



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**MODELOVÁNÍ DYNAMICKÝCH VLASTNOSTÍ A CHOVÁNÍ
TECHNICKÝCH SOUSTAV**

MODELS OF DYNAMICS AND RESPONSES OF MULTI-BODY SYSTEMS

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Filip Kšica

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Zdeněk Hadaš, Ph.D.

BRNO 2016

Zadání diplomové práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student: **Bc. Filip Kšica**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Inženýrská mechanika a biomechanika
Vedoucí práce: **doc. Ing. Zdeněk Hadaš, Ph.D.**
Akademický rok: 2015/16

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Modelování dynamických vlastností a chování technických soustav

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

V posledních letech se především v oboru výrobních strojů řeší problematika dynamické poddajnosti nově vyvinutých konstrukcí strojů. Pro moderní výrobní stroje je v současnosti charakteristické, že se skládají modulárně. Pro zajištění správné funkce a spolehlivosti stroje je nutné, na základě experimentálního stanovení vlastností jednotlivých modulů a s použitím výpočtového modelování, stanovit v předvýrobní fázi odhad dynamických vlastností a chování stroje jako celku.

Práce je zaměřena na metody integrace výpočtových i experimentálních modelů v počáteční fázi vývoje moderních technických soustav. V souladu se systémovým pojetím tato diplomová práce představuje průnik vědeckých metod a inženýrského přístupu k řešení problémů oblasti dynamiky moderních technických soustav. Konkrétně se jedná o řešení konstrukčních, návrhových a poznávacích problémů takovýchto soustav.

Cíle diplomové práce:

1. Experimentální metody měření a výpočtové modelování dynamických vlastností a chování poddajných technických soustav
2. Modelování interakce chování dynamických systémů
3. Aplikace zvoleného přístupu na konkrétních modelech technické soustavy
4. Zhodnocení jednotlivých metod modelování dynamických vlastností a chování technických soustav vzhledem k potřebám praxe

Seznam literatury:

Dwivedy, S.K., Eberhard, P.: Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review (2006) Mechanism and Machine Theory, 41 (7), pp. 749-777.

Schiehlen, W.: Multibody System Dynamics: Roots and Perspectives (1997) Multibody System Dynamics, 1 (2), pp. 149-188.

Hatch, M. R.: Vibration Simulation Using MATLAB and ANSYS. 2001.

Edward J Haug: Computer Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems, Allyn and Bacon, 1989.

Neugebauer, R., Denkena, B., Wegener, K.: Mechatronic Systems for Machine Tools, CIRP Annals, 56(2), 657–686 (2007).

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2015/16

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Tato diplomová práce se zabývá analýzou potenciálu dostupných výpočetních nástrojů pro převedení komplexních modelů technických soustav v modely jednodušší a jejich integrací s experimentálními modely. Nalezení metod pro časově méně náročné sestavení výpočtových modelů a následné provedení klíčových simulací je zásadní po potřeby dnes navrhovaných technických soustav. V první části práce je shrnuta teorie nutná k pochopení a aplikaci prezentovaných metod. Metody jsou rozděleny do dvou skupin, jedna založená na experimentu, druhá na simulacích. Do první skupiny spadá experimentální měření odezvy a její následné využití pro identifikaci systému. Do druhé skupiny spadá tvorba výpočtových modelů pomocí metody konečných prvků, s využitím běžných strukturních prvků a pomocí Component Mode Synthesis, přičemž jsou tyto modely zredukovány do podoby stavových modelů. Všechny zmíněné metody jsou aplikovány na jednoduchou experimentální soustavu. Výsledky simulací jsou v závěru práce srovnány nejen z hlediska kvantitativního, ale pro potřeby praxe i z hlediska časové náročnosti, realizovatelnosti, univerzálnosti a přesnosti, přičemž metoda identifikace dynamických systémů a metoda založená na tvorbě stavového prostoru se na základě simulací ukázaly jako velice vhodné. Výsledky této práce umožňují volbou vhodné metody tvorby výpočtových modelů zjednodušit proces určování dynamických vlastností technických soustav.

KLÍČOVÁ SLOVA

odezva, dynamické vlastnosti, modální analýza, identifikace dynamických systémů, modální syntéza, redukce stupňů volnosti, stavový prostor, metoda konečných prvků

ABSTRACT

The aim of this diploma thesis is to evaluate the potential of available methods for simplification and reduction of complex models of technical systems and their integration with experimental models. Finding methods, which would allow us to create models and run simulations in shorter periods of time, is key in design process of modern technical systems. In the beginning of this thesis, a theory necessary for understanding and application of presented methods is given. These methods can be separated into two groups, first as experiment related, second as simulation related. The first group contains methods for experimental evaluation of response and its use for dynamic system identification. The second group contains methods of finite element model creation, with the usage of standard structural elements as well as Component Mode Synthesis substructures, and these models are in the following step reduced into state space models. In the next step, all presented methods are applied on simple experimental structure. In conclusion, the results of simulations are the subject for comparison not only from quantitative point of view, but also, for the purpose of practical application, in terms of time, feasibility, versatility and accuracy. The system identification method along with state space method proved to be very suitable. The results presented in this thesis might help, by selecting the appropriate method, in simpler evaluation of dynamic properties of technical structures.

KEYWORDS

response, dynamical properties, modal analysis, dynamical system identification, component mode synthesis, reduction of degrees of freedom, state space, finite element method

Bibliografická citace mé práce:

KŠICA, F. *Modelování dynamických vlastností a chování technických soustav*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2016. 113 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Zdeněk Hadaš, Ph.D.

Čestné prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma „Modelování dynamických vlastností a chování technických soustav“ vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů, uvedených na seznamu, který tvoří přílohu této práce.

V Brně dne

.....

Podpis autora

Poděkování:

Tímto bych rád poděkoval všem, kteří mi pomáhali a přispěli k vypracování této diplomové práce. Především mé díky patří mému vedoucímu doc. Ing. Zdeňku Hadašovi, Ph.D., za odbornou pomoc a cenné rady.

V Brně dne

.....

Podpis autora

OBSAH

OBSAH.....	9
1. ÚVOD	12
2. FORMULACE PROBLÉMU	13
3. CÍLE ŘEŠENÍ.....	15
4. POPIS DYNAMICKÝCH SOUSTAV	16
5. TEORIE SOUSTAVY S JEDNÍM STUPNĚM VOLNOSTI	18
5.1. Pohybová rovnice.....	18
5.2. Modální vlastnosti soustavy	19
5.3. Přenosová funkce soustavy	20
5.3.1. Časová oblast.....	20
5.3.2. Frekvenční oblast.....	20
5.4. Póly, nuly a zesílení	21
5.4.1. Póly.....	22
5.4.2. Nuly	22
5.4.3. Zesílení	23
6. TEORIE SOUSTAVY S VÍCE STUPNI VOLNOSTI	24
6.1. Pohybová rovnice.....	24
6.2. Modální vlastnosti soustavy	24
6.3. Přenosová matice soustavy	25
6.4. Stavový prostor	25
6.5. Redukce počtu stupňů volnosti	26
6.5.1. Guyanova statická redukce.....	26
6.5.2. Craig-Bamptonova metoda redukce	26
7. MODÁLNÍ ANALÝZA	28
7.1. Pohybové rovnice.....	28
7.2. Vlastní čísla soustavy	29
7.3. Vlastní vektory soustavy	30
7.4. Modální matice soustavy.....	31
7.5. Soustava nezávislých rovnic	31
7.5.1. Normování modální matice	32

7.5.2. Přejchod z fyzikálních do modálních souřadnic	33
7.5.3. Zavedení okrajových podmínek a zatížení	34
7.6. Porovnání soustavy rovnic ve fyzikálním a modálním souřadném systému	35
7.7. Vliv tlumení	35
7.8. Přenosové funkce	36
8. EXPERIMENTÁLNÍ MODÁLNÍ ANALÝZA	38
9. IDENTIFIKACE DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ	40
9.1. Typy identifikačních modelů	40
9.2. Matematické modely	41
9.2.1. ARX	41
9.2.2. ARMAX	42
9.2.3. OE	42
9.2.4. BJ	43
9.3. Volba modelu	43
10. STRUKTURA ŘEŠENÍ PROBLÉMU	44
11. EXPERIMENTÁLNÍ SOUSTAVA	46
11.1. Odezva v časové oblasti	46
11.2. Odezva ve frekvenční oblasti	48
11.3. Model tlumení	49
11.4. Identifikace systému	51
12. DEMONSTRACE CRAIG-BAMPTONOVY METODY	57
13. SIMULACE ODEZVY VÝPOČTOVÝCH MODELŮ	60
13.1. Model topologie a geometrie	60
13.2. Model materiálu	61
13.3. Model vazeb	61
13.4. Model aktivace	61
13.5. Model projevů	62
13.6. Model okolí	63
13.7. Složené modely	63
13.7.1. Model pomocí <i>solid</i> prvků	63
13.7.2. Model sestavený pomocí CMS	64
13.8. Modální analýza	68
13.9. Simulace odezvy	70

13.10. Tvorba stavového modelu	71
14. POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ EXPERIMENTU A SIMULACÍ.....	75
14.1. Experiment	78
14.2. Identifikovaný systém	79
14.3. FEM solid.....	79
14.4. FEM CMS	80
14.5. Stavový prostor	81
15. ZÁVĚR	82
SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ	84
SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK.....	86
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ	87
SEZNAM OBRÁZKŮ	89
SEZNAM TABULEK	91
SEZNAM PŘÍLOH.....	92
A SKRIPTY PRO MATLAB	93
A 1 Skript pro aplikaci Craig-Bamptonovy metody pro MDOF systém	93
A 2 Funkce pro sestavení matic hmotnosti a tuhosti	96
A 3 Funkce pro sestavení částečných Craig-Bamptonových matic	97
A 4 Funkce pro sestavení redukovaných Craig-Bamptonových matic.....	99
A 5 Funkce pro sestavení globálních Craig-Bamptonových matic.....	100
A 6 Funkce pro určení modálních vlastností MDOF systému.....	101
A 7 Funkce pro separaci stavových matic z ANSYSu.....	102
B MAKRA PRO ANSYS	103
B 1 Makro pro modální a transientní analýzu dvojitého nosníku pomocí <i>solid</i> prvků 103	
B 2 Makro pro modální a transientní analýzu dvojitého nosníku pomocí CMS	108
C MATICE MDOF SYSTÉMU POMOCÍ CRAIG-BAMPTONOVY METODY	112

1. ÚVOD

V dnešní době, kdy si už nedovedeme představit naše životy bez aut, letadel, počítačů a jiných zařízení, je nutné, abychom my, inženýři, drželi krok s technologickým rozvojem a řešili problémy související se zvyšováním požadavků na přesnost, rychlost a spolehlivost těchto zařízení při zachování minimálních možných nákladů na jejich výrobu a údržbu. Byly doby, kdy k zaručení těchto požadavků stačilo navrhovat zařízení pouze z pohledu statického, požadavky dnešní doby nás nutí se zaměřit i na jejich dynamiku, která se týká především vibrací a jevů s nimi spojenými.

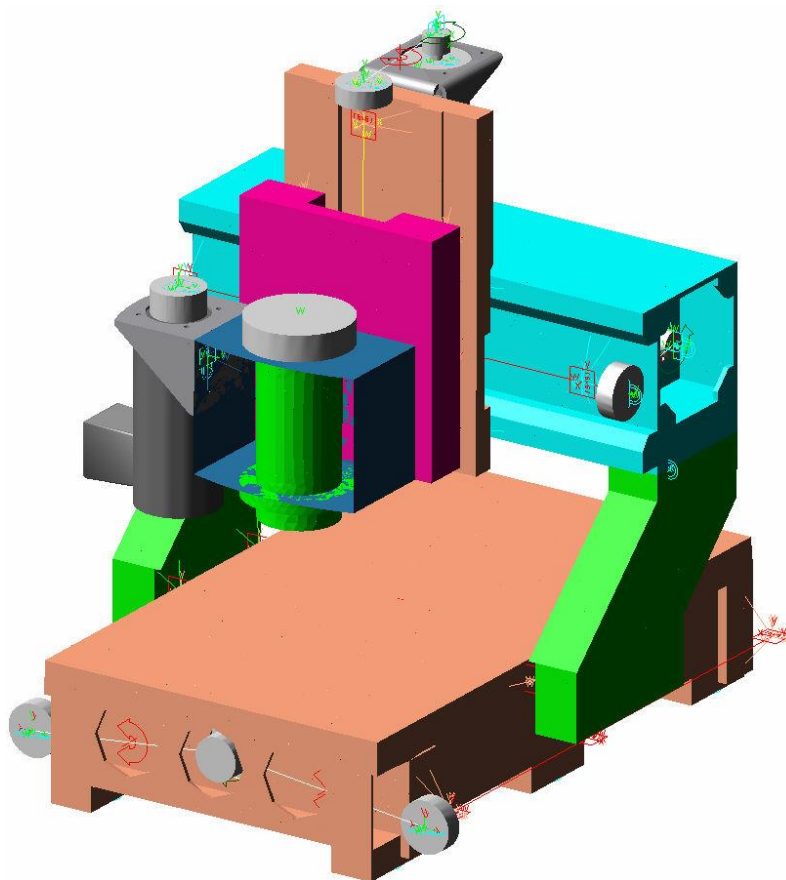
Vibrace, jakožto všudypřítomný a často opomíjený jev, jsou nedílnou součástí mnoha technických problémů. Při opracování materiálů bude docházet k vibracím obráběcího stroje, při jízdě vlaku po kolejnicích bude docházet k vibracím nápravy. Existují však aplikace, ve kterých se mohou využít pozitivně, například jde o dnes se rozvíjející *energy harvesting*, tedy obor zabývající se hledáním a využíváním alternativních zdrojů energie.

Při snaze o popis dynamických vlastností technické soustavy je nutné si uvědomit, že soustavu obecně nelze nahradit jednoduchým modelem, který by vystihl všechny vlivy ovlivňující její chování. Poddajnost těles, kontakty a vliv tření nebo pouhé spojování jednotlivých částí soustavy má za následek významné změny (nejen) dynamických vlastností soustavy.

Rozvoj výpočetních nástrojů tento úkol značně usnadnil, především možností tvorby virtuálních výpočtových modelů nejen geometrie, ale i vazeb, kontaktů či materiálů. Zásadním úkolem je nalezení metodiky, jak využít těchto dostupných nástrojů k vytvoření platných modelů, a zároveň hledání způsobu jejich verifikace. Tento úkol je v případě popisu dynamických vlastností obtížný, protože při tvorbě modelů by měly být postihnuty všechny vlivy, které mohou tyto vlastnosti ovlivňovat. Obecně tyto vlivy spadají do mnoha oborů: mechaniky těles – popis statiky, kinematiky a dynamiky soustav, deformace těles a jejich mezní stavy, materiálových věd – vliv struktury a degradace materiálů, hydrodynamiky – popis vlivu proudění, kontaktu těles s kapalinou, a mnoha dalších. Problém popisu dynamických vlastností soustav se tedy stává multioborovým.

2. FORMULACE PROBLÉMU

Pro moderní technické soustavy, např. výrobní stroje, je charakteristické, že se skládají modulárně z mnoha samostatných dílů (viz model vertikální frézy na Obr. 1). Velký počet dílů značně komplikuje proces tvorby výpočtových modelů a analýzy prováděné na těchto modelech jsou zpravidla časově velmi náročné. Harmonická či transientní analýza může na modelu s řádově stovkami tisíc až miliony stupni volnosti zabrat desítky až stovky hodin, nemluvě o možné nestabilitě a špatné konvergenci vlivem materiálových, kontaktních či dalších nelinearit.



Obr. 1: Výpočtový model vertikální frézy (převzato z [1])

Proto je snahou využít známých vlastností jednotlivých modulů či podsestav, určených buď experimentálně, nebo pomocí výpočtového modelování, pro stanovení vlastností zařízení jako celku. Celý tento proces často probíhá již v předvýrobní fázi, takže je kladen důraz na časovou nenáročnost. Jestliže by byly nalezeny vhodné metody, pomocí kterých by šlo zjednodušit výpočtové modely a tím i zkrátit dobu nutnou na provedení klíčových analýz, bylo by možné určit dynamické vlastnosti výrobku v předvýrobní fázi v řádově kratším čase.

Zjednodušování výpočtových modelů je důležité i ve vývojové fázi, jejímž cílem je zajistit inovaci výrobku nebo jeho optimalizaci pro plnění dané funkce. Jelikož oba tyto procesy jsou zpravidla iterační, úspora času při tvorbě výpočtových modelů a provádění analýz se projeví ještě výrazněji. To je velikou motivací při hledání takových metod, které by oproti stávajícím byly jednodušší a přitom dávaly výsledky s požadovanou přesností, a využít je ke zkrácení času nutného k vývoji výrobku.

3. CÍLE ŘEŠENÍ

Zkoumáme-li dynamické vlastnosti reálné soustavy, provádíme to zpravidla skrze množinu diskrétních měřicích bodů, jejichž poloha odpovídá umístění příslušných snímačů. O tom, jak se soustava projevuje v nesnímaných bodech, nemáme objektivní představu. I přestože jsou všechny reálné soustavy více či méně nelineární, v mnoha případech je při vytváření modelů linearizujeme. Díky tomu zůstává platný princip superpozice, který říká, že celkovou odezvu soustavy můžeme získat jako lineární kombinaci dílčích odezev. Každou reálnou soustavu obsahující množinu měřicích bodů a množinu bodů, ve kterých je přítomno vnější buzení, můžeme tedy nahradit souborem systémů s jedním vstupem a jedním výstupem (SISO), respektive více vstupy a více výstupy (MIMO), jejichž kombinací získáme popis celé soustavy. Právě na této myšlence je postaveno řešení problému tvorby jednodušších modelů, kdy dochází k nahrazení modelu s n stupni volnosti modelem s m stupni volnosti, kdy m odpovídá počtu bodů, v nichž dochází k buzení nebo v nichž nás zajímají projevy. Cílem je, aby m bylo řádově nižší, než n .

Tato diplomová práce má za úkol analyzovat potenciál dostupných výpočetních nástrojů pro převedení komplexních modelů technických soustav v modely jednodušší a jejich integrací s experimentálními modely.

Dosud byla formulována řada metod, které byly dosud aplikovány převážně v jiných technických oborech, avšak které mohou být využity i pro řešení problému určování dynamických vlastností technických soustav. Tato práce si dává za cíl některé z těchto metod nalézt, provést jejich popis na teoretické úrovni a využít je pro určení dynamických vlastností reálné soustavy. Další z cílů je provést srovnání těchto metod z hlediska využitelnosti pro řešení technických problémů v praxi.

4. POPIS DYNAMICKÝCH SOUSTAV

Při práci s dynamickými soustavami je nutné si nejdříve ujasnit, jakými způsoby se dá vyjádřit její popis. Ten se odvíjí zejména od povahy přítomného tlumení, kdy rozlišujeme dva případy.

V prvním případě mějme slabě tlumenou soustavu, ve které je tlumení způsobeno ztrátami ve vazbách a v materiálu samotném. Takovéto tlumení nejčastěji realizujeme pomocí modelu proporcionálního tlumení, který nám umožňuje převést problém řešení soustavy provázaných diferenciálních rovnic na soustavu nezávislých diferenciálních rovnic, z nichž každá představuje jeden nezávislý mód vibrací s příslušným poměrným útlumem.

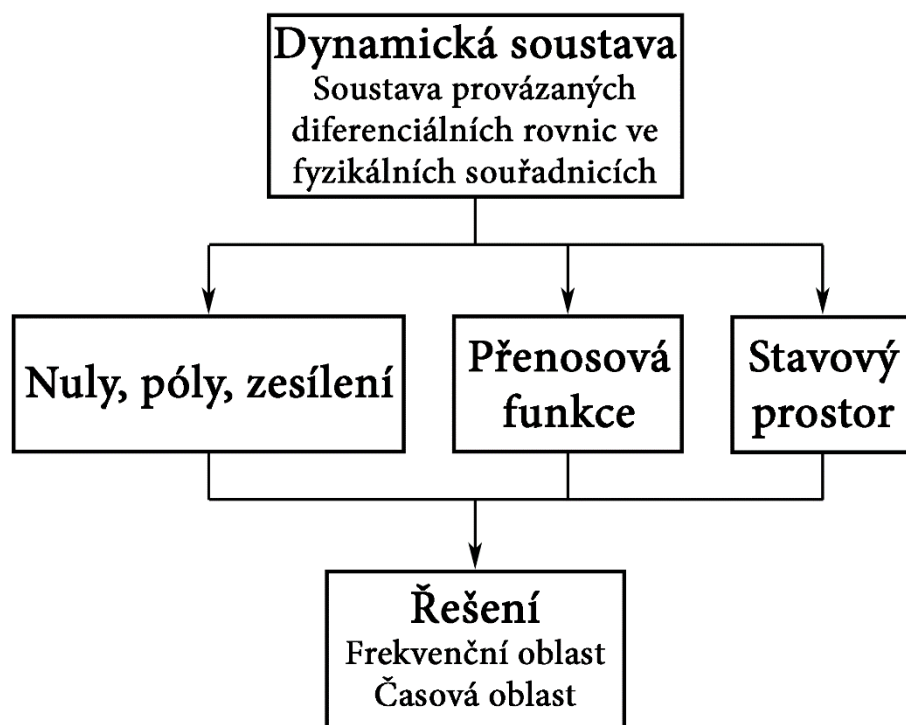
V druhém případě mějme soustavu se silným tlumením, což může znamenat případ soustavy, ve které se vyskytují členy, jejichž primární funkcí je vnášet do ní tlumení. V takovémto případě nám nezbyvá nic jiného, než řešit soustavu provázaných diferenciálních rovnic popisujících takovou soustavu.

Zpravidla nás při práci s dynamickými soustavami zajímá jejich odezva buď v časové, nebo ve frekvenční oblasti. Řešení takové úlohy znamená provedení harmonické či přechodové (transientní) analýzy, z nichž obě představují časově velmi náročný krok při výpočtovém modelování. Z tohoto důvodu je dobré si vybrat jiný vhodný popis, který by nám umožnil provést jednodušší a časově méně náročné simulace. Takovým může být například popis pomocí:

- nul, pólů a zesílení (Zero-Pole-Gain)
- přenosové funkce (Transfer Function)
- stavového modelu (State-Space System)

Schematicky jsou tyto možnosti znázorněny na Obr. 2.

V inženýrské praxi často pracujeme se soustavami s velkým počtem stupňů volnosti. Abychom mohli aplikovat výše zmíněné způsoby popisu, je vhodné soustavy nejdříve zredukovat na nejmenší možný počet stupňů volnosti. Toho je docíleno s ohledem na okrajové podmínky a měřené či pozorované stupně volnosti. Z toho důvodu jsou do práce začleněny i některé z používaných metod redukce.

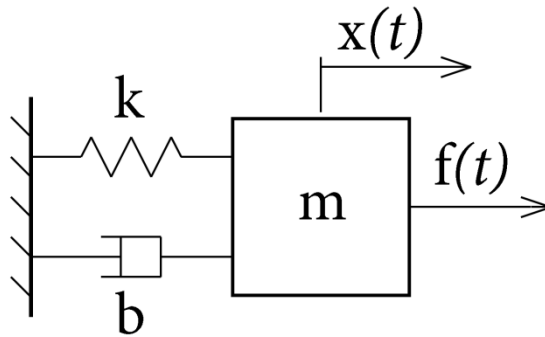


Obr. 2: Popis dynamické soustavy

5. TEORIE SOUSTAVY S JEDNÍM STUPNĚM VOLNOSTI

Při popisu složitých technických soustav je snahou inženýra vytvořit co nejjednodušší model, který bude pro daný problém dávat uspokojivé výsledky. Z hlediska dynamiky předpokládáme, že soustava s mnoha stupni volnosti (MDOF – Multiple Degree of Freedom) lze rozložit na množinu prvků typu o jednom stupni volnosti (SDOF – Single Degree of Freedom), které jsou vzájemně propojeny. Metoda konečných prvků, jakožto nejrozšířenější metoda v inženýrské praxi, pracuje s kontinuem rozloženým na soustavu SDOF. Umíme-li tedy popsat vlastnosti a chování SDOF, můžeme je integrovat do složitějšího celku.

Je vhodné začít popisem základní SDOF soustavy znázorněné na Obr. 3. Tato soustava se skládá ze tří členů, hmotnosti m , tuhosti k a viskózního tlumení b . Soustava má zmíněný jeden stupeň volnosti, tj. je umožněn pohyb pouze ve směru x a je buzen obecně časově proměnnou silou f .



