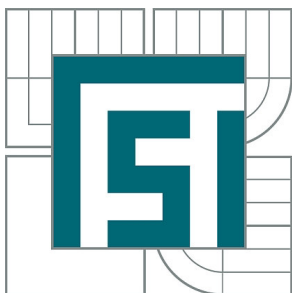


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

URČENÍ HLAVNÍCH MATERIÁLOVÝCH SMĚRŮ V TKÁNÍCH STĚNY AORTY

DETERMINATION OF PRINCIPAL MATERIAL DIRECTIONS IN TISSUES OF AORTIC WALL

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

MILOŠ BOGDAN

VEDOUcí PRÁCE

SUPERVISOR

prof. Ing. JIŘÍ BURŠA, Ph.D.

BRNO 2015

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2014/15

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Miloš Bogdan

kteřý/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Základy strojního inženýrství (2341R006)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Určení hlavních materiálových směrů v tkáních stěny aorty

v anglickém jazyce:

Determination of principal material directions in tissues of aortic wall

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Měkké živočišné tkáně představují složitý kompozitní materiál, vyztužený obvykle několika různými typy vláken. Tkáně aorty se chovají přibližně jako materiál ortotropní, tedy existují u nich tzv. hlavní materiálové směry. Obvykle se předpokládá, že hlavními směry jsou u tepny (zhruba válcové trubice) směr radiální, obvodový a axiální. U složitějších tvarů, typických například pro aortální výdutě, je však třeba tyto směry identifikovat na základě experimentů. Náplní práce bude identifikace hlavních materiálových směrů pro prasečí aorty.

Cíle bakalářské práce:

1. Na základě studia doporučené literatury navrhnout způsob určování hlavních materiálových směrů za podmínek velkých přetvoření.
2. Realizovat potřebné experimenty na prasečích aortách.
3. Vyhodnotit významnost anizotropie vyšetřovaného materiálu a odchylek jeho hlavních směrů od obvyklých předpokladů.

Seznam odborné literatury:

Janiček, Ondráček, Vrbka, Burša: Mechanika těles. Pružnost a pevnost I. Cerm Brno, 2004.
Ondráček, Vrbka, Janíček, Burša: Mechanika těles. Pružnost a pevnost II. Cerm Brno, 2006.
Fung: Biomechanics. Mechanical properties of living tissues. Springer, 1993.

Vedoucí bakalářské práce: prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2014/15.

V Brně, dne 21.11.2014



prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
Ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
Děkan

ABSTRAKT

Cílem této práce je navrhnout způsob určování hlavních materiálových směrů tkáně stěny aorty za podmínek velkých přetvoření. Je zde navržena metoda, která je obdobou metody určování hlavních přetvoření a jejich směrů pomocí tenzometrických růžic. Ta vyplývá z obecných tenzorových vlastností. Místo tenzoru přetvoření je zde aplikovaná pro tenzor materiálových konstant. Také je zde vyvinut algoritmus výpočtu pomocí dané metody a potřebné experimenty jsou realizovány na třech vzorcích prasečích aort, kde jsou stanoveny hlavní materiálové směry a odchylky naměřených hodnot od hodnot předpokládaných jak pro malá tak pro velká přetvoření.

Klíčová slova

Hlavní materiálové směry, ortotropní materiál, velká přetvoření, vláknové kompozity, modul pružnosti.

ABSTRACT

Main goal of this thesis is to find a way how to determine principal material directions in the tissues of aortic wall at large strains. A method is designed for this purpose on the basis of same principles as the method of determination of principal strains and their directions using rosette gauges. These principles are consequences of tensor properties. In this work the method is applied for a stiffness tensor instead of strain tensor. An algorithm that calculates with this new method is also made and the required experiments are realised on three samples of porcine aorta. Principal material directions and deviations of the values are calculated for both small and large strains.

Key words

Principal material directions, orthotropic material, large strains, fiber composites, elasticity modulus.

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

BOGDAN, M. *Určení hlavních materiálových směrů v tkáních stěny aorty*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 43 s. Vedoucí bakalářské práce prof. Ing. Jiří Burša, Ph.D.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma **Určení hlavních materiálových směrů v tkáních stěny aorty** vypracoval samostatně s použitím pramenů, uvedených na seznamu, který tvoří přílohu této práce.

V Brně dne

Miloš Bogdan

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji tímto prof. Ing. Jiřímu Buršovi, Ph. D. za odborné vedení, konzultace, cenné připomínky a rady při vypracování bakalářské práce. Dále děkuji Ing. Vojtěchu Manovi za pomoc při provádění a vyhodnocování experimentů a všem ostatním, kteří mě podporovali.

OBSAH

1	Úvod.....	8
1.1	Cíle práce.....	8
2	Materiál měkké tkáně aorty	9
2.1	Anizotropní lineárně elastický materiál	9
2.1.1	Ortotropní materiál.....	10
2.1.2	Hookeův zákon pro ortotropní materiál	10
2.1.2.1	Vyjádření pomocí matice tuhosti	10
2.1.2.2	Vyjádření pomocí matice poddajnosti	11
2.1.2.3	Vyjádření pomocí fyzikálních charakteristik	11
2.1.2.4	Vztahy při libovolné orientaci hlavního směru napětí.....	13
2.2	Velké deformace	13
2.2.1	Tenzory popisující stav deformace v bodě tělesa.....	14
2.2.1.1	Green-Lagrangeův tenzor konečných přetvoření	14
2.2.1.2	Almansi-Hamelův tenzor konečných přetvoření	14
2.2.1.3	Cauchyho (logaritmický) tenzor konečných přetvoření.....	14
2.2.1.4	Tenzor deformačního gradientu.....	14
2.2.1.5	Cauchy-Greenův tenzor deformace	15
2.2.1.6	Vztahy pro vzájemný převod jednotlivých tenzorů přetvoření.....	15
2.2.2	Tenzory popisující stav napjatosti v bodě tělesa.....	16
2.2.2.1	Piola-Kirchhoffův tenzor napětí 1. druhu.....	16
2.2.2.2	Cauchyho tenzor napětí	16
2.2.2.3	Piola-Kirchhoffův tenzor napětí 2. druhu.....	16
2.2.2.4	Vztahy pro vzájemný převod jednotlivých tenzorů napětí.....	16
2.3	Hyperelastický materiál.....	17
3	Experimentální metody určování vlastností měkkých tkání.....	18
3.1	Testování in-vitro.....	18
3.1.1	Tahové zkoušky.....	18
3.1.1.1	Zařízení na dvouosé tahové testování	18
3.1.2	Tlaková zkouška.....	19
3.1.3	Metoda aspirace.....	20
3.2	Testování in-vivo.....	21
3.2.1	Tlakové testování	21

3.2.2	Ultrazvukové metody.....	21
3.2.2.1	<i>Kombinace ultrazvuku a tlakového testování</i>	21
3.2.2.2	<i>Elastografie</i>	21
3.2.2.3	<i>Další ultrazvukové metody</i>	22
3.2.3	Dynamická in-vivo metoda aspirace.....	22
3.3	Vyhodnocování experimentů	23
4	Metoda určení hlavních materiálových směrů	24
4.1	Popis určení hlavních přetvoření pomocí tenzometrických růžic	24
4.2	Aplikace pro tenzor materiálových konstant	25
4.2.1	Volba vhodné definice přetvoření.....	27
4.2.2	Definice modulu pružnosti.....	27
4.2.3	Algoritmus řešení.....	29
5	Experiment a výsledky	30
5.1	Vzorek 1	31
5.2	Vzorek 2	32
5.3	Vzorek 3	33
6	Vyhodnocení hlavních materiálových směrů	34
6.1	Vzorek 1	34
6.2	Vzorek 2	34
6.3	Vzorek 3	34
7	Diskuse	35
8	Závěr	38
9	Použitá literatura	39
10	Seznam použitých symbolů a veličin	42

1 ÚVOD

Aneurysma neboli výduť je složitý útvar vzniklý vyboulením stěny cévy. Je to důsledek oslabení cévní stěny vlivem dědičné nebo získané choroby. Výduť břišní aorty bývá nejčastější a také nejnebezpečnější, neboť není snadné ji odhalit, protože většinu případů nedoprovází žádné symptomy. Také je zde velké riziko prasknutí (ruptury) a to bývá ve většině případů smrtelné [3], [5]. Existuje několik metod, které se používají na předpovídání ruptury. Jako nejúčinnější se jeví metoda, která předpovídá prasknutí na základě napětí ve stěně výdutě. To je spočítáno pomocí metody konečných prvků, která pracuje s modelem aneuryzmatu, pořízeným pomocí CT nebo MR a experimentálně získanými materiálovými konstantami [4].

Materiál stěny aorty představuje složitý kompozitní materiál vyztužený několika typy vláken. Chová se přibližně jako materiál ortotropní. Pro jednosměrné vláknové kompozity (ortotropní materiály) je typické, že mají tzv. hlavní materiálové směry. Pokud na ortotropní materiál působí jednoosé napětí a směr působení leží mimo hlavní směr materiálu, hlavní směr deformace není totožný se směrem působení napětí. Tato skutečnost je dána orientací vláken, ty jsou orientovány do jednoho směru. Hlavní materiálové směry jsou tedy tři na sebe kolmé směry, jeden rovnoběžně se směrem vláken a dva kolmo ke směru vláken [1].

U aorty (válcová trubice) se předpokládá, že hlavní materiálové směry jsou směr radiální, obvodový a axiální. U aneurysmat, kvůli velmi složitému tvaru, nejsou tyto směry známy a není ani možné je odhadnout. Nelze tedy s jistotou říct, že odezvy měření vzorků aort s výdutí jsou odezvy v hlavních materiálových směrech. To může mít vliv na určené a vypočítané hodnoty (např. materiálové konstanty apod.).

1.1 Cíle práce

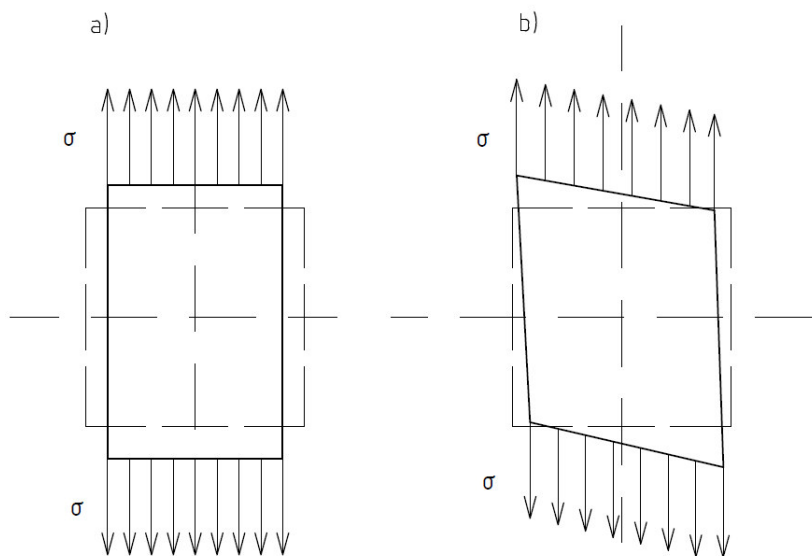
1. Na základě studia doporučené literatury navrhnout způsob určování hlavních materiálových směrů za podmínek velkých přetvoření
2. Realizovat potřebné experimenty na prasečích aortách
3. Vyhodnotit významnost anizotropie vyšetřovaného materiálu a odchylek jeho hlavních směrů od obvyklých předpokladů

2 MATERIÁL MĚKKÉ TKÁNĚ AORTY

Tkáň aorty se skládá ze tří vrstev (vnitřní, střední a vnější) a tyto vrstvy jsou složeny ze tří základních složek: vláken elastinu, vláken kolagenu a hladké svaloviny. Elastin je vysoce elastický protein. Umožňuje elastické chování tkáně, přenáší napětí v obvodovém i axiálním směru a vytváří předpětí [5]. Kolagen je protein, hrající významnou roli ve funkčnosti a v mechanických vlastnostech aorty, jako je například pevnost v tahu (vykazuje velmi vysokou pevnost a malá přetvoření) [8]. Tvoří síť zvlněných vláken, zapojuje se do přenosu zatížení až u větších přetvoření (když se vlákna napřímí) [4], [7]. Hladká svalovina je zodpovědná za viskoelastické chování tkáně (s vyšší rychlostí zatížení se stává tužší) [9].

