

multiple scales method. Ta je využita v knize [6] k odvození amplitudo-frekvenční charakteristiky pro slabě nelineární Duffingův systém.

Metody pro silně nelineární systém sice nejsou omezeny mírou nelinearity, mohou však být použity pouze pro popis pohybu nebuzeného systému. Všechny využívají *Jacobiho eliptické funkce* [7].

Obrovský pokrok v řešení pohybu nelineárních oscilátorů nastal v 50. letech 20. století s nástupem prvních počítačů a s možností provádět numerické simulace. Zájem o chaotické systémy, včetně Duffingova, exponenciálně narostl, viz např. [8] nebo [9]. Nejkomplexnější numerickou analýzu Duffingova oscilátoru se zápornou lineární tuhostí provedla W. Szemplinska-Stupnicka,

v řadě svých článků se zabývá jeho oscilačními mody a možnými přechody z periodického do chaotického chování, např. [10], [11] a [12].

V současné době jsou předmětem zájmu také modifikace původního Duffingova systému, které obsahují kupříkladu člen kvadratický nebo členy kubické a pátého řádu, např. [6], [13] a [14].

1.4 Fyzikální systémy

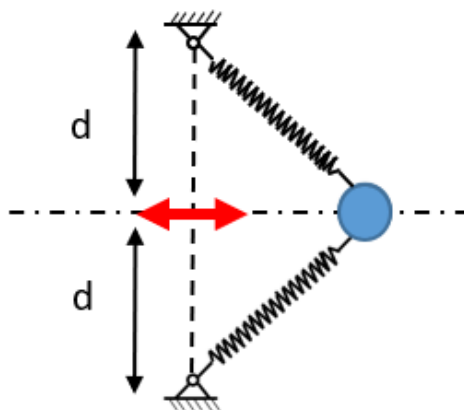
1.4.1. Systémy s kladnou lineární tuhostí

Takovým systémem může být pružina s nelineární tuhostní charakteristikou. To znamená, že závislost síly, která vrací pružinu do rovnovážné polohy, a výchylky pružiny nemůže být popsána přímkou. Namísto toho má tvar obecné křivky. Pokud je tato křivka symetrická, tedy nezáleží na tom, jestli je pružina zatěžována v tahu nebo tlaku, může být charakteristika aproximována Taylorovou řadou pouze s lichými členy. Klasickým systémem se zápornou kubickou (měknoucí) tuhostí je matematické kyvadlo. Síla, která kyvadlo vrací do rovnovážné polohy, je závislá na sinu úhlové výchylky. A právě z Taylorova rozvoje funkce sinus dostáváme

$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \dots \quad (2)$$

Pokud z rozvoje použijeme jen první dva členy, dostaneme závislost síly na výchylce (tuhostní charakteristiku) v následujícím tvaru:

$$F_p = \alpha y \pm \gamma y^3 \quad (3)$$



Obr. 1 Příklad geometrické nelinearity.

Příklad systému s kladným kubickým členem je na Obr. 1, odvození tuhostní charakteristiky tohoto systému je uvedeno v knize [6]. Jeho charakteristiku pak nazýváme tvrdnoucí. Příklad také dokazuje, že nelinearita nemusí pramenit pouze z materiálových vlastností pružiny, může být také dána geometricky.

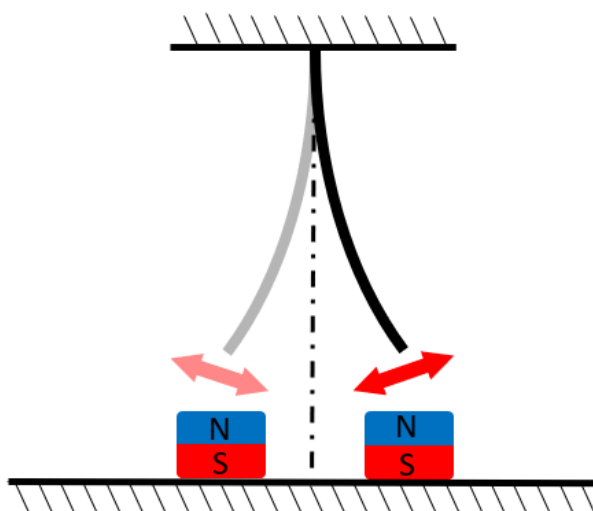
Předpokladem je, aby délka pružin v nezátíženém stavu d_0 byla menší, než je přímá vzdálenost, označená jako d . V pružinách tedy musí existovat nějaké předpětí.

1.4.2. Systémy se zápornou lineární tuhostí

Pokud předpoklad pro pružiny z Obr. 1 neplatí, chová se systém kvalitativně jinak. Pružiny jsou "moc dlouhé", původní stabilní rovnovážná poloha se stává nestabilní a po stranách se objevují dvě nové rovnovážné polohy, okolo kterých systém může kmitat. Síla vracející systém do původní (nyní již nestabilní) polohy pak je popsána vztahem $F_p = -\alpha y + \gamma y^3$.

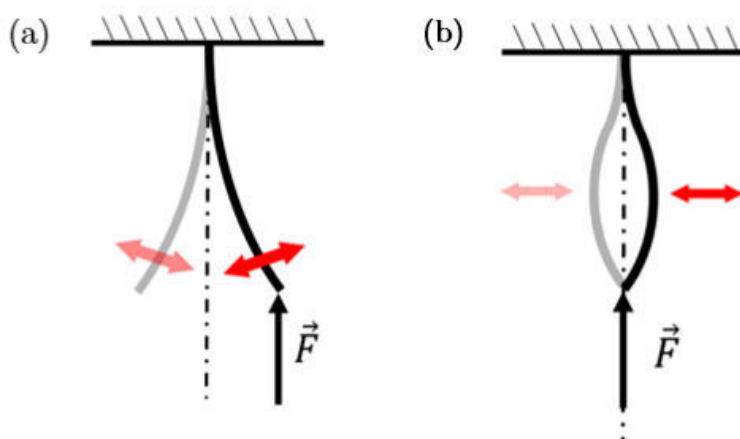
Tento systém nazýváme jako dvojpotenciálový (*twin-well potencial*), podle tvaru potenciální energie, jak bude ukázáno dále.

Duffingova rovnice může být také použita pro popis dalšího dvojpotenciálového systému, který je zobrazen na Obr. 2. Je známý jako Moonův nosník podle Francise Moona, který jej poprvé popsal v článku [15]. Rovnovážné polohy jsou vytvořeny pomocí magnetů umístěných po stranách vetknutého nosníku.



Obr. 2 Kmitání vetknutého nosníku v blízkosti magnetů.

Podobným případem jsou oscilace nosníku namáhaného v tlaku, u kterého došlo ke ztrátě vzpěrné stability, viz Obr. 3. Nosník může oscilovat v různých modech. Přesný tvar Duffingovy rovnice popisující oscilace zmíněných nosníků může být nalezen v knize [6].



Obr. 3 Oscilace vetknutého prutu po ztrátě vzpěrné stability.

2 Teoretický rozbor

Tato kapitola je zaměřena na teoretický rozbor Duffingovy rovnice s pomocí postupů nelineární dynamiky. Zaměřuje se na kvalitativní chování Duffingova oscilátoru. Analyzuje energii takového oscilátoru, rovnovážné body, jejich stabilitu a bifurkace. Cílem kapitoly je o možném chování systému získat co nejvíce informací bez řešení odpovídajících diferenciálních rovnic.

Duffingova rovnice je v této kapitole chápána spíše z matematického hlediska, tedy bezrozměrně. Avšak fyzikální interpretace je možná, veličiny mohou mít jednotky soustavy SI. Např. výchylku lze chápat v metrech, rychlost v metrech za sekundu, čas v sekundách atd. Ale vzhledem ke zmíněnému kvalitativnímu charakteru analýzy jsou jednotky nedůležité.

2.1 Nebuzený Duffingův oscilátor

2.1.1. Základní pojmy

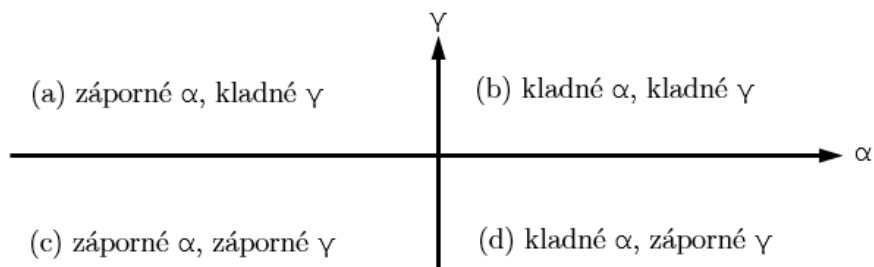
Protože poloha y a rychlost v úplně a jednoznačně popisují stav systému, nazývají se *stavové veličiny*. Stavové veličiny se zobrazují ve *stavovém prostoru*, v tomto případě je to rovina yv . Dynamický systém charakterizovaný počátečními podmínkami y_0, v_0 se v čase vyvíjí podle diferenciální rovnice a křivka všech stavů dynamického systému vytvořená body (y, v) se nazývá *trajektorie*. Ve *fázovém portrétu* je zakresleno několik trajektorií s různými počátečními podmínkami. Z fázového portréту lze rozpoznat kvalitativně odlišná chování systému.

2.1.2. Tuhostní charakteristika

Duffingova rovnice bez budicího členu je ve tvaru

$$\ddot{y} + \beta \dot{y} + \alpha y + \gamma y^3 = 0 \quad (4)$$

Parametr β charakterizuje lineární tlumení, α lineární tuhost a γ nelineární (kubickou) tuhost. Variabilita chování systémů popsatečných Duffingovou rovnicí spočívá v tom, že parametry α a γ mohou nabývat jak kladných, tak záporných znamének. Podle znamének tedy existují čtyři základní druhy systémů. Řazení následujících obrázků v této kapitole je stejné, systémy s kladnou lineární tuhostí jsou vpravo, s kladnou kubickou tuhostí jsou nahoře.



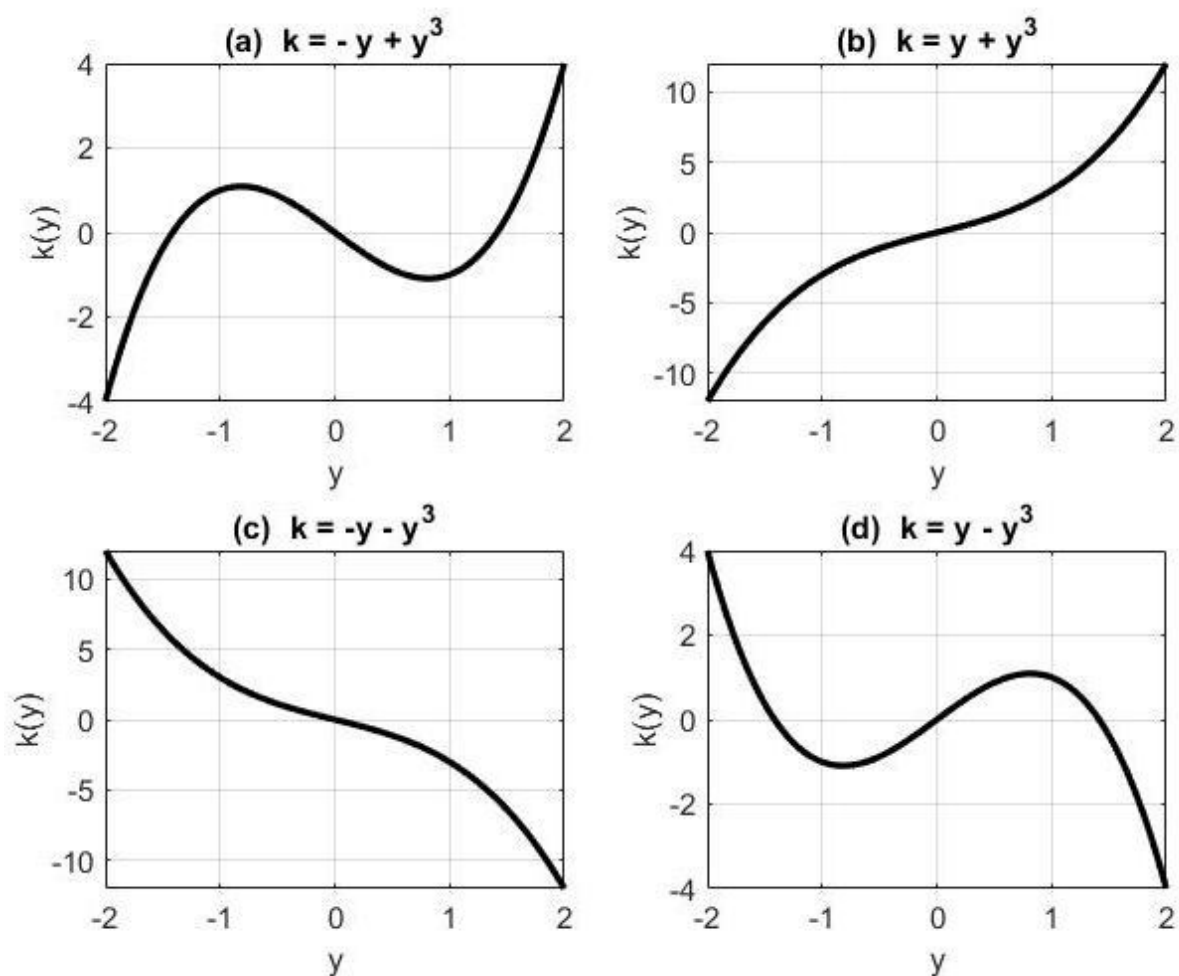
Obr. 4 Řazení obrázků podle znamének.

Vynásobením Rovnice (4) faktorem $\dot{y}$ a následným převedením členu tlumení na pravou stranu získá rovnice tvar

$$\ddot{y} \dot{y} + \alpha y \dot{y} + \gamma y^3 \dot{y} = -\beta(\dot{y})^2 \quad (5)$$

Přičemž platí, že výraz nalevo je derivací skalární funkce, takže rovnice je ekvivalentní se zápisem:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \alpha y^2 + \frac{1}{4} \gamma y^4 \right) = -\beta(\dot{y})^2 \quad (6)$$



Obr. 5 Kvalitativně rozdílné tuhostní charakteristiky Duffingova oscilátoru.

Zmíněná skalární funkce je celková energie systému E .

$$E = \frac{1}{2} \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \alpha y^2 + \frac{1}{4} \gamma y^4 \quad (7)$$

Rovnice (6) tedy vyjadřuje rychlost disipace celkové energie, tedy $\dot{E} = -\beta(\dot{y})^2$. Protože koeficient tlumení β je kladný, znaménko minus v rovnici poukazuje na fakt, že energie je systému v čase neustále odebírána. Energie se zachovává pouze, pokud je koeficient tlumení $\beta = 0$, tedy v případě netlumeného oscilátoru.

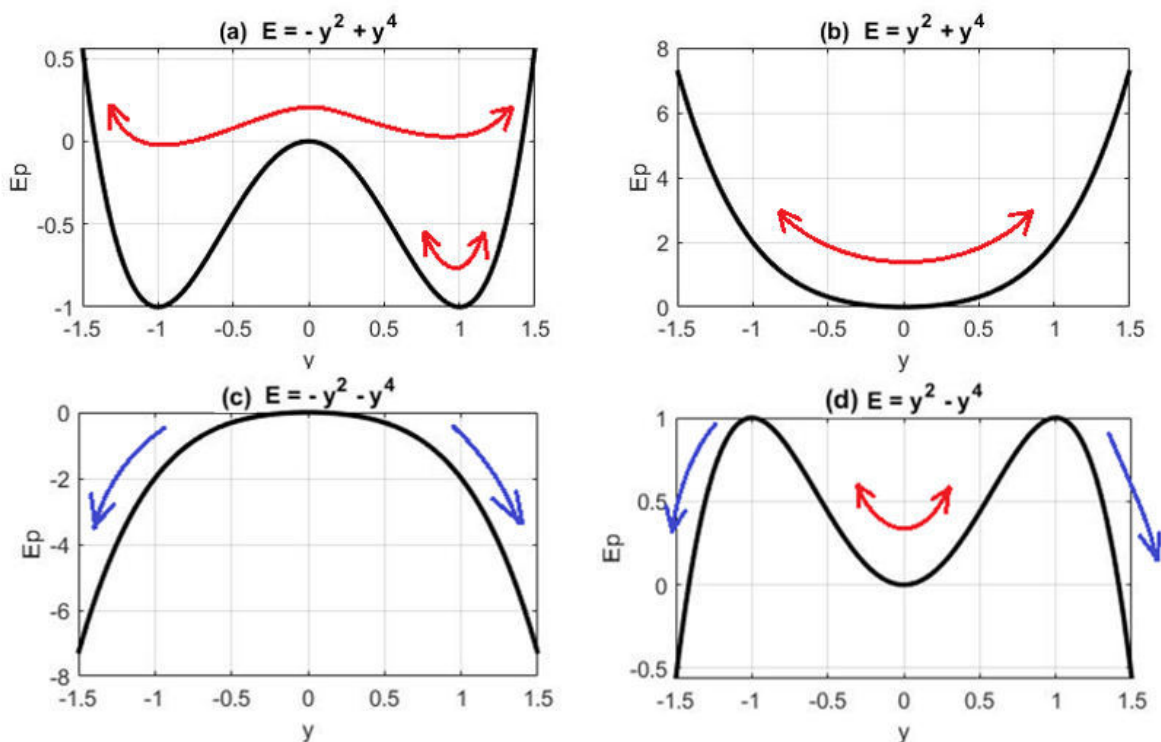
První člen Rovnice (7) odpovídá kinetické energii, druhý a třetí člen odpovídá energii potenciální.

$$E_k = \frac{1}{2} \dot{y}^2 \quad (8)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \alpha y^2 + \frac{1}{4} \gamma y^4 \quad (9)$$

Lze také ukázat, že Duffingův oscilátor je Hamiltonovský systém, odvození je uvedeno v [6].

Potenciální energie vznikla integrací tuhostní charakteristiky, která může být interpretována jako síla pružiny vracující hmotný bod do počáteční polohy $y = 0$. Obr. 6 červenými šipkami schematicky ukazuje možné oscilace hmotného bodu v potenciálových jámách.