Obr. 3: Systém s jedním stupněm volnosti

5.1. Pohybová rovnice

Pohybová rovnice takovéto soustavy může být vyjádřena jako

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (5.1)$$

Po aplikaci Laplaceovy transformace na rovnici (5.1) dostáváme tvar

$$ms^2x(s) + bsx(s) + kx(s) = f(s) \quad (5.2)$$

Předpokládáme-li soustavu bez tlumení, zjednoduší se rovnice na tvar

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (5.3)$$

5.2. Modální vlastnosti soustavy

Modálními vlastnostmi SDOF rozumíme především vlastní frekvenci netlumené soustavy, vlastní frekvenci tlumené soustavy a poměrný útlum. Získáme je z pohybové rovnice (5.3) za předpokladu nulového buzení, tj. $f(t) = 0$.

Při nulovém buzení předpokládáme řešení ve tvaru

$$k - \omega^2 m = 0 \quad (5.4)$$

z čehož můžeme vyjádřit vztah pro netlumenou vlastní frekvenci ω_0

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.5)$$

Řešením rovnice (5.2) můžeme určit další z modálních vlastností soustavy. Řešení předpokládáme ve tvaru

$$s_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = -\omega_0 b_p \pm i\omega_0 \sqrt{1 - b_p^2} \quad (5.6)$$

kde b_p značí poměrný útlum, někdy značený též ξ , vyjádřený jako

$$b_p = \xi = \frac{b}{b_{krit}} = \frac{b}{2\sqrt{km}} \quad (5.7)$$

Z rovnice (5.6) je zřejmé, že vlastní čísla jsou komplexně sdružená, skládají se tedy z reálné a imaginární části. Reálná část $\omega_0 b_p$ má charakter tlumení a často je označována jako součinitel dozívání

$$\delta = \omega_0 b_p = \frac{b}{2m} \quad (5.8)$$

Imaginární část představuje vlastní frekvenci tlumené soustavy

$$\omega_{tl} = \omega_0 \sqrt{1 - b_p^2} \quad (5.9)$$

Tyto charakteristiky hrají zásadní roli při posuzování chování kmitavých dynamických systémů. Na základě hodnoty poměrného útlumu můžeme rozlišit tři stavy:

- $b_p > 1$ soustava je přetlumená
- $b_p < 1$ soustava je podtlumená
- $b_p = 1$ soustava je kriticky tlumená

Při dosažení kritické hodnoty tlumení je soustava charakterizována tím, že její vlastní frekvence tlumeného kmitání je nulová a chování je na hranici aperiodicity.

5.3. Přenosová funkce soustavy

Přenosovou funkcí rozumíme poměr výstupního a vstupního signálu. Pro SDOF je vstupem i výstupem pouze jediná veličina, soustavu tedy můžeme popsat pomocí jediné přenosové funkce na základě rovnice (5.2) ve tvaru

$$\frac{x(s)}{f(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \quad (5.10)$$

Zavedením substituce $s = i\omega$ můžeme přenosovou funkci převést do tvaru obecně značeného jako FRF (Frequency Response Function) nebo také dynamická poddajnost G .

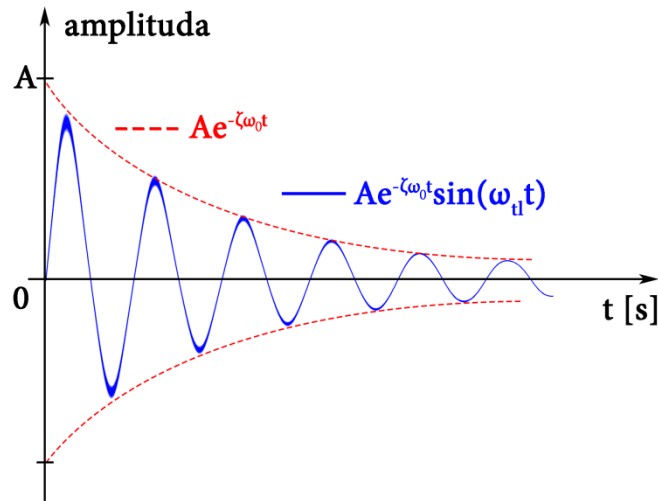
$$G(\omega) = \frac{x(\omega)}{f(\omega)} = \frac{1}{-\omega^2 m + i\omega b + k} \quad (5.11)$$

5.3.1. Časová oblast

Zapišeme-li přenosovou funkci (5.11) v exponenciálním tvaru, dostáváme

$$G(\omega) = \frac{1}{m\omega_{tl}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_{tl} t) \quad (5.12)$$

Na základě přenosové funkce ve tvaru (5.12) můžeme vykreslit odezvu SDOF v časové oblasti (Obr. 4).



Obr. 4: Odezva SDOF v časové oblasti

5.3.2. Frekvenční oblast

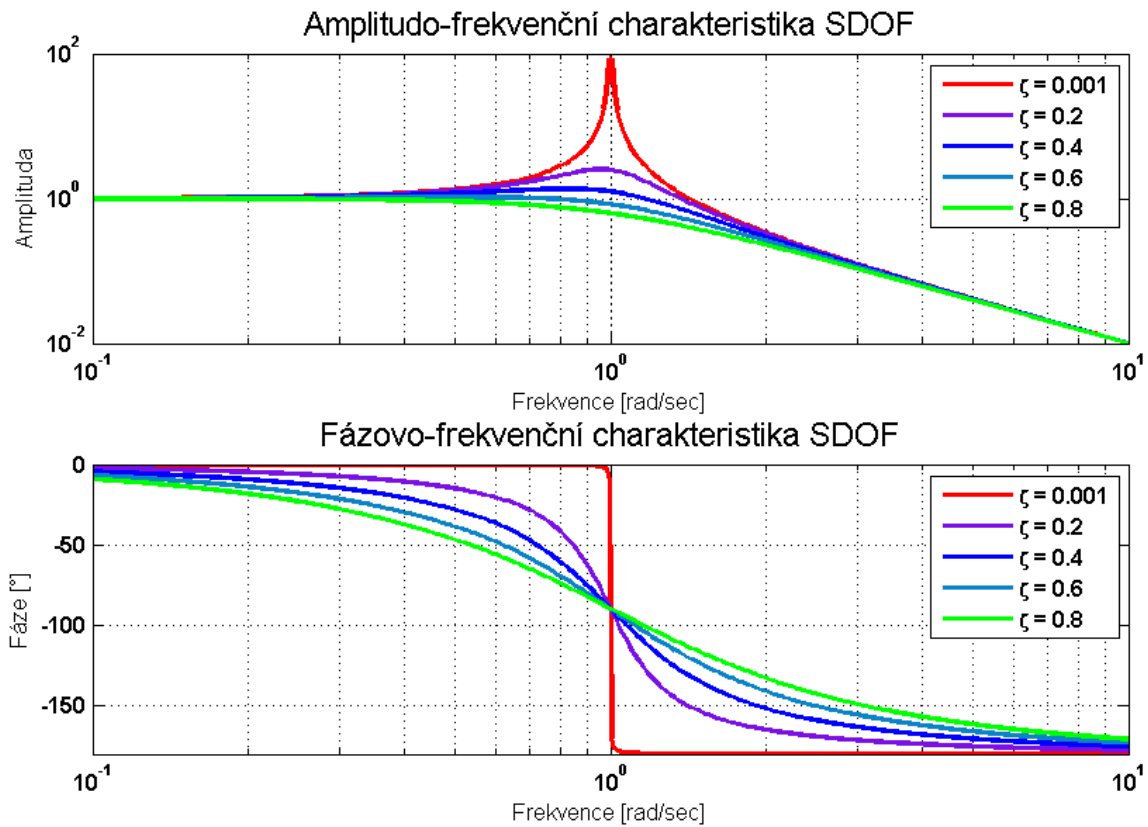
Pro určení odezvy ve frekvenční oblasti využijeme přenosovou funkci ve tvaru (5.11), kterou rozdělíme na dva členy: amplitudu a fázi. Amplitudu získáme jako absolutní hodnotu z výrazu (5.11), která pro SDOF má tvar [2]:

$$A(t) = \left| \frac{x(\omega)}{f(\omega)} \right| = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (b\omega)^2}} \quad (5.13)$$

Fázi $\varphi(t)$ určíme jako fázový posuv mezi budicí silou a odezvou, který má pro SDOF tvar [2]:

$$\varphi(t) = \frac{b\omega}{k - m\omega^2} \quad (5.14)$$

S využitím rovnic (5.13) a (5.14) můžeme vykreslit odezvu SDOF ve frekvenční oblasti pomocí amplitudové a fázové charakteristiky (Obr. 5).



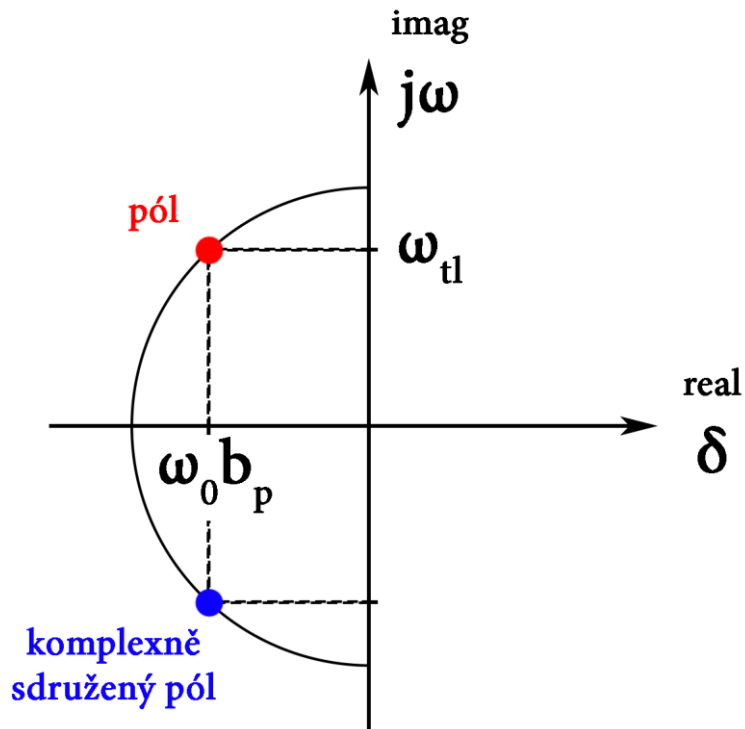
Obr. 5: Odezva SDOF ve frekvenční oblasti

5.4. Póly, nuly a zesílení

Chceme-li SDOF popsat pomocí pólů a nul, budeme vycházet z přenosové funkce soustavy (5.11). Na základě polohy pólů a nul v komplexní rovině dokážeme vyhodnotit vlastnosti dynamického systému, jako je například stabilita, fázovost a kmitavost.

5.4.1. Póly

Póly soustavy, taktéž nazývané jako vlastní čísla nebo rezonanční frekvence, odpovídají kořenům charakteristické rovnice (jmenovateli přenosové funkce). Jejich hodnota závisí pouze na rozložení hmotnosti, tuhosti a tlumení v systému, nikoli na okrajových podmínkách a umístění výstupů. Pro tlumenou SDOF jsou póly vyjádřeny rovnicí (5.6). Protože mají póly charakter komplexního čísla, respektive komplexně sdruženého čísla, můžeme je zakreslit do komplexní roviny (viz Obr. 6).

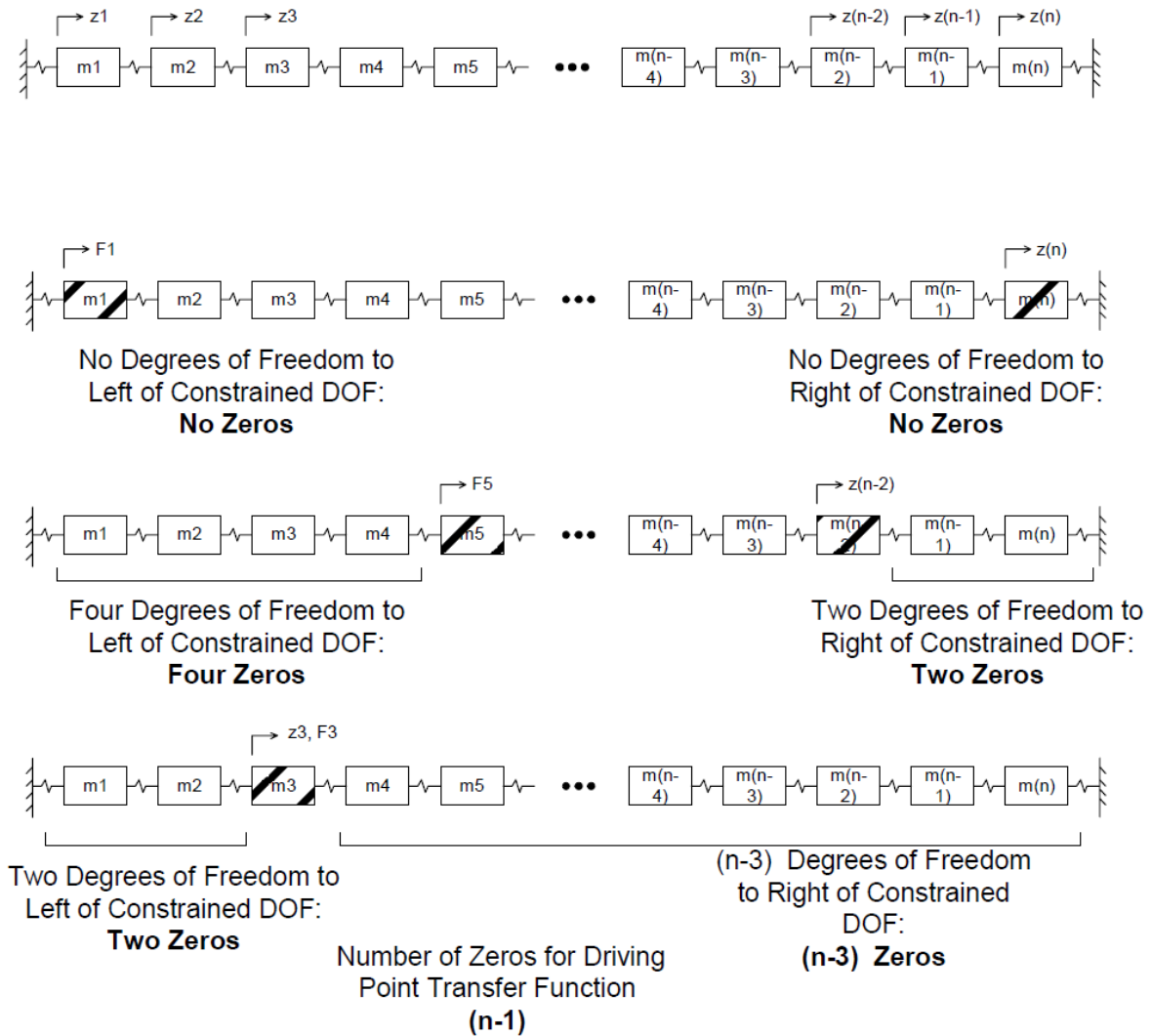


Obr. 6: Zobrazení pólů SDOF v komplexní rovině

5.4.2. Nuly

Pro každý systém s jedním vstupem a jedním výstupem (Single-Input-Single-Output, SISO) jsou nuly definovány jako kořeny čitatele přenosové funkce. Na rozdíl od pólů, které jsou charakteristikou dynamického systému a nezávisí na volbě přenosové funkce, nuly se liší pro každou z přenosových funkcí systému. V SISO systémech odpovídají nuly frekvencím, při kterých je přenosová funkce rovna nule.

Význam nul přenosových funkcí v MIMO systémech popisuje Hatch v [3] na příkladech soustav s několika stupni volnosti jako póly systémů s vazbou, které vzniknou nalevo a/nebo napravo od jednoho či více prvků v systému, kterým předepíšeme tuhou vazbu. Názorně to vysvětluje Obr. 7.



Obr. 7: Nuly přenosových funkcí pro MDOF (převzato z [3])

5.4.3. Zesílení

Zesílení systému určíme z přenosu tak, že dosadíme za argument Laplaceovy transformace $s = 0$.

6. TEORIE SOUSTAVY S VÍCE STUPNI VOLNOSTI

V obecnějším případě má technická soustava 2 až n stupňů volnosti. Matematický popis jejích dynamických vlastností není na počtu stupňů volnosti závislý, na rozdíl od SDOF, kde měla hmotnost, tuhost, tlumení, výchylka a buzení charakter skalární veličiny, v případě MDOF se jedná o matice.

6.1. Pohybová rovnice

Pro soustavu s n stupni volnosti má pohybová rovnice tvar

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (6.1)$$

kde $\mathbf{M}$ je matice hmotnosti o rozměrech $n \times n$, $\mathbf{B}$ je matice tlumení o rozměrech $n \times n$, $\mathbf{K}$ je matice tuhosti o rozměrech $n \times n$, $\mathbf{x}(t)$ je časově závislý vektor posuvů o rozměrech $n \times 1$ a $\mathbf{f}(t)$ je vektor časově závislých vnějších zatížení o rozměrech $n \times 1$.

Stejně jako v případě SDOF můžeme aplikovat Laplaceovu transformaci a převést rovnici (6.1) na tvar

$$\mathbf{M}s^2\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}s\mathbf{x}(s) + \mathbf{K}\mathbf{x}(s) = \mathbf{f}(s) \quad (6.2)$$

V případě netlumené soustavy se rovnice zjednoduší na tvar

$$\mathbf{M}s^2\mathbf{x}(s) + \mathbf{K}\mathbf{x}(s) = \mathbf{f}(s) \quad (6.3)$$

6.2. Modální vlastnosti soustavy

Vektor netlumených vlastních frekvencí získáme z rovnice pro volné netlumené kmitání

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = 0 \quad (6.4)$$

Řešení hledáme ve tvaru

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}e^{i\omega t} \quad (6.5)$$

kde $\mathbf{x}$ je vektor časově nezávislých amplitud výchylek. Dosazením předpokládaného tvaru řešení (6.5) do rovnice (6.4) dostáváme tvar

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{x} = 0 \quad (6.6)$$

Protože triviální řešení této rovnice ($\mathbf{x} = 0$) pro nás nemá význam, jediné další řešení je možné při splnění podmínky, že determinant matice $\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}$ je roven nule:

$$\det|\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}| = 0 \quad (6.7)$$

To vede na charakteristickou rovnici polynomického tvaru, jejíž kořeny jsou vlastní frekvence netlumené soustavy:

$$a_n\omega^{2n} + a_{n-1}\omega^{2(n-1)} + \dots + a_1\omega^2 + a_0 = 0 \quad (6.8)$$

kde $a_n, \dots, a_1$ jsou reálné konstanty.

Podrobnější popis problematiky MDOF je možné nalézt např. v [3], [4] nebo [5].

6.3. Přenosová matice soustavy

Na rozdíl od SDOF, který se dal popsat jedinou přenosovou funkcí, pro soustavu s n stupni volnosti máme $n \times n$ přenosových funkcí. Zapisují se ve formě matice, kterou nazýváme přenosovou maticí soustavy. Můžeme ji vyjádřit ve tvaru

$$G_{jk}(s) = \frac{x_j(s)}{f_k(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{x_{nji}x_{nki}}{s^2 + 2\xi_i\omega_{0i}s + \omega_{0i}^2} \quad (6.9)$$

kde $x_{nji}x_{nki}$ vyjadřuje diadický součin prvků modální matice, ω_{0i} je i -tá vlastní frekvence netlumené soustavy a ξ_i je poměrný útlum pro i -tou vlastní frekvenci.

6.4. Stavový prostor

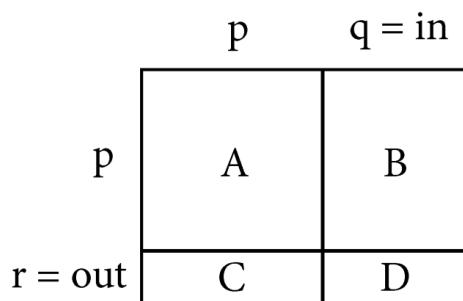
Stavový prostor je další z možností matematického popisu dynamické soustavy. Vycházíme ze základních rovnic

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (6.10)$$

kde $\mathbf{x}$ je vektor stavů, $\mathbf{u}$ je vektor vstupů a $\mathbf{y}$ je vektor výstupů. Matice $\mathbf{A}$ se nazývá matice systémová, matice $\mathbf{B}$ matice vstupů, matice $\mathbf{C}$ matice výstupů a matice $\mathbf{D}$ matice vazebná. Stavový vektor má rozměr $p \times 1$, kde p je počet stavů (výchylka a rychlost), vektor vstupů má rozměr $q \times 1$, kde q je počet vstupních proměnných a vektor výstupů má rozměr $r \times 1$, kde r je počet výstupních parametrů. Rozměry matic $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ a $\mathbf{D}$ se odvíjí od velikosti parametrů p , q a r následovně:

- $\mathbf{A}$: $p \times p$
- $\mathbf{B}$: $p \times q$
- $\mathbf{C}$: $r \times p$
- $\mathbf{D}$: $r \times q$

Schematicky jsou rozměry matic stavového prostoru znázorněny na Obr. 8.



Obr. 8: Charakteristické rozměry matic stavového prostoru

Vztah mezi stavovým prostorem a přenosovou maticí soustavy se dá popsat následovně:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (6.11)$$

kde I je jednotková matice.

6.5. Redukce počtu stupňů volnosti

Zásadním krokem při snaze zkrátit výpočetní čas nutný k provedení požadovaných simulací dynamických vlastností soustav je vhodné zredukování počtu stupňů volnosti. V dnešní době existuje řada metod, z nichž některé jsou implementovány do komerčních výpočetních softwarů. V této kapitole budou zmíněny jen některé z nich.

6.5.1. Guyanova statická redukce

Jedná se o jednu z nejrozšířenějších metod redukce, která spočívá v rozdělení stupňů volnosti na tzv. *master* a *slave*. *Master* stupně volnosti odpovídají pozorovaným stupňům volnosti, kdežto *slave* odpovídají všem zbylým. Na základě toho jsou rozděleny i matice hmotnosti a tuhosti.

$$\begin{bmatrix} [M_{mm}] & [M_{ms}] \\ [M_{sm}] & [M_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_m \\ \ddot{x}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{mm}] & [K_{ms}] \\ [K_{sm}] & [K_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_m \\ x_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.12)$$

kde index m odpovídá *master* stupňům volnosti, index s odpovídá *slave* stupňům volnosti. Následně jsou zanedbány setrvačné účinky a vyjádřeny redukované matice hmotnosti a tuhosti.

$$\begin{aligned} [M_R] &= [T_s]^T [M] [T_s] \\ [K_R] &= [T_s]^T [K] [T_s] \end{aligned} \quad (6.13)$$

Matice T_s je transformační matice.

6.5.2. Craig-Bamptonova metoda redukce

Craig-Bamptonova metoda modální syntézy (Component Mode Synthesis, dále jen CMS, [6], [7], [8]) umožňuje reprezentovat pružné těleso syntézou modálních tvarů jako modálně pružné těleso [9]. Jinak řečeno předpokládáme, že reálná deformace tělesa lze vyjádřit jako lineární kombinace modálních tvarů.

Metoda je založena na rozdělení modelu na dvě skupiny uzlů, hraniční a vnitřní. Buzením jednotlivých hraničních stupňů volnosti jednotkovým zatížením získáme statické tvary prvku, které jsou následně uspořádány do matice vazebných módů $[\phi_c]$. Pro soustavu s n stupni volnosti existuje vždy n vazebných módů. Modální analýzou tělesa při zamezení pohybu všech hraničních uzlů dostaneme skutečné vlastní módy tělesa, které jsou následně uspořádány do matice normálních módů $[\phi_n]$. Pro soustavu s n stupni volnosti existuje vždy n normálních módů. Pro stanovení redukováných matic hmotnosti a tuhosti budeme vycházet ze základní pohybové rovnice bez tlumení [8]

$$[M_{AA}]\{\ddot{\mathbf{u}}_A\} + [K_{AA}]\{\mathbf{u}_A\} = \{\mathbf{F}(t)\} \quad (6.14)$$

Aplikováním Craig-Bamptonovy transformace na vnitřní a hraniční prvky přepíšeme vektor stupňů volnosti do tvaru

$$\{\mathbf{u}_A\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\phi}_c & \boldsymbol{\phi}_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (6.15)$$

Kde $\mathbf{u}_A$ je vektor všech stupňů volnosti, $\mathbf{u}_b$ je vektor hraničních stupňů volnosti, $\mathbf{u}_L$ je vektor vnitřních (zbylých, leftover) stupňů volnosti a $\mathbf{q}$ je vektor modálních stupňů volnosti. Craig-Bamptonova transformační matice je definována jako

$$[\boldsymbol{\phi}_{CB}] = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\phi}_c & \boldsymbol{\phi}_n \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Kombinací rovnic (6.14), (6.15) a jejich vynásobením transponovanou transformační maticí $[\boldsymbol{\phi}_{CB}]^T$ získáme

$$\boldsymbol{\phi}_{CB}^T [M_{AA}] \boldsymbol{\phi}_{CB} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_b \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} + \boldsymbol{\phi}_{CB}^T [K_{AA}] \boldsymbol{\phi}_{CB} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\phi}_{CB}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_b \\ \mathbf{F}_L \end{Bmatrix} \quad (6.17)$$

Transformované matice hmotnosti a tuhosti vyjádříme ve tvaru

$$\begin{aligned} [M_{CB}] &= \boldsymbol{\phi}_{CB}^T [M_{AA}] \boldsymbol{\phi}_{CB} = \begin{bmatrix} M_{bb} & M_{bq} \\ M_{qb} & M_{qq} \end{bmatrix} \\ [K_{CB}] &= \boldsymbol{\phi}_{CB}^T [K_{AA}] \boldsymbol{\phi}_{CB} = \begin{bmatrix} K_{bb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K_{qq} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Zpětným dosazením do rovnice (6.17) dostaneme

$$\begin{bmatrix} M_{bb} & M_{bq} \\ M_{qb} & M_{qq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_b \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{bb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K_{qq} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_b \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (6.19)$$

Protože metoda je založena na předpokladu, že vnější zatížení je zavedeno pouze do hraničních uzlů, člen $\mathbf{F}_L$ je nulový. Pomocí transformovaných matic hmotnosti a tuhosti můžeme vyjádřit výslednou pohybovou rovnici zahrnující i tlumení

$$\begin{bmatrix} M_{bb} & M_{bq} \\ M_{qb} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_b \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\xi\omega \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_b \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{bb} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_b \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (6.20)$$

kde člen $2\xi\omega$ odpovídá modálnímu tlumení a ξ činiteli tlumení.