2.1 Anizotropní lineárně elastický materiál

Materiál je považován za anizotropní, pokud jeho mechanické vlastnosti a odezvy zatěžování závisí na směru zatěžování. Tato vlastnost je dána skutečností, že stavební prvky materiálu, např. vlákna, zrna, jsou orientovány určitým směrem. Pokud existuje také lineární závislost mezi deformací a vyvolaným napětím a pokud se po přerušení zatížení materiál vrátí na nedeformovaný stav lze hovořit o anizotropním lineárně elastickém materiálu. Lineárně elastické chování existuje pouze při malých deformacích. Chování při velkých deformacích je popsáno v kapitole 2.2 a 2.3 [1], [2], [5].

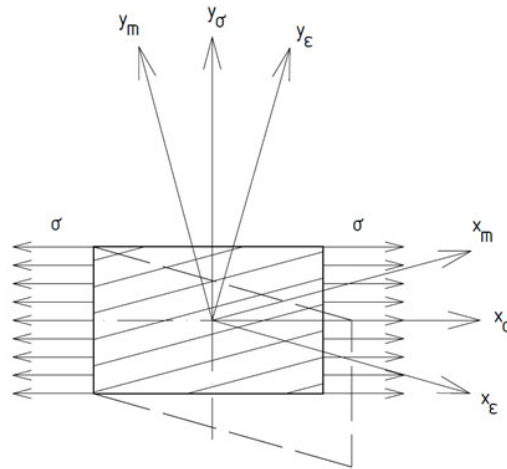


Obr. 2.1 Rozdíly v deformaci tělesa z a) izotropního a b) anizotropního materiálu

Pokud je izotropní materiál namáhán pouze normálovým napětím, dochází k délkovým přetvořením, ale nedochází ke zkosení. U anizotropního materiálu dochází i ke zkosení i k délkovým přetvořením [2].

2.1.1 Ortotropní materiál

Zvláštním případem anizotropního materiálu je materiál ortotropní. Ortotropní chování vykazují kompozity, vyztužené vlákny pouze v jednom (jednosměrové) nebo dvou směrech. Materiál stěny cévy lze považovat za jednosměrný kompozit. Na rozdíl od obecně anizotropního materiálu, vykazuje ortotropní materiál anizotropii jen v omezeném stupni. Kvůli výtuzným vláknům v něm existují tři hlavní materiálové směry (jeden podélně a dva příčně ke směru vláken) ve kterých se odezva zatížení liší. Pokud je materiál namáhán pouze normálovým napětím, jehož směr leží v hlavním materiálovém směru, nedochází ke zkosení. Tyto tři hlavní směry současně definují tři hlavní materiálové roviny, které se z hlediska mechanických vlastností chovají jako roviny symetrie [1], [2].



Obr. 2.2 Zatížení kompozitního (ortotropního materiálu), kdy směr jednoosého zatížení (x_σ) neleží v hlavním směru materiálu (x_m, y_m), (x_ϵ, y_ϵ) jsou hlavní směry deformace

2.1.2 Hookeův zákon pro ortotropní materiál

2.1.2.1 Vyjádření pomocí matice tuhosti

Nejobecnější znázornění Hookeova zákona je pro obecný anizotropní materiál. Matematické vyjádření je ve tvaru [2]

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad (2.1)$$

Kde C_{ij} je matice tuhosti, σ_i je vektor napětí a ε_j je vektor přetvoření. Maticový zápis vztahu (2.1) je ve tvaru [2]

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$C_{ij} = C_{ji} \quad (2.3)$$

Matrice tuhosti obsahuje 21 nezávislých prvků, neboť platí (2.3). Jedná se o zjednodušení tenzorového zápisu [2]

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.4)$$

kde C_{ijkl} je tenzor tuhosti s 81 prvky, σ_{ij} je tenzor napětí a ε_{kl} je tenzor přetvoření. Prvky matice tuhosti nebo tenzoru tuhosti se nazývají tuhostní materiálové konstanty.

V hlavním materiálovém souřadnicovém systému ortotropního materiálu lze vzhledem ke třem rovinám symetrie mechanických vlastností (hlavní materiálové roviny), matici tuhosti anizotropního materiálu s 21 nezávislými prvky zjednodušit na tvar s pouze 9 nezávislými prvky. Vztah (2.1) je potom vyjádřen maticově takto [2]

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

2.1.2.2 Vyjádření pomocí matice poddajnosti

Inverzní matice tuhosti C_{ij}^{-1} se značí S_{ij} a nazývá se maticí materiálové poddajnosti. Obsahuje opět 21 nezávislých prvků. Hookeův zákon v inverzním tvaru je potom zapsán vztahem [2]

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j \quad (2.6)$$

maticově takto

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

2.1.2.3 Vyjádření pomocí fyzikálních charakteristik

Prvky matice poddajnosti je možné zapsat pomocí fyzikálních charakteristik (modul pružnosti E_i , modul pružnosti ve smyku G_{ij} a Poissonovo číslo μ_{ij}), které mají jasný fyzikální význam přiřazený specifickým hlavním směrům ortotropie [1]

$$E_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \quad (2.8)$$

$$G_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{\gamma_{ij}} \quad (2.9)$$

$$\mu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} \quad (2.10)$$

Ve vztahu (2.10) je ε_i poměrné prodloužení v hlavním směru i , ve kterém působí zatížení a jeho odezvou je v kolmém směru j poměrné „zúžení“ (ε_j).

Pro přetvoření ε_i (kde jsou zahrnuty i zúžení vlivem napětí v dalších směrech) a zkosity γ_{ij} v hlavních materiálových směrech platí vztahy [2]

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} - \mu_{21} \frac{\sigma_2}{E_2} - \mu_{31} \frac{\sigma_3}{E_3} \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_2 = -\mu_{12} \frac{\sigma_1}{E_1} + \frac{\sigma_2}{E_2} - \mu_{32} \frac{\sigma_3}{E_3} \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_3 = -\mu_{13} \frac{\sigma_1}{E_1} - \mu_{23} \frac{\sigma_2}{E_2} + \frac{\sigma_3}{E_3} \quad (2.13)$$

$$\gamma_{23} = \frac{\tau_{23}}{G_{23}} \quad (2.14)$$

$$\gamma_{31} = \frac{\tau_{31}}{G_{31}} \quad (2.15)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}} \quad (2.16)$$

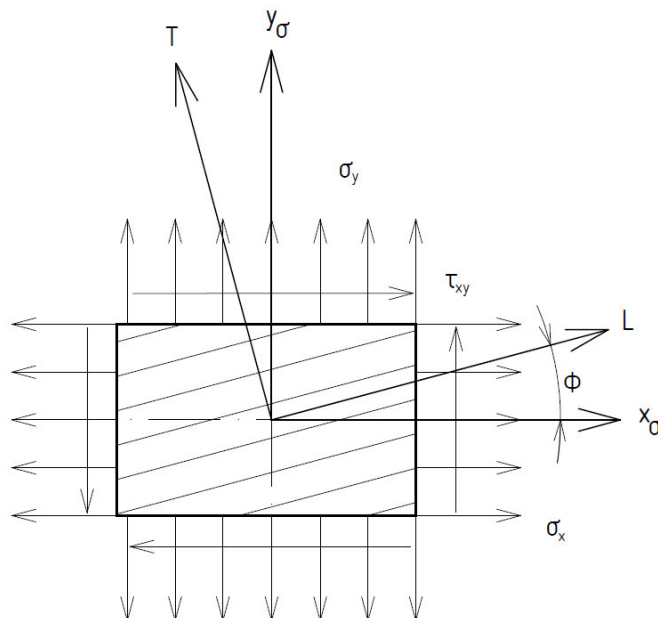
Pomocí fyzikálních charakteristik je vztah (2.6) potom vyjádřen maticově [2]

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_{21}}{E_2} & -\frac{\mu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\mu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{13}}{E_1} & -\frac{\mu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Z podmínky symetrie matice poddajnosti vyplývá

$$\frac{\mu_{ij}}{E_i} = \frac{\mu_{ji}}{E_j} \quad (2.18)$$

2.1.2.4 Vztahy při libovolné orientaci hlavního směru napětí



Obr. 2.3 Kompozit s hlavními materiálovými směry (L, T) orientovanými pod úhlem Φ vzhledem k osám x, y [1]

Pro dvourozměrný případ jsou transformační vztahy ze souřadnicových os x – y do os L – T ve tvaru [1]

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ (1/2)\gamma_{LT} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ (1/2)\gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos^2\Phi & \sin^2\Phi & 2\sin\Phi\cos\Phi \\ \sin^2\Phi & \cos^2\Phi & -2\sin\Phi\cos\Phi \\ -\sin\Phi\cos\Phi & \sin\Phi\cos\Phi & \cos^2\Phi - \sin^2\Phi \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

2.2 Velké deformace

Velká deformace (přetvoření) nastává, pokud je přetvoření větší než 1%. Pro malé deformace jsou délková přetvoření a normálová napětí vztažena k nedeformovaným rozměrům elementu. U velkých deformací jsou však rozměry podstatně odlišné od nedeformovaných, na to je třeba brát ohled, a proto jsou zavedeny různé definice tenzorů napětí a přetvoření [6].

2.2.1 Tenzory popisující stav deformace v bodě tělesa

2.2.1.1 Green-Lagrangeův tenzor konečných přetvoření

Poměrná přetvoření jsou vztažena k nedeformovaným rozměrům. Je respektováno i natáčení elementu [6].

$$E_{ij}^L = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right] \quad (2.22)$$

Tento tenzor využívá Einsteinova sčítacího pravidla. Díky němu je možné zjednodušit obecné tenzorové zápisy. Vyskytuje-li se v některém členu opakovaný (sčítací) index (zde index k), provádí se sumace přes tento index. Vztah (2.22) je třeba interpretovat následovně [6]

$$E_{ij}^L = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right] \quad (2.23)$$

2.2.1.2 Almansi-Hamelův tenzor konečných přetvoření

Poměrné přetvoření se vztahuje k deformovaným rozměrům. Použití je omezeno tím, že deformované souřadnice nejsou předem známy [6].

$$E_{ij}^A = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right] \quad (2.24)$$

Tento tenzor také využívá Einsteinova sčítacího pravidla.

2.2.1.3 Cauchyho (logaritmický) tenzor konečných přetvoření

Předešlé dva tenzory konečných přetvoření mají nedostatky v tom, že přírůstky jsou vztahovány ke konkrétním původním nebo konečným hodnotám i když mohou být už podstatně odlišné, zatímco u Cauchyho tenzoru jsou přírůstky vztahovány k aktuálním hodnotám. Indexy 0 a k zde značí počáteční a koncové hodnoty. Pro hlavní přetvoření tenzoru E^C platí [6]

$$E_i^C = \int_{X_{i0}}^{x_{ik}} \frac{dx_i}{x_i} = \ln \left(\frac{x_{ik}}{X_{i0}} \right) \quad (2.25)$$

2.2.1.4 Tenzor deformačního gradientu

Složkami tenzoru deformačního gradientu F jsou poměrná protažení λ , obecně zapsaná ve tvaru [6]

$$\lambda_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (2.26)$$

Maticový zápis tenzoru v obecném souřadnicovém systému je [6]

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Třetí invariant J tenzoru F udává poměrnou objemovou změnu elementu [6].

2.2.1.5 Cauchy-Greenův tenzor deformace

Tento tenzor pracuje také s poměrnými protaženími. Je odvozen z tenzoru deformačního gradientu. Lze rozlišit pravý C_R a levý C_L tenzor deformace [6].

$$C_R = F^T F \quad (2.28)$$

$$C_L = F F^T \quad (2.29)$$

Hlavní souřadnice jsou kvadráty poměrných protažení v hlavních směrech [6].