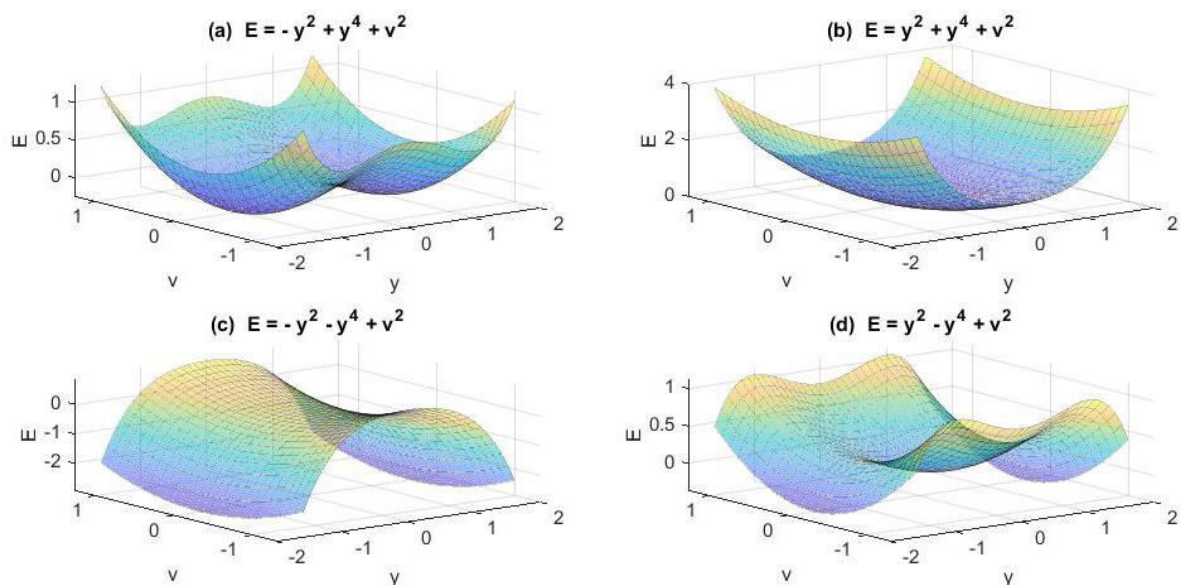
Obr. 6 Schéma pohybu hmotného bodu v potenciálové jámě.

Je zřejmé, že hmotný bod v dvojpotenciálové jámě v případě (a) může buď konat nízkoenergetické oscilace uvnitř jámy (*in-well oscillations*), nebo vysokoenergetické oscilace přes obě jámy (*cross-well oscillations*).

Případy (b) a (d) mohou modelovat oscilace hmotného bodu způsobené pružinou s tvrdnoucí, resp. měknoucí tuhostní charakteristikou, viz Obr. 5 (b) a (d). Oscilace (d) jsou omezeny velikostí jámy, při zvýšení amplitudy může dojít k přeskočení peaku a ”spadnutí do nekonečna” (modré šipky).

Pak je ale jasné, že případ (c) nepopisuje oscilace, bod v počátku je labilní. Tento případ nemodeluje žádnou reálnou situaci, pro úplnost jej ale v analýze ponecháme.

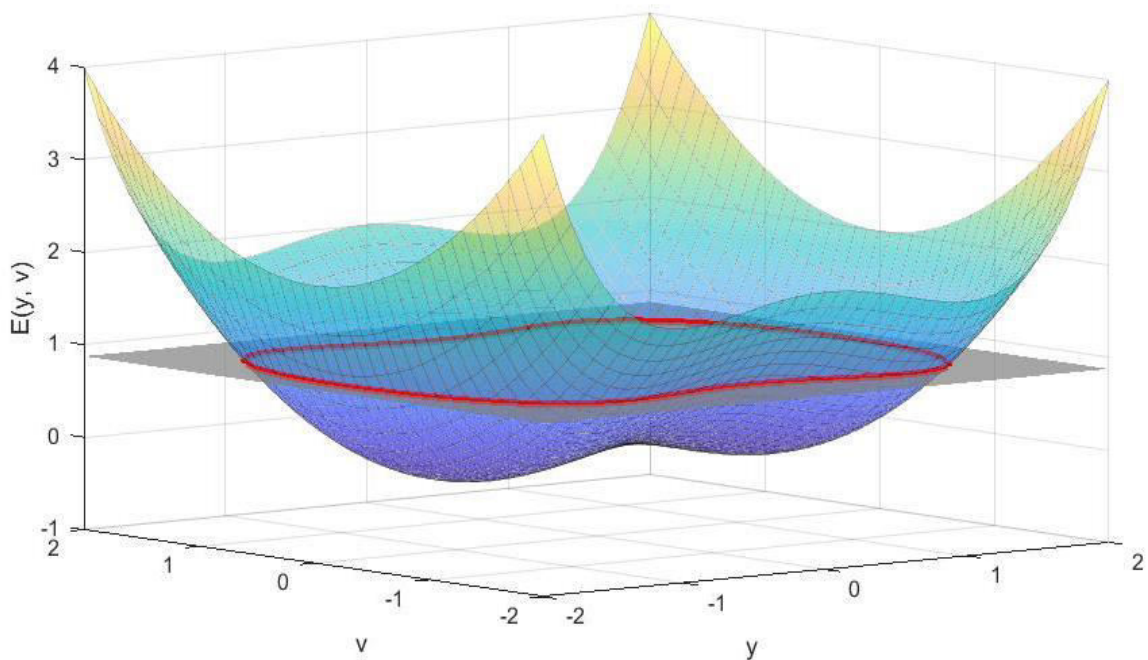
Celková energie E je funkcí polohy a rychlosti, každému bodu fázového prostoru (y, v) odpovídá jedna hodnota $E(y, v)$. Energie tedy může být zobrazena jako funkce dvou proměnných – je to plocha v rozšířeném fázovém prostoru $(y, v, E(y, v))$.



Obr. 7 Energetické plochy pro jednotlivé základní typy systémů.

2.1.3. Energetické řešení netlumeného systému

Netlumený systém je konzervativní, každá trajektorie má určitou energii, kterou si v čase zachovává. Nabízí se tedy geometrické řešení založené na tomto principu. Počáteční energie $H(y_0, v_0)$, vypočítaná z počátečních podmínek, určuje energetickou hladinu, a tedy rovinu, jejíž průsečnice s energetickou skalární funkcí je trajektorie systému. Veškeré chování je tedy určeno a popsáno tvarem plochy a počáteční energií. Obr. 8 to ilustruje na případě dvoupotenciálové jámy – varianta (a).



Obr. 8 Trajektorie vzniknou jako průsečík energetické funkce a roviny.

2.1.4. Rovnovážné body

Standardní substitucí $\dot{y} = v$ lze Rovnici (4) převést na soustavu dvou lineárních diferenciálních rovnic ve tvaru:

$$\dot{y} = v \quad (10)$$

$$\dot{v} = -\alpha y - \gamma y^3 - \beta v \quad (11)$$

Rovnovážný bod je jeden z možných ustálených stavů dynamického systému (dalšími jsou *periodické cykly*, *limitní cykly* nebo *chaotické atraktory*). Je to takový bod fázového prostoru, jehož stavové veličiny se v čase nemění. Odpovídá rovnovážné poloze fyzikálního systému. Musí pro něj platit $\dot{y} = 0$ a $\dot{v} = 0$. Z tohoto pak vyplývají podmínky pro rovnovážné body:

$$v_{st} = 0 \quad (12)$$

$$y_{st}(\alpha + \gamma y_{st}^2) = 0 \quad (13)$$

První triviální rovnovážný bod je na souřadnicích $(0, 0)$. Další dva netriviální rovnovážné body mají souřadnice $(0, \pm\sqrt{-\alpha/\gamma})$. Záporné znaménko pod odmocninou poukazuje na fakt, že jedna z tuhostních konstant musí být záporná, aby netriviální rovnovážné body existovaly. Tři rovnovážné body proto existují jen u případů (b) a (c), viz např. Obr. 7.

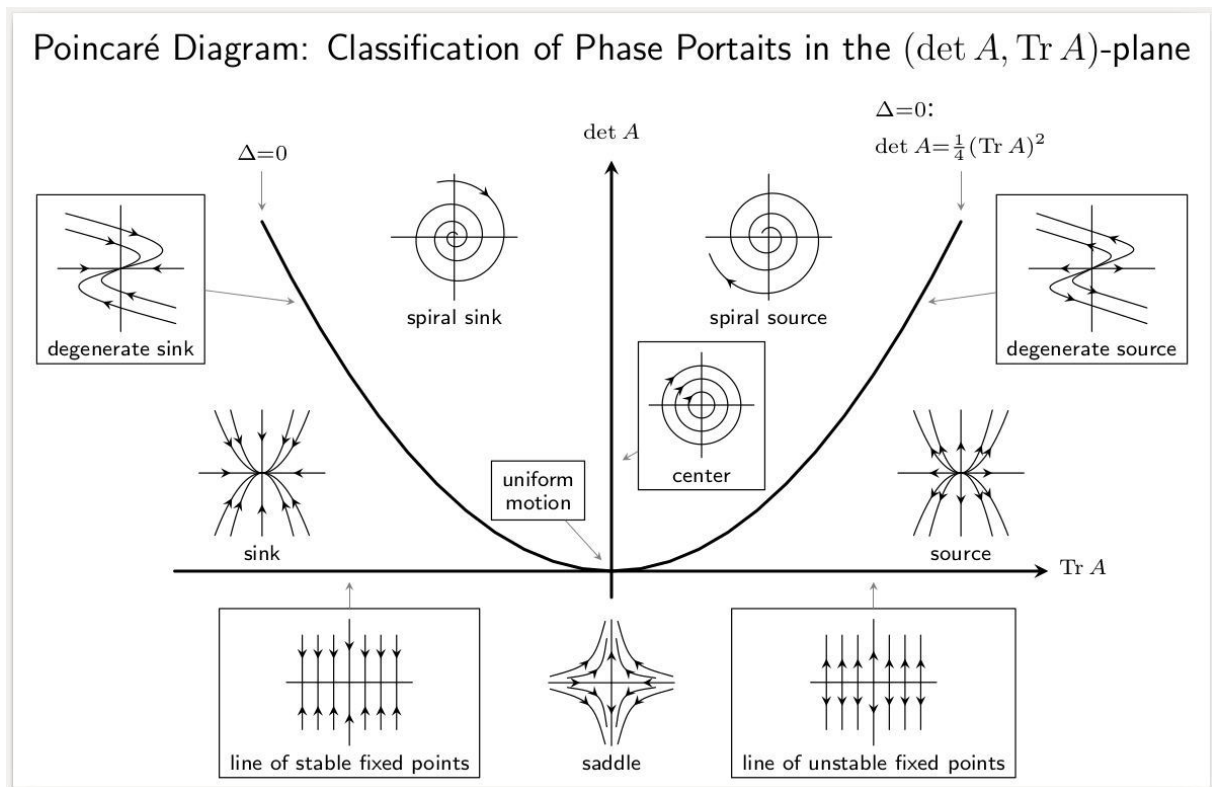
2.1.5. Stabilita rovnovážných bodů

Lokální stabilitu rovnovážných bodů lze určit z linearizace vektorového pole (určeného diferenciální rovnicí) pomocí Jakobiánu. Jakobián je matice parciálních derivací soustavy.

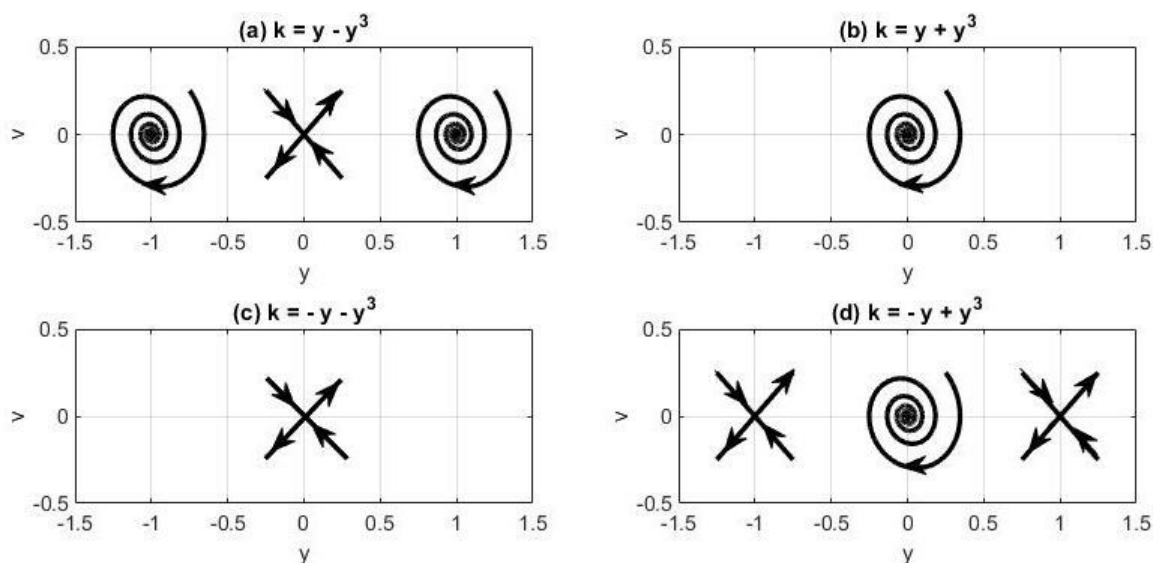
$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha - 3\gamma y_{st}^2 & -\beta \end{bmatrix} \quad (14)$$

Znaménko a charakter vlastních čísel Jakobiánu určuje stabilitu. Názornější je ale určení stability se znalostí stopy $Tr J = -\beta$ a determinantu $det J = \alpha + 3\gamma y_{st}^2$, protože stopa je funkcí pouze tlumení a determinant je funkcí tuhostních konstant.

Dosazením tuhostních konstant α a γ a souřadnic rovnovážných bodů y_{st} do Rovnice (14) pak lze s pomocí Obr. 9 zjistit charakter rovnovážných bodů pro jednotlivé typy úloh (a) až (d). Nezávisle na tlumení mají body se záporným determinantem charakter sedla.



Obr. 9 Klasifikace rovnovážných bodů podle stopy a determinantu. Převzato z [6].

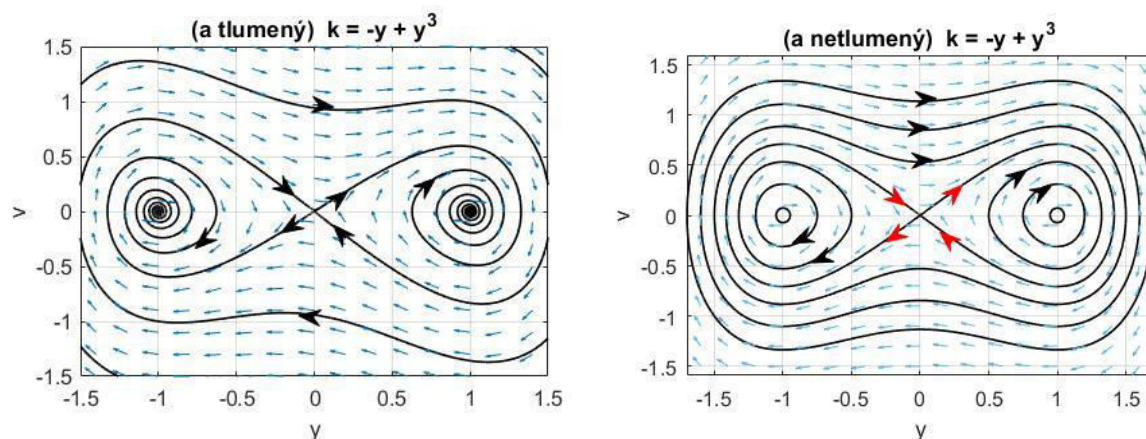


Obr. 10 Pevné body ve fázové rovině.

Konstanta tlumení β většinou nabývá malých kladných hodnot, proto všechny ostatní body jsou *ohniska* (*spiral sink*). Trajektorie se k rovnovážnému bodu spirálovitě blíží. Pouze pro konzervativní systém s nulovým tlumením jsou tyto rovnovážné body *středové body*. Trajektorie v tom případě jsou soustředné uzavřené křivky. Charakter rovnovážných bodů ve fázové rovině je znázorněn na Obr. 10.

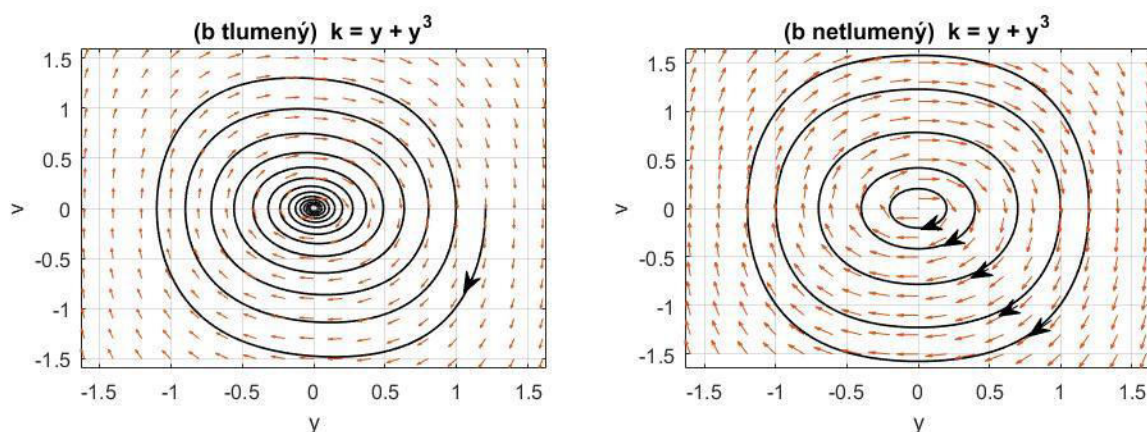
2.1.6. Globální fázové portréty

Obr. 12 – Obr. 14 ukazují globální chování jednotlivých typů Duffingových oscilátorů.