7. MODÁLNÍ ANALÝZA

Modální analýza je jeden z nejpoužívanějších přístupů pro posouzení dynamického chování konstrukce. Výstupem modální analýzy je soubor vlastních čísel, odpovídajících rezonančním frekvencím soustavy, a vlastních tvarů, které kvalitativně popisují charakter deformace při dosažení dané rezonanční frekvence. Jde o velice mocný nástroj, který vyniká nejen svou jednoduchostí, ale i interpretovatelností jejích výsledků. Protože modální analýza předpokládá, že jednotlivé módy jsou na sobě nezávislé (platí princip superpozice), je snahou rekonstruovat celkovou odezvu soustavy sjednocením jednotlivých módů (modální superpozice).

Modální redukce umožňuje převést pro soustavu s n -stupni volnosti příslušných n svázaných diferenciálních rovnic na n nezávislých diferenciálních rovnic, z nichž každá odpovídá příslušnému módu vibrace. Jestliže jsou pak známy vlastní frekvence a vlastní tvary, je velmi jednoduché si představit schování struktury v jednotlivých módech, což je první krok k pochopení dynamických vlastností dané soustavy. Tato problematika je podrobně popsána v [3].

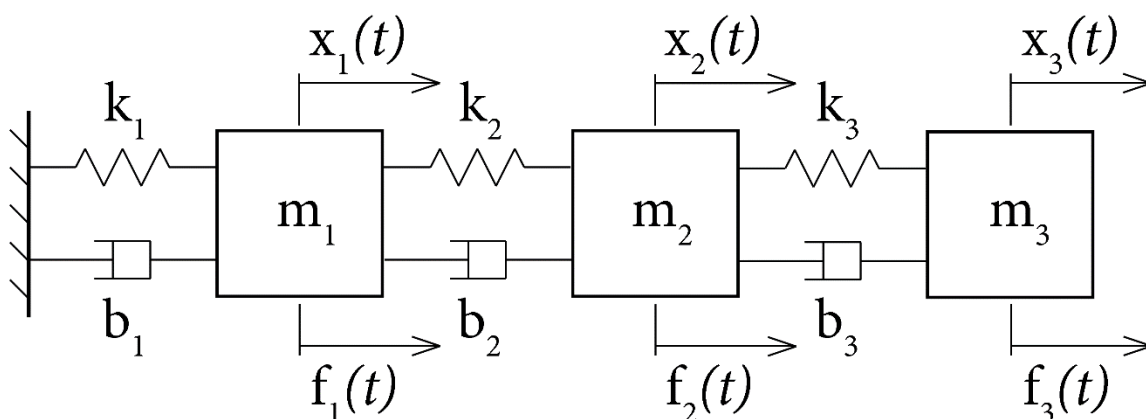
Analýzu lineární dynamické soustavy můžeme rozdělit do několika kroků:

1. Řešení problému vlastních čísel u netlumené soustavy, jehož výstupem jsou vlastní čísla (rezonanční frekvence) a vlastní vektory.
2. Využití vlastních vektorů pro převedení soustavy n provázaných diferenciálních rovnic na n nezávislých diferenciálních rovnic, což převádí řešení MDOF s n stupni volnosti na n nezávislých SDOF.
3. Určení příspěvků jednotlivých módů do celkové odezvy soustavy. V tomto kroku je provedena rovněž selekce módů, které buď nemohou být vybudeny, nebo nás nezajímají.
4. Sestavení stavových matic, konkrétně systémové matice **A**, vstupní a výstupní matice **B** a **C**, které jsou závislé na zvolených vstupních a výstupních stavech. Vazebná matice **D** je pro většinu inženýrských problémů nulová.
5. Protože tlumení je v inženýrské praxi nejčastěji modelováno jako proporcionální tlumení, tedy jako lineární kombinace matice hmotnosti a tuhosti, můžeme tímto způsobem řešit i slabě tlumené soustavy se zachováním nezávislosti jednotlivých rovnic.

V následující části této kapitoly si budeme ilustrovat tento postup na obecné soustavě se třemi stupni volnosti, viz Obr. 9.

7.1. Pohybové rovnice

Budeme vycházet ze základních diferenciálních pohybových rovnic této soustavy.



Obr. 9: Schéma soustavy se třemi stupni volnosti

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + b_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) &= f_1(t) \\
 m_2 \ddot{x}_2 + b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + b_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + k_2(x_2 - x_1) + k_2(x_2 - x_3) &= f_2 \\
 m_3 \ddot{x}_3 + b_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + k_3(x_3 - x_2) &= f_3(t)
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Pro jednoduchost budeme předpokládat nulové tlumení, tj. $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ a dále předpokládat rovnost tuhostí, tj. $k_1 = k_2 = k_3 = k$ a hmotností, tj. $m_1 = m_2 = m_3 = m$. Soustavu uvažujeme jako volnou, tj. není spojena se základnou. Pro analýzu vlastních módů je rovněž nulové buzení, tj. $f_1 = f_2 = f_3 = 0$. Při zavedení uvedeného zjednodušení dostaneme následující soustavu rovnic v maticovém zápisu

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

7.2. Vlastní čísla soustavy

Každá soustava s vlastnostmi definovanými výše je charakteristická vlastními módy, což znamená, že všechny prvky soustavy budou při určitých frekvencích kmitat na stejné frekvenci a se stejnou fází. Jinak řečeno, výchylky všech prvků soustavy dosáhnou svého maxima či minima ve stejný okamžik. Zápis normálních módů může být proveden jako [3]:

$$x_i = x_{mi} \sin(\omega_i t + \varphi_i) \tag{7.3}$$

kde x_i je vektor výchylek všech prvků soustavy pro i -tou vlastní frekvenci, x_{mi} je vlastní vektor pro i -tou vlastní frekvenci, ω_i je i -tá vlastní frekvence a φ_i je fázový posuv.

Hledání vlastních čísel a vlastních vektorů soustavy znamená řešení rovnice

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{7.4}$$

Při dosazení předpokládaného tvaru řešení z rovnice (7.3) a jeho druhé derivace dostáváme tvar:

$$\mathbf{m}[-\omega_i^2 \mathbf{x}_{mi} \sin(\omega_i t + \varphi_i)] + \mathbf{k}[\mathbf{x}_{mi} \sin(\omega_i t + \varphi_i)] = 0 \quad (7.5)$$

Po vykrácení členů se $\sin$ dostáváme výsledný tvar:

$$-\omega_i^2 \mathbf{m} \mathbf{x}_{mi} + \mathbf{k} \mathbf{x}_{mi} = 0 \quad (7.6)$$

Pro řešení této rovnice je dobré převést ji do standartního tvaru

$$(\mathbf{k} - \omega_i^2 \mathbf{m}) \mathbf{x}_{mi} = 0 \quad (7.7)$$

V maticovém zápise

$$\left\{ \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} - \omega_i^2 \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \right\} \mathbf{x}_{mi} = 0 \quad (7.8)$$

Sloučením matic dostáváme:

$$\begin{bmatrix} k - \omega_i^2 m & -k & 0 \\ -k & 2k - \omega_i^2 m & -k \\ 0 & -k & k - \omega_i^2 m \end{bmatrix} \mathbf{x}_{mi} = 0 \quad (7.9)$$

Aby tato soustava měla jiné než netriviální řešení ($\mathbf{x}_{mi} = 0$), musí být splněno, že determinant matice je roven nule. To, jak bylo zmíněno v kapitole (6.11) vede na polynomickou rovnici, jejíž kořeny jsou vlastní čísla soustavy odpovídající rezonančním frekvencím.

$$\begin{aligned} -m^3 \omega^6 + 4km^2 \omega^4 - 3k^2 m \omega^2 &= 0 \\ \omega^2 (-m^3 \omega^4 + 4km^2 \omega^2 - 3k^2 m) &= 0 \end{aligned} \quad (7.10)$$

Řešením rovnice pro ω^2 dostáváme tři páry vlastních čísel:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0 \\ \omega_2 &= \pm \sqrt{\frac{3k}{m}} \\ \omega_3 &= \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned} \quad (7.11)$$

7.3. Vlastní vektory soustavy

Každému vlastnímu číslu soustavy uvedenému v rovnici (7.11) přísluší vlastní vektor $\mathbf{x}_i$. Protože vlastní vektor popisuje deformaci soustavy při rezonanci pouze kvalitativně, je nutno si zvolit referenční stupeň volnosti, ke kterému budou všechny ostatní vztaženy. Zvolíme-li jako tuto referenci například souřadnici x_1 , pak řešením soustavy rovnic (7.9) dostáváme vlastní vektory soustavy ve tvaru

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{x}_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{x}_3 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{7.12}$$

7.4. Modální matice soustavy

Po získání vlastních vektorů je dalším krokem jejich sloučení v modální matici, jejíž struktura je znázorněna na Obr. 10.

mód:	1	2	3	
	x_{m11}	x_{m12}	x_{m13}	← DOF 1
$\mathbf{x}_m =$	x_{m21}	x_{m22}	x_{m23}	← DOF 2
	x_{m31}	x_{m32}	x_{m33}	← DOF 3
vlastní vektor:	$\uparrow$ $\mathbf{x}_1$	$\uparrow$ $\mathbf{x}_2$	$\uparrow$ $\mathbf{x}_3$	

Obr. 10: Struktura modální matice

Pro naši soustavu má modální matice tvar

$$\mathbf{x}_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.13}$$

7.5. Soustava nezávislých rovnic

V tomto okamžiku máme představu o vlastních frekvencích a vlastních módech uvažované soustavy. V reálných úlohách nás zajímá zejména odezva soustavy na budicí signál různých charakterů, což vede na přechodové či harmonické analýzy. Jelikož máme v tuto chvíli soustavu popsánu ve fyzikálních souřadnicích pomocí soustavy provázaných diferenciálních rovnic, vyžadovalo by řešení odezvy systému numerickou integraci těchto rovnic, což pro složité inženýrské úlohy přináší spoustu problémů. Z tohoto důvodu je vhodné si systém provázaných diferenciálních rovnic (7.1) převést na systém nezávislých rovnic, což znamená přechod z fyzikálních do modálních souřadnic. Matematicky to lze provést diagonalizací matic hmotnosti, tuhosti a v případě buzené soustavy i vektor buzení.

Protože v reálných úlohách je model tlumení proporcionální, tj. jako lineární kombinace matic tuhosti a hmotnosti, není nutno ji v tomto kroku uvažovat.

Diagonalizaci je možno provést vynásobením jednotlivých členů matic hmotnosti a tuhosti zprava a zleva vlastními vektory, jak je naznačeno v rovnici (7.14).

$$\begin{aligned} m_{ii} &= \mathbf{x}_{mi}^T \mathbf{m} \mathbf{x}_{mi} \\ k_{ii} &= \mathbf{x}_{mi}^T \mathbf{k} \mathbf{x}_{mi} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Lepším přístupem je využití normalizované modální matice, kterou jsou matice hmotnosti a tuhosti diagonalizovány v jednom kroku, jak je naznačeno v rovnici (7.15).

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_n &= \mathbf{x}_m^T \mathbf{m} \mathbf{x}_m \\ \mathbf{k}_n &= \mathbf{x}_m^T \mathbf{k} \mathbf{x}_m \end{aligned} \quad (7.15)$$

Z tohoto důvodu je vhodné si uvést i techniky normování modální matice.

7.5.1. Normování modální matice

Jak bylo zmíněno dříve, vlastní vektory popisují posuvy jednotlivých prvků soustavy pouze kvalitativně, nikoli kvantitativně, což znamená, že si můžeme zvolit způsob, jakým je normalizovat. V dnešní době jsou nejpoužívanější dva způsoby, normování vzhledem k jedničce a normování vzhledem k hmotnosti, z nichž jsou oba platné při zrušení provázanosti soustavy rovnic, avšak vedou na různé výsledky.

Normování vzhledem k jedničce

Normování vzhledem k jedničce znamená úpravu vlastních vektorů do tvaru, kdy největší element v každém vektoru je roven jedné. Toho je docíleno vydělením každého vektoru největší hodnotou, která se v něm vyskytuje. Pro náš případ je normovaná modální matice znázorněna níže.

$$\mathbf{x}_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{x}_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -0,5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -0,5 \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

Tuto normovanou modální matici využijeme na diagonalizaci matic hmotnosti a tuhosti dosazením do vztahu (7.15).

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_n &= \mathbf{x}_m^T \mathbf{m} \mathbf{x}_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -0,5 & 1 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -0,5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -0,5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 1,5m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.17)$$

Obdobně pak pro matici tuhosti:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_n = \mathbf{x}_m^T \mathbf{k} \mathbf{x}_m &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -0,5 & 1 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 4,5k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -0,5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -0,5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 4,5k \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{7.18}$$

Normování vzhledem k hmotnosti

Tato metoda normování je výchozí pro většinu výpočetních softwarů. Jejím výsledkem je taková matice hmotnosti, jejíž prvky na hlavní diagonále jsou rovny 1. Normování vzhledem k hmotnosti se řídí rovnicí (7.19),

$$\mathbf{x}_{ni}^T \mathbf{m} \mathbf{x}_{ni} = 1 \tag{7.19}$$

kde index ni značí normovaný i -tý vlastní vektor definovaný jako

$$\mathbf{x}_{ni} = \frac{\mathbf{x}_{mi}}{\sqrt{\mathbf{x}_{mi}^T \mathbf{m} \mathbf{x}_{mi}}} = \frac{\mathbf{x}_{mi}}{q_i} \tag{7.20}$$

Po vyjádření normovaných vlastních vektorů dle rovnice (7.20) a jejich dosazením do rovnice (7.19) dostáváme pro náš případ tyto normované matice hmotnosti a tuhosti:

$$\mathbf{m}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.21}$$

$$\mathbf{k}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{k}{m} \tag{7.22}$$

Jak si můžeme všimnout, normovaná matice tuhosti je rovněž diagonální a prvky na její diagonále odpovídají druhé mocnině vlastních frekvencí. Takto normovaná matice tuhosti se někdy nazývá *spektrální* matice soustavy.

7.5.2. Přejít z fyzikálních do modálních souřadnic

Posledním krokem z vytvoření soustavy nezávislých rovnic je přechod z fyzikálních do modálních souřadnic. K tomu využijeme normované matice hmotnosti a tuhosti, jejichž tvar byl uveden v předchozí kapitole. Soustava diferenciálních rovnic má stejný tvar jako (7.4), avšak do ní jsou dosazeny právě normované matice hmotnosti a tuhosti. Tak obdržíme tvar

$$\mathbf{m}_n \ddot{\mathbf{x}}_p + \mathbf{k}_n \mathbf{x}_p = 0 \tag{7.23}$$

kde index p značí souřadnice v modálním souřadném systému. Po dosazení dostáváme systém tří rovnic

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_{p1} &= 0 \\
\ddot{x}_{p2} + \frac{k}{m} x_{p2} &= 0
\end{aligned} \tag{7.24}$$

$$\ddot{x}_{p3} + \frac{3k}{m} x_{p3} = 0$$

Zatímco v systému závislých diferenciálních rovnic ve fyzikálním souřadném systému (7.1) jsou neznámými veličinami polohy a rychlosti jednotlivých prvků (hmotností), v systému nezávislých diferenciálních rovnic v modálním souřadném systému (7.24) jsou neznámými polohy a rychlosti v jednotlivých módech vibrací.

Po vyřešení této soustavy rovnic a zpětné transformaci výsledků z modálního do fyzikálního souřadného systému dostaneme řešení ve fyzikálním souřadném systému.

7.5.3. Zavedení okrajových podmínek a zatížení

Reálná soustava je charakterizovaná svými okrajovými podmínkami a vnějším zatížením. Je proto vhodné rozšířit analytické vztahy popsané výše o vektory počátečních poloh, rychlostí a zatížení. Protože ty jsou známy ve fyzikálním souřadném systému, my ale úlohu řešíme v modálním souřadném systému, musíme je do něj transformovat. Budeme vycházet ze základní pohybové rovnice. Po jejím vynásobení modální maticí a rozšíření jednotkovou maticí dostáváme tvar [3]:

$$\mathbf{x}_n^T \mathbf{m} \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^{-1} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_n^T \mathbf{k} \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{x}_n^T \mathbf{F} \quad (7.25)$$

kde člen

$\mathbf{x}_n^T \mathbf{m} \mathbf{x}_n$ je diagonální matice hmotnosti

$\mathbf{x}_n^T \mathbf{k} \mathbf{x}_n$ je diagonální matice tuhosti

$\mathbf{x}_n^{-1} \ddot{\mathbf{x}}$ je vektor zrychlení v modálních souřadnicích

$\mathbf{x}_n^{-1} \mathbf{x}$ je vektor polohy v modálních souřadnicích

$\mathbf{x}_n^T \mathbf{F}$ je vektor zatížení v modálních souřadnicích

Okrajové podmínky a silové zatížení transformujeme do modálních souřadnic na základě (7.25) dle těchto vztahů

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{0p} &= \mathbf{x}_n^{-1} \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}_{0p} &= \mathbf{x}_n^{-1} \dot{\mathbf{x}}_0 \\ \mathbf{F}_p &= \mathbf{x}_n^T \mathbf{F} \end{aligned} \quad (7.26)$$

kde $\mathbf{x}_0$ a $\dot{\mathbf{x}}_0$ jsou okrajové podmínky zadané ve fyzikálním souřadném systému a $\mathbf{F}$ je vektor zatížení zadaný ve fyzikálním souřadném systému.

7.6. Porovnání soustavy rovnic ve fyzikálním a modálním souřadném systému

Soustavy rovnic ve fyzikálním a modálním souřadném systému pro uvažovanou soustavu se třemi stupni volnosti bez tlumení jsou shrnuty v následující tabulce (viz Tabulka 1).

Fyzikální souřadnice	Modální souřadnice
soustava provázaných diferenciálních rovnic	soustava nezávislých diferenciálních rovnic
$m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = F_1$ $m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + k_2(x_2 - x_3) = F_2$ $m_3\ddot{x}_3 + k_3(x_3 - x_2) = F_3$	$\ddot{x}_{p1} = F_{p1}$ $\ddot{x}_{p2} + \frac{k}{m}x_{p2} = F_{p2}$ $\ddot{x}_{p3} + \frac{3k}{m}x_{p3} = F_{p3}$

Tabulka 1: Diferenciální rovnice MDOF ve fyzikálním a modálním souřadném systému

Jak již bylo zmíněno výše, proměnnými ve fyzikálních souřadnicích jsou výchylky a rychlosti jednotlivých těles (hmotností). Proměnnými v modálním souřadném systému jsou výchylky a rychlosti jednotlivých módů vibrací.

7.7. Vliv tlumení

Reálné technické soustavy jsou vždy tlumené. Přesné určení velikosti a charakteru takového tlumení je u komplexních technických soustav však v dnešní době téměř nemožné. K využití teorie využívající systém nezávislých diferenciálních rovnic vyžadujeme, aby matice tuhosti a hmotnosti byly diagonální, jež dostáváme použitím operací prezentované v předcházející kapitole. Matici tlumení však obecně diagonalizovat pomocí modální matice netlumené soustavy nelze.

V případě, že soustava obsahuje člen s viskózním tlumením, lze takovýto člen zařadit do diferenciální pohybové rovnice (6.1) jako matici tlumení **B**. To však znemožňuje schopnost diagonalizovat strukturální matice a vytvořit systém nezávislých diferenciálních rovnic.

Z toho důvodu se ve většině technických aplikací využívá Rayleighův model viskózního tlumení, někdy nazývaný též jako proporcionální tlumení, který definuje matici tlumení jako lineární kombinaci matic tuhosti a hmotnosti.

$$\mathbf{B} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (7.27)$$

Jestliže dáme stranou všechny prvky soustavy určené specificky k tlumení, pak většina reálných technických soustav vykazuje hodnotu tlumení (která se liší pro každý z módů) v rozsahu 0,05% ÷ 2% kritického tlumení [3], které je způsobeno převážně hysterezními ztrátami v materiálu, viskózními ztrátami při interakci tělesa s tekutinou či ztrátami ve spojích a kontaktech.

7.8. Přenosové funkce

V této kapitole je odvozen vztah pro přenosové funkce obecné MDOF soustavy, na němž je dále ukázáno, že každá přenosová funkce se dá sestavit jako aditivní kombinace příspěvků jednotlivých SDOF soustav, z nichž každá SDOF je charakterizována rezonanční frekvencí odpovídající jejímu vlastnímu číslu a zesílením daným příslušným vlastním vektorem [3].

Přenosové funkce v modálním souřadném systému sestavíme pomocí Laplaceovy transformace diferenciálních rovnic. V těchto rovnicích se vyskytuje modální matice ve tvaru naznačeném na Obr. 10. Obecný tvar přenosové funkce je pak naznačen v rovnici (6.9). Pro soustavu se třemi stupni volnosti obecně rozlišujeme 9 SISO přenosových funkcí (vztah 3 vstupů a 3 výstupů typu *každý s každým*).

Pro sestavení těchto přenosových funkcí využijeme pohybových rovnic v modálním souřadném systému (viz Tabulka 1). Provedeme jejich Laplaceovu transformaci, čímž dostaneme tvar

$$\begin{aligned} s^2 x_{p1}(s) + \omega_1^2 x_{p1}(s) &= F_{p1}(s) \\ s^2 x_{p2}(s) + \omega_2^2 x_{p2}(s) &= F_{p2}(s) \\ s^2 x_{p3}(s) + \omega_3^2 x_{p3}(s) &= F_{p3}(s) \end{aligned} \quad (7.28)$$

kde

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= 0 \\ \omega_2^2 &= \frac{k}{m} \\ \omega_3^2 &= \frac{3k}{m} \end{aligned} \quad (7.29)$$

jsou vlastní frekvence soustavy. Dále vyjádříme celý tvar transformovaného vektoru zatížení dle rovnice (7.26).

$$\mathbf{F}_p = \mathbf{x}_n^T \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{p1} \\ F_{p2} \\ F_{p3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n11} & x_{n12} & x_{n13} \\ x_{n21} & x_{n22} & x_{n23} \\ x_{n31} & x_{n32} & x_{n33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

Do pohybových rovnic ve tvaru (7.28) dosadíme vektor zatížení ve tvaru (7.30) a následně z nich vyjádříme vektor posuvů:

$$\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} x_{p1} \\ x_{p2} \\ x_{p3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{F_{p1}}{s^2 + \omega_1^2} \\ \frac{F_{p2}}{s^2 + \omega_2^2} \\ \frac{F_{p3}}{s^2 + \omega_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_{n11}F_1 + x_{n12}F_2 + x_{n13}F_3}{s^2 + \omega_1^2} \\ \frac{x_{n21}F_1 + x_{n22}F_2 + x_{n23}F_3}{s^2 + \omega_2^2} \\ \frac{x_{n31}F_1 + x_{n32}F_2 + x_{n33}F_3}{s^2 + \omega_3^2} \end{bmatrix} \quad (7.31)$$

Protože nás zajímají přenosové funkce ve tvaru SISO, tedy v závislosti vždy na jediné složce buzení, rozložíme rovnici (7.31) na tři samostatné případy pro F_1 , F_2 a F_3 . Abychom se dostali zpět do fyzikálního souřadného systému, je potřeba provést zpětnou transformaci, která znamená vynásobení těchto rovnic modální maticí. Tím dostáváme v čitateli jednotlivých členů diadický součin prvků modální matice.