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

2.2.1.6 Vztahy pro vzájemný převod jednotlivých tenzorů přetvoření

Pro vzájemný převod jsou nejvhodnější složky tenzoru deformačního gradientu (poměrná protažení) [6].

$$E_i^L = \frac{\partial u_i}{\partial X_i} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_i} \right)^2 = \frac{1}{2} (\lambda_i^2 - 1) \quad (2.31)$$

$$E_i^A = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 = \frac{1}{2} (1 - \lambda_i^{-2}) \quad (2.32)$$

$$E_i^C = \ln \lambda_i \quad (2.33)$$

2.2.2 Tenzory popisující stav napjatosti v bodě tělesa

2.2.2.1 Piola-Kirchhoffův tenzor napětí 1. druhu

V praxi označován jako smluvní napětí. Definován jako skutečná elementární síla vztažená na nedeformovanou plochu elementu. Pro hlavní napětí tenzoru τ_i platí [6]

$$\tau_i = \frac{dF_i}{dX_j dX_k} \quad (2.34)$$

2.2.2.2 Cauchyho tenzor napětí

V praxi označován jako skutečné napětí. Definován jako skutečná elementární síla vztažená na deformovanou plochu elementu. Pro hlavní napětí tenzoru σ_i platí [6]

$$\sigma_i = \frac{dF_i}{dx_j dx_k} \quad (2.35)$$

2.2.2.3 Piola-Kirchhoffův tenzor napětí 2. druhu

Tento tenzor nemá jasný fyzikální význam. Používá se proto, že je symetrický i pro velká přetvoření a je energeticky konjugovaný s Green-Lagrangeovým tenzorem přetvoření. Je definován jako elementární síla (změněna oproti skutečné síle stejným poměrem, jako elementární rozměr v odpovídajícím směru) vztažená na nedeformovanou plochu elementu [6].

$$S_i = \frac{dF_{0i}}{dX_j dX_k} \quad (2.36)$$

Kde

$$dF_{0i} = \frac{\partial X_i}{\partial x_i} dF_i \quad (2.37)$$

2.2.2.4 Vztahy pro vzájemný převod jednotlivých tenzorů napětí

Nejvhodnější pro vzájemný přepočet jsou složky tenzoru deformačního gradientu (poměrná protažení) [6].

Vyjádření Cauchyho tenzoru napětí pomocí Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí 1. druhu

$$\sigma_i = \frac{\tau_i}{\lambda_j \lambda_k} \quad (2.38)$$

Vyjádření Cauchyho tenzoru napětí pomocí Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí 2. druhu

$$\sigma_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_j \lambda_k} S_i \quad (2.39)$$

Vyjádření Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí 2. druhu pomocí Piola-Kirchhoffova tenzoru napětí 1. druhu

$$S_i = \frac{1}{\lambda_i} \tau_i \quad (2.40)$$

2.3 Hyperelastický materiál

Hyperelastický materiál je popsán elastickou potenciální funkcí W (měrná deformační energie). Je to skalární funkce některého z tenzorů přetvoření, jejíž parciální derivace podle některé složky přetvoření pak určuje odpovídající složku napětí. Pro jednoznačné určení energie napjatosti je nutné pracovat se vzájemně si odpovídajícími tenzory napětí a přetvoření. Tyto dvojice tenzorů se nazývají energeticky konjugované tenzory. Jsou jimi např. Piola-Kirchhoffův tenzor napětí 2. druhu (S_{ij}) a Green-Lagrangeův tenzor konečných přetvoření (E_{ij}) nebo pravý Cauchy-Greenův tenzor konečných přetvoření (C_{ij}) [6].

$$S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} = 2 \frac{\partial W}{\partial C_{ij}} \quad (2.41)$$

Existují konstitutivní vztahy (vyjadřují měrnou deformační energii W) popisující izotropní materiál, anizotropní materiál nebo i speciálně měkké tkáně. U všech modelů jsou odděleně modelovány objemová a tvarová (deviátorová) složka deformace. Proto konstitutivní vztahy sestávají ze dvou částí:

Vliv změny objemu na energii napjatosti je popsán nejčastěji třetím invariantem tenzoru gradientu deformace J a konstantou popisující objemovou změnu (objemový modul pružnosti nebo jiná konstanta z něj odvozená).

Vliv tvarové změny je popisován nejčastěji pomocí modifikovaných invariantů některého z tenzorů přetvoření. Modifikace má za cíl oddělení tvarové změny od změny objemové [6].

3 EXPERIMENTÁLNÍ METODY URČOVÁNÍ VLASTNOSTÍ MĚKKÝCH TKÁNÍ

Měkké tkáně vykazují nelineární, anizotropní, viskoelastické chování a jsou schopny velkých přetvoření. Vlastnosti tkání se také liší typ od typu (Zatímco u některých tkání je síla měřitelná až po velkém prodloužení, jiné kladou značný odpor už při nepatrných posuvech) [10]. Kvůli tomu je třeba při modelování vlastností užít speciálních zatěžovacích a měřicích zařízení a brát tyto vlastnosti v úvahu. Dalším důležitým aspektem je, že mechanické vlastnosti živé a mrtvé tkáně se výrazně liší, a proto je ideální testování na živé tkáni [12]. S tím se pojí řada problémů, a proto se provádí hlavně testování in-vitro (na mrtvých zvířecích či lidských tkáních). Je zde snaha o to, přiblížit se co nejvíce stavům in-vivo, tudíž vzorky tkání by měly být při zatěžování ve svém normálním prostředí (fyziologický roztok, teplota) a měly by být co nejčerstvější. Při testování měkké tkáně se provádí také tzv. předcyklování vzorků, které má za úkol dosáhnout ustálené mechanické odezvy tkáně [12], [10].

3.1 Testování in-vitro

3.1.1 Tahové zkoušky

Toto testování je vhodné pro vzorky tenkých rozměrů jako např. vzorky cév, kůže nebo tenké vzorky jiných tkání (tloušťka totiž hraje významnou roli při uchytávání vzorku).

Jedná se o nejrozšířenější testování měkkých tkání. Princip je takový, že malý vzorek tkáně je na koncích připevněn svorkami, které jsou posunovány pomocí nějakého systému pohonů (většinou se jedná o lineární motory nebo motorem poháněné šrouby). Dále jsou zde zařízení, která měří zatěžovací síly a posuvy. Výsledné hodnoty bývají, kvůli objektivnímu vyjádření tuhosti, přepočteny na napětí (poměr zatěžovací síly a plochy průřezu) a přetvoření (poměr posuvu a nedeformované délky, poměr deformované a nedeformované délky apod.) [10].

Tahové testování se provádí nejčastěji v jednom směru (jednoosé testování) nebo dvou na sebe kolmých směrech (dvouosé testování).

Nevýhodou u jednoosé tahové zkoušky je, že se vlákna mohou vlivem zatížení přeskupit a to může změnit mechanické vlastnosti tkáně. Ze samotné jednoosé zkoušky také nelze vytvořit spolehlivé konstitutivní modely. Poslední dobou se tedy více užívá dvouosé testování, které dokáže poskytnout data pro plný popis materiálu [11].

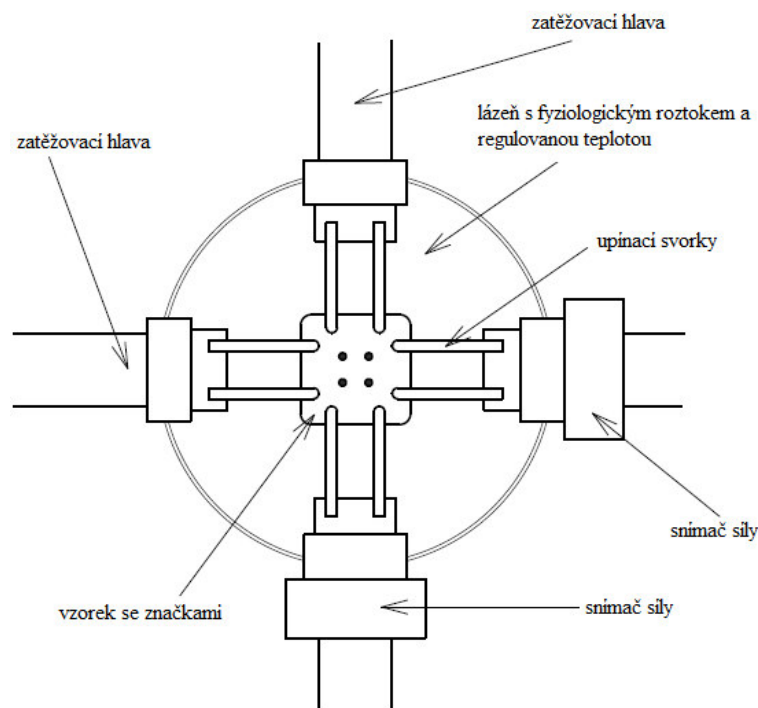
Dvouosé testování bylo poprvé popsáno a použito v [13], k testování králičí kůže. Byl také navržen typ zařízení, který je využíván prakticky dodnes.

3.1.1.1 Zařízení na dvouosé tahové testování

Zařízení se skládá z dvou na sebe kolmých zatěžovacích hlav, které zatěžují vzorek posouváním. Posouvání je zajištěno počítačem řízenými motory. Síly, které ve vzorku vlivem zatěžování vznikají, měří snímače. Vzorek je k zatěžovacím a snímacím částem připevněn upínacími svorkami a je ponořen v lázni s fyziologickým roztokem (teplota roztoku je udržována snímačem teploty, termostatem a ohříváčem). Vzorek je označen značkami a při zatěžování je nahráván kamerou, která je umístěna nad ním.

Výstupem z tahové zkoušky je soubor fotek, ze kterých se (díky značkám na vzorku) příslušným softwarem vyhodnotí data k sestrojení deformačně – napěťových křivek.

Zařízení lze použít i na jednoosé testování [10], [11].



Obr. 3.1 Schéma zařízení na dvouosou tahovou zkoušku

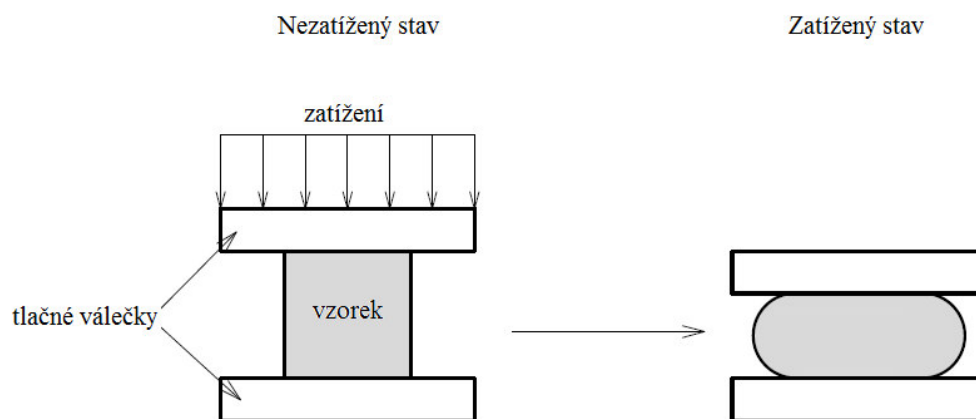
3.1.2 Tlaková zkouška

Tato zkouška je vhodná pro méně tuhé tkáně, jako je např. mozková, jaterní nebo ledvinová tkáň.

Byla použita např. k testování mechanických vlastností tkáně hovězích jater v [14].

Principem metody bylo vložení vzorku mezi dva tlačné válečky a poté jeho stlačování. Ideální by bylo, kdyby mezi tlačnými válečky a vzorkem nevznikalo žádné tření. Tím by vzorek zůstal válcový a napětí by bylo rovnoměrné a snadno definovatelné. Vzhledem k tomu, že to není možné zajistit a výpočet zahrnující tření by byl velmi komplikovaný, byla zkouška provedena bez prokluzu vzorku. Tím však bylo způsobeno nerovnoměrné rozložení napětí ve vzorku. Z toho důvodu byl do výpočtu zaveden faktor korekce.

Výstupem z tohoto testování byly opět deformačně – napěťové křivky [14]. Nevýhodou metody může být to, že testování probíhá pouze v jednom směru, takže nemusí být vždy postačující, co se týče např. popisu anizotropie. V [14] bylo také uvedeno, že velikost vzorku má vliv na výše zmíněný faktor korekce a že nejvhodnějšími jsou vzorky malých rozměrů.