Obr. 11 Fázový portrét pro $\alpha < 0$, $\gamma > 0$.

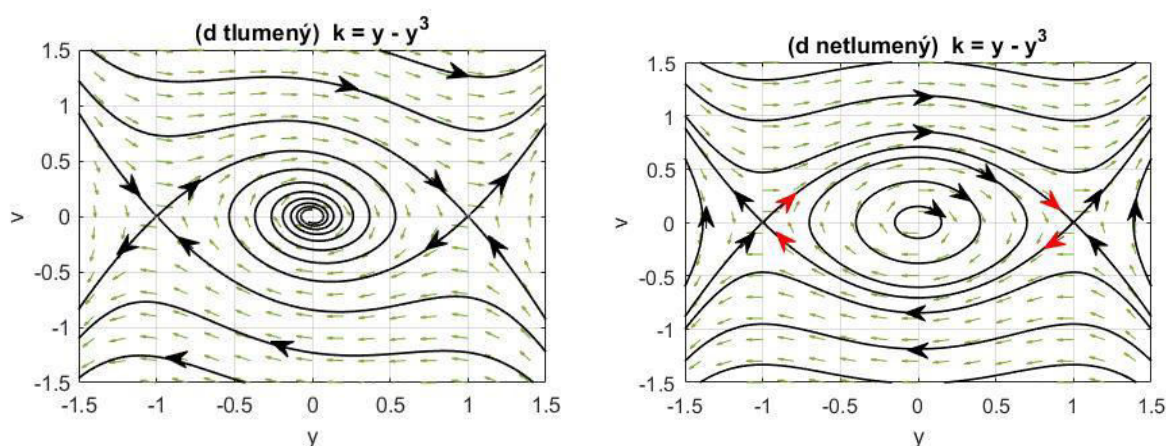
Oscilátor (a) má dva stabilní rovnovážné body a jedno sedlo uprostřed. Trajektorie, která spojuje rovnovážný bod sám se sebou, se nazývá *homoclinic orbit*. Na obrázku jsou to křivky vycházející ze sedla (červené šipky). Netlumené oscilace jsou tedy *malé* (*in-well*) nebo *velké* (*cross-well*), přičemž hranici tvoří homoclinic orbit.



Obr. 12 Fázový portrét pro $\alpha > 0$, $\gamma > 0$.

U tlumeného případu se trajektorie, které začínají v sedle, už do sedla zpět nevrátí. Ale stále jsou důležité, nazývají se stabilní trajektorie sedla Γ^s (*stable manifold*), resp. nestabilní Γ^u (*unstable manifold*).

Oscilátor (b) popisuje oscilace tvrdnoucí pružiny. Trajektorie jsou nezajímavé, pouze krouží okolo rovnovážného bodu v počátku, nebo se k němu asymptoticky blíží. I v tomto případě ale může nastat v buzeném systému chaos, viz *Ueda oscillator* [16].



Obr. 13 Fázový portrét pro $\alpha > 0$, $\gamma < 0$.

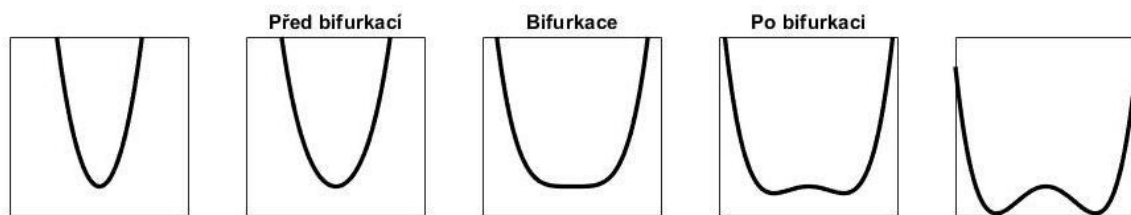
Sedlo (c) se chová podobně jako jeho lineární analogie, všechny trajektorie jsou odpuzovány do nekonečna.

Trajektorie, která spojuje dva rovnovážné body, se nazývá *heteroclinic orbit*, na Obr. 13 je to trajektorie spojující sedla (červené šipky). Odpovídá případu z Obr. 6 (d), kdy hmotný bod své oscilace začíná na vrcholku jednoho z peaků. Tato křivka je hraniční křivkou pro všechny oscilace. Trajektorie s počátečními podmínkami uvnitř jsou uzavřené křivky, naopak ty, které začínají vně hraniční křivky, jsou přitahovány do nekonečna. Je zřejmé, že u tlumeného případu už žádný heteroclinic orbit není.

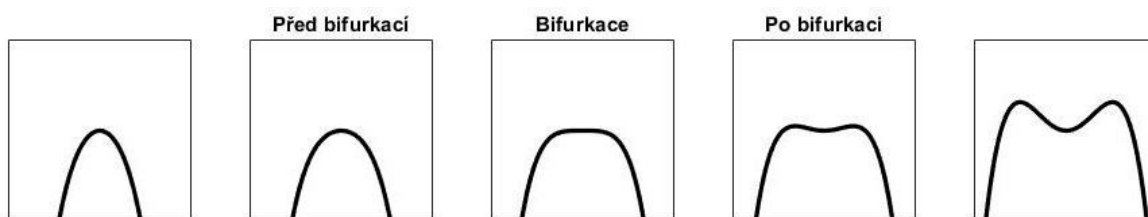
2.1.7. Změny fázových portrétů

Bifurkace obecně je výrazná změna chování systému při malé změně tzv. řídicího parametru. Jedna z takových bifurkací je *pitchfork bifurkace* (pitchfork = vidle, podle tvaru bifurkačního

diagramu), při které dojde ke změně stability rovnovážného bodu za současného vzniku dvojice nových rovnovážných bodů. Obr. 14 a Obr. 15 to schematicky znázorňují.



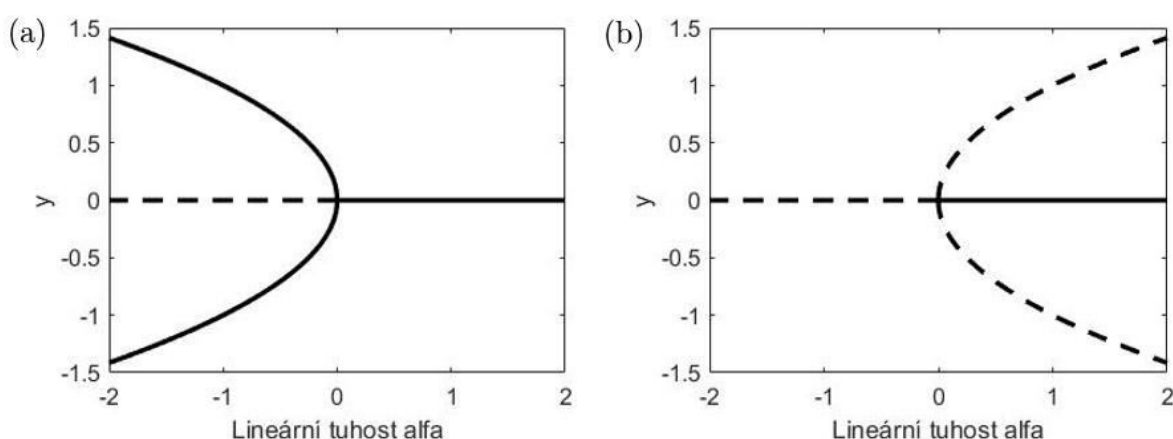
Obr. 14 Schéma tvorby dvou stabilních rovnovážných bodů.



Obr. 15 Schéma tvorby dvou nestabilních rovnovážných bodů.

Obr. 16 ukazuje bifurkační diagramy pro pitchfork bifurkace Duffingova oscilátoru. Na vodorovné ose se vyznačuje hodnota řídicího parametru, na svislé ose pak souřadnice y rovnovážných bodů. Plná čára značí existenci stabilního bodu, čárkovaná nestabilního sedlového bodu. Dvojice křivek se řídí vztahem pro polohu bodů $y = \pm\sqrt{-\alpha/\gamma}$, kde γ je konstantní.

V Duffingově systému k této bifurkaci dochází při změně znaménka lineárního tlumení z kladného na záporné při kladné kubické tuhosti, viz Obr. 16 (a). Nově vzniklé (netriviální) rovnovážné body se nacházejí na souřadnicích $(0, \pm\sqrt{-\alpha/\gamma})$. Triviální rovnovážný bod v počátku ztrácí stabilitu. Je to vlastně proces, kdy se fázový portrét (b) mění na (a).



Obr. 16 Bifurkační diagramy pitchfork bifurkací.

Podobný proces nastane při změně znaménka lineární tuhosti ze záporného na kladné, ale tentokrát při záporné kubické tuhosti, viz Obr. 16 (b). Fázový portrét (c) se mění na (d).

Z původně nestabilního sedla se stává stabilní ohnisko a objevuje se dvojice dalších sedel, které tvoří zmíněnou hranici pro oscilace.

2.2 Buzený Duffingův oscilátor

2.2.1. Energetické řešení

V tomto případě už analýza systému z energetického hlediska nedává žádné využitelné závěry. Využitím stejného přístupu jako v kapitole 2 můžeme pouze říct, že rychlost změny energie už nemá v čase konstantní znaménko.

$$\dot{E} = \frac{dE(t)}{dt} = -\beta\dot{y}^2 + \dot{y}F\cos(\omega t) \quad (15)$$

Člen tlumení stále zajišťuje disipaci energie, k němu se už ale přičítá periodický člen energie od budící síly. Většinou tak dochází k oscilacím energie, v některých chvílích je energie systému dodávána a v jiných zase odebírána.

Z Rovnice (15) je zřejmé, že energie by zůstávala konstantní v rovnovážných bodech ($\dot{y} = 0$), které ovšem u buzeného oscilátoru nikdy nemohou vzniknout. To lze jednoduše ověřit, pro rovnovážné body z definice platí

$$-\alpha y - \gamma y^3 + F\cos(\omega t) = 0 \quad (16)$$

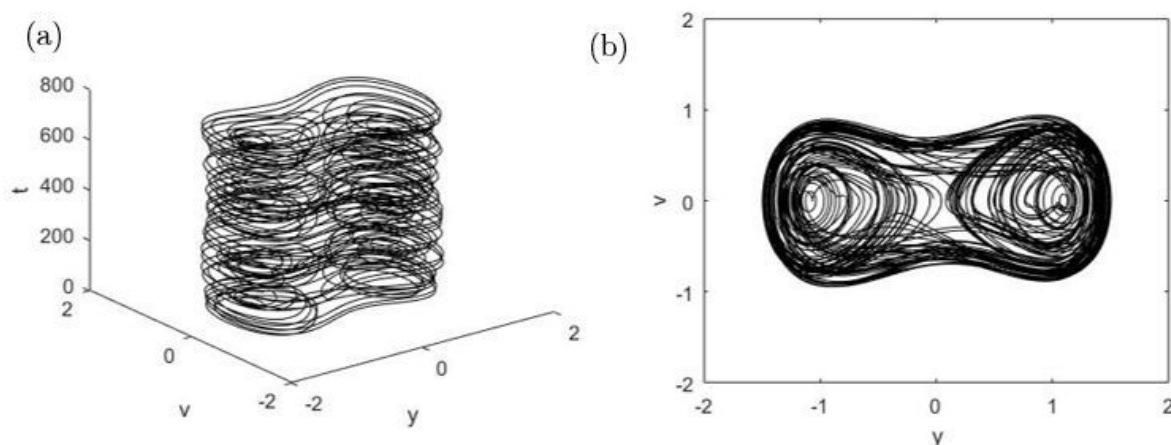
Rovnice (16) nemá žádná časově nezávislá řešení, takže neexistují rovnovážné body. Oscilátor tedy nebude nikdy v klidu. Namísto toho bude chování systému směřovat buď k limitnímu cyklu (periodické kmity), nebo k chaotickému atraktoru (navenek chaotické chování).

Buzený systém lze chápat dvěma způsoby. Jedná se buď o systém ve dvou dimenzích, který je neautonomní, protože rovnice popisující jeho vývoj závisí explicitně na nezávislé proměnné t , nebo jej lze chápat jako třídimenzionální autonomní systém, přičemž novou dimenzí je právě čas t . Protože čas plyne s konstantní rychlostí, souřadnice t trajektorií roste lineárně. Hovoříme o třech dimenzích stavového prostoru, matematického aparátu, používaného pro popis jednodimenzionálního kmitání (pouze souřadnice y).

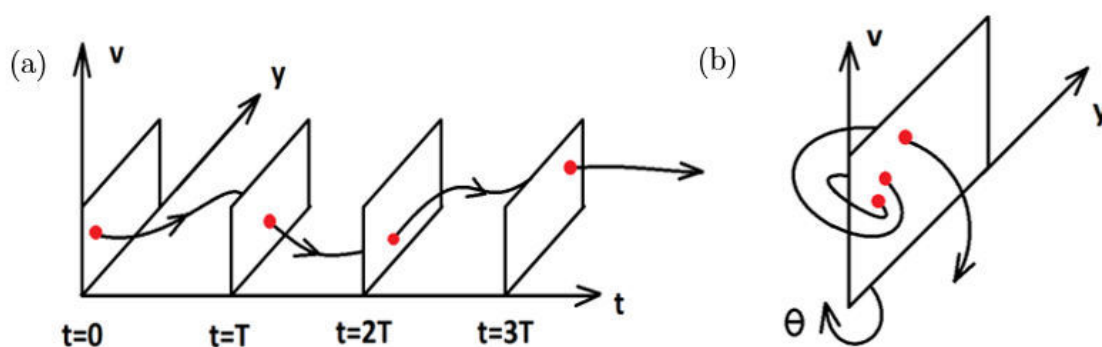
2.2.2. Možná zobrazení

Základní fázový prostor je prostor $\mathbb{R}^3$, stav systému lze tedy popsat trojicí bodů v kartézském souřadném systému (y, v, t) . Na Obr. 17 (a) je ukázka trajektorie dvoupotenciálového oscilátoru v takovém fázovém prostoru. Odpovídající soustava je ve tvaru:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= v \\ \dot{v} &= -\beta v - \alpha y - \gamma y^3 + F\cos(\omega t) \\ \dot{t} &= 1 \end{aligned} \quad (17)$$



Obr. 17 Základní fázový prostor (a) a projekce do roviny yv (b) systému, který vykazuje chaotické chování ($\beta = 0.2$; $\gamma = 1$; $F = 0.3$; $\alpha = -1$; $\omega = 1$).



Obr. 18 Základní myšlenka Poincarého řezů (a), transformace do válcových souřadnic (b).

Tento fázový prostor ovšem není pro analýzu vhodný, protože prostorový graf je nepřehledný. Častější je projekce trajektorie do roviny (y, v) .

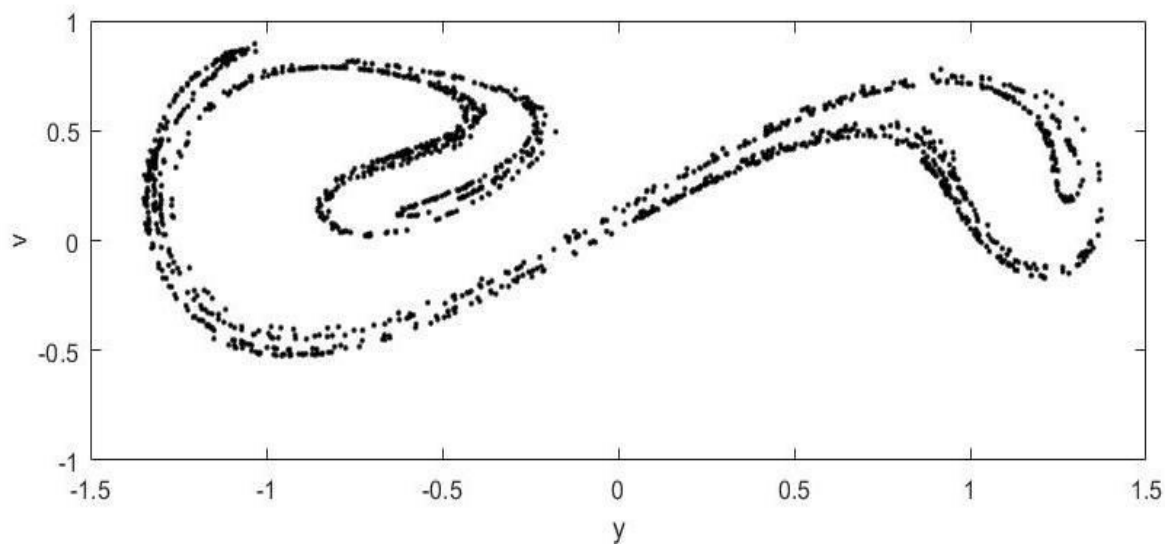
Komplikovanost a nepřehlednost ale nezmizí. Nutno podotknout, že se jedná pouze o jednu trajektorii, zdánlivé křížení čar je způsobeno projekcí. Můžeme pouze říct, že trajektorie vypadá chaoticky, ale chaotický atraktor v ní nelze poznat. Pro takovéto systémy, jejichž chování se nikdy neustálí, je vhodnější použít zobrazení v *Poincarého řezech* (*Poincaré section* nebo také *first return map*). Základní myšlenka je načrtnuta na Obr. 18 (a).

Zajímáme se pouze o stav systému (červené tečky) v určitých časech, které odpovídají násobkům periody T buzení.

Protože je buzení periodické, lze jako třetí dimenzi brát fázi buzení. Stav systému pak bude popsán bodem v cylindrickém souřadném systému (y, v, θ) . Schematické znázornění je na Obr. 18 (b). Alternativní představa je taková, že z trajektorie ponecháme pouze body v časech násobků periody buzení.

Tomuto cylindrickému fázovému prostoru $(\mathbb{R}^2 \times S^1)$ odpovídá soustava

$$\begin{aligned}
 \dot{y} &= v \\
 \dot{v} &= -\beta v - \alpha y - \gamma y^3 + F \cos \theta \\
 \dot{\theta} &= \omega
 \end{aligned}
 \tag{18}$$



Obr. 19 Zobrazení chaotického oscilátoru v Poincarého řezech.