Přenosové funkce dostáváme jako poměr vektoru posuvů (výstupů) a vektoru silového zatížení (vstupů). S využitím indexového zápisu pak dostáváme přenosové funkce ve tvaru:

$$\frac{x_j}{F_k} = \frac{x_{nj1}x_{nk1}}{s^2 + \omega_1^2} + \frac{x_{nj2}x_{nk2}}{s^2 + \omega_2^2} + \frac{x_{nj3}x_{nk3}}{s^2 + \omega_3^2} \quad (7.32)$$

Rovnice přepíšeme do zjednodušeného tvaru s použitím Einsteinova sumačního pravidla.

$$\frac{x_j}{F_k} = \sum_{i=1}^m \frac{x_{nji}x_{nki}}{s^2 + \omega_i^2} \quad (7.33)$$

kde m je celkový počet stupňů volnosti soustavy.

Rovnice (7.33) vyjadřují přenosové funkce pro soustavu s m stupni volnosti, ve které však neuvažujeme tlumení. Pro soustavu s tlumením mají přenosové funkce tvar [3]:

$$\frac{x_j}{F_k} = \sum_{i=1}^m \frac{x_{nji}x_{nki}}{s^2 + 2\xi_i\omega_i s + \omega_i^2} \quad (7.34)$$

kde ξ vyjadřuje poměrný útlum daný rovnicí (5.7).

Rovnice (7.33) a (7.34) ukazují, že každou přenosovou funkci lze vyjádřit jako aditivní kombinaci příspěvků samostatných SDOF soustav, z nichž každá je charakterizována svou vlastní frekvencí ω_i a zesílením, které je dáno příslušným vlastním vektorem. Ten se ve vyjádřeném tvaru přenosové funkce vyskytuje ve členu

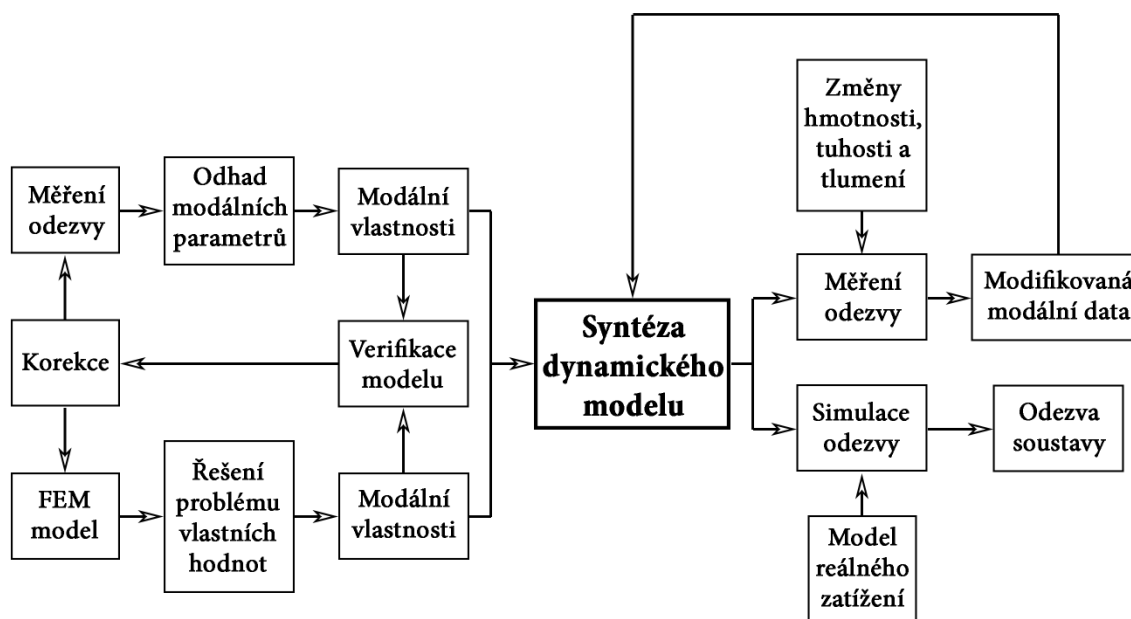
$$\frac{x_{nji}x_{nki}}{\omega_i^2} \quad (7.35)$$

což je diadický součin prvků modální matice podělený druhou mocninou vlastní frekvence.

8. EXPERIMENTÁLNÍ MODÁLNÍ ANALÝZA

Experimentální modální analýza je proces určování modálních vlastností lineárního, časově invariantního (Linear Time-Invariant, LTI) systému. Jejím hlavním použitím je verifikace analyticky určených modálních vlastností (vlastní frekvence, vlastní tvary, tlumení), dále je využívána pro popis dynamických problémů, jejichž řešení není intuitivní, není zřejmé z analytického řešení nebo není vysvětleno na základě předchozích zkušeností [5].

V předvýrobní fázi hraje modální analýza velký význam a je jedním z klíčových prvků při sestavování dynamického modelu. Experimentální modální analýza umožňuje nejen verifikaci analytických a výpočtových modelů soustavy, ale i odhad jejich dynamických parametrů na základě identifikačních metod, které budou rozebrány v následující kapitole.



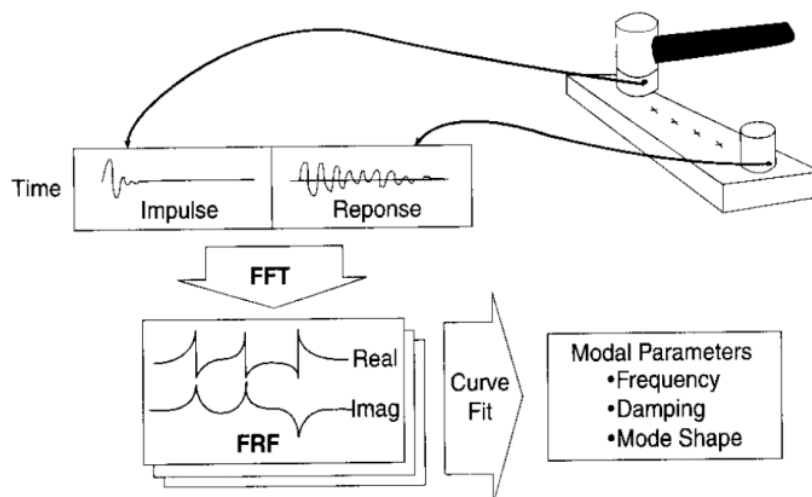
Obr. 11: Sestavování dynamického modelu soustavy (převzato z [10])

Princip experimentální modální analýzy spočívá v určení odezvové funkce na harmonické (Frequency Response Function, FRF) či impulzní (Impulse Response Function, IRF) buzení. Snímačem zrychlení (případně polohy či rychlosti) umístěným na testovaném tělese měříme výstupní signál v časové oblasti. Těleso budíme buď impulzem pomocí rázového kladívka, případně harmonickým generátorem. Fourierovou transformací převedeme naměřená data z časové do frekvenční oblasti. Díky této transformaci se reálné funkce převedou na komplexní, v nichž reálná část odpovídá amplitudě a imaginární část odpovídá fázi.

Vlastní tvary získáme dvěma způsoby: buď měníme pozici snímače při zachování místa buzení, nebo naopak měníme místo buzení při zachování polohy snímače. Počet

8. EXPERIMENTÁLNÍ MODÁLNÍ ANALÝZA

buzených či snímaných míst odpovídá počtu stupňů volnosti následně sestaveného modálního modelu. Postup experimentální modální analýzy je naznačen na Obr. 12.



Obr. 12: Postup experimentální modální analýzy (převzato z [11])

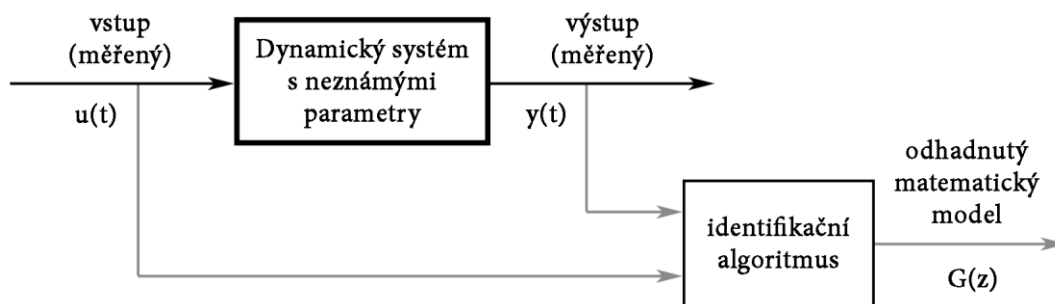
Následným krokem po určení odezvy systému je jeho identifikace, tj. proces ztotožňování vhodného matematického modelu s reálnou soustavou [12]. Tomu je věnována následující kapitola.

9. IDENTIFIKACE DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

Jednou z možností při určování dynamických vlastností reálné soustavy je vytvoření jejího matematického modelu na základě měřených dat, který s dostatečnou přesností popíše její chování. To nazýváme identifikací dynamického systému. V případě dynamických soustav, které budou obsahovat prvky řízení, je popis systému pomocí matematického modelu velmi žádoucí.

Úlohou identifikace lineárních (a následně i nelineárních) dynamických systémů se inženýři zabývají už od druhé poloviny minulého století. Od té doby vznikla řada metod a identifikačních algoritmů, pomocí kterých se vytváří příslušné matematické modely pozorované soustavy. Popisu všech těchto metod by mohla být věnována samostatná kniha, z toho důvodu jsou v této kapitole popsány jen některé ze základních přístupů a kroky při jejich aplikaci. Dalším důvodem je fakt, že mnoho z těchto identifikačních algoritmů je již zabudováno do výpočetních softwarů, což celý postup identifikace velmi zjednodušuje.

Problematicke identifikace dynamických systémů jsou věnovány například publikace [12], [13], [14], [15] a [16]. Schematicky je princip identifikace dynamického modelu znázorněn na Obr. 13



Obr. 13: Princip identifikace dynamického systému

9.1. Typy identifikačních modelů

Obecně rozlišujeme tři typy identifikačních modelů dynamického systému [16]:

- *White Box*: Struktura modelu je založena na základních fyzikálních principech (například Newtonovy pohybové zákony) a jeho parametry jsou odhadnuty na základě měřených dat.
- *Grey Box*: Struktura modelu je pouze částečně založena na základních fyzikálních principech, zbytek modelu a jeho parametry jsou odhadnuty na základě měřených dat.
- *Black Box*: Struktura modelu i jeho parametry jsou zcela neznámé a jsou odhadnuty pouze na základě měřených dat.

Na většinu dnes zkoumaných technických problémů je z důvodu jejich komplexity nahlíženo jako na *Black Box*.

9.2. Matematické modely

Výběr vhodného matematického modelu patří mezi nejdůležitější kroky v procesu identifikace. V dnešní době existuje několik nepoužívanějších matematických modelů pro identifikaci dynamických systémů typu *Black Box*. Modely mohou být založeny na popisu pomocí stavového prostoru, přenosové funkci nebo jiné parametrické závislosti vektoru výstupních veličin na vstupních. Problematika stavového prostoru a přenosové funkce byla rozebrána v kapitole 5.3 a 6.4, proto budou v této kapitole uvedeny některé matematické modely, dávající do vztahu vstupní veličiny, výstupní veličiny a chybu (šum), vycházející z obecného zápisu [17] daného rovnicí

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)}U(z) + \frac{C(z)}{A(z)D(z)}\varepsilon(z) \quad (9.1)$$

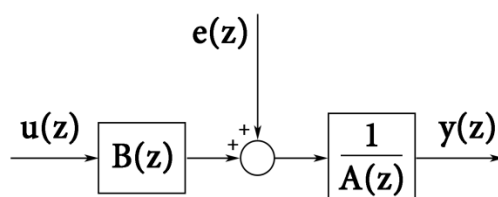
kde A, B, C, D jsou polynomy a ε je měřitelná chyba výstupu stochastického charakteru. Zjednodušené modely popsané níže dostaneme dosazením hodnoty 1 za některé z polynomů A, B, C, D.

9.2.1. ARX

Model ARX (Auto-Regressive with eXogenous variable) uvažuje přenosovou funkci ve tvaru

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)}U(z) + \frac{1}{A(z)}\varepsilon(z) \quad (9.2)$$

Schematicky je model ARX znázorněn na Obr. 14.



Obr. 14: Schéma ARX modelu

Model zahrnuje dynamicky se měnící poruchový signál a díky jeho jednoduchosti je možné velmi rychle numericky určit jeho parametry.

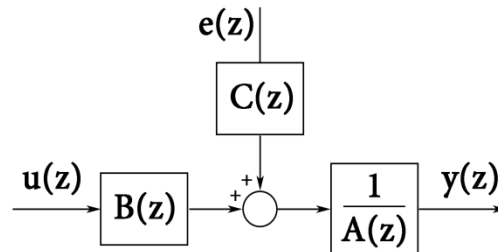
Pro nelineární dynamické systémy je modifikován do podoby NARX (Nonlinear Auto-Regressive with eXogenous variable), který je popsán například v [18].

9.2.2. ARMAX

Model ARMAX (Auto-Regressive Moving Average with eXogenous variable) uvažuje přenosovou funkci ve tvaru

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} U(z) + \frac{C(z)}{A(z)} \varepsilon(z) \quad (9.3)$$

ze kterého je vidět, že model ARX je pouze speciálním případem modelu ARMAX a to při zavedení předpokladu $C(z) = 1$. Schematicky je tento model znázorněn na Obr. 15.



Obr. 15: Schéma ARMAX modelu

Spolu s modelem ARX je model ARMAX nejpoužívanější model při identifikaci lineárních dynamických soustav.

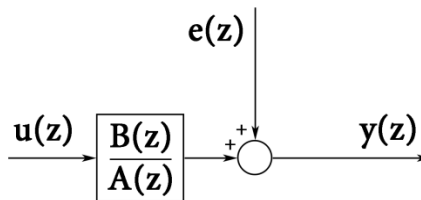
Modifikací tohoto modelu pro nelineární úlohy je NARMAX (Nonlinear Auto-Regressive Moving Average with eXogenous variable) popsaný například v [19].

9.2.3. OE

Model OE (Output Error) na rozdíl od předcházejících modelů neuvažuje dynamické poruchy, tedy neobsahuje žádné parametry pro jejich modelování. Jeho přenosová funkce je zavedena ve tvaru

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} U(z) + \varepsilon(z) \quad (9.4)$$

Schematicky je model OE znázorněn na Obr. 16.



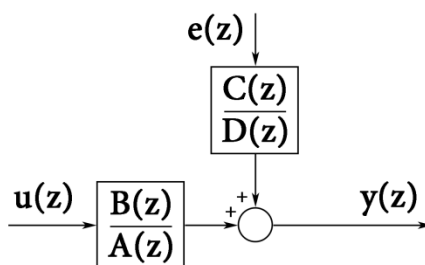
Obr. 16: Schéma OE modelu

9.2.4. BJ

Model BJ (Box-Jenkins) se liší od předcházejících modelů tím, že dynamiku systému a dynamiku poruch modeluje odděleně. Uvažuje přenosovou funkci ve tvaru

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)}U(z) + \frac{C(z)}{D(z)}\varepsilon(z) \quad (9.5)$$

Schematicky je tento model znázorněn na Obr. 17.



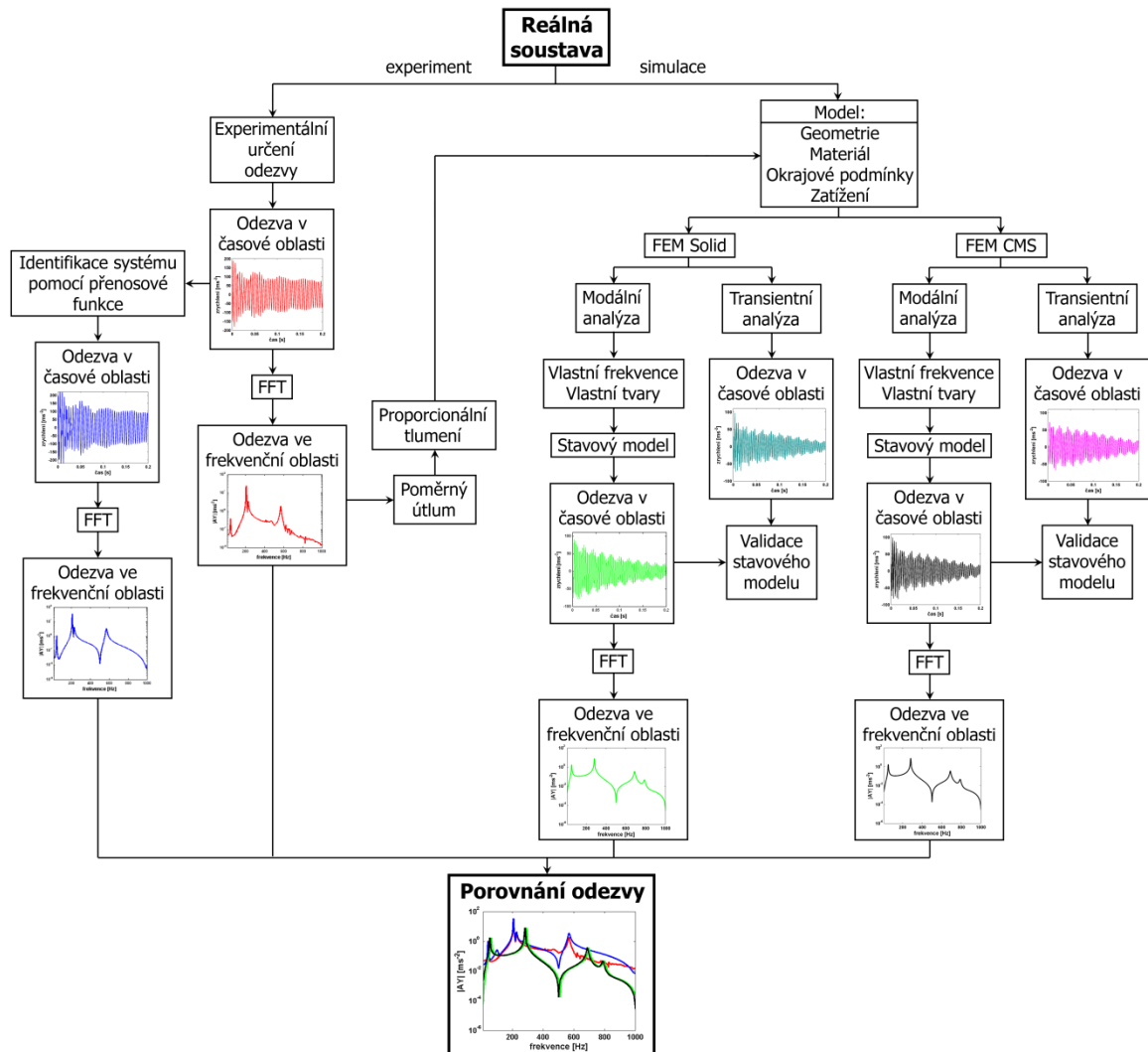
Obr. 17: Schéma BJ modelu

9.3. Volba modelu

Z předchozí kapitoly lze vidět, že struktura jednotlivých parametrických modelů se v zásadě liší a každý model se hodí pro popis jiného dynamického systému. Jelikož strukturu reálného systému však ve většině případů neznáme, volba vhodného popisu se stává problematickou. Z tohoto důvodu byla formulována validační kritéria, která testují vhodnost vybraného modelu pro popis identifikované soustavy [16]. Je nutné podotknout, že je nutné vhodně zvolit nejen typ modelu, ale i jeho řád, tj. počet optimalizačních parametrů. Některá z těchto kritérií jsou například AIC (Akaike's Information theoretic Criterion), FPE (Akaike's Final Prediction Error) nebo MDL (Rissanen's Minimum Description Length).

10. STRUKTURA ŘEŠENÍ PROBLÉMU

Nyní budeme prezentovat aplikaci uvedených přístupů na jednoduché reálné soustavě. Cílem je vytvoření takových výpočtových modelů, jejichž dynamické vlastnosti by na zvolené úrovni odpovídaly vlastnostem reálné soustavy – experimentálního přípravku. Schematicky je postup řešení problému znázorněn na Obr. 18.



Obr. 18: Struktura řešení problému

Pro demonstraci zvolených přístupů byla vytvořena modelová soustava, jejíž struktura byla volena s ohledem na realizovatelnost jak experimentální soustavy, tak příslušných výpočtových modelů.

Vlastní řešení problému je možno rozdělit na dvě části: experimentální a simulační. V experimentální části je na modelové soustavě pomocí rázového kladívka a akcelerometru určena odezva v časové oblasti. Na základě té je provedena identifikace systému, kdy jsou pro zvolený matematický model hledány takové parametry, aby odezva tohoto systému byla dle určitých kritérií co nejbližší odezvě určené experimentálně. V našem případě je matematickým modelem přenosová funkce.

V simulační části jsou vytvořeny dva výpočtové modely v prostředí ANSYS, přičemž první je sestaven pomocí *solid*¹ prvků, druhý pomocí metody CMS. Na obou je provedena modální a transientní analýza, z níž je určena odezva systému. Modální data zahrnující informace o vlastních frekvencích a vlastních tvarech jsou využity k sestavení stavových modelů, které převádí systém s velkým počtem stupňů volnosti na SISO systém.

Na závěr jsou v prostředí Matlab provedeny odezvy všech vytvořených modelů, provedena validace stavových modelů a srovnání výsledků experimentu a simulací.

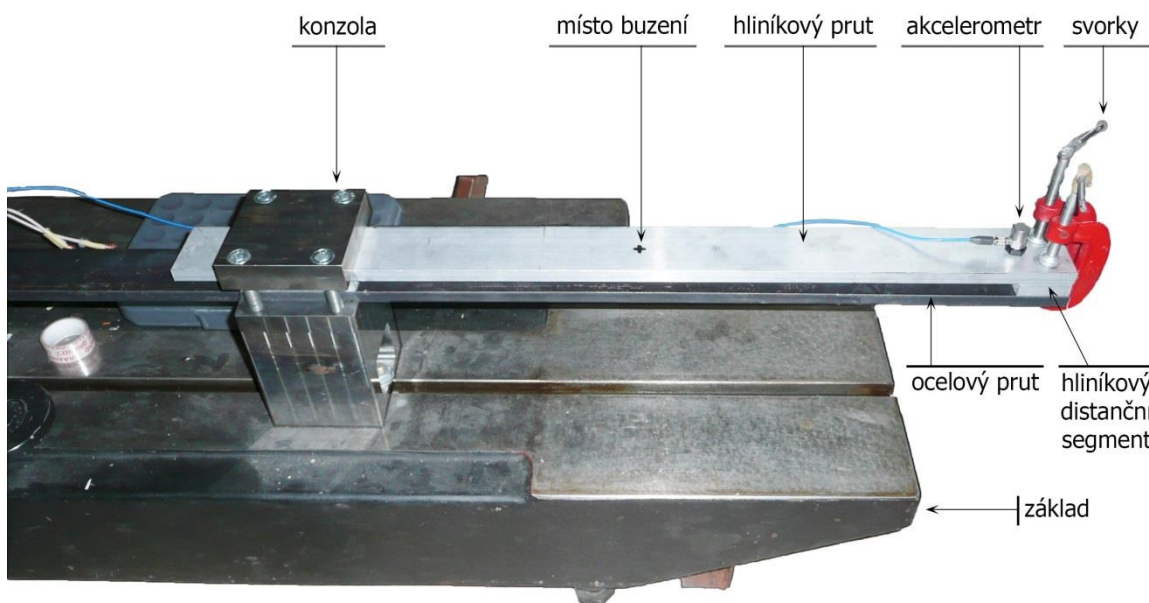
¹ Pojmem *solid* prvky nazýváme v kontextu typu elementů sítě konečných prvků objemové prvky.

² Pojmem *bias* rozumíme nenulovou stejnosměrnou složku v signálu.

³ Filtr *průměrování* přes tři vzorky znamená, že hodnotu signálu v aktuálním vzorku nahradíme průměrnou

11. EXPERIMENTÁLNÍ SOUSTAVA

Pro demonstraci navržených přístupů byla vytvořena experimentální soustava skládající se ze dvojice prutů, které jsou na jednom své konci spojeny pomocí svorek a na druhém konci vetknuty do konzoly upevněné na základu. Pruty jsou z různých materiálů a jejich povrchy nejsou ve vzájemném kontaktu, čehož je docíleno použitím distančních segmentů na obou jejich koncích. Soustava byla považována za dostatečně názornou pro demonstraci uvažovaných metod řešení, zároveň byla poměrně snadno realizovatelná.