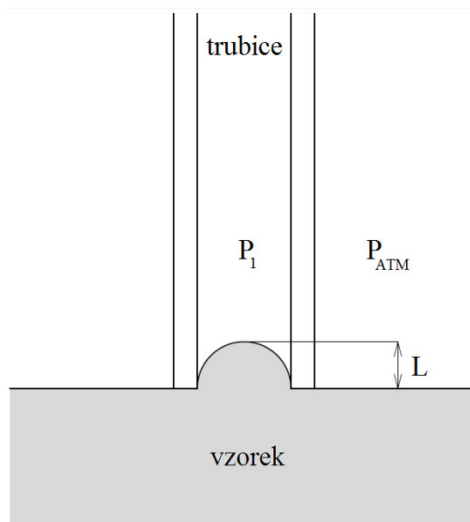


Obr. 3.2 Schéma jednoosého tlakového testování [14]

3.1.3 Metoda aspirace

Dříve byla používána k určení mechanických vlastností membrán červených krvinek [15] a k určení mechanických vlastností endotelu (vrstva buněk vystylající vnitřní povrch cév) [16]. Později byla tato metoda prezentována jako metoda měření vlastností měkkých tkání [10].

Principem metody je přiložení úzké trubice na zkoumanou tkáň a poté snížení tlaku v trubici. Výsledkem rozdílu tlaků je částečné „vcucnutí“ (aspirace) tkáně. Tlak v trubici je měřen senzorem a kamera zaznamenává tvar profilu aspirované tkáně. Z těchto dat je stanovena závislost výšky aspirované tkáně na rozdílu tlaků. Ta potom slouží ke stanovení parametrů konstitutivní rovnice materiálu [10].



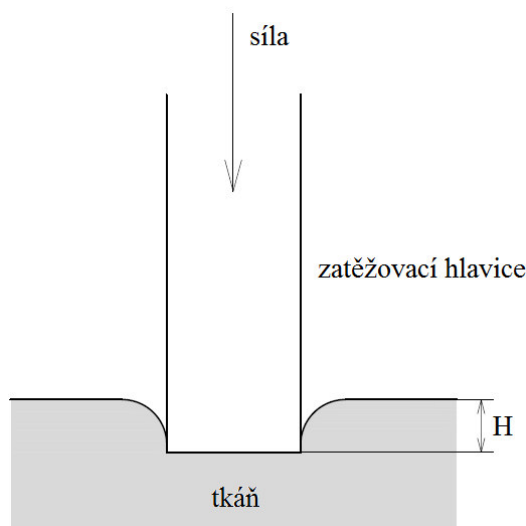
Obr. 3.3 Schéma metody aspirace [10]

Tato metoda má několik výhod oproti ostatním. Zatížení tkáně je provedeno velmi jednoduše rozdílem tlaků místo složitých zatěžovacích mechanismů. Volbou menší trubice je možné zjistit lokální vlastnosti. Největší výhodou jsou asi jasně a jednoduše popsitelné okrajové podmínky, což usnadňuje stanovení parametrů konstitutivní rovnice [10].

3.2 Testování in-vivo

3.2.1 Tlakové testování

Tato metoda byla poprvé popsána v [20]. Je to nejrozšířenější in-vivo metoda. Jedná se o metodu podobnou tlakovému testování in vitro s tím rozdílem, že zatěžovací hlavice zařízení je menší než testovaný objekt. Existují dva typy zatěžovacích hlavice, kulová a válcová. Princip metody je takový, že zařízení (vždy nějakým způsobem ukotvené) promáčkne zatěžovací hlavicí testovanou tkáň proti tvrdému materiálu (většinou se jedná o kost, která je v porovnání s testovanou tkání velmi tuhá). Zařízení změří zatěžovací sílu a hloubku promáčknutí, ze které jsou potom vyhodnocena potřebná data. Pro kalkulaci elastických parametrů bylo vytvořeno několik přepočtových vztahů pro rozdílné tvary zatěžovacích hlavice. Experimenty je možné provádět invazivně (testování vnitřních orgánů) i neinvazivně (testování kůže), což je velkou výhodou [10], [18], [19].



Obr. 3.4 Schéma metody a způsobu promáčknutí

3.2.2 Ultrazvukové metody

3.2.2.1 Kombinace ultrazvuku a tlakového testování

Toto testování je velmi výhodné, protože umožňuje provádět tlakové testování bez dalších měření geometrických uspořádání a okrajových podmínek. Zatěžovací hlavice je zde zároveň i sondou, která vysílá a přijímá zvukové vlny. Tím je možné měřit deformaci i sílu pomocí jednoho zařízení. V [21] bylo vytvořeno zařízení o velikosti pera, kterým je tkáň manuálně zmáčknutá a axiální síla a deformace jsou změřeny.

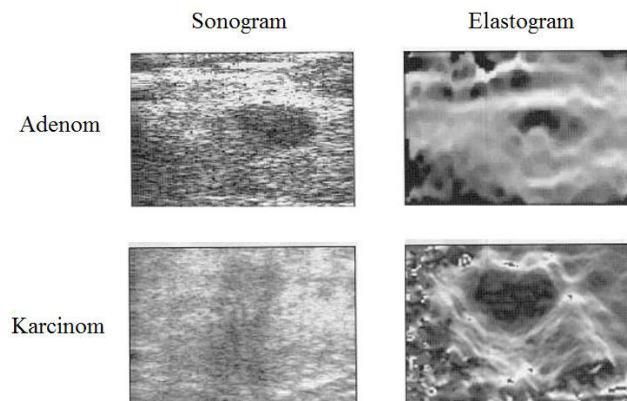
Tato metoda také umožňuje změřit deformaci jednotlivých vrstev vícevrstvého materiálu [21] (tím umožňuje oddělit např. svalovou tkáň od tukové tkáně apod.)

3.2.2.2 Elastografie

Metoda byla poprvé popsána v [22]. V této metodě je vytvořeno deformační pole (nejčastější způsoby deformování jsou vibrace, malé stlačení, deformace normálním fyziologickým procesem uvnitř tkáně a ultrazvukem vytvořený tlak nebo vlnění). Deformační pole je poté získáno srovnáním ultrazvukových snímků před a po zatížení.

Za předpokladu, že je napětíové pole konstantní, lze chápat změřené deformační pole jako míru prostorového rozložení elasticity. Ta je vyobrazena na obrázcích zvaných elastogramy. Je možné změřit lokální elastické vlastnosti tkáně kombinací s teoretickým odhadem deformačního pole. Další princip způsobu určení elastických vlastností je založen na faktu, že se příčné vlnění šíří rychleji skrz tužší tkáň.

Tato metoda umožňuje zkoumat elastické vlastnosti složitých tkání a odhalit rakovinné uzly (ty mají jiné elastické vlastnosti než zdravá tkáň) a je hojně využívána v lékařství [5], [23].



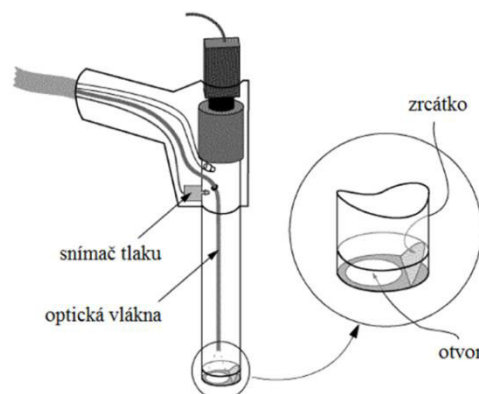
Obr. 3.5 Srovnání elastogramu a sonogramu adenomu a karcinomu [23]

3.2.2.3 Další ultrazvukové metody

Další zajímavá ultrazvuková metoda a zařízení bylo navrženo v [26]. Spojením Newtonova druhého pohybového zákona a Hookeova zákona zde byl stanoven vztah, který udával spojitost mezi tuhostními konstantami a rychlostí zvuku. Byly provedeny testy na živých i mrtvých tkáních, avšak bylo zjištěno, že ke spolehlivému vyhodnocení je zapotřebí více parametrů.

3.2.3 Dynamická in-vivo metoda aspirace

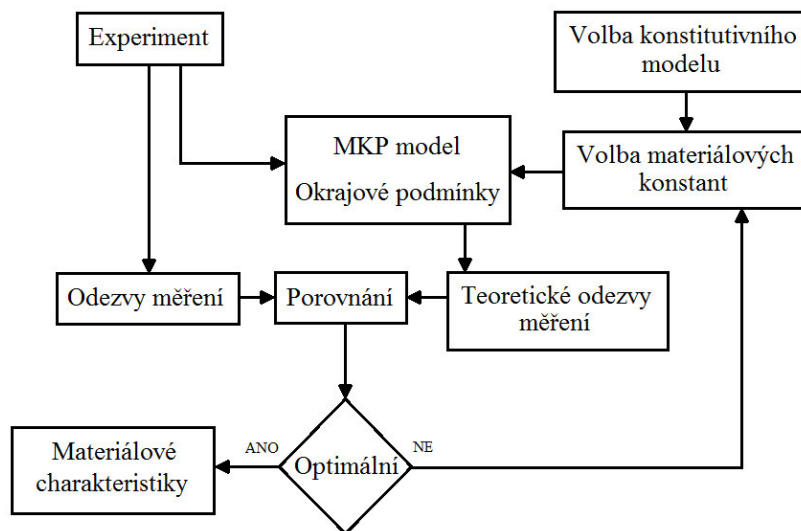
Invazivní metoda navržená a použitá v [10], kde bylo také navrženo speciální zařízení, měřící deformaci z profilu aspirované tkáně a tlak v čase. Skládá se z optických vláken, které osvětlují aspirovanou tkáň, zrcátka, které umožňuje pozorovat profil aspirované tkáně i ze shora, snímače tlaku a kamery. Principem stejná metoda jako metoda popsaná v kapitole 3.1.3.



Obr. 3.6 Zařízení pro in-vivo aspirační testování [10]

3.3 Vyhodnocování experimentů

Vyhodnocování materiálových charakteristik (konstant konstitutivních vztahů) probíhá inverzně. Důležitá je volba vhodného konstitutivního vztahu, kde se odhadem zvolí konstanty a tato teoretická křivka je poté porovnávána s experimentální křivkou. Konstanty jsou následně upravovány tak dlouho, dokud teoretická a experimentální křivka nejsou téměř totožné (fitování).



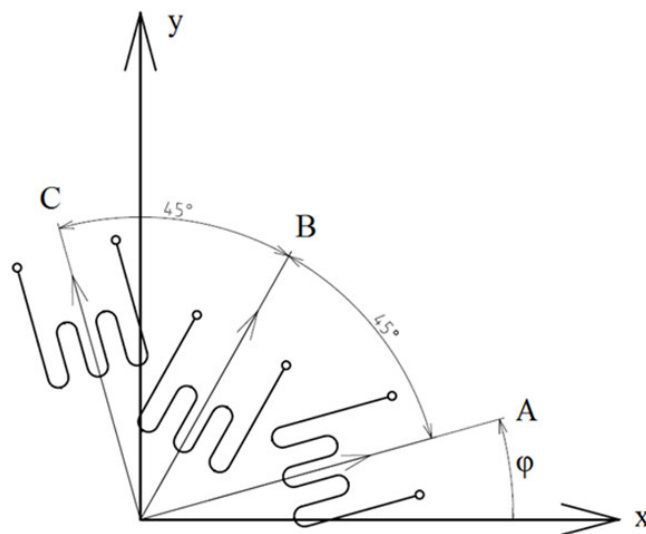
Obr. 3.7 Blokové schéma vyhodnocování materiálových charakteristik

Na ústavu mechaniky těles, mechaniky a biomechaniky FSI VUT v Brně je využíván program Hyperfit vytvořený Ing. Skácelem, Ph.D. Ten umožňuje fitování parametrů hyperelastických konstitutivních modelů [24].