Na Obr. 19 je zobrazena trajektorie z Obr. 17 (b) v Poincarého řezech. Tvar chaotického atraktoru v tomto zobrazení je zřejmý.

3 Analýza chování nebuzeného dvojpotenciálového oscilátoru

Tato a následující kapitola jsou zaměřeny na numerické řešení Duffingovy rovnice se zápornou lineární tuhostí, která modeluje oscilace hmotného bodu v dvojpotenciálové jámě. Vliv parametrů Duffingovy rovnice na chování nebuzeného systému je ukázán v této kapitole.

3.1 Numerické řešení

Přepisem Duffingovy diferenciální rovnice druhého řádu do soustavy dvou rovnic prvního řádu získáme

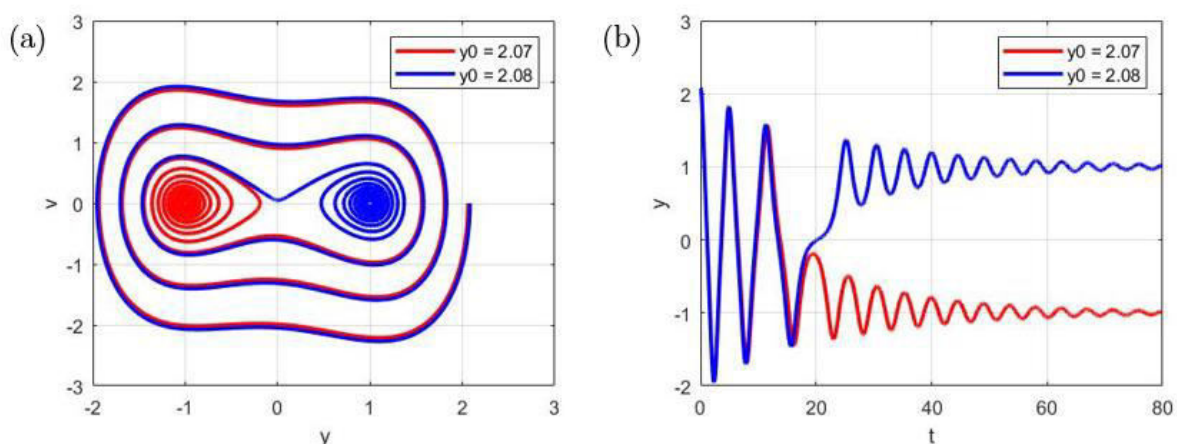
$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\alpha y_1 - \gamma y_1^3 - \beta y_2\end{aligned}\tag{19}$$

Rovnice (19) jsou použitelné pro všechny typy Duffingovy rovnice, záleží jen na hodnotách parametrů tuhosti. Bližší analýza byla prováděna na dvojpotenciálovém oscilátoru, tedy $\alpha < 0, \gamma > 0$.

Řešení soustavy diferenciálních rovnic a vykreslení grafů bylo prováděno v prostředí Matlab. Nejedná se o tuhou soustavu, protože vývoj systému je poměrně plynulý a trajektorie neobsahuje žádné "ostré rohy". Proto byl jako řešič vybrán standardní "ode45", který je založen na metodě Runge-Kutta čtvrtého řádu (RK4). Časový krok $h = 0,01$ se ve většině případů ukázal jako dostačující ke konvergenci řešení.

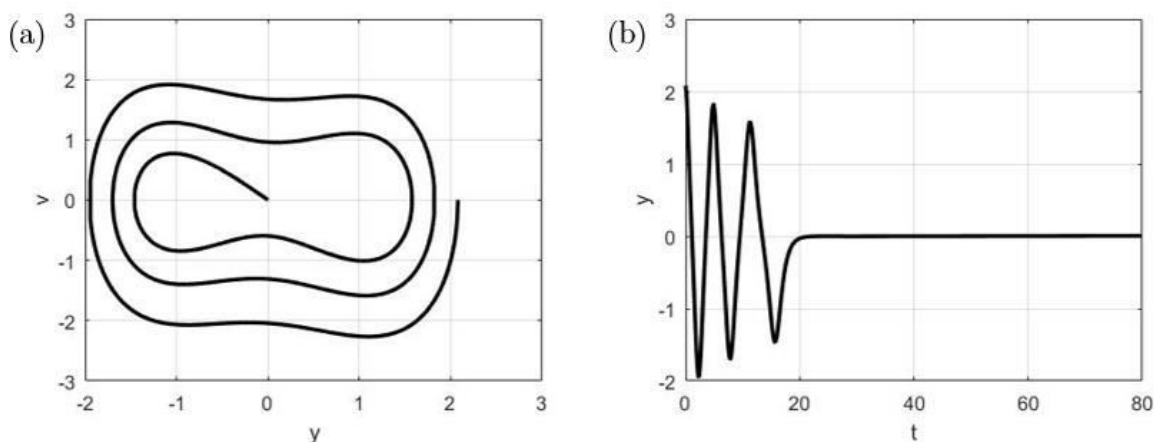
3.2 Oblasti přitažlivosti

Dvojpotenciálový systém má, jak bylo ukázáno v kapitole 2.1.2, sedlový bod v počátku a dva stabilní rovnovážné body nalevo a napravo od něj. Každý z těchto stabilních rovnovážných bodů lze považovat za atraktor, protože představuje ustálené chování systému a zároveň existuje oblast fázové roviny (oblast počátečních podmínek), ze které jsou všechny trajektorie do něj přitahovány. Taková oblast se nazývá oblast přitažlivosti (*basin of attraction*). Nepatrná změna počátečních podmínek poblíž hranice mezi oblastmi přitažlivosti může znamenat přeskočení do oblasti přitažlivosti druhého atraktoru a tedy kvalitativně jiný vývoj systému. To dokazuje Obr. 20.



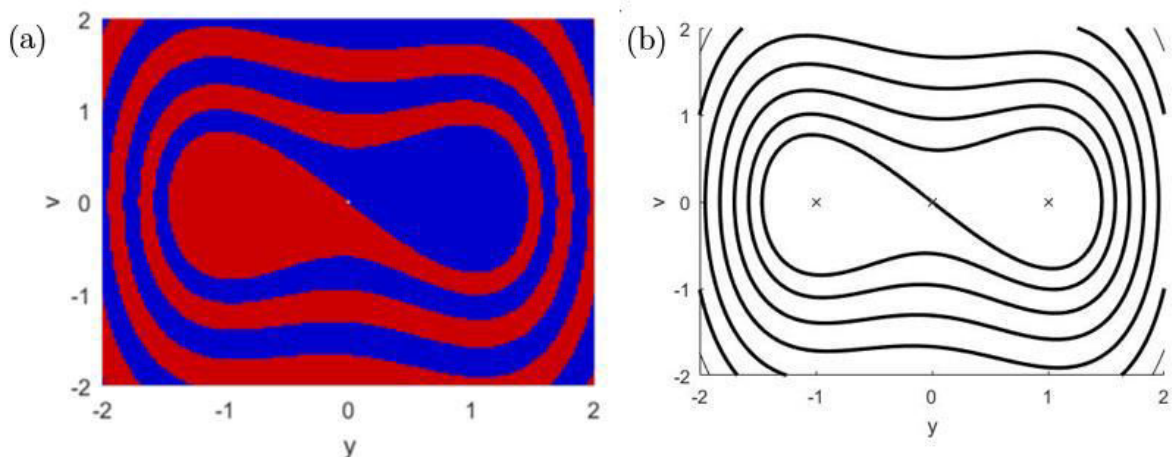
Obr. 20 Malá změna počátečních podmínek způsobí přechod do oblasti přitažlivosti jiného atraktoru.

Hranice jednotlivých oblastí přitažlivosti se nazývá separatrix. Ten je tvořen stabilními trajektoriemi sedla. Pokud by totiž systém měl počáteční podmínky takové, aby jeho trajektorie směřovala přímo do sedla (Obr. 21), dále už se nijak vyvíjet nebude, protože sedlo je také (i když nestabilní) rovnovážný bod. Tento případ ale reálně nikdy nenastane. Každá stabilní trajektorie sedla Γ^s tedy vytváří polovinu separatrixu.



Obr. 21 Trajektorie směřující do sedla vytváří polovinu hranice oblastí přitažlivosti (separatrix).

Pro numerické vykreslení separatrixu lze použít zpětnou integraci nebo záporné tlumení pro počáteční podmínky velmi blízko sedla. Pro vykreslení oblastí přitažlivosti je nutno vytvořit síť počátečních podmínek a sledovat ustálené chování každého z bodů sítě. Pokud se oscilace ustálí v levém (pravém) atraktoru, stačí označit dané počáteční podmínky červeně (modře).



Obr. 22 Simulace oblastí přitažlivosti (a) a obě stabilní trajektorie sedla vytvářející separatrix (b), $\alpha=-1$, $\gamma=1$, $\beta=0.1$.

3.3 Vliv hmotnosti

Pokud modelujeme kmitání, popsané rovnicí $m\ddot{y} + \beta_m\dot{y} + \alpha_my + \gamma_my^3 = 0$, je vždy výhodnější uvažovat ekvivalentní systém s jednotkovou hmotností:

$$\ddot{y} + \frac{\beta_m}{m}\dot{y} + \frac{\alpha_m}{m}y + \frac{\gamma_m}{m}y^3 = \ddot{y} + \beta\dot{y} + \alpha y + \gamma y^3 = 0 \quad (20)$$

Zvýšení hmotnosti je ekvivalentní se snížením tlumení a tuhostí.

3.4 Vliv tlumení

3.4.1. Lineární tlumení

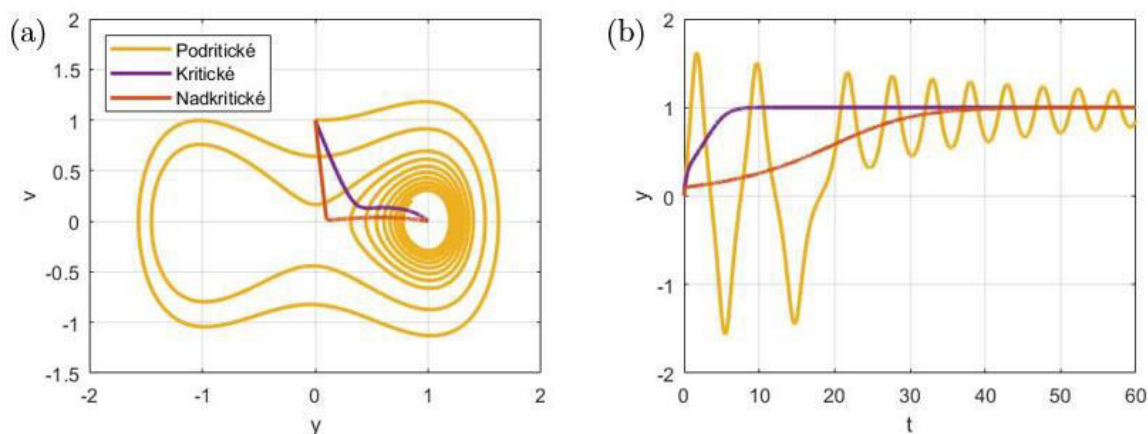
Základním modelem tlumení je viskozní (lineární) tlumení. Pokud se hovoří o tlumené Duffingově rovnici, myslí se právě tento tvar, kde síla od tlumení je lineárně závislá na rychlosti:

$$F_{d1} = 2\zeta\dot{y} = \beta\dot{y} \quad (21)$$

Velikost tlumení souvisí s charakterem rovnovážných bodů. V případě malého tlumení $\beta < \beta_{kr}$ jsou vlastní čísla záporná komplexně sdružená, rovnovážné body jsou ohniska a jedná se o běžné oscilace. U nadkritického tlumení $\beta > \beta_{kr}$ jsou vlastní čísla reálná záporná, jedná se o uzel a systém neosciluje. Ve fázové rovině je pro nadkritické tlumení charakteristický okamžitý pokles na nulovou rychlost. β_{kr} tedy tvoří hranici pro oscilace. Systém s kritickým tlumením se nejrychleji dostane do rovnovážné polohy. U tohoto speciálního případu jsou rovnovážné body degenerované uzly. Na základě Obr. 9 platí pro kritické tlumení:

$$\beta_{kr} = 2\sqrt{2}\alpha \quad (22)$$

Stejná klasifikace je možná také pro záporné tlumení. Vlastní čísla rovnovážných bodů jsou kladná, může se jednat o samobuzené oscilace (*self-excited oscillations*).

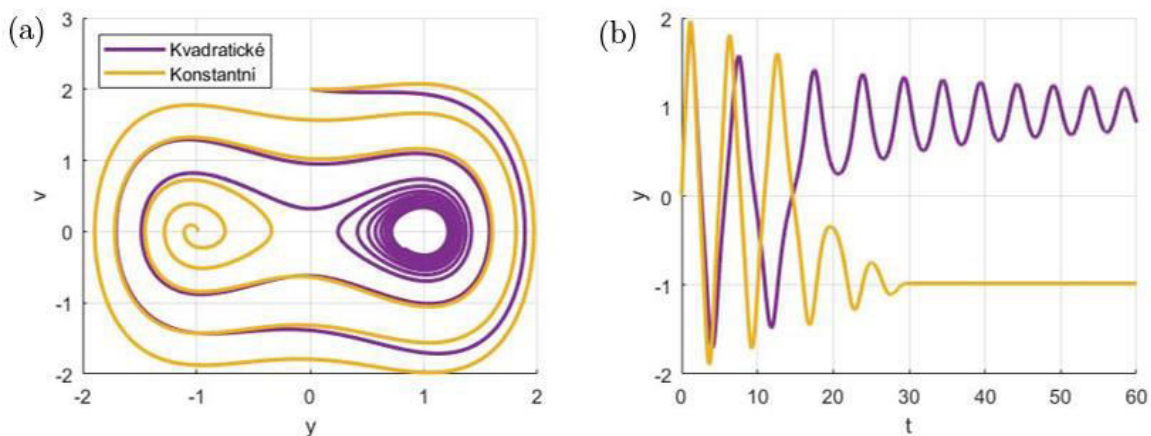


Obr. 23 Trajektorie (a) a časový vývoj (b) systémů v závislosti na velikosti tlumení.

3.4.2. Jiné modely tlumení

Standardním přístupem pro předpověď chování systémů s jiným než viskozním tlumením je využití tzv. *ekvivalentního viskozního tlumení*, při kterém se po jedné periodě disipuje stejné množství energie jako u původního systému. Existuje např. kvadratické tlumení $F_{d2} = \beta_2 \dot{y}|\dot{y}|$, které může modelovat odpor vzduchu, nebo konstantní (Coulombické) tlumení $F_{d0} = \beta_0 \text{sign}(\dot{y})$, modelující suché tření.

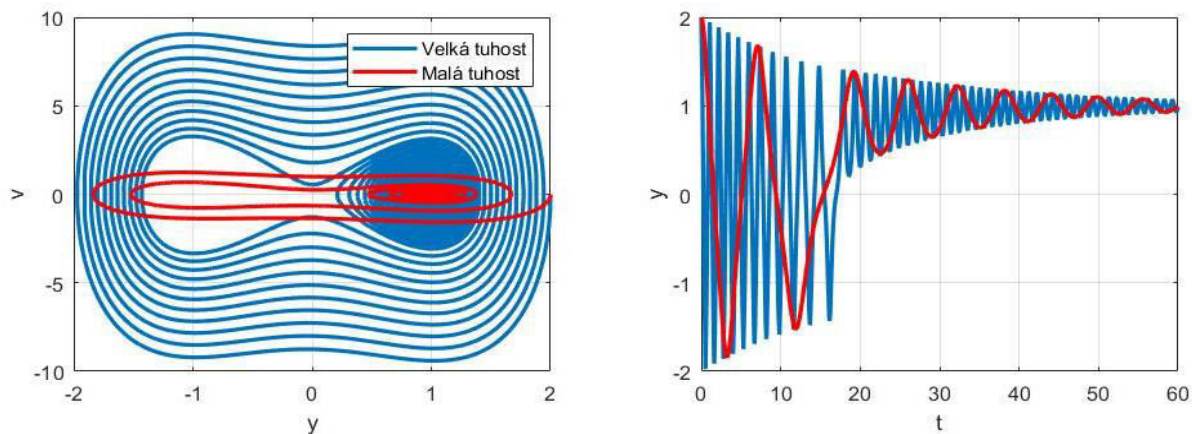
Kvadratické tlumení je nejsilnější na začátku pro největší rychlosti. Konstantní naopak nejvíce tlumí při malých rychlostech, největší vliv má na finální dotlumení oscilací.



Obr. 24 Kvadratické a konstantní tlumení.

3.5 Tuhost systému

Poloha rovnovážných bodů v závislosti na míře nelinearity (poměru α/γ) byla analyzována v kapitole 2.1.2. Pokud tento poměr necháme konstantní a budeme měnit obě tuhosti zároveň, bude se měnit celková tuhost systému. Vyšší tuhost znamená větší frekvenci oscilací, jak je patrné z Obr. 25.



Obr. 25 Podobné chování systémů se stejným poměrem tuhostí. Modrá $\alpha=-20$, $\gamma=20$, $\beta=0.1$; červená $\alpha=-0.6$, $\gamma=0.6$, $\beta=0.1$.

Systém s vyšší tuhostí (modrý) osciluje při vyšších rychlostech. To je patrné z tvaru trajektorie ve fázové rovině. Protože jsou ale ostatní parametry (hmotnost a tlumení) stejné, chovají se systémy podobně. Oba přejdou na oscilace uvnitř jámy v podobném čase. Amplituda oscilací v určitém čase je taktéž podobná. Může však dojít k pádu do druhé potenciálové jámy.

4 Analýza chování buzeného dvojpotenciálového oscilátoru

Numerické řešení nastíněné v kapitole 3 je využito také pro analýzu chování buzeného oscilátoru. Na začátku jsou uvedeny koexistující atraktory (ustálená chování) systému a jejich bifurkace. Numerické simulace v Matlabu je také použito pro sestavení bifurkačního diagramu buzeného Duffingova oscilátoru. Simulace sítě počátečních podmínek pak slouží pro vykreslení možných fázových diagramů (oblastí přitažlivosti atraktorů).