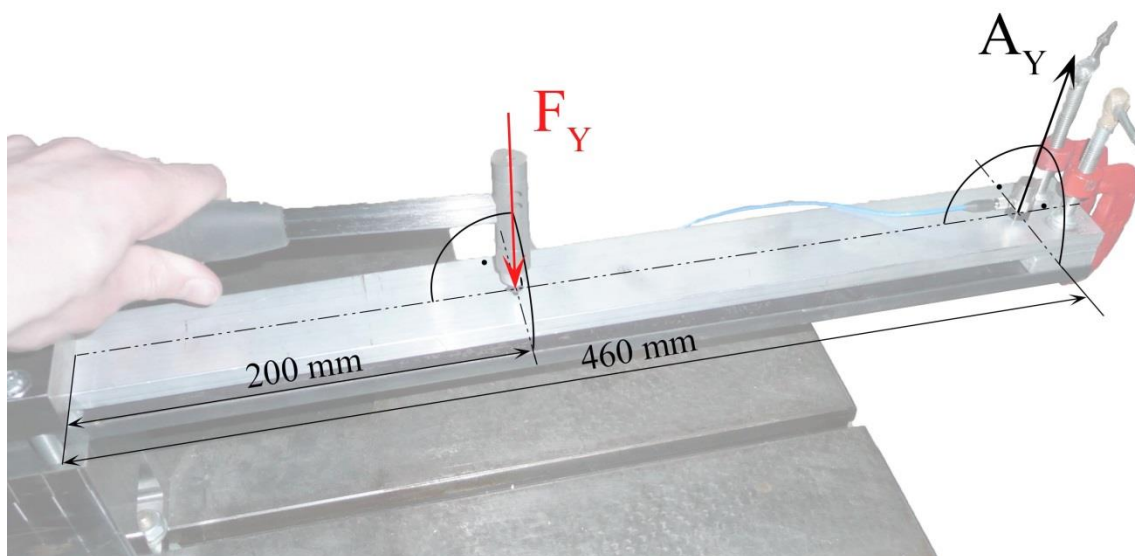


Obr. 19: Snímek experimentální soustavy

11.1. Odezva v časové oblasti

Po sestavení experimentální soustavy byl vytvořen měřicí řetězec skládající se z rázového kladívka, akcelerometru a měřicí karty. Tento řetězec byl následně propojen s počítačem, kde pomocí prostředí NI LabView SignalExpress [20] byly zaznamenány průběhy buzení a odezvy. Přestože tento nástroj umožňuje analýzu těchto signálů bez jakéhokoli programování, tyto funkce nebyly využity a surová data byla pomocí textových souborů exportována do prostředí Matlab.

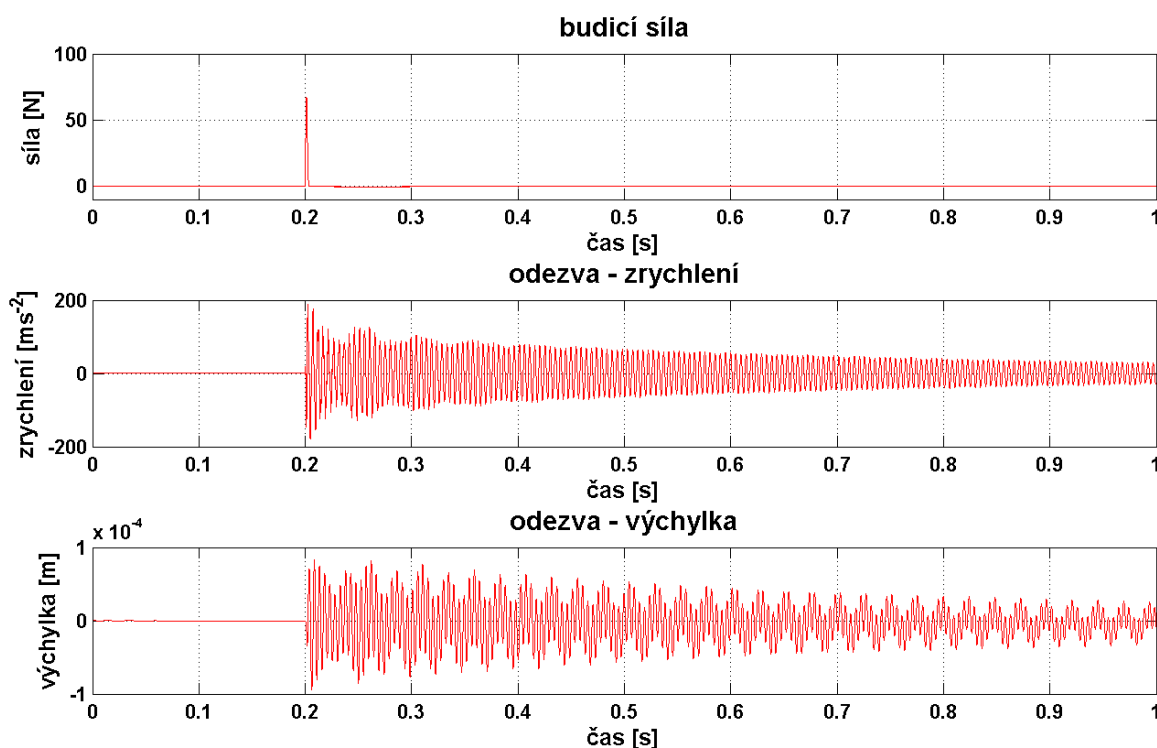
Jelikož bylo naším cílem určení odezvy ve frekvenční oblasti a identifikace tohoto systému, nikoli analýza vlastních tvarů, byla soustava buzena pouze v jednom místě a jedním úderem rázového kladívka (na Obr. 20 označeno jako síla F_Y). Toto místo bylo voleno tak, aby došlo k vybuzení několika prvních ohybových vlastních tvarů (ve směru kolmém na rovinu prutu). Pro měření odezvy bylo zvoleno místo na konci horního prutu před vazbou se spodním prutem (na Obr. 20. označeno jako zrychlení A_Y).



Obr. 20: Místo buzení a místo umístění akcelerometru

Zaznamenaná data se skládala z průběhu budicí síly (vstup) a odezvy ve formě zrychlení (výstup). Software SignalExpress se nejevil jako příliš vhodný pro záznam dlouhých signálů (řádově několik sekund), jelikož na konci každé sekundy záznamu došlo ke špatnému uložení časové osy signálu. Příčina nebyla nalezena, ovšem pro účely této práce je doba záznamu 1 sekunda více než dostačující. Před vlastním buzením byl zaznamenán úsek délky 0,2 s pro účely filtrace *biasu*² a správnou synchronizaci vstupního a výstupního signálu. Signál zrychlení byl vhodnou filtrací a dvojitou integrací převeden na výchylku.

² Pojmem *bias* rozumíme nenulovou stejnosměrnou složku v signálu.

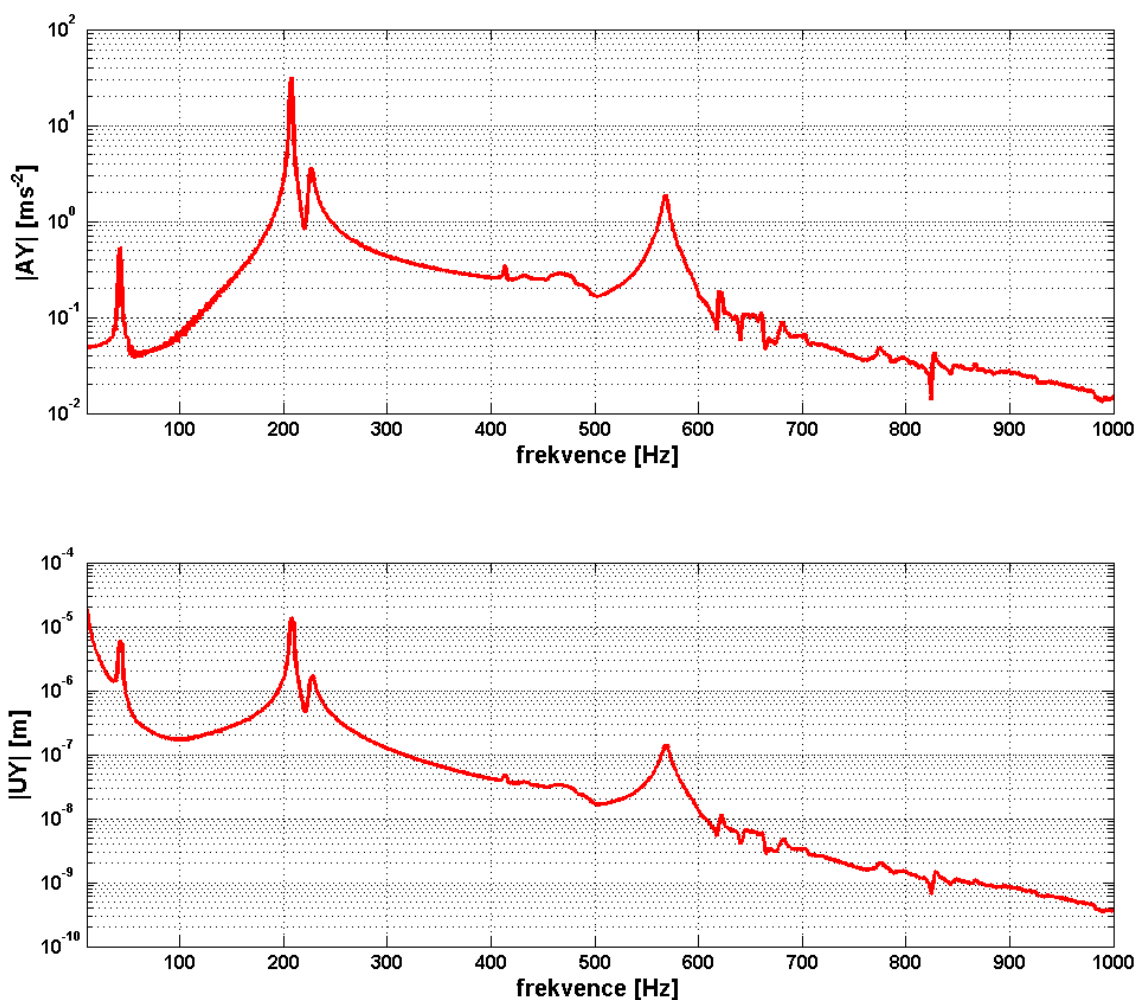


Obr. 21: Odezva experimentální soustavy v časové oblasti

11.2. Odezva ve frekvenční oblasti

Z odezvy v časové oblasti přejdeme do frekvenční oblasti pomocí rychlé Fourierovy transformace (FFT). Protože po této operaci je průběh relativně zašuměný, byl na něj aplikován filtr *průměrování* přes tři vzorky³, kterým se dostatečně vyhladil při zachování maximálních hodnot v rezonancích. Výsledný průběh odezvy v časové oblasti je znázorněn na Obr. 22.

³ Filtr *průměrování* přes tři vzorky znamená, že hodnotu signálu v aktuálním vzorku nahradíme průměrnou hodnotou se součtu hodnot aktuálního, předcházejícího a následujícího vzorku. Toho docílíme aplikací okna tvaru $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.



Obr. 22: Odezva experimentální soustavy ve frekvenční oblasti

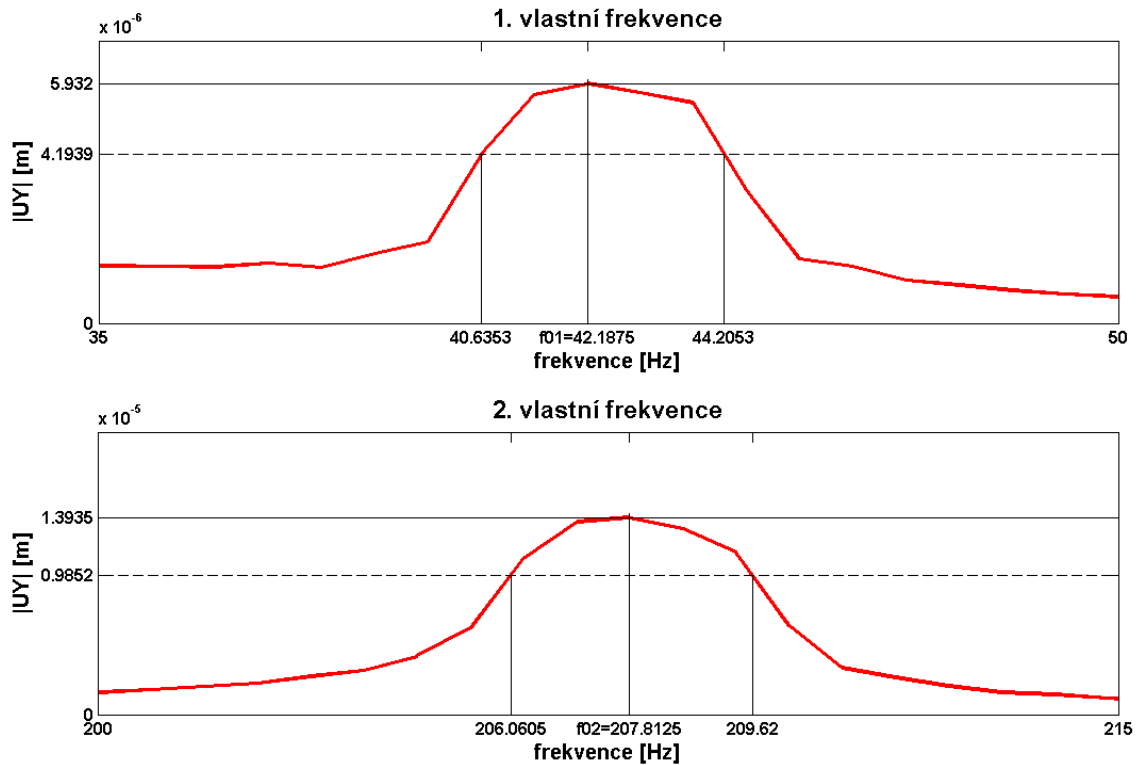
11.3. Model tlumení

Pro sestavení platných modelů, na kterých můžou být prováděny věrohodné simulace, je zapotřebí zahrnout i vliv tlumení. Určování tlumení u reálných soustav je obecně problém, existuje však několik metod, jež dávají výsledky alespoň řádově odpovídající skutečnosti. Pro následující simulace bude využito formulace tlumení ve formě proporcionálního tlumení (viz kapitola 7.7). K určení koeficientů α a β využijeme metodu založenou na předpokladu známých vlastních frekvencí a příslušných poměrných útlumů pro dva vlastní tvary kmitání. Matematicky se koeficienty vypočítají jako řešení soustavy 2 algebraických rovnic ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\Omega_1} & \Omega_1 \\ \frac{1}{\Omega_2} & \Omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_{p1} \\ 2b_{p2} \end{bmatrix} \quad (11.1)$$

kde Ω_1, Ω_2 jsou netlumené vlastní frekvence jednoho a druhého tvaru kmitání, koeficient α představuje konstrukční tlumení, koeficient β představuje materiálové tlumení a $2b_{p1}, 2b_{p2}$ jsou poměrné útlumy pro první a druhý tvar kmitání. Jako Ω_1, Ω_2 můžeme volit tlumené vlastní frekvence, jestliže předpokládáme, že tlumení nebude mít na jejich velikost vůči netlumeným vlastním frekvencím podstatný vliv.

Poměrné útlumy jsou vypočítány na základě údajů z amplitudo-frekvenční charakteristiky, kdy je určena šířka pásma, ve které signál poklesne o hodnotu 3dB respektive na 0,707-násobek své maximální hodnoty. Konkrétní hodnoty jsou naznačeny na Obr. 23.



Obr. 23: Určení šířky pásma z amplitudo-frekvenční charakteristiky

Poměrný útlum je pak určen vztahem

$$b_p = \frac{1}{2} \frac{\Delta\omega}{\Omega_0} = \frac{1}{2} \frac{\Delta f}{f_0} \quad (11.2)$$

do kterého jsou dosazeny hodnoty:

- $\Delta f_1 = 44,2053 - 40,6353 = 3,51 \text{ Hz}$
- $\Delta f_2 = 209,6200 - 206,0605 = 3,56 \text{ Hz}$
- $f_{01} = 42,1875 \text{ Hz}$
- $f_{02} = 207,8125 \text{ Hz}$

$$b_{p1} = \frac{1 \Delta f_1}{2 f_{01}} = \frac{1}{2} \frac{3,51}{42,1875} = 0,0416$$

$$b_{p2} = \frac{1 \Delta f_2}{2 f_{02}} = \frac{1}{2} \frac{3,56}{207,8125} = 0,0086$$
(11.3)

Řešením soustavy rovnic (11.1) dostáváme koeficienty

- $\alpha = 10,56$
- $\beta = 6,92 \cdot 10^{-7}$

kteřé jsou využity pro sestavení proporcionálního modelu tlumení.

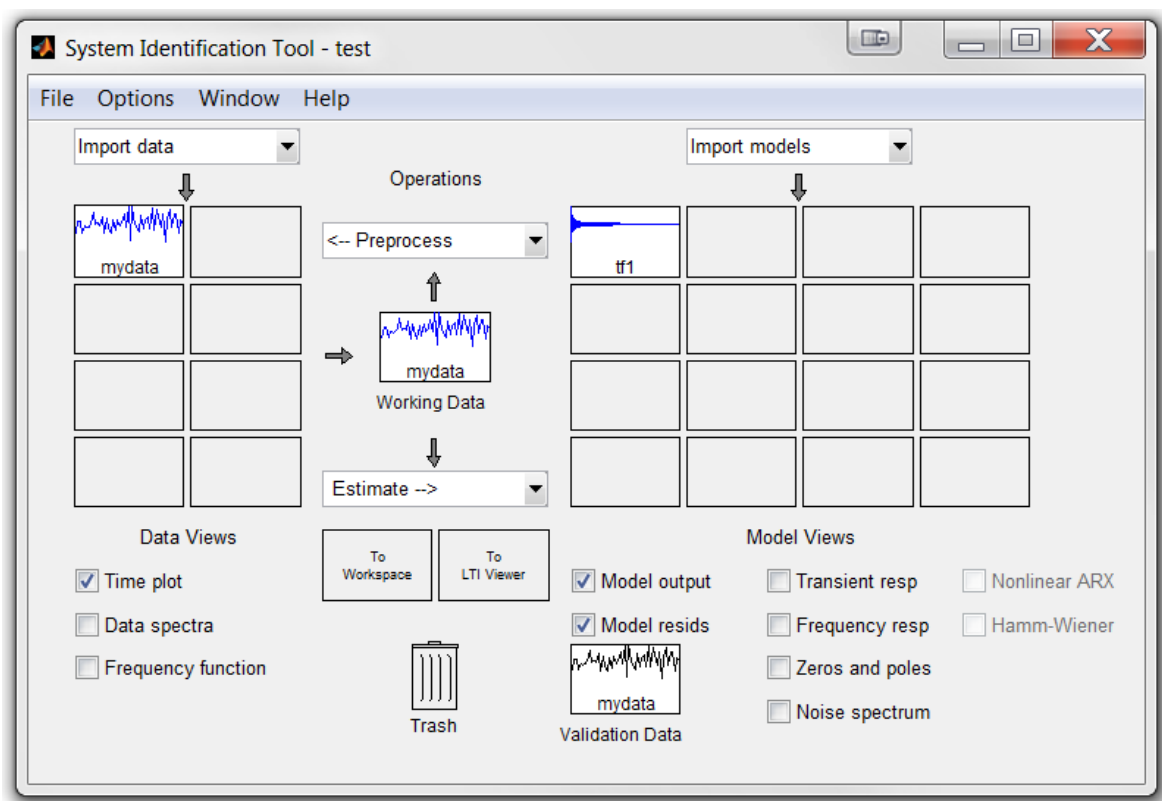
11.4. Identifikace systému

Identifikací systému se rozumí hledání parametrů matematického modelu tak, aby výstup tohoto modelu byl dle zvolených kritérií blízký výstupu experimentální soustavy. Teoreticky se této problematice věnuje kapitola 9. V této kapitole využijeme tyto znalosti a aplikujeme je na naši experimentální soustavu. Problematikou identifikace se zabývá například [14], [15], [19], [21]–[23].

K identifikaci bylo využito prostředí Matlab, konkrétně jeho část System Identification Toolbox [24]. Tento toolbox obsahuje nejen sadu příkazů, ale i interaktivní grafické rozhraní (viz Obr. 24), ve kterém je možno identifikaci provést bez psaní kódu. Toto rozhraní umožňuje uživateli pohodlně načíst vstupní data buď v časové, nebo frekvenční oblasti a následně vybrat jednu z možností identifikace pomocí odhadu:

- přenosové funkce
- stavového modelu
- procesního modelu⁴
- polynomického modelu aj.

⁴ Jako procesní model chápeme přenosovou funkci ve spojitě časové oblasti, která popisuje dynamické vlastnosti lineárního systému pomocí jedné nebo mnoha z těchto veličin: statické zesílení, časové konstanty, nuly, zpoždění odezvy a vynucenou integraci.



Obr. 24: Grafické rozhraní System Identification Toolboxu

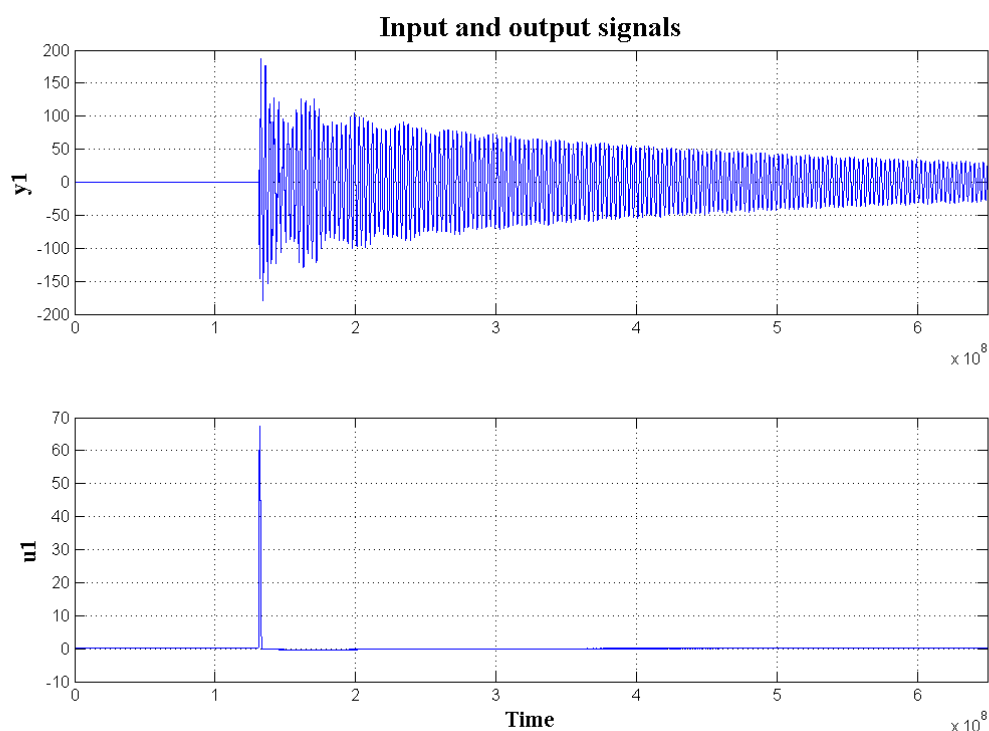
Výběr vhodného způsobu identifikace, jak bylo zmíněno v kapitole 9.3, je z velké části na uživateli a vyžaduje zkušenost. Aby bylo dosaženo co nejlepších výsledků při minimálním řádu zvoleného matematického modelu, je nutné porovnávat chování identifikovaných modelů jak kvalitativně (stabilita, charakter odezvy), tak kvantitativně (rezidua). To znamená, že proces identifikace je iterační proces, ve kterém je snahou minimalizovat rozdíly mezi výstupem z experimentální soustavy a identifikovaného systému.

Přestože grafické rozhraní umožňuje automaticky provést iterační proces minimalizace pomocí některé z implementovaných metod (Gauss-Newton, Levenberg-Marquardt aj.), které jsou založeny na některé z variant metody nejmenších čtverců, výběr rozsahu řádu matematického modelu stále zůstává na uživateli. Z tohoto důvodu bylo grafické prostředí využito jen pro vizualizaci procesu identifikace, avšak proces samotný byl proveden pomocí sady příkazů přímo v prostředí Matlab. Tím byla zaručena lepší kontrola nad iteračním procesem minimalizace rezidua a identifikované modely bylo možné vizuálně i kvantitativně porovnávat pomocí skriptu.