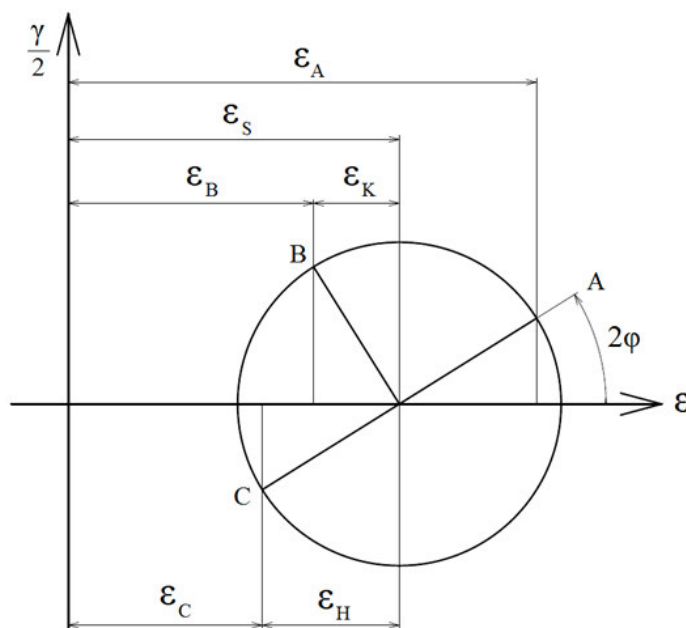
4 METODA URČENÍ HLAVNÍCH MATERIÁLOVÝCH SMĚRŮ

4.1 Popis určení hlavních přetvoření pomocí tenzometrických růžic

O odporový tenzometr je elektrotechnická součástka, díky které lze pomocí piezorezistivního jevu měřit přetvoření v jednom směru. U materiálů nebo součástí, kde nejsou známy hlavní směry přetvoření, se používají speciální tzv. tenzometrické růžice (součást složená z několika tenzometrů, které jsou vzájemně natočené, většinou pod úhlem 45°), za účelem určení hlavních přetvoření, hlavních napětí nebo jejich směrů. V rovině je výpočet hlavních přetvoření a jejich směrů realizován pomocí jedné Mohrovy kružnice [25]. Z obecných tenzorových vlastností vyplývá, že v prostoru je k zobrazení tenzoru zapotřebí tří Mohrových kružnic.



Obr. 4.1 schéma tenzometrické růžice (s vyznačenými směry orientace tenzometrů A, B a C) natočené od hlavního směru přetvoření o úhel φ



Obr. 4.2 přetvoření změřená tenzometrickou růžicí vyjádřená Mohrovou kružnicí

Výpočet hlavních přetvoření ε_1 a ε_2 a úhlu orientace hlavních směrů přetvoření φ je dán vztahy [25]

$$\varepsilon_S = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2} \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_H = \frac{\varepsilon_A - \varepsilon_C}{2} \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_K = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C - 2\varepsilon_B}{2} \quad (4.3)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_S + \sqrt{\varepsilon_H^2 + \varepsilon_K^2} \quad (4.4)$$

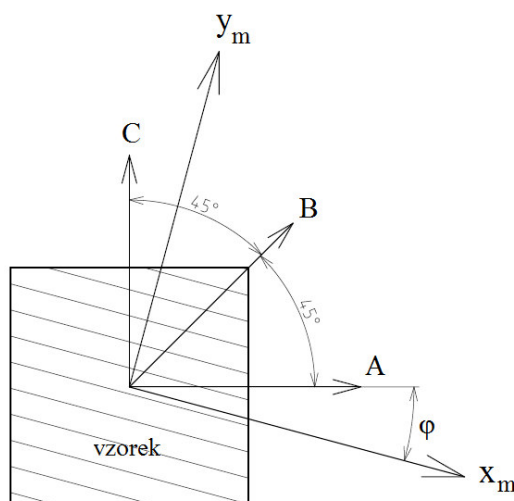
$$\varepsilon_2 = \varepsilon_S - \sqrt{\varepsilon_H^2 + \varepsilon_K^2} \quad (4.5)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \frac{\varepsilon_K}{\varepsilon_H} \quad (4.6)$$

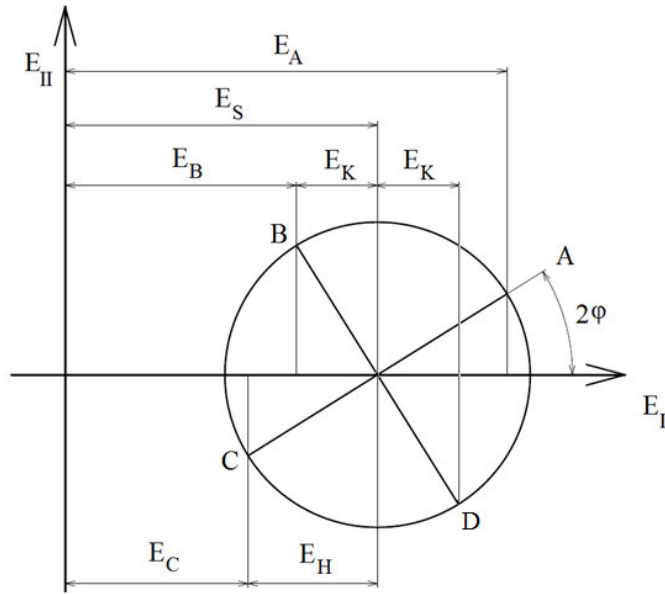
Vzhledem ke skutečnosti, že vztah (4.6) ignoruje znaménka, je nutné podotknout, že orientace úhlu φ je stejná v Mohrově diagramu i ve skutečnosti.

4.2 Aplikace pro tenzor materiálových konstant

U ortotropního materiálu v rovině je třeba vzorek testovat minimálně ve třech směrech natočených pod úhlem 45° . Pro tuto úlohu se jako nejvhodnější jeví jednoosé tahové testování. Z naměřených hodnot modulů pružnosti je poté možné sestavit Mohrovu kružnici a určit hlavní materiálové směry.



Obr. 4.3 Směry testování A, B, C pootočené vůči hlavnímu materiálovému směru o úhel φ



Obr. 4.4 Změřené moduly pružnosti vyjádřené Mohrovou kružnicí

Z hodnot ve třech směrech je také možné spočítat teoretickou hodnotu odezvy čtvrtého směru. Pokud by tedy experimentem bylo měření odezvy ve čtyřech směrech, šla by tato teoretická hodnota porovnat s naměřenou a tím určit odchylku.

Hodnoty hlavních modulů pružnosti materiálu E_1 a E_2 a hodnotu úhlu orientace hlavního materiálového směru φ je možné spočítat z následujících vztahů.

$$E_S = \frac{E_A + E_C}{2} \quad (4.7)$$

$$E_H = \frac{E_A - E_C}{2} \quad (4.8)$$

$$E_K = \frac{E_A + E_C - 2E_B}{2} \quad (4.9)$$

$$E_1 = E_S + \sqrt{E_H^2 + E_K^2} \quad (4.10)$$

$$E_2 = E_S - \sqrt{E_H^2 + E_K^2} \quad (4.11)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \frac{E_K}{E_H} \quad (4.12)$$

Tímto způsobem je možné počítat hlavní moduly a natočení i pomocí jiné kombinace tří modulů např. E_B , E_C a E_D .

Dopočet teoretické hodnoty modulu pružnosti v případném čtvrtém směru je dán vztahem

$$E_{Dteor.} = E_S + E_K \quad (4.13)$$

Výpočet odchylky teoretické a experimentální hodnoty čtvrtého směru

$$\delta = \frac{|E_{Dteor.} - E_D|}{E_D} \cdot 100 \quad (4.14)$$

4.2.1 Volba vhodné definice přetvoření

Výstupem z jednoosé tahové zkoušky je křivka napětí – deformace. Pro materiál aorty jsou typické velké deformace. Je tedy nutné zvolit vhodnou definici přetvoření.

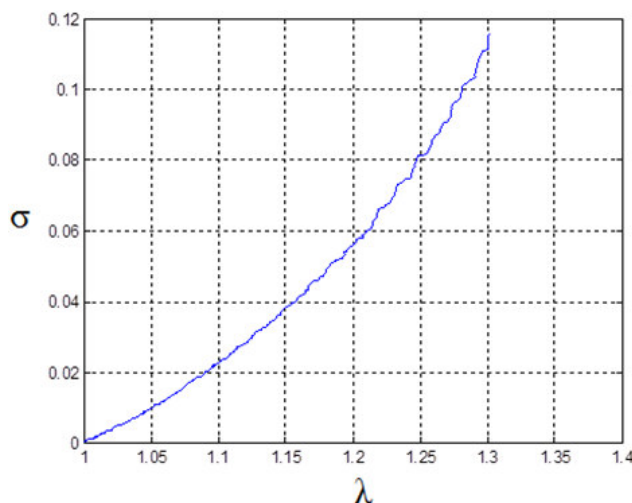
Jako nejvhodnější se jeví složky tenzoru deformačního gradientu (poměrná protažení)

$$\lambda = \frac{\Delta L + L_0}{L_0} \quad (4.15)$$

Kde $\Delta L + L_0$ je deformovaná délka vzorku a L_0 je nedeformovaná délka vzorku.

4.2.2 Definice modulu pružnosti

Vzhledem k nelineární závislosti napětí – deformace nelze použít klasickou definici modulu pružnosti. Bylo by možné spočítat tzv. inkrementální modul pružnosti pomocí tečny křivky napětí – deformace. To by však mohlo, vzhledem k nerovnostem křivky (dané nepřesnostmi měření), vést ke značným chybám a nepříznivě ovlivnit výpočet. Z tohoto hlediska se jako vhodnější způsob jeví výpočet modulu ze sečny křivky. Jsou tedy definovány dva moduly pružnosti pro každý směr testování, jeden pro malé deformace a druhý pro velké deformace.



Obr. 4.5 Křivka napětí – protažení u jednoosé tahové zkoušky vzorku aorty

Definované moduly je možné vyhodnotit vztahem

$$E = \frac{\sigma(\lambda_2) - \sigma(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (4.16)$$

Při malých deformacích protíná sečna křivku v oblasti odpovídající 1% a 10% přetvoření. Umožňuje to stabilnější výsledek (neprojevují se nerovnosti a počáteční výkyvy křivky). V této oblasti je nelinearita zanedbatelná. Platí tedy $\lambda_1 = 1,01$ a $\lambda_2 = 1,1$.

Při velkých deformacích protíná sečna křivku v oblasti odpovídající 20% a 25% přetvoření. Hodnoty poměrných protažení tedy jsou $\lambda_1 = 1,2$ a $\lambda_2 = 1,25$.

V (4.16) je $\sigma(\lambda_i)$ napětí z experimentu odpovídající příslušnému poměrnému protažení.

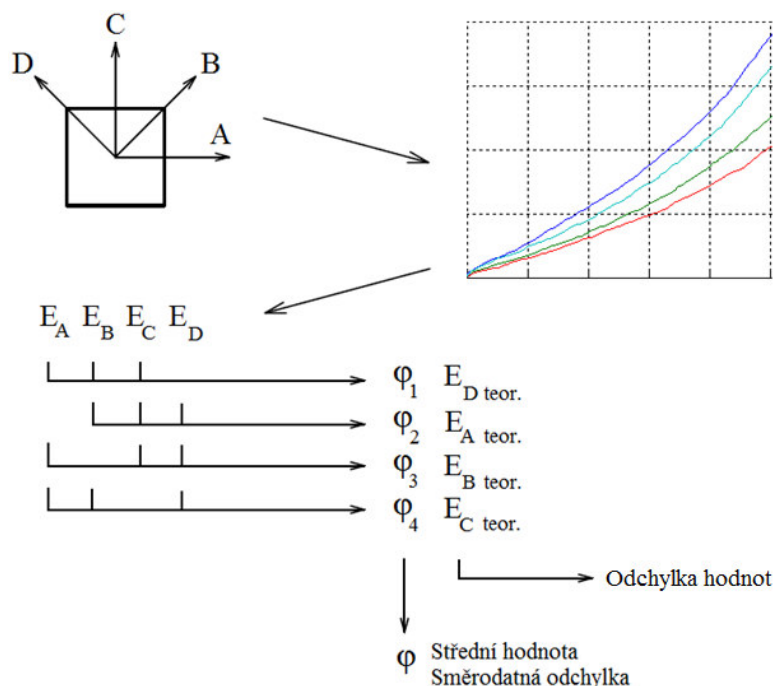
4.2.3 Algoritmus řešení

- Tahové testování vzorku ve čtyřech směrech (pod úhlem 45° v rovině)
- Vyhodnocení experimentů (křivka napětí – protažení pro každý směr)
- Vyhlazení křivek použitím klouzavého průměru pomocí rovnice (4.17)

$$\lambda_i^* = \frac{\lambda_{i-2} + 2\lambda_{i-1} + 4\lambda_i + 2\lambda_{i+1} + \lambda_{i+2}}{10} \quad (4.17)$$

Počet (rozsah) parametrů této rovnice závisí na hustotě a nepřesnostech vyhlazovaných dat. Tvar rovnice (4.17) byl zvolen proto, že při menším počtu bodů zahrnutých do klouzavého průměru nebyl šum plně odstraněn a křivka napětí – protažení vykazovala stále úseky s negativní směrnici. Váhy jednotlivých členů byly zvoleny tak, aby nebyl nadměrně snižován vliv středního bodu hodnoceného úseku křivky. Kdyby byly data hustší, bylo by zapotřebí zvolit větší rozsah parametrů, jinak by nebylo vyhlazení dostatečné. Pro vyhlazení dat vyhodnocených z experimentů je rovnice optimální.