4.1 Numerické řešení

Rovnice (19) je doplněna o budicí člen

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\alpha y_1 - \gamma y_1^3 - \beta y_2 + F \cos(\omega t)\end{aligned}\tag{23}$$

Řešení je prováděno stejně jako pro nebuzenou verzi. Pro správné zobrazení Poincarého bodů je důležité, aby časový krok byl synchronizován s buzením. Protože pro periodu buzení platí $T = 2\pi/\omega$, stačí pro interval zobrazovaných bodů zvolit časový krok $h \equiv T$. Tyto body pak odpovídají bodům v Poincarého řezech, viz kapitola 2.2.2.

4.2 Atraktory buzeného systému

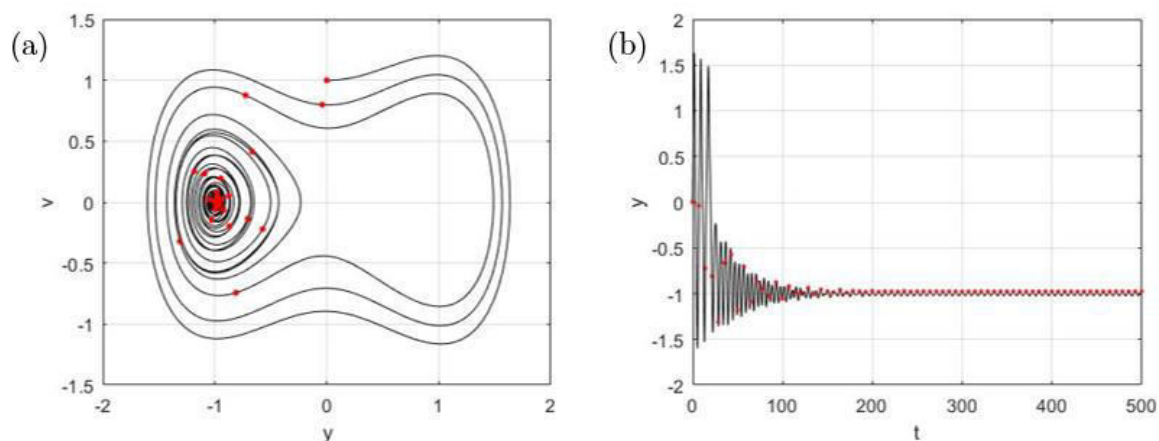
Jak bylo ukázáno v kapitole 2.2.2, rovnovážné body neexistují. Vývoj systému v čase směřuje k jiným atraktorům. O ustáleném periodickém kmitání hovoříme, pokud atraktorem je limitní cyklus. Pokud perioda kmitání je totožná s periodou buzení, hovoříme o *T-periodickém* kmitání. To se v Poincarého řezech bude zobrazovat jako bod. Ustálené kmitání může být také *nT-periodické*, které se zobrazí jako *n* bodů. Pro Duffingův systém je například charakteristický malý interval parametrů, při kterém je ustálené kmitání *5T-periodické*. Toto chování je však atypické a vzácné, nebude dále analyzováno, pro více informací viz [6].

Atraktorem může také být *chaotický (podivný) atraktor*. Pak kmitání není periodické, nikdy se neustálí. Poincarého body se nikdy nezobrazí samy na sebe, ale vytvoří ve fázové rovině fraktální strukturu. Z teoremu Poincaré-Bendixsona [6] vyplývá, že chaotické chování nemůže vykazovat dvoudimenzionální systém. Buzení (přidání třetí dimenze) je tedy pro vznik chaosu nutná podmínka.

Duffingův dvojpotenciálový oscilátor vykazuje tři *T-periodické* a jeden *chaotický* atraktor, přičemž nikdy neexistují všechny současně. O existenci rozhodují parametry oscilátoru (F , ω , β , α a γ). Počáteční podmínky pak určují, ke kterému z koexistujících atraktorů bude systém směřovat.

4.2.1. Nerezonanční atraktor S_n

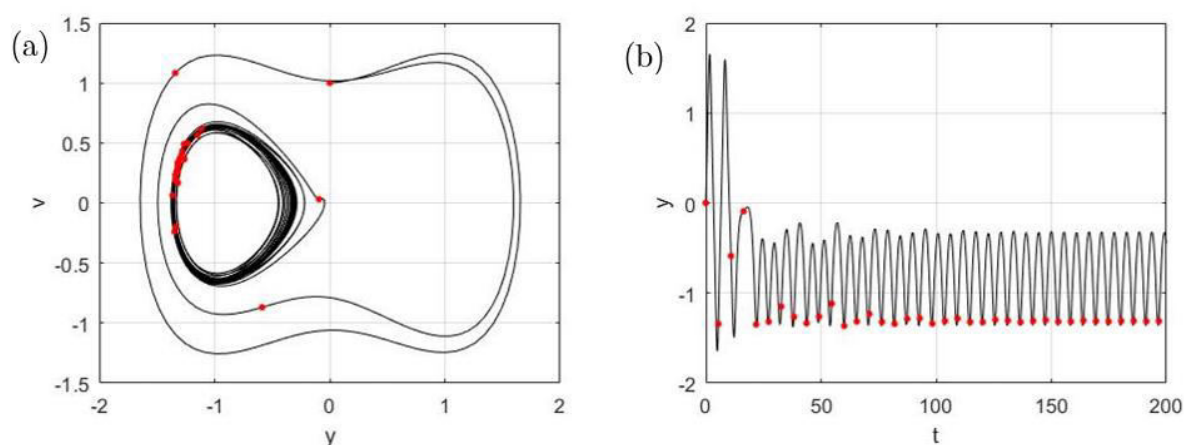
Je charakterizován malou amplitudou. Přechod do ustáleného kmitání je pozvolný, ale poměrně dlouhý. Tyto atraktory se objevují ve dvojicích, každá potenciálová jáma má jeden nerezonanční atraktor, značí se S'_n a S''_n .



Obr. 26 Přechodné kmitání směřující k nerezonančnímu atraktoru. Zobrazení ve fázové rovině (a) a časový vývoj (b). Červeně jsou zobrazeny Poincarého body.

4.2.2. Rezonanční S_r

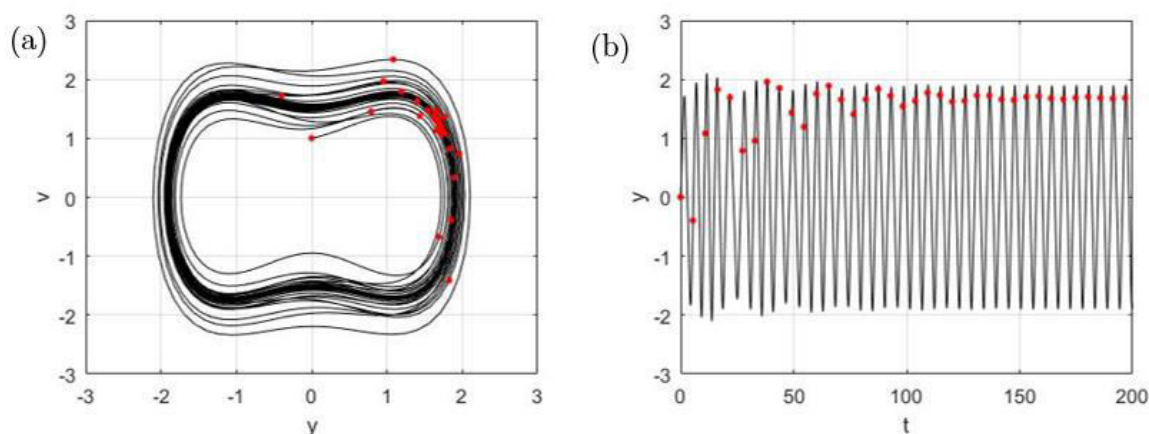
Rezonanční oscilace jsou mnohem větší, přechodné kmitání netrvá dlouho, systém se poměrně rychle ustálí. Pokud má systém tento atraktor S'_r , má také v druhé jámě odpovídající atraktor S''_r .



Obr. 27 Přechodné kmitání směřující k rezonančnímu atraktoru. Fázová rovina (a) a časový vývoj (b).

4.2.3. Velký S_L

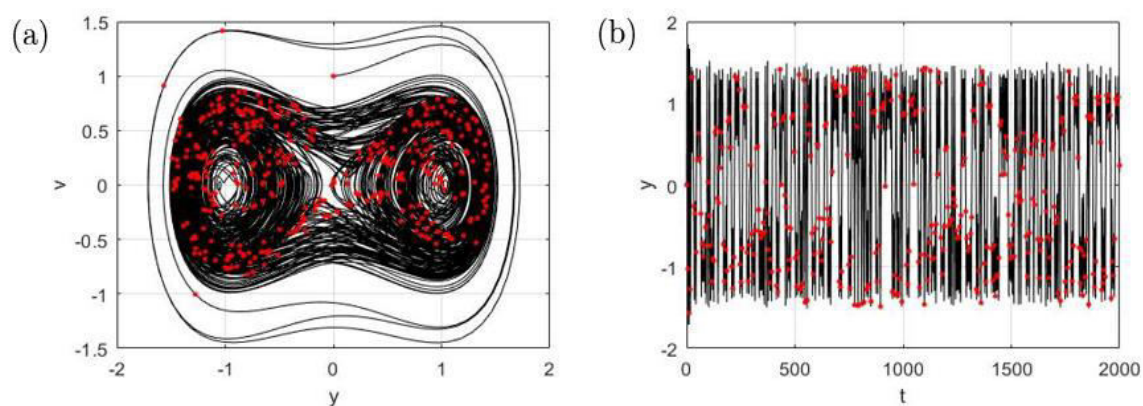
Systém osciluje na velké amplitudě přes obě potenciálové jámy s periodou T . Nemá žádný symetrický ekvivalent. Přechodné kmitání je taktéž poměrně krátké.



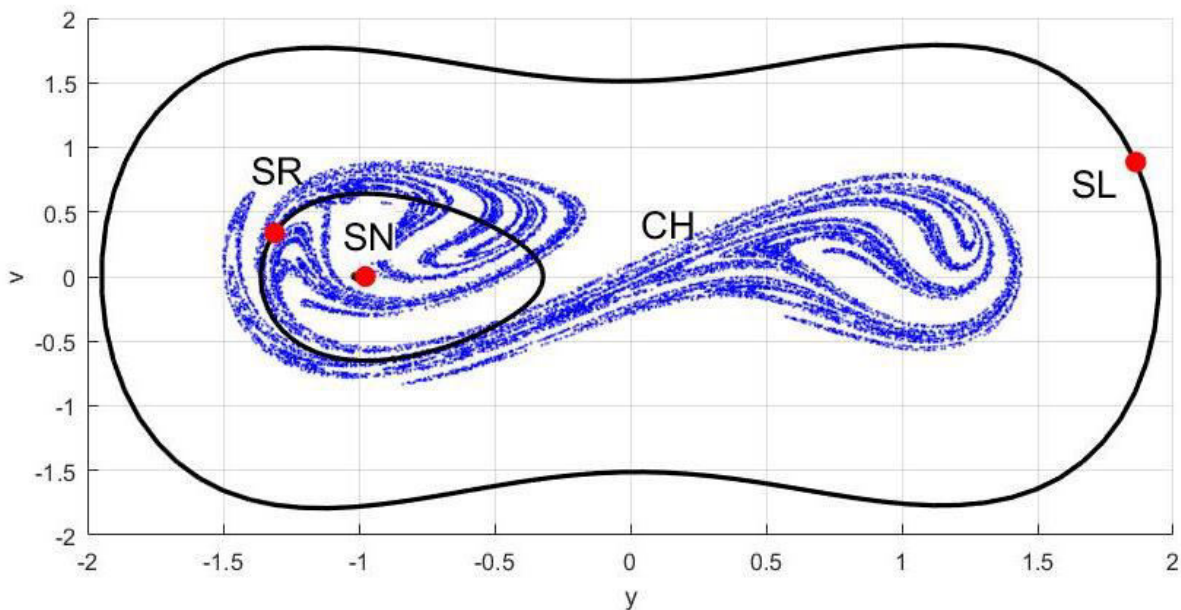
Obr. 28 Přechodné kmitání směřující k velkému atraktoru. Zobrazení ve fázové rovině (a) a časový vývoj (b).

4.2.4. Chaotický atraktor CH

Na první pohled náhodná trajektorie s náhodně umístěnými Poincareho body. Ve skutečnosti se ale po krátkém tranzitním chování systém ustálí na chaotickém atraktoru. Pokud budeme sledovat systém dostatečně dlouho, vykreslí Poincareho body jeho fraktální strukturu, viz Obr. 19.



Obr. 29 Kmitání na chaotickém atraktoru. Zobrazení ve fázové rovině (a) a časový vývoj (b).



Obr. 30 Koexistující periodické atraktory se svými Poincarého body (červeně) a chaotický atraktor (modře)

4.3 Bifurkace buzeného systému

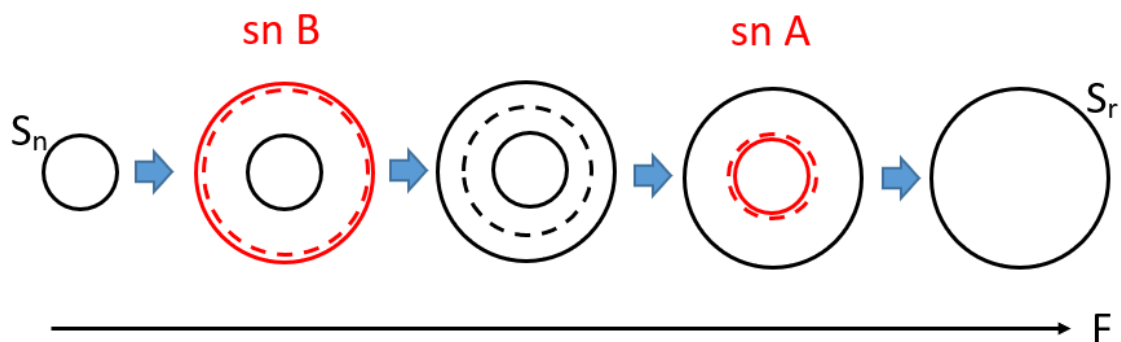
Jak již bylo ukázáno v kapitole 2.1.7, lokální bifurkace se zabývají vznikem/zánikem a změnou stability rovnovážných bodů při změně řídicího parametru. Kromě zmíněné pitchfork bifurkace vykazuje Duffingův systém ještě lokální bifurkace *sedlo-uzel* a *dvojení periody*.

Globální bifurkace popisují vznik/zánik větších atraktorů, tedy periodických orbitů nebo chaotických atraktorů. Oproti bifurkacím lokálním ovlivňují chování trajektorií v celé fázové rovině. Bifurkace chaotického atraktoru se často označují jako *crisis*, u Duffingova oscilátoru jsou to *boundary crisis* a *symmetry breaking crisis*. Tyto bifurkace opět nemají české ekvivalenty.

4.3.1. Sedlo-uzel (saddle-node)

Sedlo-uzel je základní bifurkace, která stojí za víceznačností řešení. Je to okamžik, kdy nějaké z řešení zaniká nebo vzniká, podle směru změny řídicího parametru. V jedné nebo dvou dimenzích se jedná o vytvoření páru pevných bodů, jednoho stabilního (uzel) a jednoho nestabilního (sedlo). Ve třech dimenzích vzniká stabilní a nestabilní periodický orbit. Zánik řešení pak může být chápán jako kolize uzlu a sedla nebo stabilního a nestabilního periodického řešení. V Duffingově systému je řídicím parametrem síla buzení F . Při bifurkaci $sn\ B$ dochází ke vzniku rezonančního řešení S_r a nestabilního řešení D . To se pak dále vyvíjí, až při $sn\ A$ dojde ke kolizi s původním nerezonančním řešením S_n , které zaniká. Pro hodnoty sil mezi bifurkacemi tedy existují tři periodická řešení, dvě stabilní a jedno nestabilní. To, na kterém řešení bude systém oscilovat, záleží na počátečních podmínkách.

K bifurkacím $sn\ B$ a $sn\ A$ dochází při relativně malé hodnotě síly, proto pro tyto bifurkace existuje analytická předpověď. Vychází z amplitudo-frekvenční charakteristiky Duffingova oscilátoru pro malé tlumení β a buzení F [6].

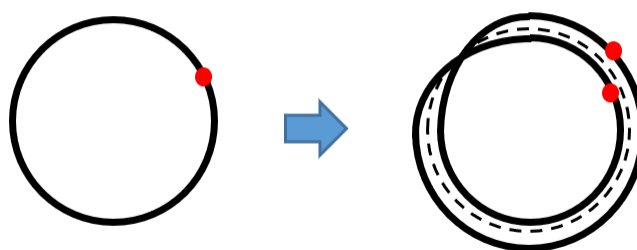


Obr. 31 Schéma bifurkací $sn A$ a $sn B$

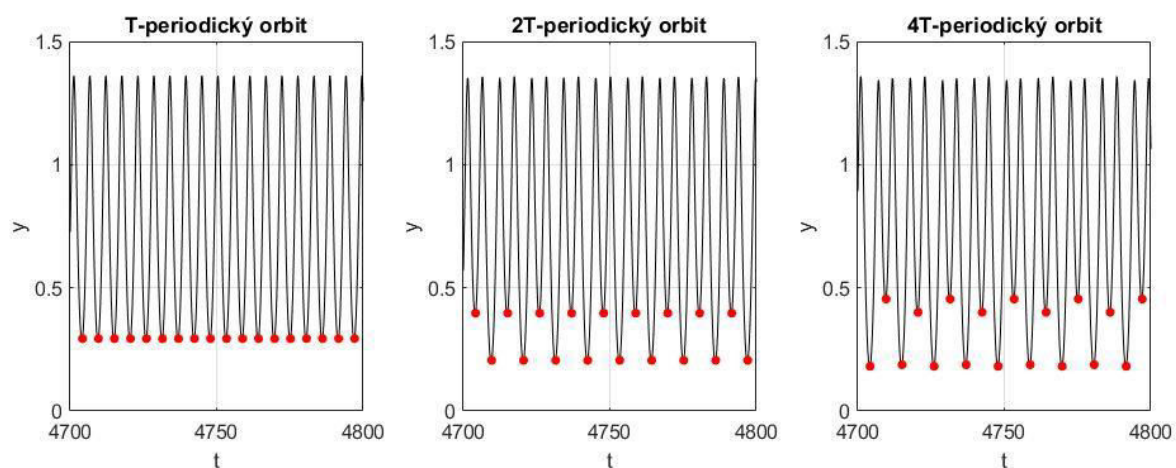
Další bifurkací je $sn B_L$, vznik velkého atraktoru S_L (tedy oscilací přes potenciálové jámy) a příslušného nestabilního cyklu D_L .