Pro náš systém byla zvolena identifikace pomocí odhadu přenosové funkce, jakožto volba s mnoha výhodami, mezi které patří nízký počet uživatelem zadávaných parametrů (pouze počet pólů a nul), což souvisí s jednoduchou implementací do iteračního procesu

minimalizace rezidua. Byl vytvořen skript, ve kterém byly postupně nastavovány parametry matematického modelu, přičemž byla pozorována odezva identifikovaného systému.

Protože do identifikačního algoritmu byl v našem případě vložen záznam buzení a odezvy v časové oblasti (viz Obr. 25), výstup identifikovaného modelu bude opět v časové oblasti. Ta ale není vhodná pro přesné kvalitativní a kvantitativní srovnání těchto odezev, protože jen drobný rozdíl ve frekvenci signálu (respektive jejich fázovému posunu) způsobí, že se dříve či později začnou rozbíhat. Na druhou stranu je časová oblast relativně vhodná pro srovnání celkového poměrného útlumu na základě exponenciální obálky. I přesto je raději zvolena frekvenční oblast, která lépe postihne rozdíly mezi dynamickými vlastnostmi obou systémů.



Obr. 25: Vstupní data do identifikačního algoritmu

K porovnání výstupních signálů z experimentu a identifikovaného modelu existuje v Matlabu příkaz *compare*, který bohužel dokáže srovnat signály v té oblasti, ve které jsou signály definovány (tj. pro signály v časové oblasti dokáže vytvořit srovnání odezvy pouze v časové oblasti). Jelikož je odezva identifikovaného modelu přímou odezvou na záznam budící síly a existuje pouze pro vizuální porovnání, není možné jej převést do oblasti frekvenční (protože nejde o vektor dat přístupný uživateli). Pro srovnání ve frekvenční oblasti je nutné využít odezvu experimentální soustavy ve frekvenční oblasti z předcházející kapitoly (viz Obr. 22) a odezvu identifikovaného systému získat na základě simulace.

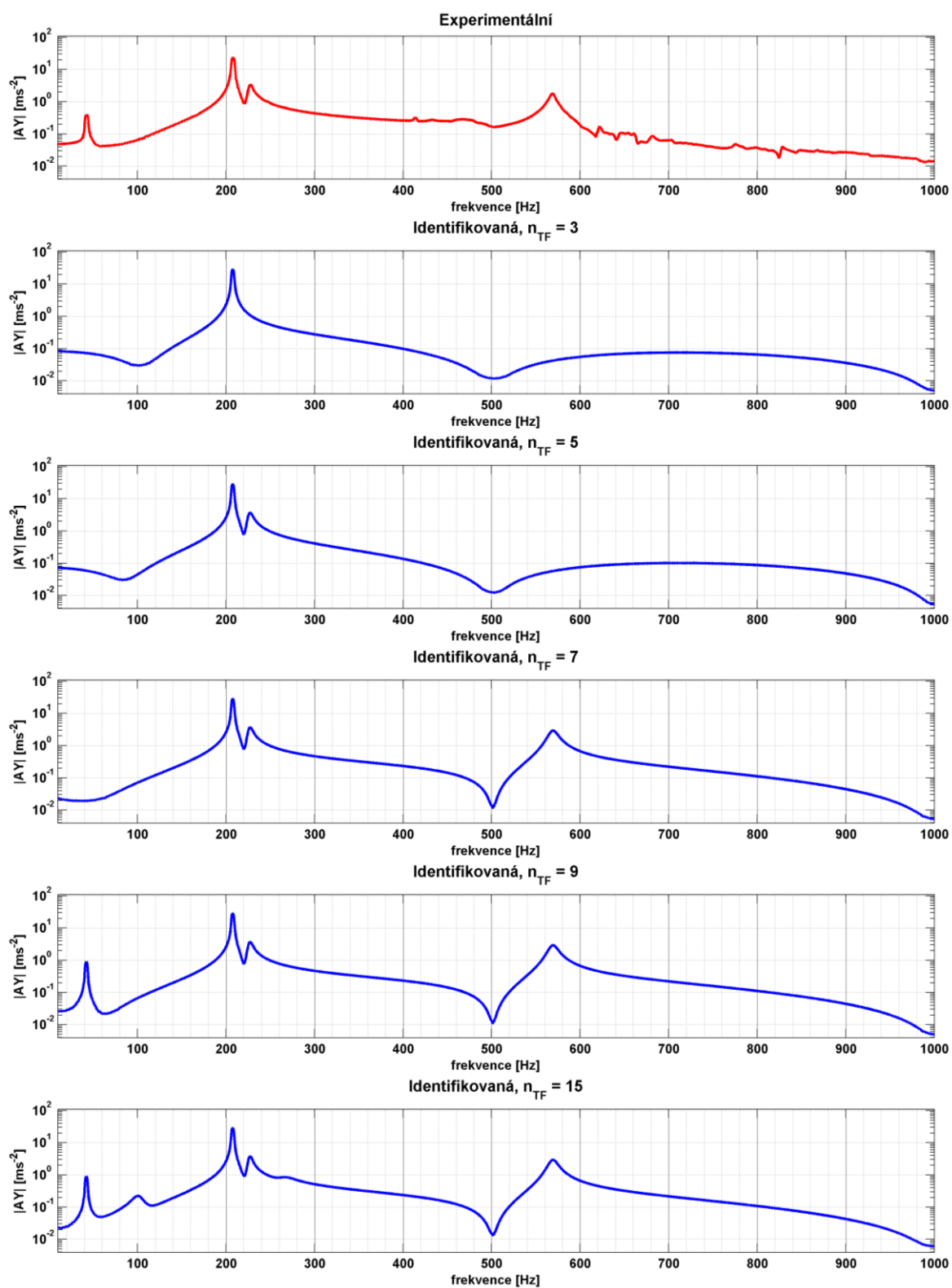
K odhadu přenosové funkce slouží v Matlabu příkaz *tfest*, jehož parametry jsou především:

- vektor vstupních dat
- vektor výstupních dat
- vzorkovací frekvence
- počet pólů
- počet nul

Tento příkaz vytvoří přenosovou funkci jako objekt typu *idtf*⁵ tak, že rozdíl mezi odezvou experimentálních dat a odezvou takto identifikované přenosové funkce je minimalizován pomocí některé z variant metody nejmenších čtverců. Řád jejího čitatele (*num*, numerator) a jmenovatele (*den*, denominator) je dán počtem zvolených pólů a nul. Je důležité podotknout, že vyšší hodnota počtu pólů a nul obecně nezaručuje vyšší přesnost odhadovaného modelu.

Pro námi uvažovanou odezvu experimentální soustavy byl v iteračním procesu identifikace uvažován rozsah počtu pólů a nul mezi hodnotami 1 a 20. Byl hledán takový počet parametrů a jejich příslušné hodnoty, které by splňovaly požadavek dostatečné přesnosti (alespoň 90% shoda v časové oblasti, zahrnutí všech dominantních vrcholů ve frekvenční oblasti) a přitom byl jejich počet nejmenší možný. Z opakovaných simulací se optimální hodnota počtu pólů a nul ukázala jako 9, při kterém přenosová funkce popsala všechny 4 dominantní vrcholy v amplitudo-frekvenční charakteristice odezvy experimentální soustavy (viz Obr. 22). Při hodnotách nižších nedošlo k popisu všech těchto vrcholů, přičemž při hodnotách vyšších docházelo buď k nestabilnímu chování, nebo k nepatrnému zpřesnění za cenu několikanásobně vyššího řádu přenosové funkce. Odezvy jednotlivých identifikovaných přenosových funkcí řádu 3, 5, 7, 9 a 15 s odezvou experimentální soustavy ve frekvenční oblasti jsou znázorněny Obr. 26.

⁵ Objekt typu *idtf* v Matlabu znamená model ve tvaru přenosové funkce ve spojité časové oblasti, jejíž parametry jsou předmětem identifikace.



Obr. 26: Porovnání odezvy identifikovaných přenosových funkcí ve frekvenční oblasti

Takto určená přenosová funkce (řádu 9) nyní může sloužit k simulaci odezev nejen na impuls, jak tomu bylo v tomto případě ale i například na harmonický či jiný průběh budící síly, přičemž je zaručena odezva srovnatelná s odezvou experimentální soustavy. Tímto krokem jsme tedy nahradili experiment matematickým modelem se srovnatelnými dynamickými vlastnostmi.

Je nutné podotknout, že v uvažovaném případě byla soustava buzena pouze v jednom směru (kolmo na rovinu horního prutu), přičemž bod, v němž byla buzena, ležel na ose tohoto prutu. Z toho plyne, že byly vybuzeny pouze ohybové vlastní tvary a to jen některé, avšak reálná soustava obsahuje i další ohybové tvary, případně torzní či podélné. Aby bylo možno tyto projevy popsat pomocí přenosové funkce na základě identifikace, bylo by nutno budit soustavu ve více bodech a více směrech.

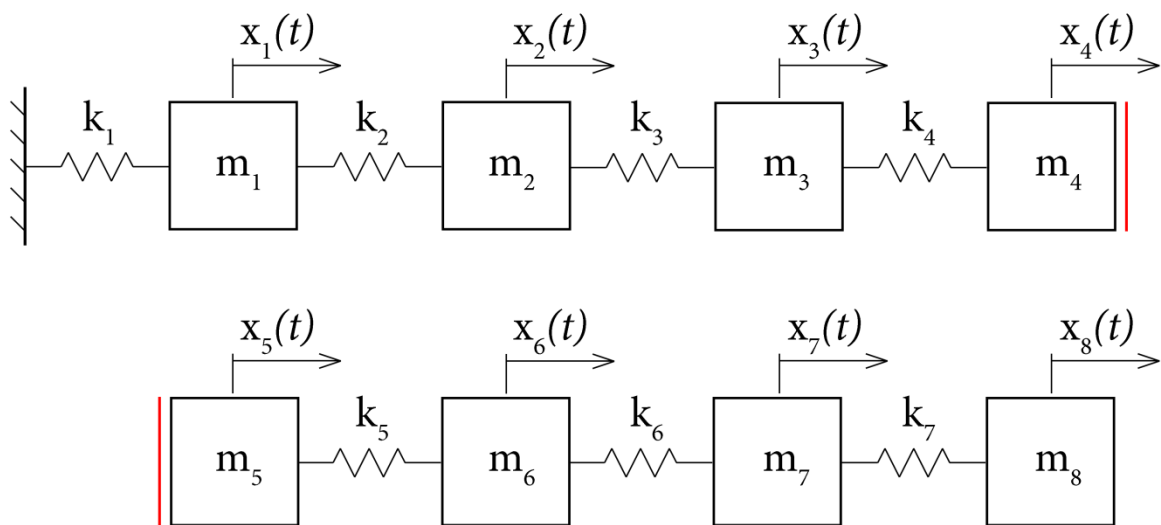
Takto určenou přenosovou funkci lze pro účely simulace snadno převést do stavového prostoru pomocí rovnice (6.11), jak je uvedeno v kapitole 6.4.

12. DEMONSTRACE CRAIG-BAMPTONOVY METODY

Protože jeden ze způsobů tvorby modelu je založen na metodě CMS, z nichž jeden zástupce, Craig-Bamptonova metoda teoreticky popsána v kapitole 6.5.2, je vhodné si ukázat, jaký je mechanismus této metody, a to na jednoduchém příkladu MDOF systému složeného ze dvou subsystémů. Stejným způsobem je pak možno sestavit redukovaný model i pro zvolenou reálnou aplikaci.

Pochopení principu metod modální redukce je natolik důležité, že byl v rámci této práce vytvořen skript, jež tuto metodu využívá prakticky. Pomocí něj je na systému složené ze dvou subsystémů s m a n stupni volnosti, jež jsou spojeny pomocí jedné vazby, pozorován tvorby dílčích redukovaných matic a na základě modální analýzy je porovnán výsledek se systémem s $m + n - 1$ stupni volnosti. Stejný přístup byl využit například v [25].

Uvažovaný systém byl složen ze dvou dílů, z nichž oba měly 4 stupně volnosti (viz Obr. 27). První díl (m_1 - m_4) byl vázaný tuhou vazbou k základu. Červená čára značí místo, v němž budou obě soustavy spojeny tuhou vazbou; vznikne tak systém se 7 stupni volnosti. V tomto příkladu nebylo uvažováno tlumení.



Obr. 27: Uvažovaná soustava pro ilustraci Craig-Bamptonovy metody

Volené hodnoty hmotnosti a tuhosti jsou zapsány v následujících tabulkách:

m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8
[kg]	[kg]	[kg]	[kg]	[kg]	[kg]	[kg]	[kg]
10	2	2	1	0,3	0,1	0,1	0,6

Tabulka 2: Hodnoty hmotností pro uvažovaný systém

12. DEMONSTRACE CRAIG-BAMPTONOVY METODY

k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7
$[\text{Nm}^{-1}]$	$[\text{Nm}^{-1}]$	$[\text{Nm}^{-1}]$	$[\text{Nm}^{-1}]$	$[\text{Nm}^{-1}]$	$[\text{Nm}^{-1}]$	$[\text{Nm}^{-1}]$
$9 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^4$	$1 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^3$

Tabulka 3: Hodnoty tuhostí pro uvažovaný systém

Cílem této demonstrační úlohy je ukázat, jakým způsobem vznikne redukovaný systém z pohledu matic, zároveň ukázat, jakým způsobem tato operace ovlivní jeho modální vlastnosti. Potřebné skripty jsou uvedeny v příloze A, rozepsané dílčí matice pro tuto úlohu jsou uvedeny v příloze C. Zde jsou porovnány pouze vlastní frekvence systému, které jsou získány řešením rovnice

$$\det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) = 0 \quad (12.1)$$

kde $\mathbf{K}$ je matice tuhosti, $\mathbf{M}$ je matice hmotnosti a λ jsou hledaná vlastní čísla odpovídající druhé mocnině vlastních frekvencí. Matice $\mathbf{K}$ a $\mathbf{M}$ mohou být matice sestavené buď pro kompletní systém se 7 stupni volnosti klasicky, nebo pomocí Craig-Bamptonovy metody jako subsystémů.

Při aplikaci Craig-Bamptonovy metody je nutno zvolit počet módů, které budou zachovány, a to pro každý subsystém. Protože Craig-Bamptonova metoda uvažuje tuhou vazbu na místě rozhraní, subsystém (m_1 - m_4) má 3 stupně volnosti, stejně jako subsystém (m_5 - m_8). Máme tedy možnost zachovat 0 až 3 módy pro každou z těchto subsystémů. Na této volbě pak závisí nejen počet módů složeného systému, ale i shoda modálních vlastností ve srovnání s celým systémem.

V tabulkách níže je prezentováno srovnání modálních vlastností celého systému a systému složeného pomocí Craig-Bamptonovy metody, přičemž jsou voleny zachované módy v počtu

- 1 pro každý subsystém (celkem 2)
- 3 pro každý subsystém (celkem 6)

Mód	Craig-Bampton	Celý systém	Chyba
$[-]$	$[\text{Hz}]$	$[\text{Hz}]$	$[\%]$
1.	6.0153	5.9826	0.5452
2.	13.0002	12.9986	0.0121
3.	17.6038	15.5087	13.5089
4.	-	20.6629	-
5.	-	32.7619	-
6.	-	80.1678	-
7.	-	183.8192	-

Tabulka 4: Vlastní frekvence při zachování 1 módu pro každý subsystém (celkem 2)

Mód	Craig-Bampton	Celý systém	Chyba
[-]	[Hz]	[Hz]	[%]
1.	5.9833	5.9826	0.0111
2.	12.9986	12.9986	0.0000
3.	15.5088	15.5087	0.0003
4.	20.6631	20.6629	0.0011
5.	32.7619	32.7619	0.0000
6.	80.1678	80.1678	0.0000
7.	183.8192	183.8192	0.0000

Tabulka 5: Vlastní frekvence při zachování 3 módů pro každý subsystém (celkem 6)

Tyto výsledky potvrzují, že Craig-Bamptonova metoda je velmi efektivní při skládání systémů pomocí subsystémů. Při vhodné volbě zachovaných módů vykazuje složený systém prakticky stejné modální vlastnosti, jako systém vytvořený jako celek.

Protože stejného principu využívají všechny metody spadající do kategorie CMS, přičemž se liší jen vazbami v místě rozhraní mezi subsystémy, považoval jsem za důležité ověřit, že systémy vytvořené pomocí subsystémů vykazují stejné modální vlastnosti, jako systémy složené jako celky. To bude důležité v následující kapitole, kdy bude této metody využito pro sestavení modelu námi uvažované experimentální soustavy.

13. SIMULACE ODEZVY VÝPOČTOVÝCH MODELŮ

V této kapitole bude rozebrán postup tvorby výpočtových modelů, které na kterých budou simulovány dynamické vlastnosti obdobným způsobem jako u experimentální soustavy. Modely však budou v tomto případě sestaveny z dílčích modelů [26], které nebudou založeny na experimentálně určené odezvě, jak tomu bylo v předchozím případě identifikace. Jedinou výjimkou je model tlumení, který je určen z odezvy ve frekvenční oblasti (viz kapitola 11.3). Výsledné složené modely mají společné vlastnosti popsané dílčími modely, mezi které patří:

- model topologie a geometrie
- model materiálu
- model vazeb
- model aktivace
- model projevů
- model okolí

13.1. Model topologie a geometrie

Vzhledem k jednoduchosti tvaru jednotlivých dílů soustavy byl model geometrie vytvořen přímo v prostředí ANSYS APDL. Rozměry dílčích částí soustavy byly změřeny, avšak protože se jedná o standartní díly a řešený problém nevyžaduje znalost výrobních tolerancí, byly uvažovány jako ideálně přesné rozměry.

Soustava se skládá ze 4 samostatných dílů:

- ocelový prut
- hliníkový prut
- hliníkový distanční segment
- svorky

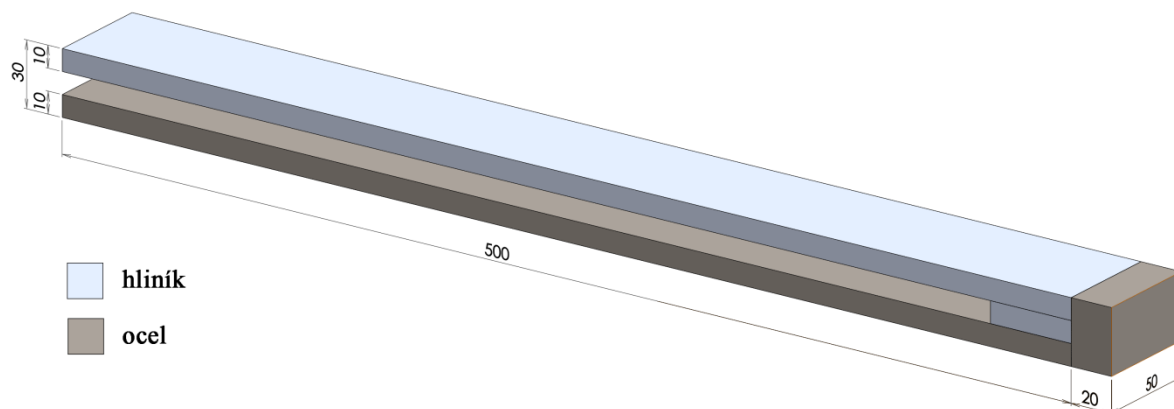
Ostatní díly soustavy (konzola, základ, svorky) nejsou do modelu geometrie zahrnuty, avšak v případě svorek je nutné zahrnout jejich hmotnost (a polohu těžiště), jelikož bude ovlivňovat dynamické vlastnosti soustavy. Na experimentální soustavě byly použity dvě ocelové svorky o celkové hmotnosti 230g, jejichž těžiště je ve vzdálenosti zhruba 10mm od konce prutů.

Model geometrie se tedy skládá z těchto 4 dílů:

- ocelový prut (**š x v x d**) [mm]: 50 x 10 x 500
- hliníkový prut (**š x v x d**) [mm]: 50 x 10 x 500
- hliníkový distanční segment (**š x v x d**) [mm]: 50 x 10 x 40
- ocelový blok nahrazující svorky (**š x v x d**) [mm]: 50 x 30 x 20

Délka prutů značí vzdálenost od vazby ke konzole.

Pro názornost byl vytvořen model pomocí CAD softwaru, na kterém jsou znázorněny dílčí rozměry (viz Obr. 28).



Obr. 28: Model geometrie

13.2. Model materiálu

Materiál všech dílů soustavy byl považován jako homogenní izotropní lineárně elastický (Hookovský) materiál, pro jehož popis nám stačí dvě materiálové konstanty: modul pružnosti E a Poissonovo číslo μ . Soustava se obsahuje díly z oceli a hliníku, pro které byly uvažovány tyto hodnoty materiálových konstant:

Ocel:

- modul pružnosti E : $2,1 \cdot 10^{11}$ Pa
- Poissonovo číslo μ : 0,3

Hliník:

- modul pružnosti E : $7,0 \cdot 10^{10}$ Pa
- Poissonovo číslo μ : 0,33

13.3. Model vazeb

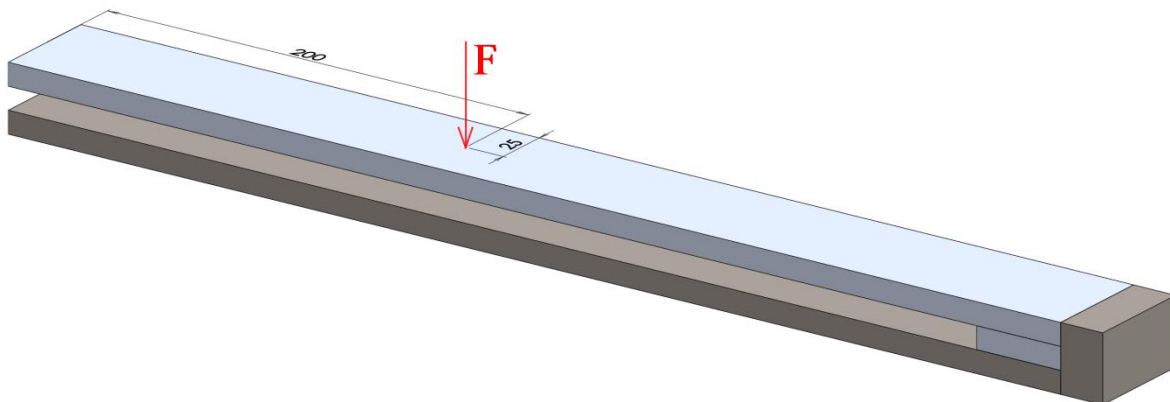
Vazba entit ke konzole je uvažována jako ideální vetknutí. Vazby mezi entitami jsou realizovány jako ideální (*bonded*).

Protože svorky, vlastní konzola a základ mají konečnou tuhost, zatímco vetknutí a ideální spojení představuje tuhost nekonečnou, bude tímto zjednodušením způsobena odchylka mezi výsledky experimentu a simulací.

13.4. Model aktivace

Experimentální soustava je buzena pomocí rázového kladívka v místě nacházejícím se na ose horního prutu ve 2/5 jeho délky (viz Obr. 29). Protože kontaktní plocha hrotu kladívka je malá, v modelu aktivace uvažujeme buzení pouze v jednom bodě.

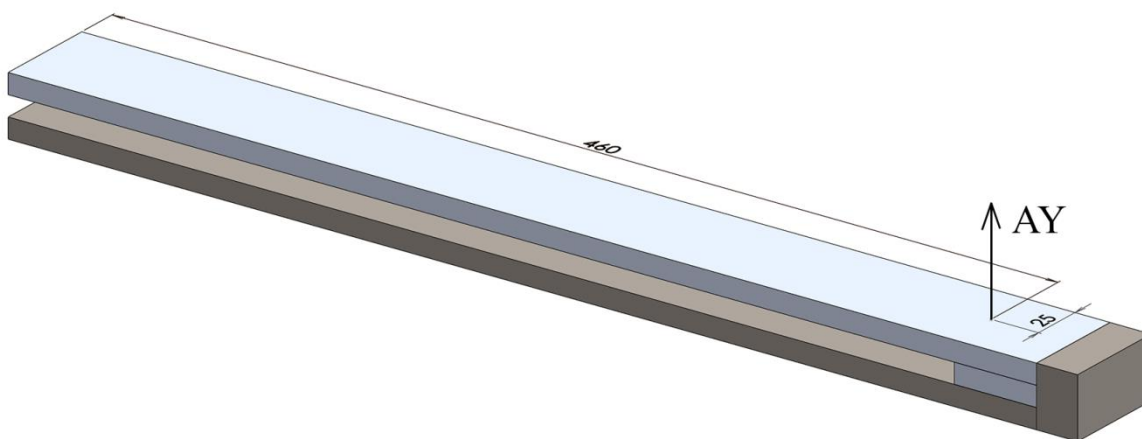
Síla od rázového kladívka má charakter impulzu, avšak jeho průběh je dán obecnou křivkou. Pro účely simulace je tato křivka nahrazena obdélníkovým pulzem se stejnou maximální hodnotou síly a stejnou šířkou.