- Výpočet dvou modulů pružnosti ze sečen křivky pro každý směr rovnicí (4.16)
- Výpočet čtyř úhlů natočení hlavního materiálového směru vždy ze tří definovaných modulů pružnosti ($E_A - E_B - E_C$, $E_B - E_C - E_D$, $E_C - E_D - E_A$, $E_D - E_A - E_B$) pro oba výše uvedené rozsahy deformace pomocí vztahů (4.7) – (4.12)
- Dopočet teoretických hodnot čtvrtých definovaných modulů pružnosti vztahem (4.13) a určení odchylky teoretické a experimentální hodnoty vztahem (4.14)
- Stanovení střední hodnoty a směrodatné odchylky z hodnot vypočtených úhlů natočení



Obr. 4.6 Schéma algoritmu řešení

5 EXPERIMENT A VÝSLEDKY

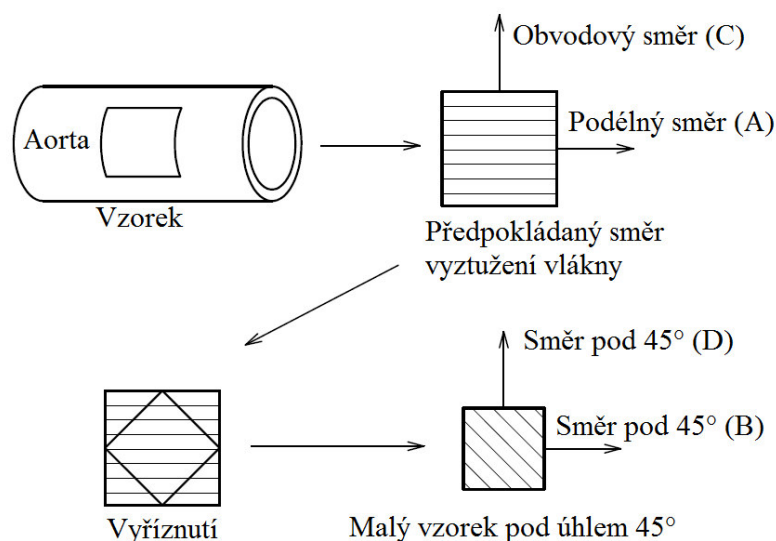
Experiment byl prováděn na třech vzorcích prasečích aort. Ideální vzorek pro jednoosou tahovou zkoušku by měl být úzký a dlouhý (kvůli eliminaci vlivu uchycení na napětí v měřeném průřezu). Takový vzorek by pak ale nebylo možné zatěžovat i v jiných směrech a vzhledem k nehomogenitě tkáně nelze získat vzorky s identickými vlastnostmi. Proto byl pro tento experiment volen čtvercový vzorek (vzorek pro dvouosou tahovou zkoušku), na němž je možné provést testy ve všech požadovaných směrech. Kvůli tomuto tvaru a rozměrům bylo zatížení realizováno dvouosou tahovou zkouškou v poměru 5:1 (dvouosá zkouška, která se na použitém zařízení nejvíce podobá jednoosé). Vliv zatěžování v kolmém směru a vliv koncentrátorů napětí (úchytné kleště) na napětí v měřené oblasti vzorku jsou zanedbávány.

Vzorky byly připraveny následujícím způsobem.

- Vyříznutí vzorků z aorty
- Očištění vzorků
- Změření vzorků
- Označení vzorků čísly a značkami pro vyhodnocení přetvoření

Vzorky byly poté po jednom testovány na dvouosém testovacím zařízení, jaké bylo popsáno v kapitole 3.1.1.1 v laboratoři ústavu mechaniky těles FSI VUT v Brně následujícím způsobem.

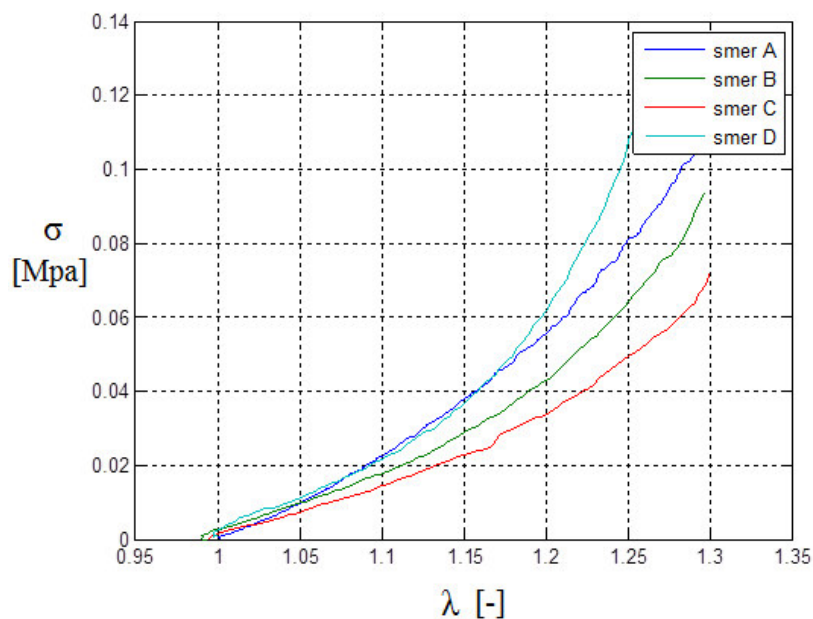
- Předcyklování vzorku
- Zatěžování a měření odezvy vzorku v poměru 5:1 ve směrech A a C, kde A je předpokládaný směr vyztužení vláknů a C je kolmý směr
- Vyříznutí menšího vzorku pod úhlem 45°
- Předcyklování
- Zatěžování a měření odezvy vzorku v poměru 5:1 ve směrech B a D



Obr. 5.1 Schéma geometrie vzorku a směrů zatěžování

Vyhodnocení dat ze souboru fotografií a naměřených sil zajistil program Tibixus (autor Ing. Skácel Ph.D. [17]). Dále byla data zpracována podle uvedeného algoritmu a výsledky byly zapsány do tabulek, kde $E_{\text{exp.}}$ je naměřená hodnota definovaného modulu pružnosti a $E_{\text{teor.}}$ je dopočítaná hodnota definovaného modulu pružnosti, δ je odchylka těchto hodnot a φ je úhel orientace hlavního materiálového směru.

5.1 Vzorek 1



Obr. 5.2 Křivky napětí – protažení vzorku 1

Výsledné hodnoty vzorku 1 (deformace 1 – 10%)

	$E_{\text{exp.}}$ [Mpa]	$E_{\text{teor.}}$ [Mpa]	δ [%]	φ [°]
Směr A	0,1848	0,1951	5,6	2,6
Směr B	0,1506	0,1402	6,9	7
Směr C	0,1134	0,1238	9,1	3,4
Směr D	0,1580	0,1476	6,6	-1,2

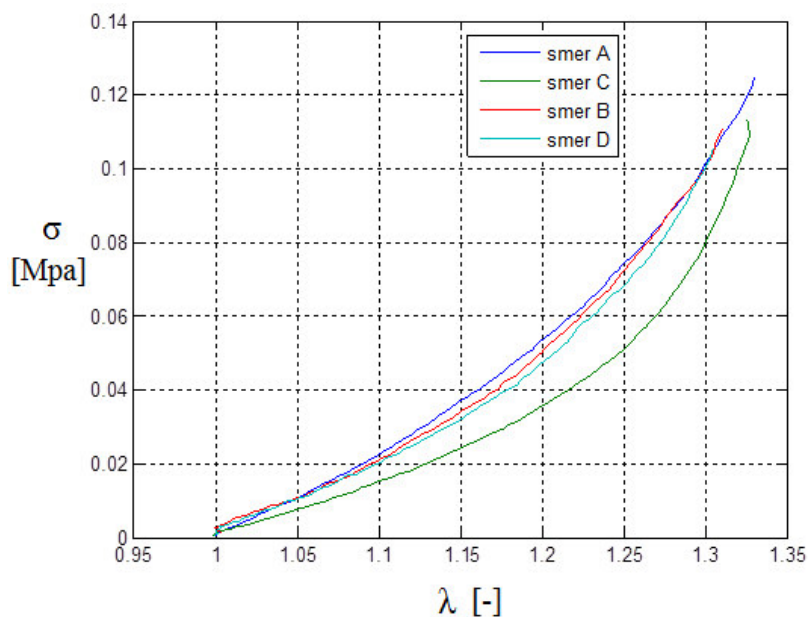
Tab. 5.1

Výsledné hodnoty vzorku 1 (deformace 20 – 25%)

	$E_{\text{exp.}}$ [Mpa]	$E_{\text{teor.}}$ [Mpa]	δ [%]	φ [°]
Směr A	0,5	0,95	88,5	16,8
Směr B	0,41	-0,03	108	38,6
Směr C	0,3	0,75	146,5	60
Směr D	0,84	0,396	53	-2,4

Tab. 5.2

5.2 Vzorek 2



Obr. 5.3 Křivky napětí – protažení vzorku 2

Výsledné hodnoty vzorku 2 (deformace 1 – 10%)

	$E_{\text{exp.}} [\text{Mpa}]$	$E_{\text{teor.}} [\text{Mpa}]$	$\delta [\%]$	$\varphi [^\circ]$
Směr A	0,1951	0,1990	2	11,3
Směr B	0,1465	0,1426	2,65	13,1
Směr C	0,1248	0,1287	3,1	12,4
Směr D	0,1773	0,1734	2,2	10,5

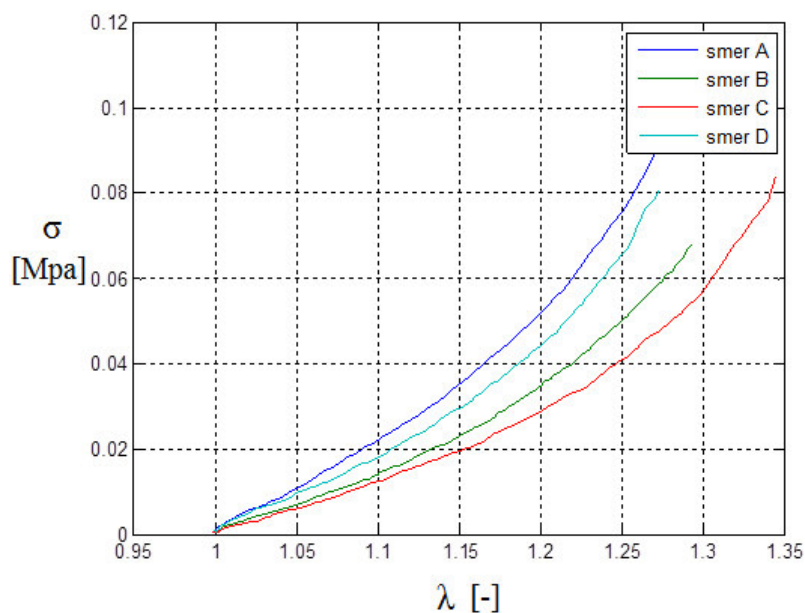
Tab. 5.3

Výsledné hodnoty vzorku 2 (deformace 20 – 25%)