4.3.2. Dvojení periody (period doubling cascade)

Touto bifurkací zaniká rezonanční atraktor. Původní periodický orbit ztrácí svou stabilitu za současného vzniku nového orbitu s dvojnásobnou periodou.



Obr. 32 Schéma dvojení periody, červeně jsou zobrazeny Poincarého body.

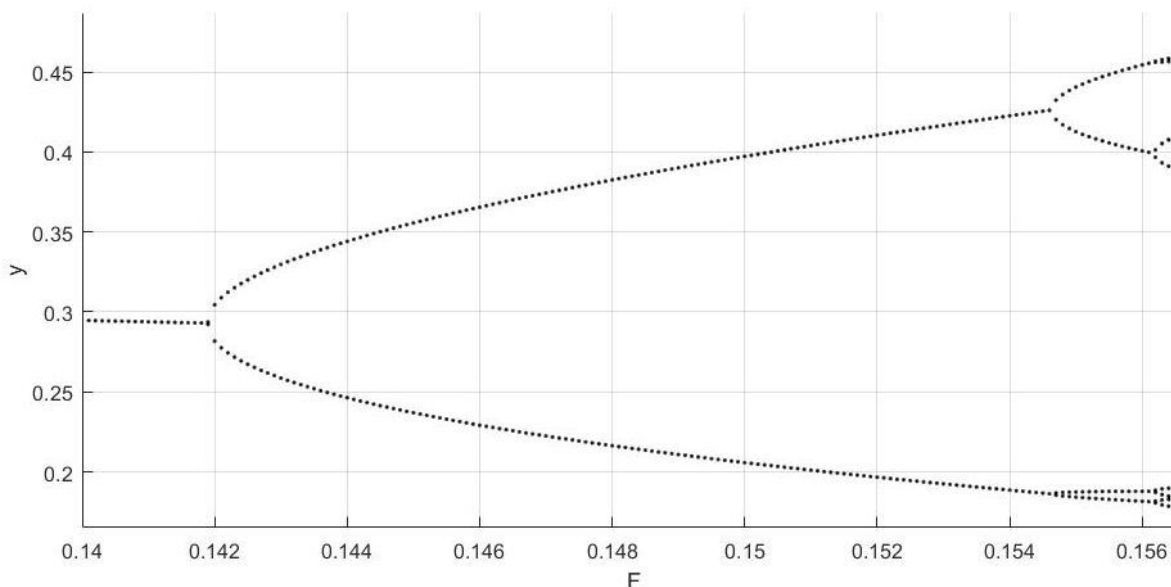


Obr. 33 Oscilace s různou periodou.

Pokud nastane jedna taková bifurkace, při dalším zvyšování síly jich nastane nekonečně mnoho. Proto se hovoří o tzv. kaskádě bifurkací. Z 2T - periodického cyklu se následně stane 4T - periodický, který sám dále bifurkuje, viz Obr. 33. Tyto bifurkace jsou stále častější.

V určitém okamžiku tak existuje cyklus s nekonečně velkou periodou, jeho chování se nikdy neopakuje. Výsek z bifurkačního diagramu pro kaskádu dvojení periody je zobrazen na Obr. 34.

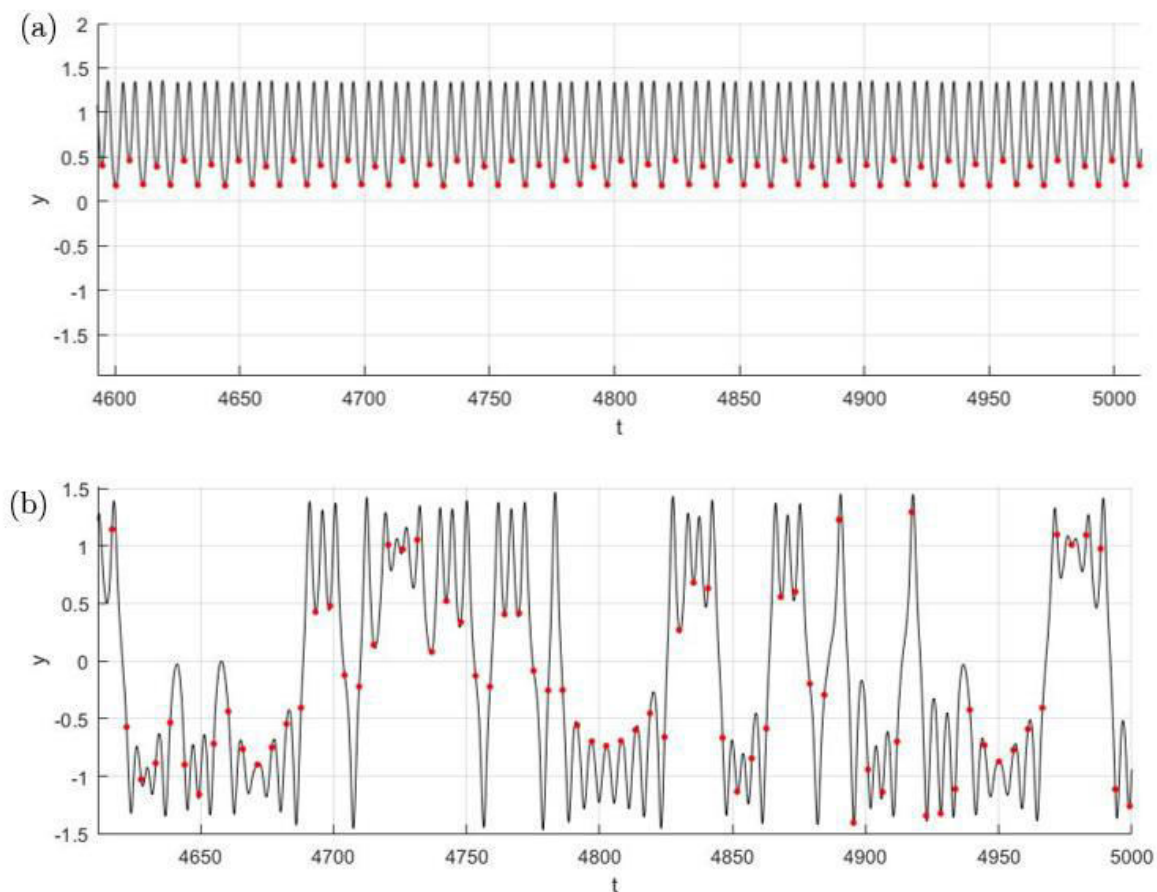
Na konci kaskády tedy existují dva (v každé potenciálové jámě jeden) malé chaotické atraktory. Ty se však nacházejí jen ve velice úzkém pásmu sil, hned po vzniku jsou nahrazeny jedním velkým chaotickým atraktorem bifurkací $cr1$.



Obr. 34 Bifurkační diagram kaskády dvojení periody v Duffingově oscilátoru.

4.3.3. Symmetry breaking crisis $cr1$

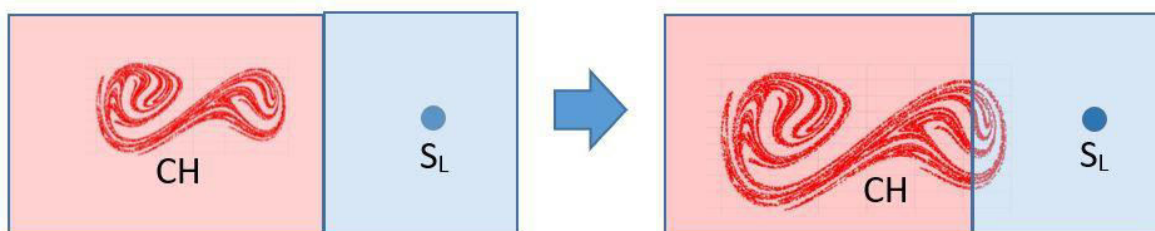
Je to okamžik, kdy se ze dvou malých chaotických atraktorů uvnitř jam stává jeden velký chaotický atraktor. Dojde totiž k dotyku hranic oblastí přitažlivosti malých atraktorů. Ty se v ten okamžik spojí. Oblast přitažlivosti velkého atraktoru je pak sjednocením oblastí malých atraktorů. Obr. 35 ukazuje typický časový vývoj systému před a po bifurkaci. Před bifurkací (a) systém osciluje chaoticky uvnitř jedné z jam, po bifurkaci (b) chvíli osciluje uvnitř jedné jámy, v nepravidelných časových intervalech však přeskakuje do jámy druhé.



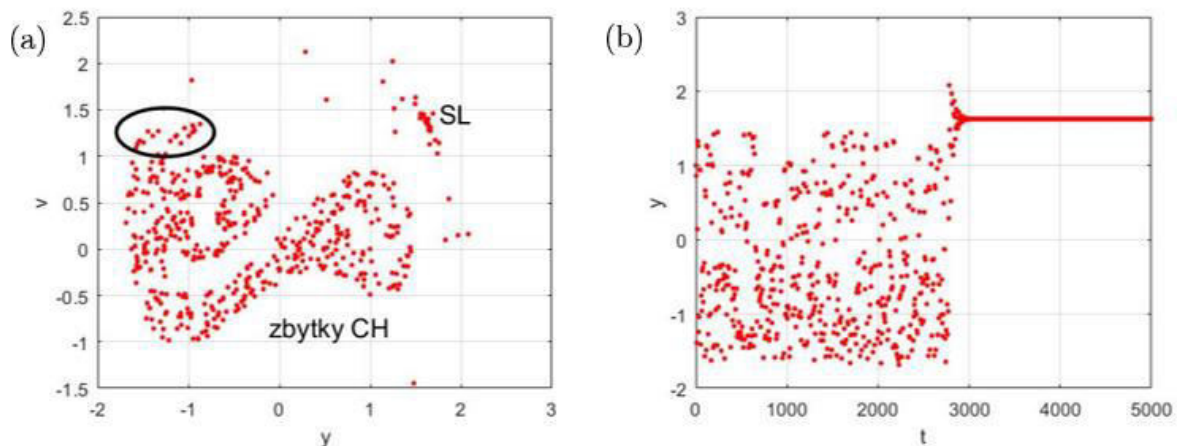
Obr. 35 Časový vývoj před (a) a po (b) "symmetry breaking" bifurkaci.

4.3.4. Boundary crisis hb D_L

Okamžitě po vzniku ($cr1$) se začíná chaotický atraktor zvětšovat. Boundary crisis nastává v okamžiku, kdy se zvětší natolik, že se dotkne své vlastní hranice oblasti přitažlivosti. Část chaotického atraktoru už pak leží v oblasti přitažlivosti jiného atraktoru (velkého S_L). To způsobí, že systém se vyvíjí podle chaotického atraktoru jenom do určité doby, než trajektorie "opustí" jeho oblast přitažlivosti a "objeví" se v oblasti přitažlivosti jiného atraktoru, ke kterému její následující vývoj směřuje.



Obr. 36 Schéma boundary crisis bifurkace.



Obr. 37 Přechodný chaos. K úniku z chaotického atraktoru došlo pravděpodobně v zakroužkované oblasti. Poincarého zobrazení (a) a časový vývoj (b).

Toto chování bývá označováno jako *přechodný chaos* (*transient chaos*) a je typické pro systémy těsně po bifurkaci, viz Obr. 37. Doba přechodového chaosu se zkracuje se vzdáleností od bifurkace (vyšším F), protože stále větší plocha CH se dostává mimo svou oblast přitažlivosti. K úniku z chaotického atraktoru tak dojde dříve.

Nutno dodat, že po bifurkaci je jediným atraktorem systému S_L , původní chaotický atraktor byl již zničen. Je zřejmé, že systém před ustálením na S_L vykazuje velmi dlouhé přechodné chování.

Popsaná bifurkace $hb D_L$ je spojena se sedlem D_L . Konkrétně se jedná o okamžik, kdy se stabilní a nestabilní trajektorie sedla spojí v jednu. Bližší popis průběhu bifurkace je uveden např. v publikaci [12]. Dále ještě existuje bifurkace $hb D_H$, kdy bifurkuje sedlo D_H .

4.4 Bifurkační diagram

V této podkapitole bude rozebrán systém s danými parametry $\beta = 0.1$; $\gamma = 1$; $\alpha = -1$; $\omega = 1.15$. Hodnoty parametrů jsou takto zvoleny záměrně, aby systém vykazoval nejširší možné spektrum chování. Přítomnost atraktorů tedy bude analyzována v závislosti na síle F . Bifurkační diagramy buzených systémů nezobrazují rovnovážné body (protože neexistují), ale Poincarého body ustáleného kmitání.

Bifurkační diagram se vytváří pomocí intervalu sil, kdy se ke každé hodnotě F zobrazí všechny Poincarého body ustáleného kmitání. T-periodické kmity tak budou zobrazeny jako jeden bod, nT -periodické jako n bodů a chaotický atraktor jako mnoho různých bodů.

4.4.1. Oblasti existence atraktorů

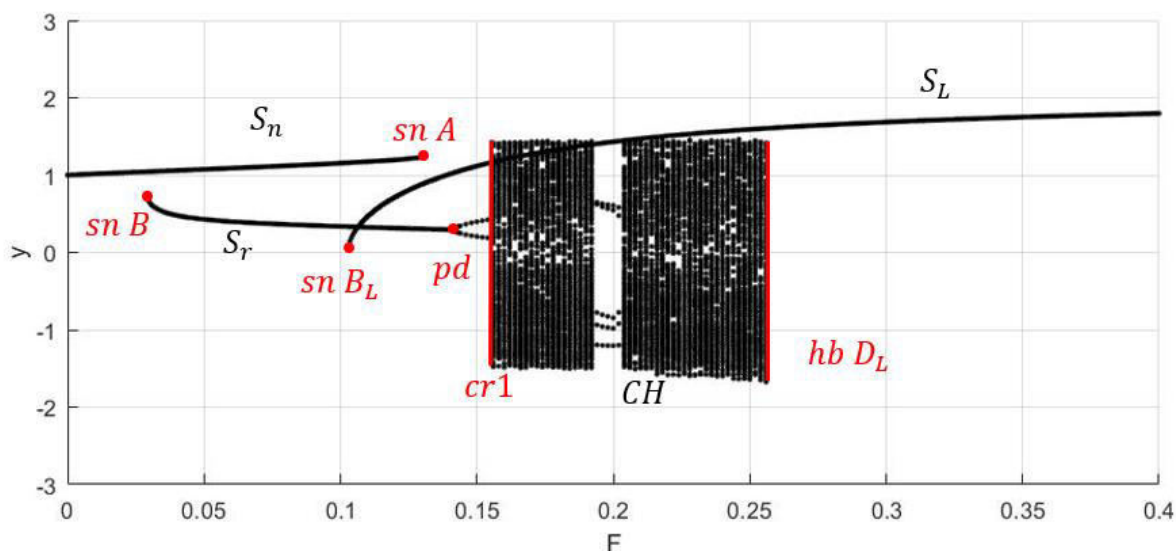
I pro velmi malou sílu existuje malý nerezonanční atraktor Sn . Pro $F = 0$ je totožný s netriviálním rovnovážným bodem nebuzeného systému, proto křivka začíná na $y = 1$. Zaniká bifurkací sedlo-uzel $sn A$ při $F \cong 0.131$. Ekvivalentní atraktor v druhém sedle není zobrazen.

Rezonanční atraktor vzniká bifurkací $sn B$ pro $F \cong 0.028$ a dvojením periody pd pro $F \cong 0.145$ přechází do chaotického atraktoru. Bifurkační diagram může být zavádějící v tom

smyslu, že rezonanční oscilace se nacházejí pod nerezonančními. Je to způsobeno tím, že se nezobrazuje amplituda, ale poloha Poincarého bodů. Rezananční oscilace jsou ve skutečnosti větší, viz Obr. 30.

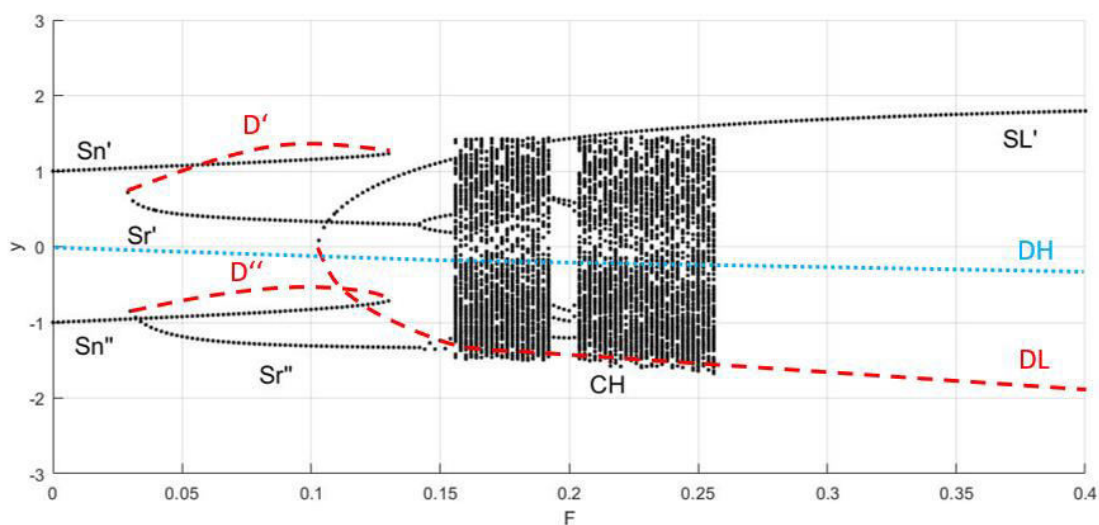
Velký (cross-well) atraktor vzniká bifurkací $sn B_L$ pro $F \cong 0.101$ a jako jediný existuje i pro vysoké hodnoty síly F .