Obr. 29: Působíště budící síly

13.5. Model projevů

Na experimentální soustavě je její odezva měřena pomocí jednoho akcelerometru, který měří zrychlení ve svislém směru (kolmo na plochu prutu). V simulacích je tedy zaznamenávána výchylka a zrychlení v tomtéž bodě. Měřicí bod je znázorněn na Obr. 30. Jsou uvažovány malé výchylky.



Obr. 30: Měřicí bod zrychlení

13.6. Model okolí

Protože se experimentální soustava nacházela v prostorech s ustálenou pokojovou teplotou, není nutno uvažovat vliv zvýšené či snížené teploty na její dynamické chování. V opačném případě by se mohly projevit různé materiály prutů díky rozdílné teplotní roztažnosti. Současně je platný předpoklad malých výchylek, u kterých neuvažujeme vliv interakce (tření) s okolním vzduchem.

Není tedy uvažována žádná interakce soustavy s jejím okolím.

13.7. Složené modely

Ke tvorbě složených modelů je využito prostředí ANSYS APDL, v němž jsou pomocí makra vytvořeny výše zmíněné dílčí modely. Jsou zvoleny dva rozdílné přístupy sestavení složených modelů soustavy, kdy jeden pracuje s modelem všech dílů geometrie současně, přičemž je geometrie vytvořena pomocí *solid* prvků, zatímco druhý je sestaven z dílčích modelů jednotlivých dílů jako substruktur, které jsou následně spojeny do jednoho celku pomocí CMS. V obou případech je na nich provedena modální analýza a simulace odezvy pomocí transientní analýzy.

13.7.1. Model pomocí *solid* prvků

Tento model pracuje se všemi díly soustavy v jedné analýze. Tyto díly jsou na svých hranicích spojeny pomocí *couplingu*⁶, který reprezentuje ideálně tuhou vazbu, tj. neumožňuje vzájemný pohyb. Díly jsou vytvořeny pomocí prvků *SOLID 185*, osmiuzlového šestistěnného prvku s lineární báзовou funkcí.

Pro dynamické úlohy je vhodné tvořit pravidelnou síť, bez potřeby „zjemňování“ v místech koncentrátorů napětí, které je nutné při řešení úlohy deformačně-napěťové. Z Obr. 31 je vidět počet dělení a rozměry elementů.

Pro pruty a distanční segment byly voleny tyto rozměry elementů

- 2,5 mm po tloušťce
- 12,5 mm po délce
- 10 mm po šířce

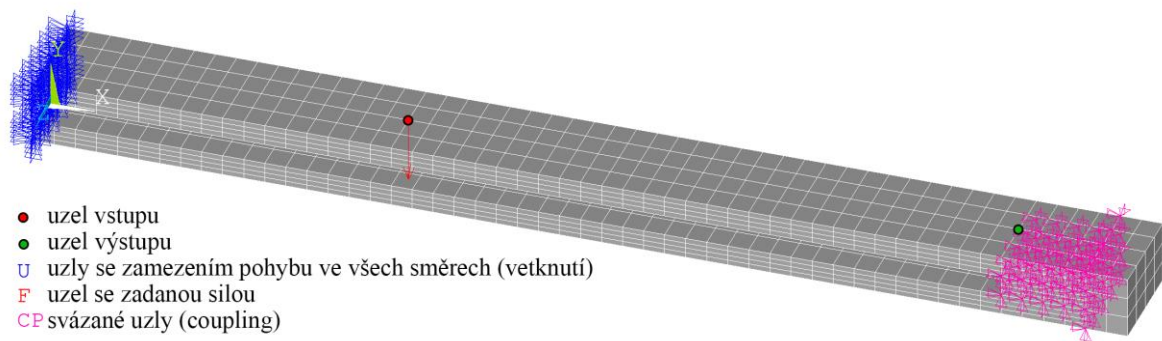
Pro přidání ocelový blok nahrazující svorky byly zvoleny tyto rozměry elementů:

- 10 mm ve všech směrech

Touto volbou rozměrů je pro účely určování dynamických vlastností vytvořena dostatečně jemná a pravidelná síť o celkovém počtu elementů 1688. Protože je naším cílem nahrazení tohoto modelu pomocí SISO systému, je nutné definovat vstupní a výstupní veličiny, respektive uzly.

⁶ *Coupling* znamená v kontextu tvorby výpočtových modelů v softwarech využívajících metodu konečných prvků spojování uzlů pomocí tuhé vazby.

Takto vytvořený model (viz Obr. 31) je připraven na modální a transientní analýzu.



Obr. 31: Model soustavy pomocí solid prvků

13.7.2. Model sestavený pomocí CMS

Rozdíl v přístupu při sestavování modelu pomocí CMS spočívá v tom, že každý díl soustavy je vytvořen samostatně. Touto problematikou se zabývá například [6], [7], [27]–[31]. Obdobně jako v předchozím případě jsou pro tvorbu dílů použity prvky *SOLID 185*, tj. osmiuzlové šestistěnné prvky, přičemž na nich vytvořená síť obsahuje elementy se stejnými rozměry, které byly voleny v předchozím případě. V dalším kroku však jsou nahrazeny tzv. *superelementy*⁷, které reprezentují jednotlivé substrukтуры celého systému. Tento krok je teoreticky popsán v kapitole 6.5.2, ilustrován na jednoduché soustavě pak v kapitole 12.

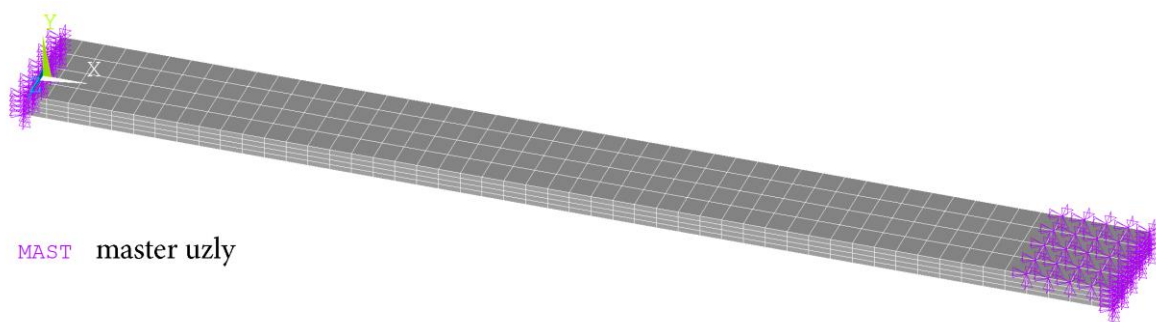
Software ANSYS umožňuje při sestavování *superelementů* pomocí CMS uvažovat jak volná rozhraní (Free-interface, FREE), tak rozhraní s pevnou vazbou (Fixed-interface, FIX), případně poddajná rozhraní (Residual-flexible free interface, RFFI). V našem případě byla zvolena pevná rozhraní, abychom replikovali princip Craig-Bamptonovy metody popsány v kapitole 6.5.2 a 12.

Prakticky se tento krok provede tak, že se vytvoří geometrie samostatných dílů stejným způsobem jako v předchozím případě, na nich je však nutno definovat tzv. *master* uzly. Tyto uzly musí obsahovat všechny uzly, které budou splňovat alespoň jedno z těchto kritérií:

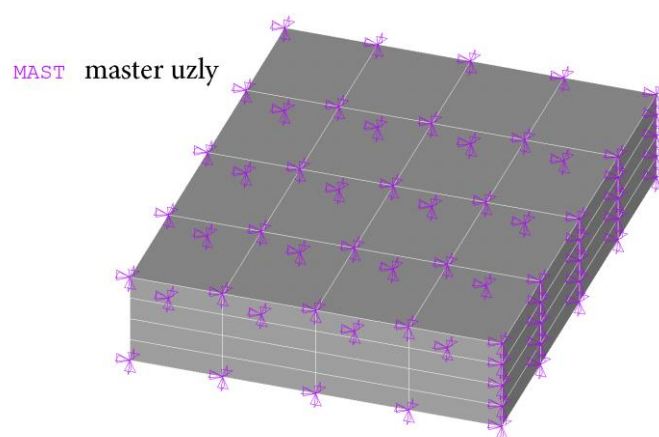
- zavedení vnějších zatížení
- zavedení okrajové podmínky
- součást rozhraní
- pozorován některý ze stupňů volnosti

Jednotlivé díly soustavy (dolní prut, distanční díl, horní prut a přídavná hmotnost) s definovanými *master* uzly jsou naznačeny na Obr. 32, Obr. 33, Obr. 34 a Obr. 35.

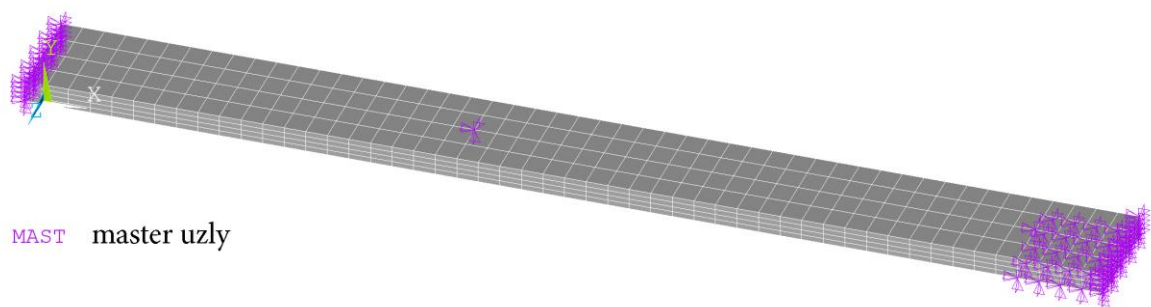
⁷ Při tvorbě substruktur jsou jednotlivé skupiny konečných prvků náležících dané substruktuře seskupovány do podoby jednoho elementu, který lze matematicky popsat pomocí matice. Takto vytvořené maticové elementy nazýváme jako *superelementy* [32].



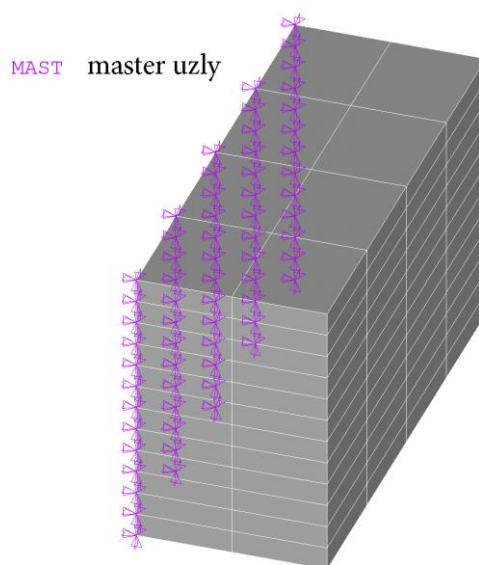
Obr. 32: Model spodního prutu s definovanými master uzly



Obr. 33: Model distančního dílu s definovanými master uzly



Obr. 34: Model horního prutu s definovanými master uzly

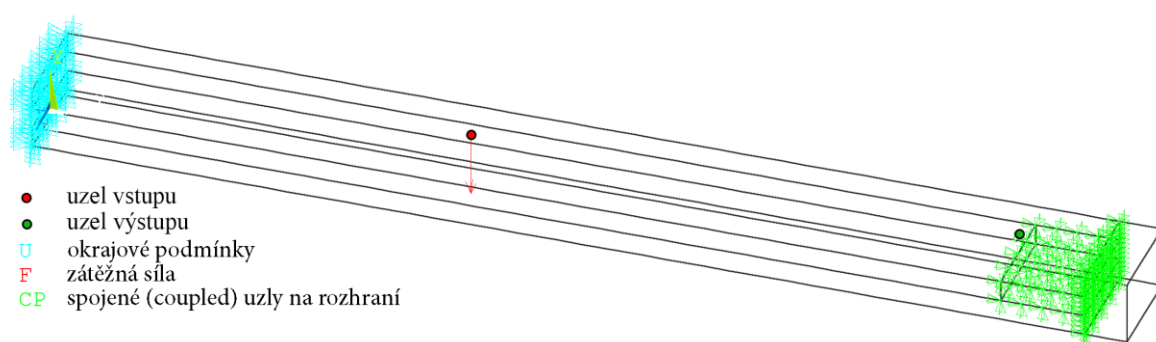


Obr. 35: Model přídavné hmotnosti s definovanými master uzly

Na těchto entitách je provedena analýza typu *SUBSTR* (Substructure analysis), u které je nastavena metoda pomocí CMS. Parametry této metody jsou mimo jiné typ vazby na rozhraní a počet uvažovaných vlastních frekvencí. V našem případě byla zvolena tuhá vazba na rozhraní a 15 vlastních frekvencí. Výsledkem této analýzy je soubor s příponou *.SUB*, samostatně pro každý díl.

V tomto kroku je možno zavést i okrajové podmínky a zatížení, je však vhodné je definovat až po složení v novém projektu, protože při jejich změně bychom v opačném případě museli provádět novou analýzu typu *SUBSTR* pro každou substrukturu, na níž by byly tyto podmínky zavedeny.

Tyto soubory jsou následně v novém projektu načteny, nyní však už ne jako elementy typu *SOLID 185*, ale jako typ *MATRIX 50*. Jde o element popisující substrukturu pomocí nové matice, která zahrnuje pouze námi definované *master uzly*. S nimi se pracuje jako s jakýmkoli jinými elementy. Po zavedení okrajových podmínek a zatížení je na nich možno provádět všechny běžné analýzy, v našem případě nás zajímá především modální a transientní. Sestavený model včetně okrajových podmínek je znázorněn na Obr. 36.



Obr. 36: Model soustavy vytvořený pomocí CMS

Jak je vidět, elementy *MATRIX 50* již nejsou ‘plné’ jako v případě elementů *SOLID 185*. Superelementy totiž neobsahují informace o síti ani uzlech jiných, než *master*.

Takto připravený model je připraven na modální a transientní analýzu, popsanou v následující kapitole.

13.8. Modální analýza

Teorie modální analýzy byla rozebrána v kapitole 7. Tu nyní provedeme na obou vytvořených modelech, jak pomocí *solid* prvků, tak pomocí CMS.

I přestože je do analýzy zaveden model tlumení v podobě proporcionálního tlumení (viz kapitola 11.3), budeme provádět netlumenou modální analýzu pomocí *Block Lanczosovy* metody. Modální analýza je totiž výchozí analýza pro tvorbu stavového modelu, která bude popsána v následující kapitole, a i přestože *Block Lanczosova* metoda neuvažuje tlumení, samotný stavový model vytvořený pomocí této metody již zadané tlumení obsahuje.

Modální analýza nám slouží k určení vlastních frekvencí a tvarů daného systému. Konkrétně nás v tomto případě bude zajímat prvních 15 vlastních frekvencí. Z nich pak vybereme ty, které budou pouze pro ohybové tvary kmitání ve směru kolmém na plochu prutu.

Z modální analýzy jsme dostali tyto hodnoty vlastních frekvencí:

Číslo [-]	Frekvence		Deformace [-]
	Solid [Hz]	CMS [Hz]	
1.	52.04	52.04	Ohyb Y
2.	137.12	137.12	Ohyb Z
3.	281.40	281.40	Ohyb Y
4.	285.00	286.00	Ohyb Y
5.	493.83	493.88	Krut
6.	686.42	686.46	Ohyb Y
7.	786.52	786.59	Ohyb Y
8.	860.36	860.47	Ohyb Z
9.	1119.20	1119.98	Ohyb Z a krut
10.	1266.07	1266.39	Ohyb Y
11.	1346.77	1346.92	Krut
12.	1537.77	1538.33	Ohyb Y
13.	1658.92	1659.94	Krut
14.	2036.08	2040.88	Ohyb Y
15.	2326.63	2328.87	Ohyb Z a krut

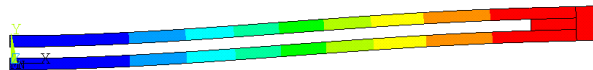
Tabulka 6: Vlastní frekvence systému

Ve výše uvedené tabulce jsou porovnány výsledky modální analýzy na modelu vytvořeném pomocí *solid* prvků a pomocí CMS. Na těchto prvních 15-ti frekvencích je shoda s chybou menší než 0,3%. Červeně jsou zaznačeny ty ohybové tvary, které nás v této úloze zajímají.

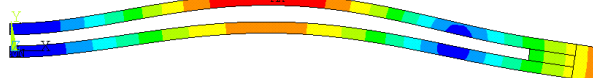
13. SIMULACE ODEZVY VÝPOČTOVÝCH MODELŮ

Příslušné vlastní tvary budou vykresleny pouze na modelu ze *solid* prvků, jelikož po provedení *expansion pass*⁸ na modelu pomocí CMS byly výsledky shodné.

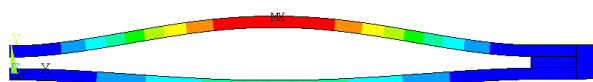
1. ohybový tvar Y: 52,04 Hz



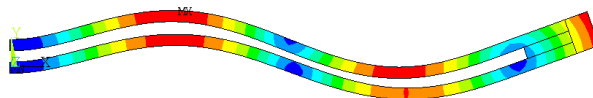
2. ohybový tvar Y: 281,40 Hz



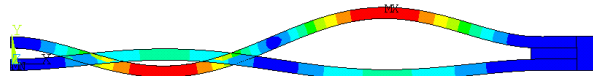
3. ohybový tvar Y: 285,00 Hz



4. ohybový tvar Y: 686,42 Hz



5. ohybový tvar Y: 786,52 Hz



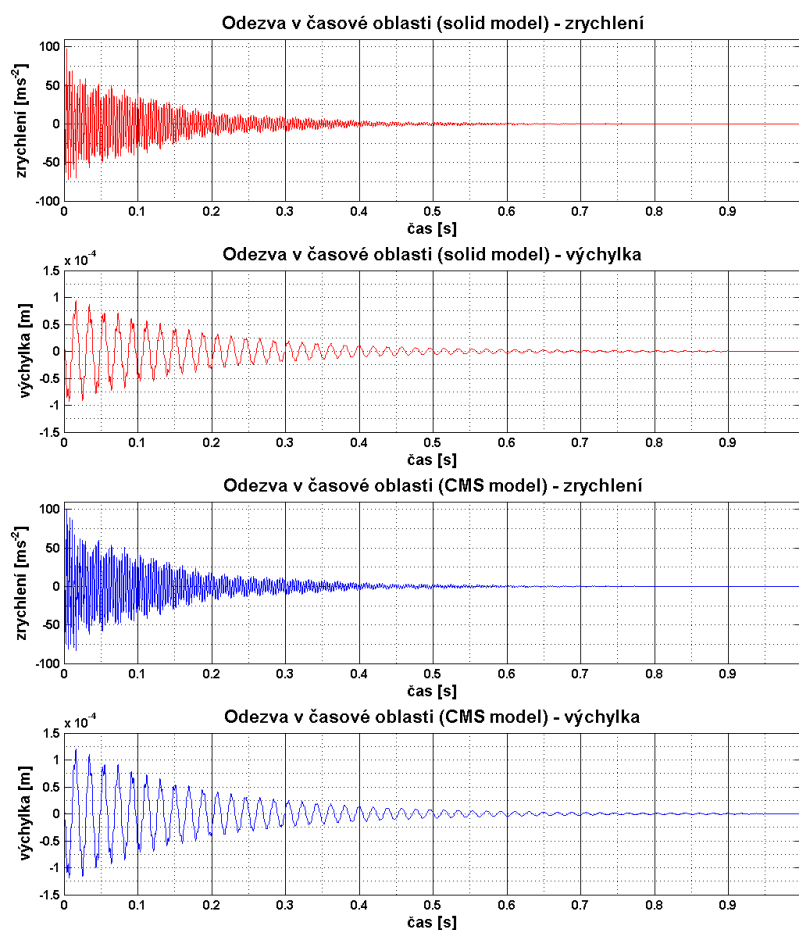
Obr. 37: Ohybové vlastní tvary

⁸ Pojmem *expansion pass* je v procesu simulace pomocí substruktur nazýván ten krok, ve kterém jsou výsledky simulace na redukovaném modelu rozšířeny na původní, neredukované stupně volnosti.

13.9. Simulace odezvy

Simulace odezvy má replikovat experiment, kdy je soustava buzena úderem rázového kladívka. Jde o časově nejnáročnější část simulace, protože je nutno volit dostatečně krátký časový krok simulace a zároveň dostatečně dlouhý časový úsek. Charakter buzení je popsán v modelu aktivace v kapitole 13.4. Jde o obdélníkový pulz o šířce 0,002s s amplitudou 70N. Byl simulován časový úsek 1s při délce časového kroku 100 μ s. Tato délka kroku umožňuje dle Nyquistova teorému pozorovat frekvence až do $\frac{1}{2}$ vzorkovací frekvence, v našem případě tedy 5000Hz. Vzhledem k tomu, že v signálu odezvy budeme pozorovat frekvence dle modální analýzy, tj. do 800Hz, je tento časový krok dostatečně krátký. Celkový počet kroků byl 10000.

Pro oba modely je simulace provedena pomocí transientní analýzy typu *FULL*. Z této analýzy je možno brát jako výstup nejen posuvy, ale i zrychlení. Zaznamenané hodnoty jsou znázorněny na Obr. 38.



Obr. 38: Odezva modelů v časové oblasti

Tyto zaznamenané signály byly uloženy do souborů pro další zpracování v prostředí Matlab.

13.10. Tvorba stavového modelu

V této kapitole bude popsán postup transformace modelu z prostředí ANSYS do stavového prostoru. To znamená provedení modální transformace popsané v kapitole 7. Podstatou je využití modálních vlastností (vlastní čísla, vlastní tvary) pro sestavení stavových matic **A**, **B**, **C** a **D**. Tento proces by bylo možno provést manuálně, avšak v programu ANSYS k tomu existuje poměrně málo známý příkaz *SPMWRITE*, který na základě zadaných vektorů vstupů a výstupů a modálních dat sestaví tyto matice automaticky [32]. Tento přístup je využit například v [33] či [34].