	$E_{\text{exp.}} [\text{Mpa}]$	$E_{\text{teor.}} [\text{Mpa}]$	$\delta [\%]$	$\varphi [^\circ]$
Směr A	0,4152	0,3104	25,2	86
Směr B	0,4417	0,3170	28,2	20,6
Směr C	0,3104	0,4152	33,75	29,5
Směr D	0,4086	0,2839	30,5	-28,2

Tab. 5.4

5.3 Vzorek 3



Obr. 5.4 Křivky napětí – protažení vzorku 3

Výsledné hodnoty vzorku 3 (deformace 1 – 10%)

	$E_{\text{exp.}}$ [Mpa]	$E_{\text{teor.}}$ [Mpa]	δ [%]	ϕ [°]
Směr A	0,1726	0,1630	5,6	16
Směr B	0,1153	0,1249	8,3	10,8
Směr C	0,1044	0,0948	9,2	12,6
Směr D	0,1520	0,1616	6,3	17,1

Tab. 5.5

Výsledné hodnoty vzorku 3 (deformace 20 – 25%)

	$E_{\text{exp.}}$ [Mpa]	$E_{\text{teor.}}$ [Mpa]	δ [%]	ϕ [°]
Směr A	0,4692	0,4955	5,6	12,9
Směr B	0,3087	0,2825	8,5	16,7
Směr C	0,2439	0,2702	10,8	15,7
Směr D	0,4307	0,4044	6,1	11,5

Tab. 5.6

6 VYHODNOCENÍ HLAVNÍCH MATERIÁLOVÝCH SMĚRŮ

6.1 Vzorek 1

	Průměr úhlů natočení [°]	Směrodatná odchylka [°]
Počáteční hodnoty	2,94	2,9
Koncové hodnoty	28,24	34,4

Tab. 6.1 Vyhodnocení vzorku 1

6.2 Vzorek 2

	Průměr úhlů natočení [°]	Směrodatná odchylka [°]
Počáteční hodnoty	11,83	1,03
Koncové hodnoty	26,94	43,25

Tab. 6.2 Vyhodnocení vzorku 2

6.3 Vzorek 3

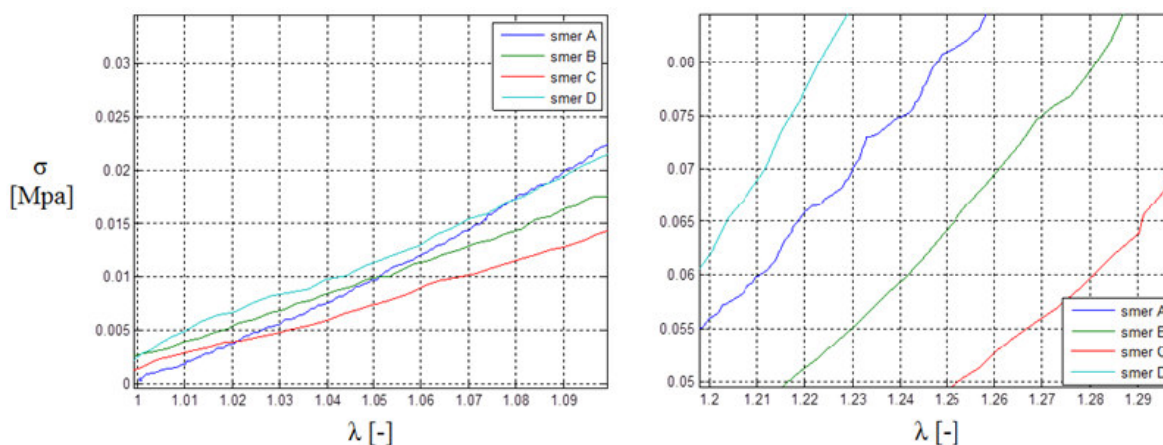
	Průměr úhlů natočení [°]	Směrodatná odchylka [°]
Počáteční hodnoty	14,13	2,5
Koncové hodnoty	14,21	2,09

Tab. 6.3 Vyhodnocení vzorku 3

7 DISKUSE

Tenzor elastických konstant je v teorii elasticity definován pro malé deformace a jeho použití v oblasti velkých deformací není zcela korektní. Cílem této práce je právě ověřit použitelnost této teorie založené na tenzorových vlastnostech elastických parametrů v oblasti velkých deformací. Dále tedy bude rozsah deformací 1 – 10% označován jako „malé deformace“, zatímco termín „velké deformace“ se bude vztahovat k rozsahu smluvních přetvoření 20 – 25%.

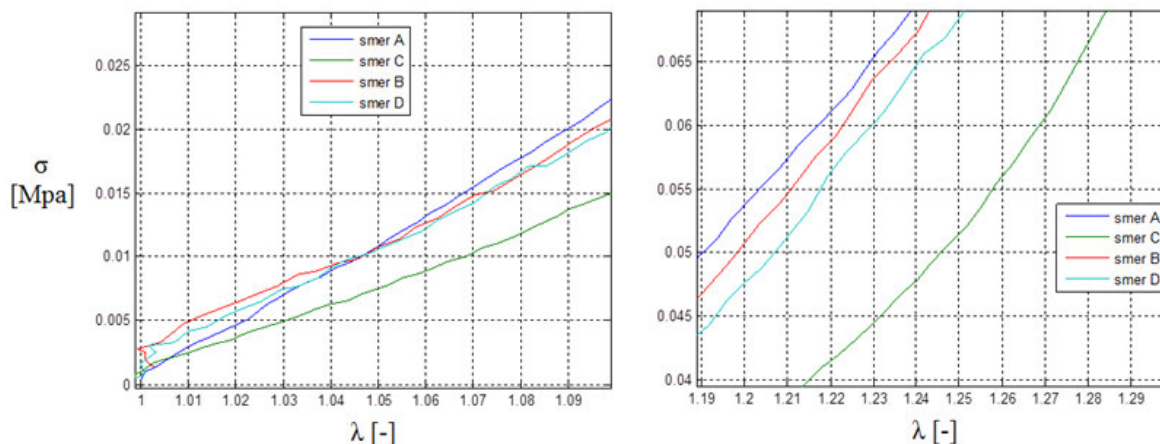
U vzorku 1 jsou malé hodnoty odchylky (jednotky procent, viz tab. 5.1) mezi teoretickou a naměřenou hodnotou modulu pružnosti v oblasti malých deformací, což znamená, že moduly zde vykazují s přiměřenou přesností tenzorové vlastnosti. Tak tomu však již není v oblasti velkých deformací (tab. 5.2). Pro malé deformace také určení hlavního směru materiálu z různých kombinací měření dává hodnoty s rozumným rozptylem a výsledný úhel se od nuly liší pouze v rámci statistické chyby (tab. 6.1). Znamená to, že vzorek byl opravdu zatěžován přibližně v hlavních materiálových směrech. Pro velké deformace sice dostáváme poměrně velkou střední hodnotu úhlu hlavního směru (28°), ale jeho směrodatná odchylka je ještě větší (34°), takže výsledek je zjevně irelevantní. Z obrázku (7.1) lze pozorovat, že tuhost v měřených směrech materiálu s rostoucí deformací roste nerovnoměrně, tj. vzorek je ve směru A na počátku nejtuhší, zatímco na konci je nejtuhší ve směru D. Zřejmě v důsledku toho nelze materiál tohoto vzorku popsat tenzorem materiálových konstant v oblasti velkých deformací.



Obr. 7.1 Počáteční a koncové křivky napětí – protažení vzorku 1

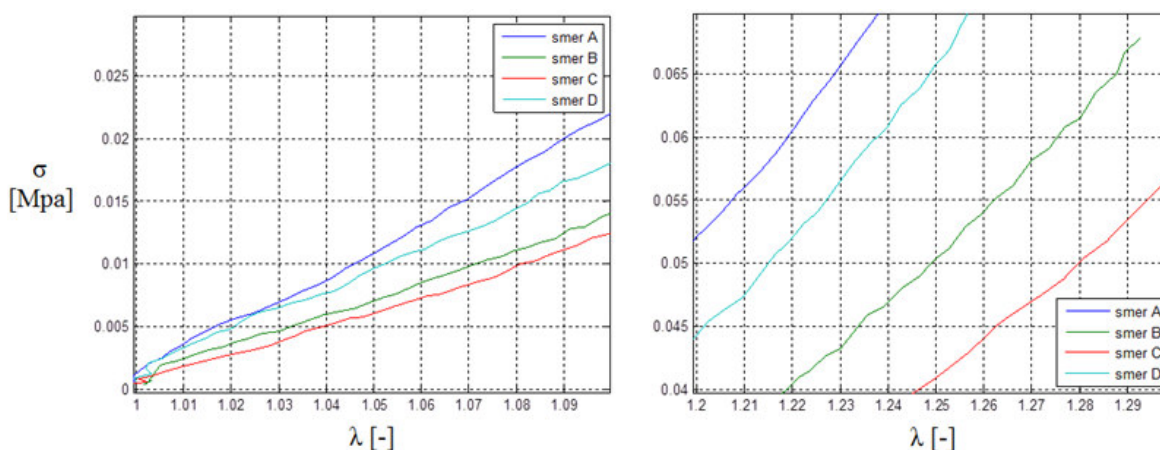
U vzorku 2 v oblasti malých deformací odchylky teoretických a experimentálních hodnot modulů pružnosti dosahují maximálně 3% (tab. 5.3). Moduly tedy i zde vykazují s přiměřenou přesností tenzorové vlastnosti. V oblasti velkých deformací však odchylky dosahují hodnot až 34% (tab. 5.4). Při určení hlavního materiálového směru v oblasti malých deformací dostáváme hodnoty s velmi malým (1° viz tab. 6.2) a je zřejmé, že směr zatěžování se o cca 11° lišil od hlavního materiálového směru. To mohlo být způsobeno nepřesnostmi při uchycení nebo vyřezání vzorku. V oblasti velkých deformací je hodnota směrodatné odchylky 43° (tab. 6.2) z čehož vyplývá, že střední hodnota úhlu natočení hlavního materiálového směru je zavádějící. Z obrázku (7.2) lze opět pozorovat nerovnoměrné zpevňování. To je zde dáno rychlejším nárůstem tuhostí ve směrech B a D. Tuhost vzorku na počátku je největší ve směru A. Na konci je

největší ve směru B. Z tohoto důvodu nelze materiál vzorku č. 2 v oblasti velkých deformací popsat tenzorem materiálových konstant.



Obr. 7.2 Počáteční a koncové křivky napětí – protažení vzorku 2

U vzorku 3 dosahují odchylky teoretických a experimentálních hodnot modulů pružnosti maximálně 10% v oblastech malých i velkých deformací (tab. 5.5 a tab. 5.6). Materiál je tedy i při velkých deformacích možné přibližně popsat tenzorem materiálových konstant a v obou oblastech se úhly natočení hlavního materiálového směru liší řádově méně než je velikost směrodatné odchylky (tab. 6.3), nedochází tedy k jejich natáčení. Tento fakt zřejmě souvisí s rovnoměrným (proporcionálním) zpevňováním vzorku ve všech směrech zatěžování, které lze pozorovat na obrázku (7.3). Směr zatěžování vzorku se opět odchyluje od hlavních materiálových os, tentokrát cca o 14° .



Obr. 7.3 Počáteční a koncové křivky napětí – protažení vzorku 3

Nerovnoměrné zpevňování vzorků 1 a 2 je zřejmě dáno zvlněním vláken kolagenu, která tvoří cévní stěnu. Z počátku zatěžování je zatížení přenášeno pouze vlákny elastinu (deformačně – napěťová charakteristika je téměř lineární). Vlákná kolagenu se při deformaci napřímí a v určité chvíli začnou také přenášet zatížení (deformačně – napěťová charakteristika se stane výrazně nelineární). Použitá metoda se proto jeví jako vysoce efektivní při malých deformacích (do 10% přetvoření), kde odchylky nepřesáhly 10%. U vzorků 1 a 2 však byly odchylky při velkých deformacích velmi vysoké, zřejmě vlivem nerovnoměrných zpevňování v různých směrech. Metodu určení hlavních

materiálových směrů při velkých deformacích tedy pro tyto vzorky nelze použít. Nelze ji ani použít pro popis rotace hlavních materiálových směrů při zatížení. Výsledky u vzorku č. 3 vykazují rozumnou přesnost i pro velké deformace a také určený úhel hlavních směrů je v rámci statistické chyby shodný pro velké i malé deformace. Příčinou může být proporcionální zpevňování vzorku, kdy vypočítané moduly přibližně odpovídají stejnému násobku hodnot určených pro malé deformace, pak mají rovněž tenzorové vlastnosti.