Chaotický atraktor CH vzniká globální bifurkací $cr1$ pro $F \cong 0.157$ a zaniká další globální bifurkací $hb D_L$ pro $F \cong 0.2575$. Obsahuje také periodické okno s periodou $5T$.



Obr. 38 Bifurkační diagram Duffingova oscilátoru.

Obr. 39 je doplněn o atraktory v druhé jámě (S_n'', S_r''). Dále pak o sedla existující mezi bifurkacemi $sn A$ a $sn B$, tedy D', D'' . Sedlo D_L přísluší velkému atraktoru S_L . Modře je znázorněna přibližná poloha základního sedla D_H (hilltop neboli vrcholové), které u nebuzeňého systému leželo na souřadnicích $(0, 0)$, viz např. Obr. 11.



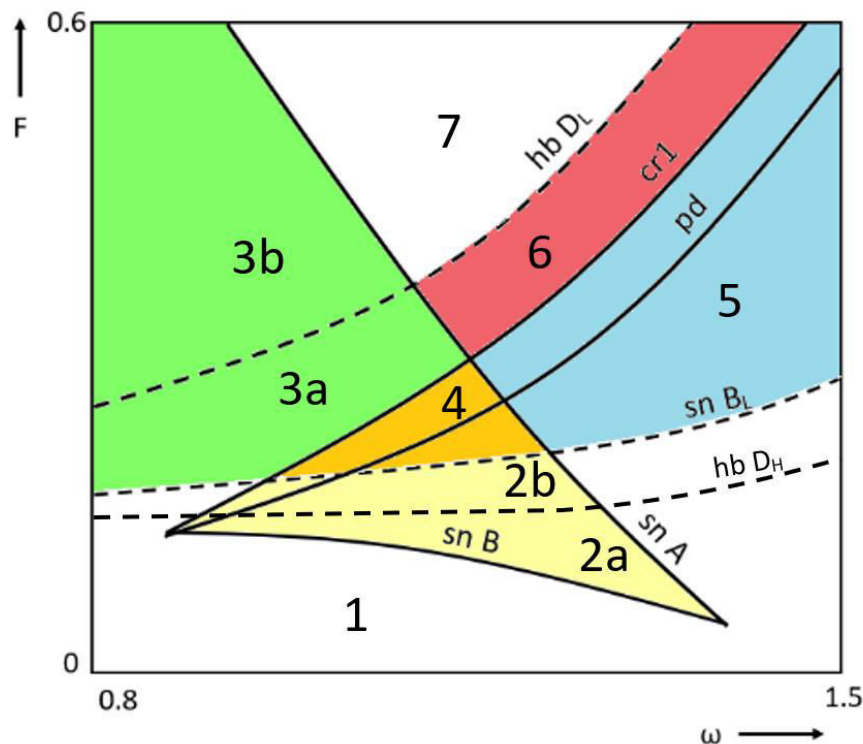
Obr. 39 Celkový bifurkační diagram doplněný o sedla a atraktory v druhé potenciálové jámě.

4.5 Oscilační mapa

Dále se omezíme pouze na oblast frekvencí buzení okolo hlavní rezonance, pro kterou platí $\Omega \approx 1$. [6]

Hodnoty síly, při které nastávají výše popsané bifurkace, závisí na frekvenci buzení. To znamená, že v rovině (ω, F) bifurkace vytvoří nějakou křivku. Chování buzených oscilátorů tedy lze zjistit z tzv. oscilační mapy (*behaviour chart*). Oscilační mapy se vytvářejí numericky, pomocí bifurkačních diagramů pro jednotlivé frekvence, kdy se zaznamenávají hodnoty sil, při kterých dochází k bifurkacím. Bifurkační diagram pak lze chápat jako svislý řez oscilační mapy ($\omega = konst.$), vrstvením těchto řezů tedy vznikne mapa pro daný systém.

Pro vybraný systém $\beta = 0.1$; $\gamma = 1$; $\alpha = -1$ již byla oscilační mapa vytvořena v knize [6]. Proto mapa zde uvedená je schématická a budou na ní pouze analyzovány jednotlivé oblasti.



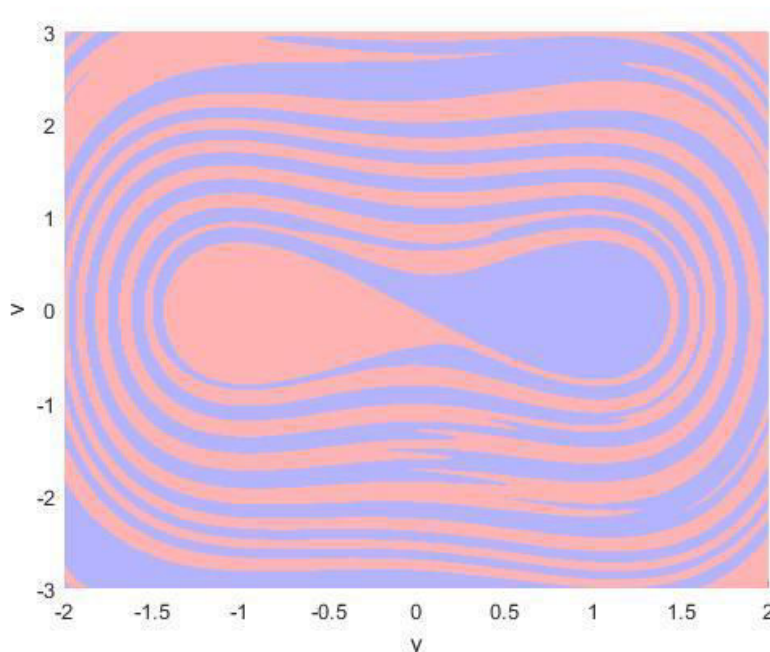
Obr. 40 Křivky bifurkací a barevné odlišení oblastí koexistence atraktorů v rovině $F\omega$.

4.5.1. Oblasti přitažlivosti

Pro hranice oblastí přitažlivosti platí [6]:

- Hranice mezi levými a pravými atraktory je tvořena stabilní trajektorií sedla D_H .
- Hranice mezi rezonančními a nerezonančními atraktory je tvořena stabilní trajektorií sedla D.
- Hranice, která odděluje velký atraktor od malých, je stabilní trajektorie sedla D_L .
- Hranice oblastí přitažlivosti odpovídající sedlu, které prošlo homoklinní bifurkací hb, jsou fraktální.

Počáteční podmínky určují, ke kterému atraktoru bude systém směřovat. Systémy, které směřují k atraktorům levé (pravé) potenciálové jámy budou zobrazeny červeně (modře), k nerezonančním (rezonančním) atraktorům světlým (tmavým) odstínem. Bílá barva bude označovat oblast přitažlivosti velkého a šedá chaotického atraktoru. Graf oblastí přitažlivosti bývá také nazýván fázový portrét. Číslování oblastí odpovídá číslování z Obr. 40.

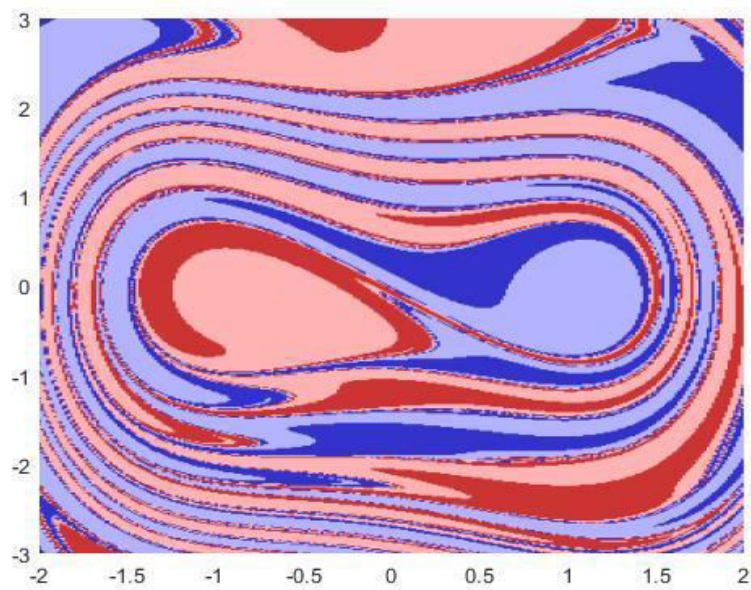


Obr. 41 Fázový portrét systému z oblasti 1; $\omega = 1.15, F = 0.02$

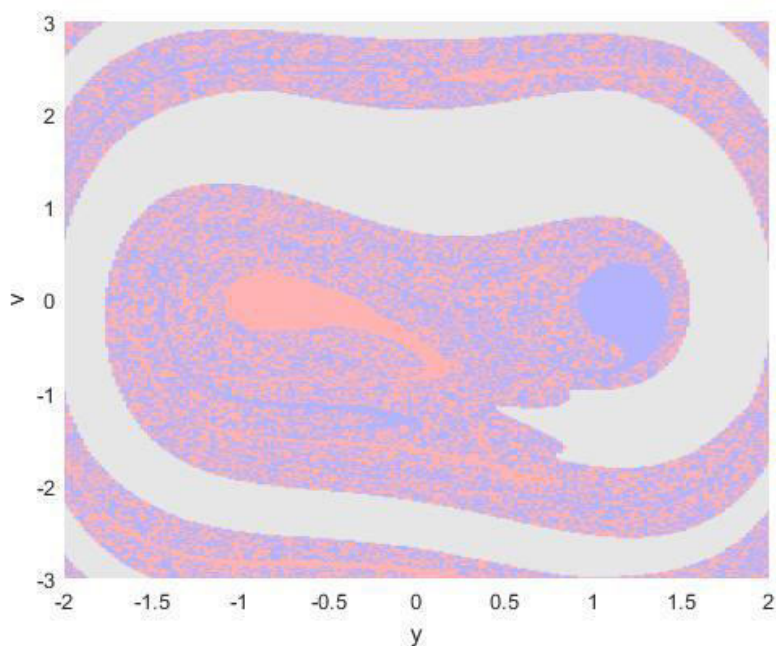
Oblast 1: Jediné atraktory jsou nerezonanční S'_n a S''_n . Fázový portrét je podobný portréту nebuzeného systému na Obr. 22, vykazuje hladkou hranici mezi nerezonančními atraktory.

Oblast 2: Tato oblast leží mezi $sn A$ a $sn B$, existují tedy čtyři atraktory, dva nerezonanční a dva rezonanční. Hranice mezi rezonančními a nerezonančními atraktory (světlá-tmavá) je hladká, protože sedla D' a D'' ještě neprošla svými bifurkacemi hb . Zato hranice mezi levými a pravými atraktory (červená-modrá) může být i fraktální, podle toho, jestli sedlo D_H svou bifurkací už prošlo (oblasti 2a nebo 2b). Systém s počátečními podmínkami blízko fraktální hranice je nestabilní ve smyslu nemožnosti předpovědi konečného stavu.

Oblast 3: Celá oblast leží nad $sn B_L$, která dává vzniknout velkému atraktoru. Nerezonanční atraktory stále existují, ty zanikají až při bifurkaci $sn A$ (hranice vpravo). Tato oblast leží nad křivkou a nad $hb D_H$, fraktální zapletení malých atraktorů je zde silné a nejednoznačnost řešení je zřejmá. Podobně jako oblast 2 je oblast 3 rozdělena na dvě části bifurkací $hb D_L$, takže hranice velkého atraktoru může být hladká i fraktální.

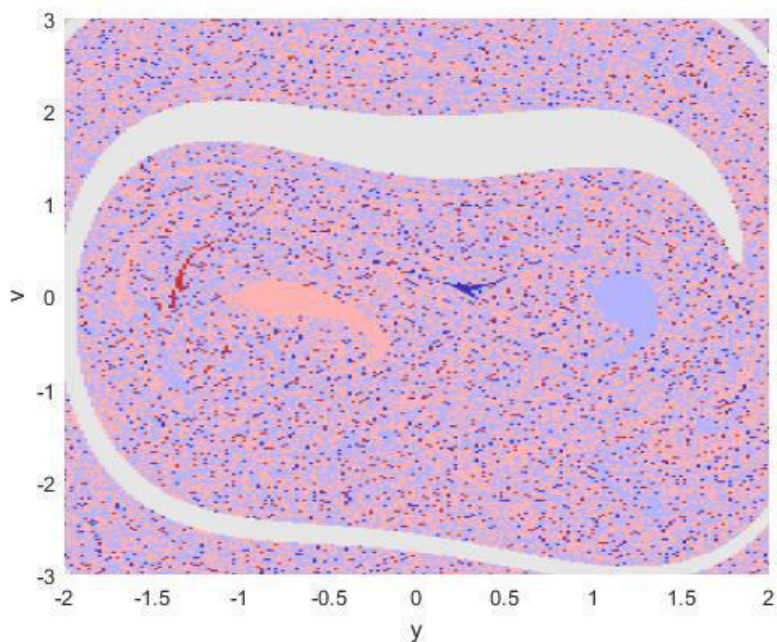


Obr. 42 Fázový portrét systému z oblasti 2 po bifurkaci, která způsobila fraktální hranice červená-modrá; $\omega = 1.13, F = 0.08$.



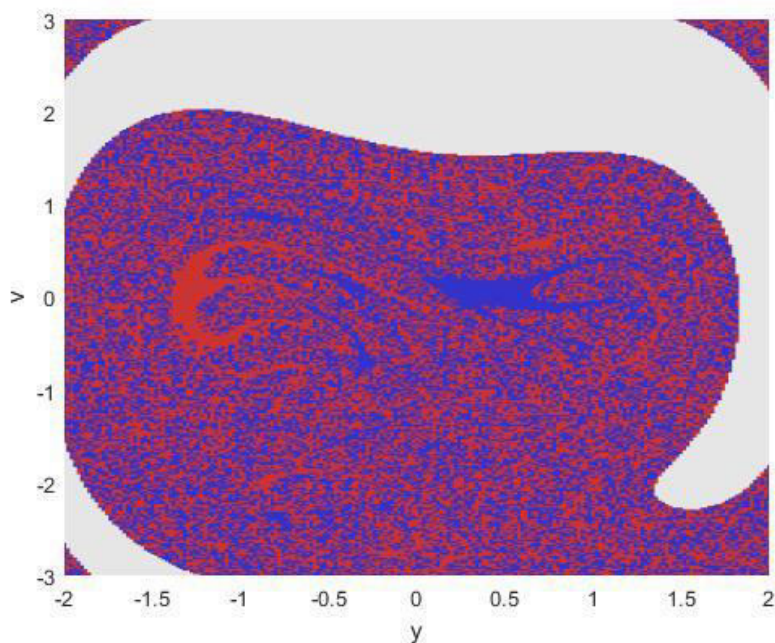
Obr. 43 Fázový portrét systému z oblasti 3 před bifurkací $hb D_H$; $\omega=1.1, F=0.15$.

Oblast 4: V této oblasti lze najít všech pět periodických atraktorů. Bílá oblast zůstává ohraničena hladce, všechna ostatní sedla už však bifurkovala, většina fázového portréту je silně fraktálně zapletená. Patrné jsou pouze malé ostrůvky stejné barvy v blízkosti každého ze čtyř atraktorů.



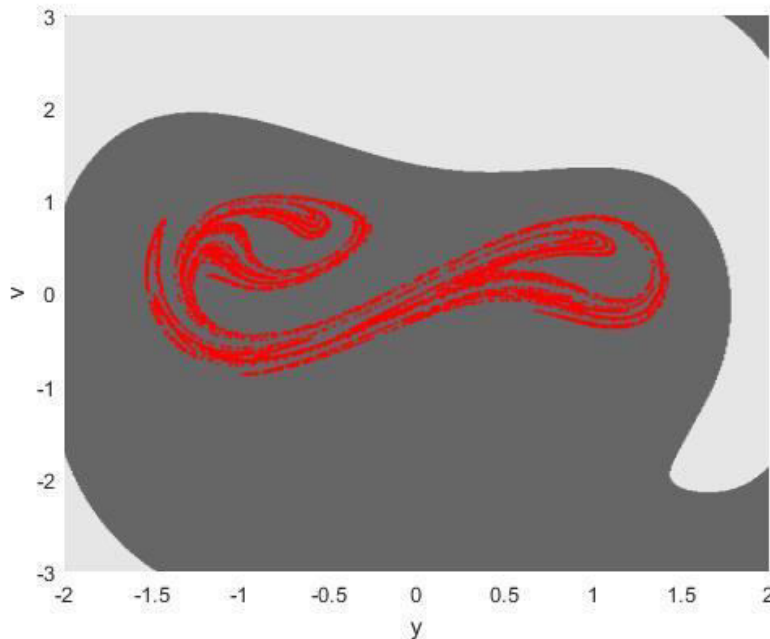
Obr. 44 Fázový portrét systému z oblasti 4; $\omega = 1.13, F = 0.115$.

Oblast 5: Je podobná oblasti 3, přičemž místo nerezonančních je zde velký atraktor v koexistenci s rezonančními atraktory.



Obr. 45 Fázový portrét systému z oblasti 5; $\omega=1.13, F=0.115$.

Oblast 6: Jediná oblast existence chaotického atraktoru. Ten je ale vždy doprovázen velkým atraktorem, neboť celá oblast 6 je nad $sn B_L$. Buzení už je natolik velké, že žádný malý periodický atraktor nemůže existovat, jejich místo zaujal chaotický atraktor. Červeně je na ukázkou také zobrazen samotný chaotický atraktor, jeho oblast přitažlivosti je šedá.



Obr. 46 Fázový portrét systému z oblasti 6; $\omega=1.35, F=0.2$.

Oblast 7: Chaotický atraktor už zanikl bifurkací $hb D_L$, popsanou v kapitole 4.3.4. Zbyl jen velký atraktor S_L . O vývoji systému tak už nerozhodují počáteční podmínky, celý fázový portrét by byl bílý.

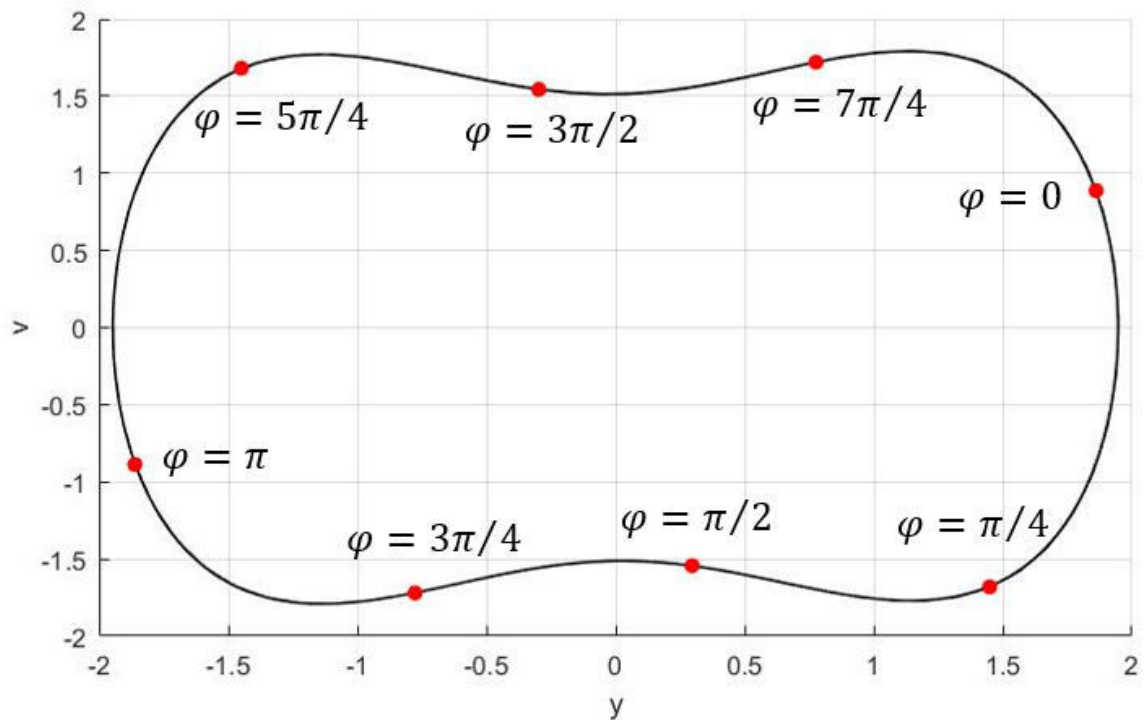
4.6 Vliv fáze buzení

U všech předchozích simulací byla v Rovnici (24) uvažována nulová hodnota fázového posuvu buzení φ . Na počátku simulace v čase $t = 0$ působila na systém budicí síla o největší kladné hodnotě.

$$\ddot{y} + \beta\dot{y} - \alpha y + \gamma y^3 = F \cos(\omega t + \varphi) \quad (24)$$

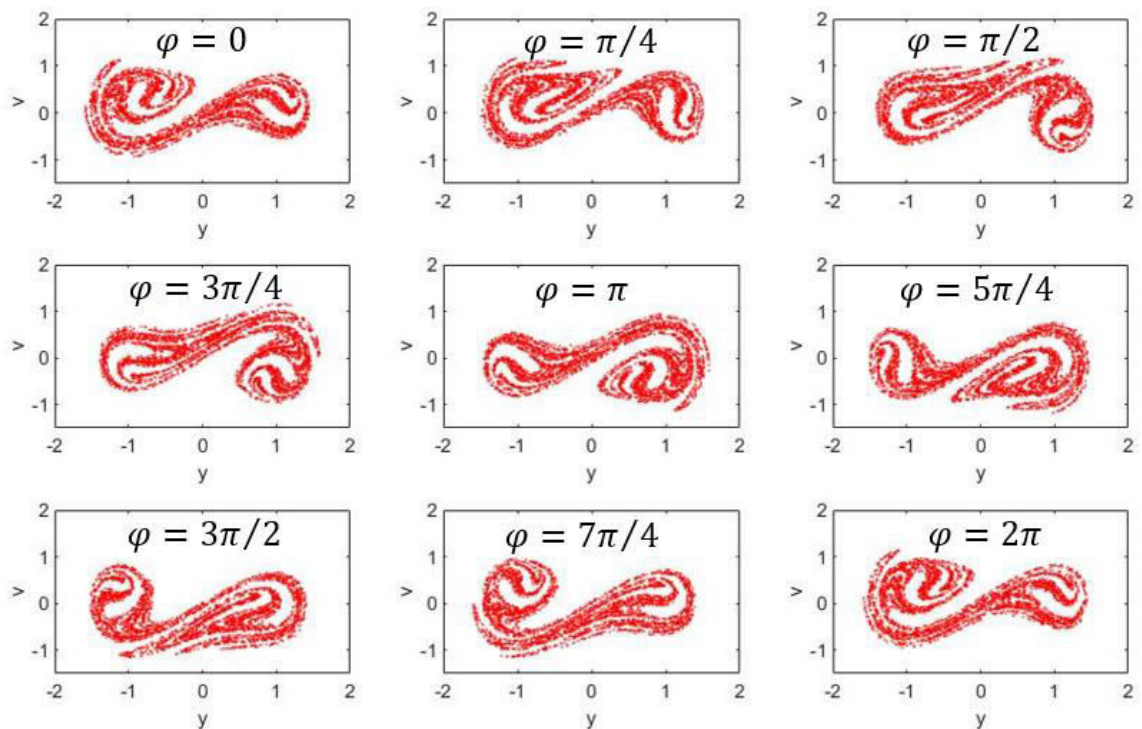
Ukázalo se, že fáze buzení nemá na chování systému kvalitativní vliv. Geometrie a počet atraktorů zůstávají pro všechny hodnoty fáze stejné. Mění se pouze poloha Poincarého bodů na atraktoru, to zobrazuje Obr. 47.

Stejné výsledky dostaneme, pokud budeme zobrazovat původní systém s $\varphi = 0$ v časech násobků periody, ovšem posunutých právě o danou hodnotu φ , tedy v časech $t = nT + \varphi$. Podle Obr. 18 tak provádíme Poincarého řezy v jiném úhlu.



Obr. 47 Posun Poincarého bodu po trajektorii při změně fáze buzení.

Nejzajímavější je chování chaotického atraktoru. Ten při zobrazování pro měnící se fázi buzení vykazuje rotační pohyb, často tento fenomén bývá nazýván jako míchání chaotického atraktoru (*stirring*).



Obr. 48 Efekt míchání chaotického atraktoru při změně fáze.

5 Závěr

Cílem práce bylo analyzovat možná chování oscilátorů popsatelných Duffingovou rovnicí. S pomocí matematického modelu takového Duffingova oscilátoru pak poukázat na některé jevy nelineárních oscilátorů.

Pro variantu Duffingovy rovnice popisující konzervativní systém se ukázalo jako vhodné geometrické řešení. Počáteční energie oscilátoru definuje energetickou hladinu, přičemž průnikem této hladiny s energetickou plochou vzniká trajektorie systému.

Analýza stability rovnovážných bodů nebuzené Duffingovy rovnice přinesla základní kritérium existence netriviálních rovnovážných bodů. Existují pouze, pokud jsou znaménka lineární a kubické tuhosti opačná. Jeden z těchto případů, dvojpotenciálový oscilátor, byl vybrán k podrobnější analýze.

Ukázalo se, že nebuzený oscilátor vykazuje poměrně předvídatelné chování. Pokud má velkou počáteční energii, osciluje nejdříve okolo obou potenciálových jam, kvůli tlumení však v určitém okamžiku spadne dovnitř jedné z jam, kde jsou jeho oscilace nakonec utlumeny. Simulace ze sítě počátečních podmínek vykreslila fázový diagram, který přesně určuje, do které z jam oscilátor s danými počátečními podmínkami spadne.

Chování buzeného Duffingova oscilátoru je mnohem komplexnější. Kromě pěti možných ustálených chování (periodických atraktorů), lze za určitých podmínek docílit chaotického chování. Pro dané tlumení a tuhostní parametry systému existují oscilační mapy. Ty pak na základě parametrů buzení (frekvence a síla) určují oblasti koexistence jednotlivých atraktorů. Pro všechny tyto oblasti byly vytvořeny fázové diagramy, které určují oblasti přitažlivosti atraktorů, tedy počáteční podmínky příslušející jednotlivým atraktorům. Hranice oblastí přitažlivosti však mohou být u buzeného Duffingova systému kvůli bifurkacím fraktálně zapleteny, což způsobuje inherentní neurčitost řešení.

6 Seznam použitých zdrojů

- [1] HOLMES, P. Ninety Plus Thirty Years of Nonlinear Dynamics : Less Is More and More Is Different. *International Journal of Bifurcation and Chaos* [online]. 2005. ISSN 0218-1274. Dostupné z: doi:10.1142/S0218127405013678
- [2] ABRAHAM, Ralph a Christopher D. SHAW. *Dynamics : The Geometry of Behavior* [online]. 1992. ISBN 0201567164. Dostupné z: doi:http://dx.doi.org/10.1080/09638280701255266
- [3] NAYFEH, Ali Hasan. a Dean T. MOOK. *Nonlinear oscillations*. B.m.: Wiley, 2007. ISBN 9783527617586.
- [4] STROGATZ, S. H. a Douglas S. SHAFER. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering* [online]. 1995. ISBN 0738204536. Dostupné z: doi:10.1137/1037077
- [5] DUFFING, Georg. *Forced oscillations with variable natural frequency and their technical significance*. 1918.
- [6] KOVACIC, Ivana a Michael J. BRENNAN. *The Duffing Equation: Nonlinear Oscillators and their Behaviour* [online]. 2011. ISBN 9780470715499. Dostupné z: doi:10.1002/9780470977859
- [7] SALAS, Alvaro H. a Jairo E. CASTILLO H. Exact solution to Duffing equation and the pendulum equation. *Applied Mathematical Sciences* [online]. 2014, **8**(176), 8781–8789. ISSN 13147552. Dostupné z: doi:10.12988/ams.2014.44243
- [8] RAVICHANDRAN, V., V. CHINNATHAMBI a S. RAJASEKAR. Homoclinic bifurcation and chaos in Duffing oscillator driven by an amplitude-modulated force. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* [online]. 2007, **376**(1–2), 223–236. ISSN 03784371. Dostupné z: doi:10.1016/j.physa.2006.11.003
- [9] SAMBLES, J R, K C ELSOM a D J JARVIS. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences,. *Philisophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* [online]. 1982, **304**(1486), 365–396. ISSN 1471-2962. Dostupné z: doi:10.1098/rsta.2002.1020
- [10] SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, W. a E. TYRKIEL. Common features of the onset of the persistent chaos in nonlinear oscillators: A phenomenological approach. *Nonlinear Dynamics* [online]. 2002, **27**(3), 271–293. ISSN 0924090X. Dostupné z: doi:10.1023/A:1014456416158
- [11] SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, Wanda. The analytical predictive criteria for chaos and escape in nonlinear oscillators: A survey. *Nonlinear Dynamics* [online]. 1995, **7**(2), 129–147. ISSN 0924090X. Dostupné z: doi:10.1007/BF00053705
- [12] SZEMPLIŃSKA-STUPNICKA, W., A. ZUBRZYCKI a E. TYRKIEL. Properties of chaotic and regular boundary crisis in dissipative driven nonlinear oscillators. *Nonlinear Dynamics* [online]. 1999, **19**(1), 19–36. ISSN 0924090X. Dostupné z: doi:10.1023/A:1008339214577
- [13] CAI, Mei xiang, Jian ping YANG a Jin DENG. Bifurcations and chaos in Duffing equation with damping and external excitations. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica* [online]. 2014, **30**(2), 483–504. ISSN 16183932. Dostupné z: doi:10.1007/s10255-014-0284-0

- [14] CAI, Meixiang a Hongjun CAO. Bifurcations of periodic orbits in Duffing equation with periodic damping and external excitations. *Nonlinear Dynamics* [online]. 2012, **70**(1), 453–462. ISSN 0924090X. Dostupné z: doi:10.1007/s11071-012-0467-2
- [15] MOON, F.C. a P.J. HOLMES. A magnetoelastic strange attractor. *Journal of Sound and Vibration* [online]. 1979, **65**(2), 275–296 [vid. 2019-02-21]. ISSN 0022-460X. Dostupné z: doi:10.1016/0022-460X(79)90520-0
- [16] UEDA, Yoshisuke a Norio AKAMATSU. Chaotically Transitional Phenomena in the Forced Negative-Resistance Oscillator. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* [online]. 1981, **28**(3), 217–224. ISSN 00984094. Dostupné z: doi:10.1109/TCS.1981.1084975

7 Seznam obrázků

Obr. 1 Příklad geometrické nelinearity.	9
Obr. 2 Kmitání vetknutého nosníku v blízkosti magnetů.	10
Obr. 3 Oscilace vetknutého prutu po ztrátě vzpěrné stability.	10
Obr. 4 Řazení obrázků podle znamének.	11
Obr. 5 Kvalitativně rozdílné tuhostní charakteristiky Duffingova oscilátoru.	12
Obr. 6 Schéma pohybu hmotného bodu v potenciálové jámě.	13
Obr. 7 Energetické plochy pro jednotlivé základní typy systémů.	14
Obr. 8 Trajektorie vzniknou jako průsečík energetické funkce a roviny.	15
Obr. 9 Klasifikace rovnovážných bodů podle stopy a determinantu [6].	16
Obr. 10 Pevné body ve fázové rovině.	17
Obr. 11 Fázový portrét pro $\alpha < 0$, $\gamma > 0$	17
Obr. 12 Fázový portrét pro $\alpha > 0$, $\gamma > 0$	18
Obr. 13 Fázový portrét pro $\alpha > 0$, $\gamma < 0$	18
Obr. 14 Schéma tvorby dvou stabilních rovnovážných bodů.	19
Obr. 15 Schéma tvorby dvou nestabilních rovnovážných bodů.	19
Obr. 16 Bifurkační diagramy pitchfork bifurkací.	19
Obr. 17 Základní fázový prostor (a) a projekce do roviny yv (b) systému, který vykazuje chaotické chování ($\beta = 0.2$; $\gamma = 1$; $F = 0.3$; $\alpha = -1$; $\omega = 1$).	21
Obr. 18 Základní myšlenka Poincarého řezů (a), transformace do válcových souřadnic (b).	21
Obr. 19 Zobrazení chaotického oscilátoru v Poincarého řezech.	22
Obr. 20 Malá změna počátečních podmínek způsobí přechod do oblasti přitažlivosti jiného atraktoru.	24
Obr. 21 Trajektorie směřující do sedla vytváří polovinu hranice oblastí přitažlivosti (separatrix).	24
Obr. 22 Simulace oblastí přitažlivosti (a) a obě stabilní trajektorie sedla vytvářející separatrix (b), $\alpha = -1$, $\gamma = 1$, $\beta = 0.1$	25
Obr. 23 Trajektorie (a) a časový vývoj (b) systémů v závislosti na velikosti tlumení.	26
Obr. 24 Kvadratické a konstantní tlumení.	26
Obr. 25 Podobné chování systémů se stejným poměrem tuhostí. Modrá $\alpha = -20$, $\gamma = 20$, $\beta = 0.1$; červená $\alpha = -0.6$, $\gamma = 0.6$, $\beta = 0.1$	27
Obr. 26 Přechodné kmitání směřující k nerezonančnímu atraktoru. Zobrazení ve fázové rovině (a) a časový vývoj (b). Červeně jsou zobrazeny Poincarého body.	29
Obr. 27 Přechodné kmitání směřující k rezonančnímu atraktoru. Fázová rovina (a) a časový vývoj (b).	29

Obr. 28 Přechodné kmitání směřující k velkému atraktoru. Zobrazení ve fázové rovině (a) a časový vývoj (b).	30
Obr. 29 Kmitání na chaotickém atraktoru. Zobrazení ve fázové rovině (a) a časový vývoj (b).	30
Obr. 30 Koexistující periodické atraktory se svými Poincarého body (červeně) a chaotický atraktor (modře).....	31
Obr. 31 Schéma bifurkací sn A a sn B	32
Obr. 32 Schéma dvojení periody, červeně jsou zobrazeny Poincarého body.....	32
Obr. 33 Oscilace s různou periodou.	32
Obr. 34 Bifurkační diagram kaskády dvojení periody v Duffingově oscilátoru.	33
Obr. 35 Časový vývoj před (a) a po (b) "symmetry breaking" bifurkaci.	34
Obr. 36 Schéma boundary crisis bifurkace.....	34
Obr. 37 Přechodný chaos. K úniku z chaotického atraktoru došlo pravděpodobně v zakroužkované oblasti. Poincarého zobrazení (a) a časový vývoj (b).	35
Obr. 38 Bifurkační diagram Duffingova oscilátoru.	36
Obr. 39 Celkový bifurkační diagram doplněný o sedla a atraktory v druhé potenciálové jámě.	36
Obr. 40 Křivky bifurkací a barevné odlišení oblastí koexistence atraktorů v rovině $F\omega$. .	37
Obr. 41 Fázový portrét systému z oblasti 1; $\omega = 1.15, F = 0.02$	38
Obr. 42 Fázový portrét systému z oblasti 2 po bifurkaci, která způsobila fraktální hranice červená-modrá; $\omega = 1.13, F = 0.08$	39
Obr. 43 Fázový portrét systému z oblasti 3 před bifurkací hb D_H ; $\omega=1.1, F=0.15$	39
Obr. 44 Fázový portrét systému z oblasti 4; $\omega = 1.13, F = 0.115$	40
Obr. 45 Fázový portrét systému z oblasti 5; $\omega=1.13, F=0.115$	40
Obr. 46 Fázový portrét systému z oblasti 6; $\omega=1.35, F=0.2$	41
Obr. 47 Posun Poincarého bodu po trajektorii při změně fáze buzení.	42
Obr. 48 Efekt míchání chaotického atraktoru při změně fáze.	42

8 Seznam příloh

Příloha A - m-skript numerické řešení Duffingovy rovnice

Příloha B - m-skript geometrické řešení Duffingovy rovnice

Příloha C - m-skript oblasti přitažlivosti