Je možné, že rovnoměrné zpevňování u vzorku 3 byla pouhá náhoda. Nebyl však proveden dostatečný počet experimentů na to, aby to bylo možné říct s jistotou. Anizotropie tkáně aorty je nicméně stále předmětem debat. Autor v [27] ve shrnutí uvádí případy, kdy vzorky měřené v obvodovém směru byly tužší než v podélném směru a také uvádí případ, kdy zdravá aorta měřená ve dvou směrech vykazovala izotropní chování. Z tohoto pohledu se přidavné testování pod úhlem 45° jeví jako velmi zajímavé a určení hlavních směrů především u složitějších geometrií (např. výdutě aorty) může mít velký praktický význam.

8 ZÁVĚR

Cílem práce bylo navrhnout metodu určování hlavních materiálových směrů tkáně stěny aorty z experimentu, za podmínek velkých přetvoření. Testování bylo provedeno na třech vzorcích zdravých prasečích aort. Podařilo se vytvořit metodu a algoritmus určení hlavních materiálových směrů, která pracuje s moduly pružnosti určenými ze sečen (pro každý směr testování jsou definovány dva moduly, jeden ze sečny z intervalu $\lambda = \langle 1,01; 1,1 \rangle$ (malé deformace) a druhý ze sečny z intervalu $\lambda = \langle 1,2; 1,25 \rangle$ (velké deformace). Tyto moduly jsou určeny ze čtyř směrů testování. Metoda je dvoudimenzionální, takže pomocí jedné Mohrovy kružnice jsou kombinací čtyř sečných modulů určeny čtyři úhly orientace hlavních materiálových směrů a čtyři odchylky teoretických a experimentálních hodnot (zvlášť pro malé a zvlášť pro velké deformace). Střední hodnota a směrodatná odchylka jsou vypočítány z hodnot úhlů orientace hlavních materiálových směrů pro každý vzorek. Metoda se jeví jako použitelná při malých deformacích, kde odchylky dosahovaly maximálních hodnot do 10%. Vlivem nerovnoměrného zpevňování však nelze metodu použít při velkých deformacích a při popisu rotace hlavních materiálových směrů při zatížení. Nerovnoměrné zpevňování je zřejmě způsobeno zvlněnými vlákny kolagenu a zabraňuje v popisu materiálu pomocí tenzoru materiálových konstant při velkých přetvořeních. Nicméně bylo by vhodné provést další experimenty, aby bylo možné s jistotou potvrdit tyto závěry.

9 POUŽITÁ LITERATURA

- [1] AGARWAL, B. D. a BROUTMAN, L. J. (1980) *Vláknové kompozity*. Nakladatelství technické literatury, Praha.
- [2] VRBKA, J. (2008) *Mechanika kompozitů* [online]. [cit. 2015-05-19]. Dostupné také z <http://www.vutbr.cz/www_base/priloha.php?dpid=83340>
- [3] BHIMJI, S. (2014) *Aortic Aneurysm*. EMedicineHealth [online]. [cit. 2015-05-18]. Dostupné z <http://www.emedicinehealth.com/aortic_aneurysm/article_em.htm>
- [4] RAGHAVAN, M. L., VORP, D. A. *Toward a biomechanical tool to evaluate rupture potential of abdominal aortic aneurysm: identification of a finite strain constitutive model and evaluation of its applicability*, Journal of Biomechanics. 2000, vol. 33.
- [5] Wikipedie [online] Dostupné z <<http://cs.wikipedia.org>>
- [6] BURŠA, J. *Konstitutivní modely*, studijní materiály [online]. [cit. 2015-05-18]. Dostupné z <<http://www.umt.fme.vutbr.cz/~jbursa/>>
- [7] BERILLIS, P. *The Role of Collagen in the Aorta's Structure*, The Open Circulation and Vascular Journal [online]. 2013, vol. 6. [cit. 2015-05-17]. Dostupné z <<http://benthamopen.com/contents/pdf/TOCVJ/TOCVJ-6-1.pdf>>
- [8] CARLISLE, C. R., COULAIS, C. a GUTHOLD, M. *The mechanical stress-strain properties of single electrospun collagen type I nanofibers*, Acta Biomaterialia [online]. 2010, vol. 6. [cit. 2015-05-19]. DOI: 10.1016/j.actbio.2010.02.050.
- [9] Skripta histologie a embryologie [online]. [cit. 2015-05-18]. Dostupné z <<http://old.lf3.cuni.cz/histologie/materialy/doc/skripta.pdf>>
- [10] VUSKOVIC, V. *Device for In-Vivo measurement of Mechanical Properties of Internal Human Soft Tissues*. Zurich, 2001. Dissertation. Swiss Federal Institute of Technology.

- [11] Instron [online]. [cit. 2015-05-10]. Dostupné z <<http://www.instron.com/en-us/testing-solutions/by-test-type/tension/soft-tissues-biaxial>>
- [12] BLACK, J. *Dead or alive: The problem of in-vitro tissue mechanics*, Journal of Biomedical Material Research. 1974, vol. 10, 377-389 s.
- [13] LANIR, Y., FUNG, Y. *Two dimensional mechanical properties of rabbit skin*, Journal of Biomechanics. 1974, vol. 7.
- [14] ROAN, E. *The Nonlinear Material Properties of Liver Tissue Determined From No-Slip Uniaxial Compression Experiments*, Journal of Biomechanical Engineering [online]. 2006, vol. 129, issue 3 [cit. 2015-05-19]. DOI: 10.1115/1.2720928.
- [15] EVANS, E. A. *New membrane concept applied to the analysis of fluid shear and micropipette-deformed red blood cells*, Journal of Biophysics. 1973, vol. 13, 941-954 s.
- [16] THERET, D. P., LEVESQUE, M., SATO, M., NEREM, R. M., WHEELER, L. T. *The Application of a Homogenous Half-Space Model in the Analysis of Endothelial Cell Micropipette Measurements*, Journal of Biomechanical Engineering. 1988, vol. 110, 190-199 s.
- [17] SKÁCEL, P. Software Tibixus [online]. [cit. 2015-05-19]. Dostupné z <http://www.umat.fme.vutbr.cz/pdf/pdf_projekt.php?id=15>
- [18] HAYES, W. C., KEER, L. M., HERMAN, G., MOCKROS, L. F. *A mathematical analysis for indentation tests of articular cartilage*, Journal of Biomechanics. 1972, vol. 5, 541-551 s.
- [19] ZHENG, Y., MAK, A. F. T. *Effective Properties for Lower Limb Soft Tissues from Manual Indentation Experiment*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Transactions on Rehabilitation Engineering. 1999, vol. 7, no. 3, 257-267 s.
- [20] SCHADE, H. *Untersuchungen zur Organfunktion des Bindegewebes. I. Die Elastizitätsfunktion des Bindegewebes und die intravitale Messung ihrer Störungen*. Zeitschrift für exp. Pathol. und Therapie. 1912, vol. 2

- [21] ZHENG, Y., MAK, A. F. T. *An ultrasound indentation system for biomechanical properties assessment of soft tissues in-vivo*, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Transactions on Biomedical Engineering. 1996, vol. 43, no. 9, 912-918 s. DOI: 10.1109/10.532125
- [22] OPHIR, J., CESPEDDES, I., PONNEKANTI, H., YAZDI, Y., LI, X. *Elastography: a quantitative method for imaging the elasticity of biological tissues*, Ultrasonic Imaging. 1991, Vol. 13, 111-134 s.
- [23] OPHIR, J., ALAM, S. K., GARRA, B. S., KALLEL, F., KONOFAGOU, E. E., KROUSKOP, T., MERRITT, C. R. B., RIGHETTI, R., SOUCHON, R., SRINIVASAN, S., VARGHESE, T. *Elastography: Imaging the Elastic Properties of Soft Tissues with Ultrasound*, J. Med. Ultrasonics. 2002, vol. 29, 155-171 s.
- [24] SKÁCEL, P. Software Hyperfit [online]. [cit. 2015-05-19].
Dostupné z <http://www.umt.fme.vutbr.cz/pdf/pdf_projekt.php?id=34>
- [25] Calculating Principal Strains using a Rectangular Strain Gage Rosette [online]. [cit. 2015-05-19]. Dostupné z <http://www.engineering.union.edu/~curreyj/MER-214_files/Analysis%20of%20a%20Strain%20Gage%20Rosette.pdf>
- [26] MAASS, H., KÜHNAPFEL, U. *Noninvasive Measurement of Elastic Properties of Living Tissue* [online]. [cit. 2015-05-19].
Dostupné z <https://www.iai.kit.edu/www-extern/fileadmin/Image_Archive/WIRE/KISMET/pdf/paper_cars99.pdf>
- [27] DUPREY, A. *Mechanical Properties of the Aorta* [online]. [cit. 2015-05-19].
Dostupné z <http://www.esvs.org/sites/default/files/image/Travel%20grant%20reports/Duprey_Report.pdf>

10 SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ A VELIČIN

CT	[-]	Počítačová tomografie
MR	[-]	Magnetická rezonance
σ_i	[Pa]	Vektor napětí
ε_j	[-]	Vektor přetvoření
C_{ij}	[Pa]	Matice materiálových konstant
σ_{ij}	[Pa]	Tenzor napětí
ε_{kl}	[-]	Tenzor přetvoření
C_{ijkl}	[Pa]	Tenzor materiálových konstant
S_{ij}	[Pa ⁻¹]	Matice materiálové poddajnosti
E	[Pa]	Youngův modul pružnosti v tahu
G	[Pa]	Modul pružnosti ve smyku
μ	[-]	Poissonovo číslo
σ	[Pa]	Normálové napětí
ε	[-]	Délkové přetvoření
T	[Pa]	Smykové napětí
γ	[-]	Zkos
$\mathbf{E}_{ij}^L$	[-]	Green – Lagrangeův tenzor přetvoření
$\mathbf{E}_{ij}^A$	[-]	Almansi – Hamelův tenzor přetvoření
$\mathbf{E}_{ij}^C$	[-]	Cauchyho tenzor přetvoření
X_i	[m]	Souřadnice v nedeformovaném stavu
x_i	[m]	Souřadnice v deformovaném stavu
u_i	[m]	Posuv
λ_{ij}	[-]	Poměrné protažení
F	[-]	Tenzor deformačního gradientu
J	[-]	Třetí invariant tenzoru deformačního gradientu
C_{ij}	[-]	Cauchy – Greenův tenzor deformace
C_L	[-]	Levý Cauchy – Greenův tenzor deformace
C_R	[-]	Pravý Cauchy – Greenův tenzor deformace
σ_{ij}	[Pa]	Cauchyho tenzor napětí
τ_{ij}	[Pa]	1. Piola – Kirchhoffův tenzor napětí
S_{ij}	[Pa]	2. Piola – Kirchhoffův tenzor napětí

W	[Pa]	Měrná deformační energie napjatosti
$\varepsilon_{S, H, K}$	[-]	Průměty přetvoření na ose x Mohrova diagramu
$\varepsilon_{1,2}$	[-]	Hlavní přetvoření
φ	[°]	Natočení
$E_{S, K, H}$	[Pa]	Průměty modulů pružnosti na osu x Mohrova diagramu
$E_{1,2}$	[Pa]	Hlavní moduly pružnosti v tahu
$E_{A, B, C, D}$	[Pa]	Definované moduly pružnosti směrů A, B, C a D
$E_{exp.}$	[Pa]	Experimentálně určený definovaný modul pružnosti
$E_{teor.}$	[Pa]	Teoreticky určený definovaný modul pružnosti
δ	[%]	Odchylka teoretických a odhadnutých hodnot
L_0	[m]	Nedeformovaná délka
ΔL	[m]	Délka protažení