Aby byl proces sestavení těchto matic průhledný, bude zde stručně popsán. Vlastnímu sestavení matic musí nutně předcházet modální analýza. Příkaz *SPMWRITE* bohužel vyžaduje, aby tato modální analýza byla provedena metodou Block Lanczos. I přestože tato metoda ignoruje zadané tlumení, příkaz *SPMWRITE* tlumení zahrne. Provedení této analýzy znamená vytvoření těchto vektorů:

- vlastní čísla
- tlumení
- vlastní tvary

Systémové matice jsou sestaveny tak, aby byly splněny rovnice

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned}\tag{13.1}$$

Příkaz *SPMWRITE* k tomu využívá pomocných matic $\mathbf{\Gamma}_1, \mathbf{\Gamma}_2, \mathbf{\Gamma}_3$ a $\mathbf{\Gamma}_4$, jejichž tvar je následující:

$$\mathbf{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} -\omega_1^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -\omega_n^2 \end{bmatrix}\tag{13.2}$$

$$\mathbf{\Gamma}_2 = \begin{bmatrix} -2\xi_1\omega_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & -2\xi_n\omega_n \end{bmatrix}\tag{13.3}$$

kde ω_i je i -tá vlastní frekvence a ξ_i je poměrný útlum i -té vlastní frekvence. Dále pak

$$\mathbf{\Gamma}_3 = [\mathbf{\Phi}]^T [\mathbf{F}_u]\tag{13.4}$$

kde $[\mathbf{\Phi}]$ je matice vlastních tvarů a $[\mathbf{F}_u]$ je matice *jednotkových sil* (unit force matrix) obsahující 1 na pozicích, ve kterých je přítomno buzení, a 0 ve všech ostatních. Nakonec pak

$$\mathbf{\Gamma}_4 = [\mathbf{U}_u][\mathbf{\Phi}]\tag{13.5}$$

kde $[U_u]$ je matice *jednotkových posuvů* (unit displacement matrix) obsahující 1 na pozicích, ve kterých je pozorován výstup, a 0 ve všech ostatních. Na základě těchto 4 matic mohou být sestaveny požadované stavové matice, a to následovně:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Gamma_3 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} \Gamma_4 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Gamma_4 \\ \Gamma_4\Gamma_1 & \Gamma_4\Gamma_2 \end{bmatrix} \\ D &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \Gamma_3\Gamma_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13.6)$$

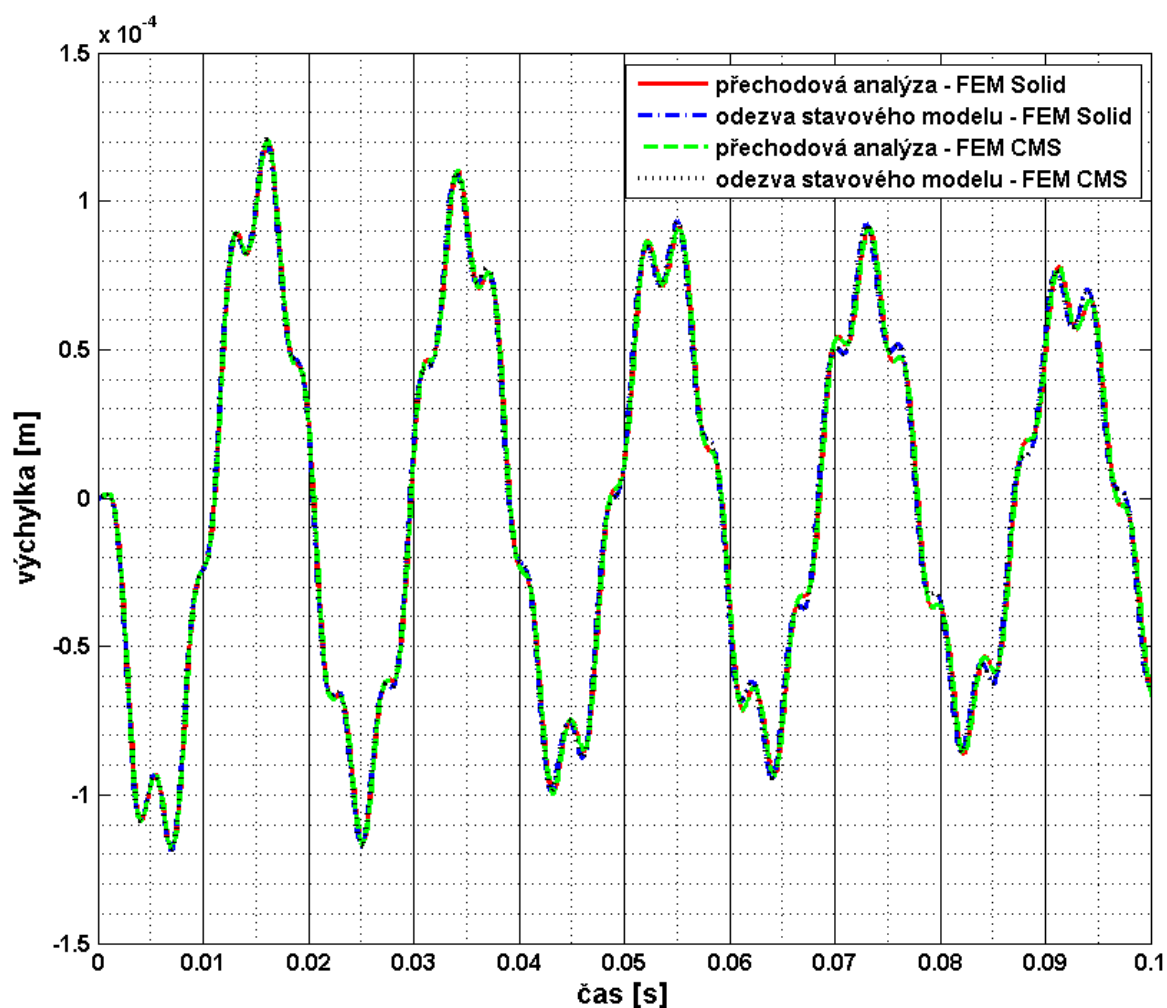
kde $\mathbf{0}$ je nulová matice a $\mathbf{I}$ je jednotková matice. Rozměry těchto matic jsou dány počtem vlastních frekvencí, počtem vstupních a výstupních uzlů. Jestliže označíme počet vlastních frekvencí jako n , počet vstupů jako i a počet výstupů jako o , pak

- $A: 2n \times 2n$
- $B: 2n \times i$
- $C: 3o \times 2n$
- $D: 3o \times i$

Jak je vidět, jeden z rozměrů matic C a D je $3o$. To proto, že příkaz *SPMWRITE* umožňuje zaznamenat nejen posuvy, ale i rychlosti a zrychlení. Této funkce však nebylo v našem případě využito, proto se jejich tento rozměr redukuje pouze na o .

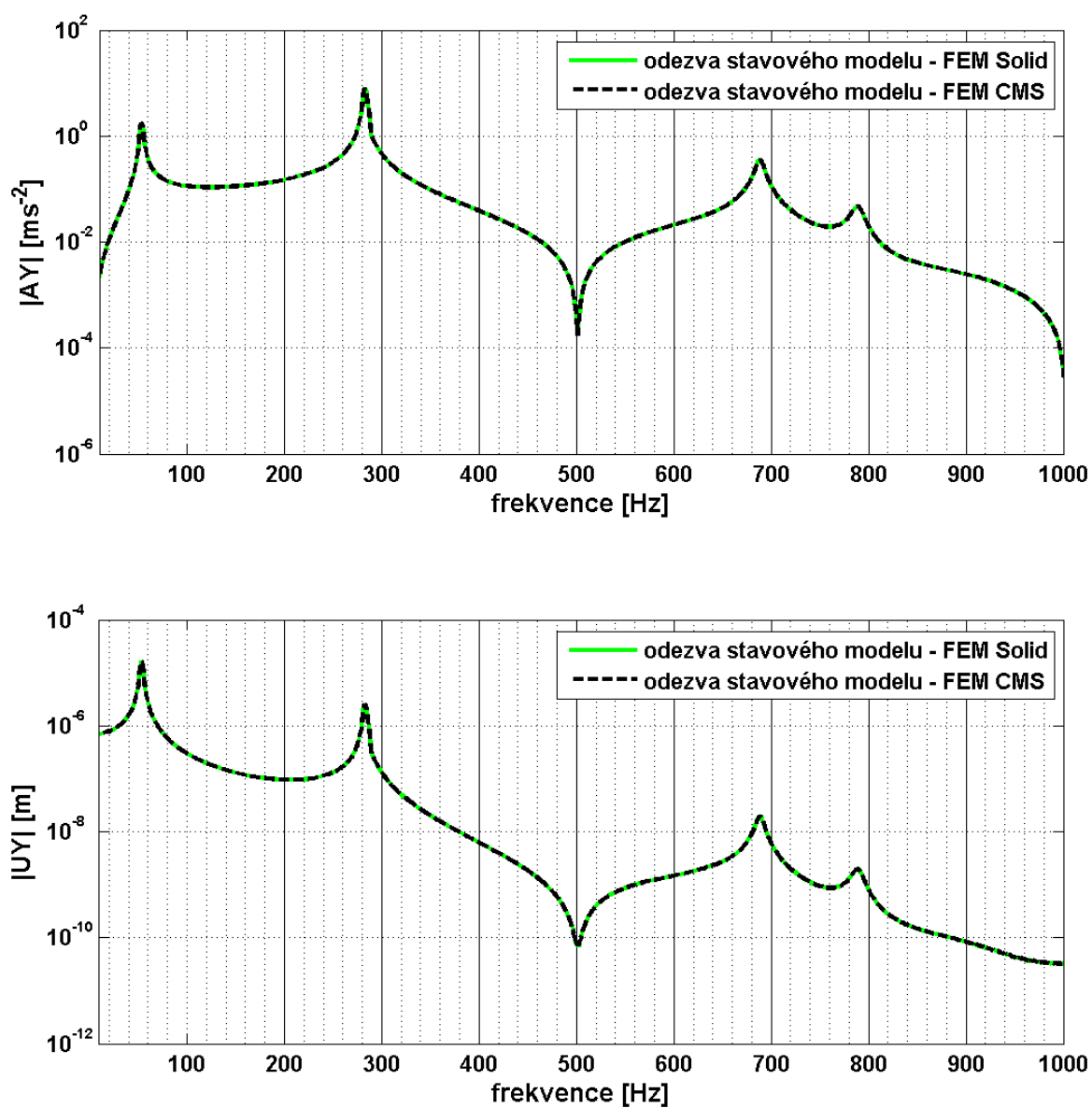
V našem případě redukuje systém na SISO, tedy s jedním vstupem a jedním výstupem. Sestavené stavové matice jsou načteny do prostředí Matlab, k čemu bylo potřeba vytvořit skript, který separuje vlastní matice z textového souboru, který ANSYS automaticky vytvoří. V Matlabu je simulována odezva na buzení pulzem (viz model aktivace, kapitola 13.4).

Validace těchto modelů proběhla porovnáním odezvy v časové oblasti pomocí výchylky. Ukázalo se, že stavový model v našem případě plně nahrazuje model vytvořený buď pomocí *solid* prvků nebo pomocí CMS (viz Obr. 39). Křivky na tomto obrázku se v podstatě překrývají, což značí dokonalou shodu mezi původním a stavovým modelem.



Obr. 39: Validace stavového modelu pomocí odezvy v časové oblasti

V této fázi se nám úspěšně podařilo nahradit výpočtový model řešený metodou konečných prvků značně jednodušším stavovým modelem, který si zachoval veškeré uvažované dynamické vlastnosti. Abychom jeho odezvu mohli porovnat s experimentálně určenou odezvou, je nutné zaznamenanou výchylku nejdříve pomocí dvojité derivace převést na zrychlení a poté převést pomocí FFT do frekvenční oblasti. V tomto případě není žádná filtrace nutná, avšak výsledné křivky byly vyhlazeny aplikací filtru *průměrování* přes 3 vzorky. Výsledné odezvy ve frekvenční oblasti jsou pak znázorněny na Obr. 40.



Obr. 40: Odezva stavového modelu ve frekvenční oblasti

I při zobrazení odezvy ve frekvenční oblasti je zřejmé, že stavové modely vykazují naprosto stejnou odezvu, jako modely původní.

14. POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ EXPERIMENTU A SIMULACÍ

V předchozích kapitolách byly popsány procesy měření na experimentálním přípravku, jeho identifikace a následné tvorby výpočtových modelů. Byla vytvořena sada dat, která obsahuje odezvy

- experimentální soustavy
- identifikovaného systému
- stavového modelu systému ze solid prvků
- stavového modelu systému vytvořeného pomocí CMS

Základnou pro porovnání výsledků byla zvolena odezva na impuls ve frekvenční oblasti, která s dostatečnou přesností vystihuje dynamické vlastnosti pozorovaných objektů.

V této kapitole budou výsledky srovnány nejen kvantitativně, nýbrž i kvalitativně z pohledu času potřebného k jejich získání, tedy času nutného k měření, vytvoření modelů a vlastní simulaci. Tato informace je důležitá, protože v praxi je tlak na rychlost simulací předvýrobní fázi technického objektu. Urychlení tvorby modelů a simulací by tento proces zjednodušilo.

Z hlediska kvalitativního využijeme ke srovnání Obr. 41, respektive Obr. 42. Z nich je vidět, že v odezvě dominují 3, respektive 4 rezonanční vrcholy, odpovídající 1., 3., a 6. vlastní frekvenci (viz Obr. 37). Čtvrtý vrchol u experimentálních dat leží v blízkosti vrcholu odpovídajícího 3. vlastní frekvence, avšak tento vlastní tvar se v simulaci nepodařilo vybudit. Zároveň se v simulaci objevil vrchol odpovídající 7. vlastní frekvenci, který se naopak nepodařilo vybudit u experimentu.

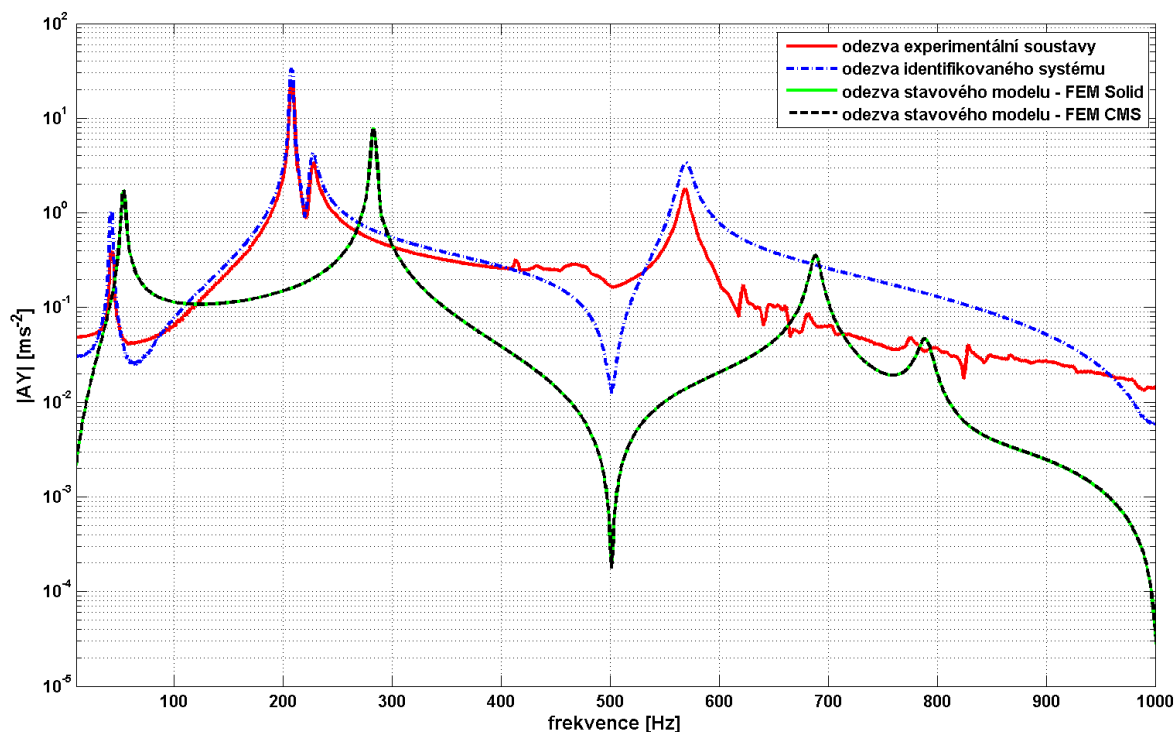
Nejvýraznějším rozdílem jsou odchylky v poloze rezonančních vrcholů, které jsou pro experimentální soustavu a identifikovaný systém posunuty směrem k nižším hodnotám. Tento rozdíl byl, ač ne v takové míře, předpokládán, a je způsoben především konečnou tuhostí vazeb experimentální soustavy, konkrétně pak konzoly, základu a svorek. Nižší tuhost oproti ideálním vazbám s nekonečnou tuhostí pak znamená nižší vlastní frekvence.

Dalším výrazným rozdílem je amplituda při vlastních frekvencích. Pohlédneme-li na Obr. 42, kde je znázorněna výchylka, je vidět, že experimentální a simulovaná data se z hlediska amplitudy shodují pouze na první vlastní frekvenci. Na ostatních frekvencích je rozdíl v amplitudě relativně výrazný. Tento rozdíl je způsoben v jednoduchém určení tlumení, které bylo nahrazeno modelem proporcionálního tlumení, jehož parametry byly určeny jen ze dvou vrcholů. Současně je rozdíl v buzení, kdy u simulace je obecný průběh pulzu síly nahrazen ideálním obdélníkem.

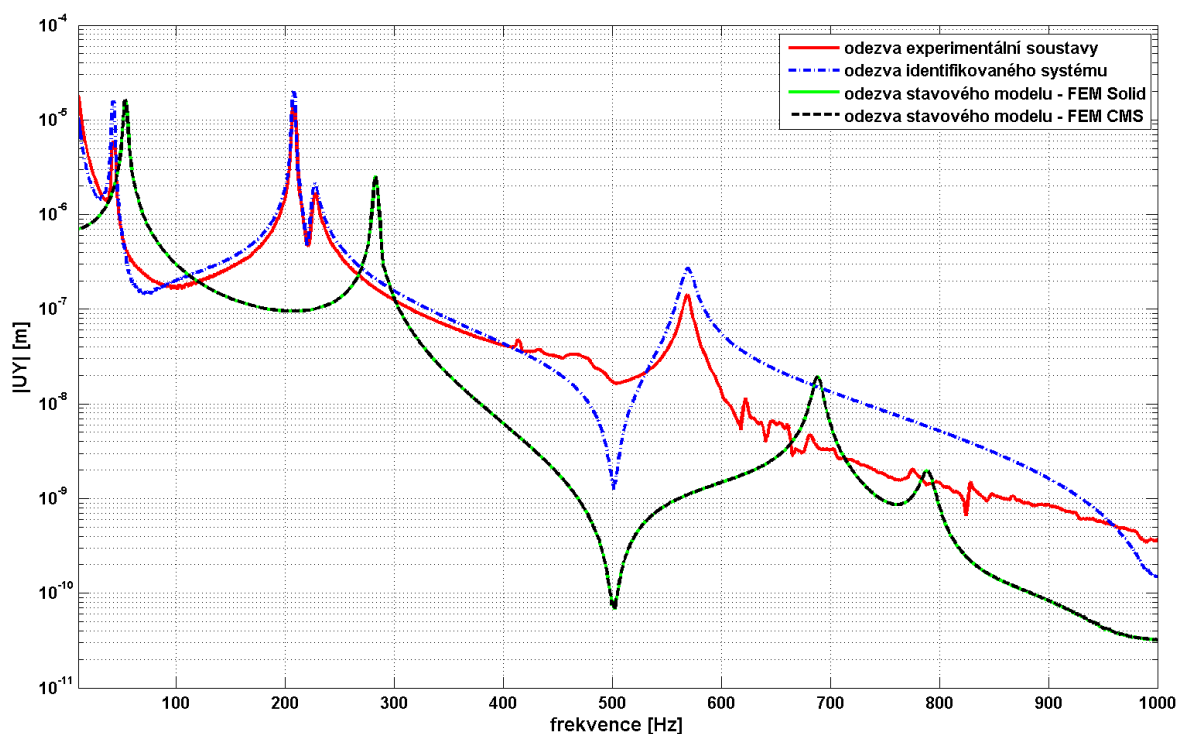
K rozdílu mezi experimentálními a simulovanými daty dojde vždy, jelikož žádná soustava není ideální. K čemu toto srovnání však hlavně slouží, je vzájemné porovnání odezvy určené experimentálně a odezvy identifikovaného systému, stejně tak odezvy obou

14. POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ EXPERIMENTU A SIMULACÍ

stavových modelů. Ukázalo se, že je možné se zaručením relativně vysoké míry přesnosti převést jak experimentální soustavu na základě měření, tak i vlastní výpočtový model, do podoby stavového modelu či přenosové funkce. Ty mohou následně sloužit jako základna pro další simulace, případně mohou být skládány do složitějších celků, jakými většina dnešních technických soustav je.



Obr. 41: Srovnání odezvy (zrychlení) ve frekvenční oblasti



Obr. 42: Srovnání odezvy (výchylka) ve frekvenční oblasti

Dále je žádoucí porovnat jednotlivé přístupy i jiného, než kvantitativního hlediska. Pro tyto účely byly zavedeny kategorie kritérií, ve kterých dojde ke srovnání. Těmi jsou:

- čas – vyjadřuje čas potřebný k realizaci
- náročnost – vyjadřuje potřebné znalosti nutné k realizaci
- univerzálnost – vyjadřuje aplikovatelnost i pro jiné typy úloh či problémů
- přesnost – vyjadřuje, jakým způsobem se výsledná data blíží k realitě

Hodnocení v těchto kategoriích bude prováděno pomocí bodů v rozmezí 0-5, kdy 0 značí, že uvedený přístup je dle daného kritéria zcela nevhodný, naopak 5 že je ideální.

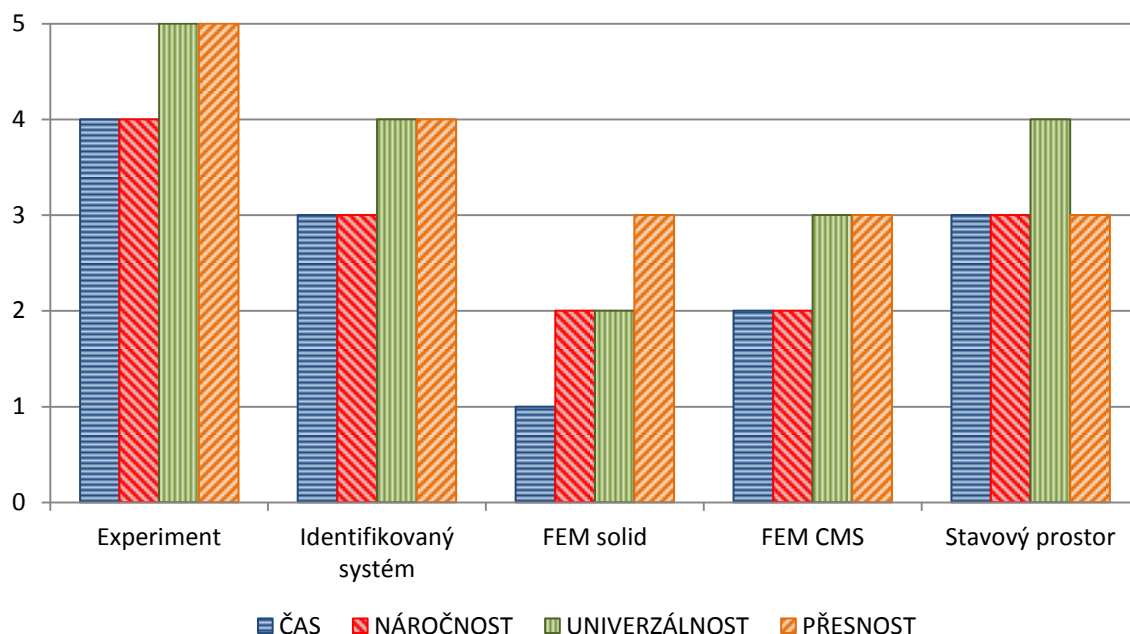
Je nutné brát v potaz, že jednotlivé přístupy budou těmito kritérii hodnoceny pouze na základě zvolené experimentální soustavy, tedy u jiných typů úloh může být hodnocení odlišné. Zároveň jde pouze o názor autora, založený na jeho zkušenostech dané problematiky a znalostech potřebných k realizaci uvedených přístupů.

Nejdříve bude uvedeno vlastní hodnocení, které bude následně hlouběji vysvětleno.

14. POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ EXPERIMENTU A SIMULACÍ

PŘÍSTUP	ČAS	NÁROČNOST	UNIVERZÁLNOST	PŘESNOST	Σ
Experiment	4	4	5	5	18
Identifikovaný systém	3	3	4	4	14
FEM solid	1	2	2	3	8
FEM CMS	2	2	3	3	10
Stavový prostor	3	3	4	3	13

Tabulka 7: Bodové hodnocení jednotlivých přístupů



Obr. 43: Srovnání bodového hodnocení jednotlivých přístupů

14.1. Experiment

Význam experimentu při určování dynamických vlastností je nezpochybnitelný. Ve většině technických aplikací se data z experimentu používají jako referenční, se kterými se srovnávají výsledky výpočtů a simulací.

Z hlediska časového vyžaduje měření na experimentální soustavě nejen přípravu vlastní soustavy, ale i umístění snímačů, zapojení do měřicího řetězce a propojení buď s měřicí ústřednou, nebo počítačem. V našem případě byla data zaznamenávána do počítače pomocí softwaru SignalExpress, který sice nevyžaduje psaní složitých kódů, avšak i přesto příprava měření v grafickém rozhraní vyžadovala poměrně dost času. Vlastní měření pak je nutné provést opakovaně, aby došlo k minimalizaci nejistot.

Co se týče znalostí potřebných k realizaci experimentu, jsou sice nemalé, ale v porovnání s ostatními přístupy jsou nižší. Uživatel nemusí být zdatný v programování, nemusí ovládat složité výpočetní programy, ale je žádoucí jeho znalost měřicích zařízení, jejich vhodné kalibrace, umístění snímačů a následného zpracování naměřených dat. To zahrnuje problematiku zpracování signálů, jako například filtraci, Fourierovu transformaci aj.

Univerzálnost experimentů je dána pouze jejich realizovatelností. Ta je úzce spojena s dostupnými prostředky, jak finančními, tak technickými. Z porovnávaných přístupů však jde rozhodně o nejvíce univerzální přístup, aplikovatelný na většinu dynamických problémů technických soustav.

Posledním kritériem je přesnost, která je u experimentu dána hlavně kvalitou vlastního měření. V případech, kdy je sestavována i experimentální soustava, je pak i důležité dodržení platných montážních požadavků.

Dle bodového ohodnocení dosáhl tento přístup celkového počtu bodů 18, který byl nejvyšší ze všech uvažovaných metod.

14.2. Identifikovaný systém

Identifikace systému se používá především v teorii řízení, avšak ukázalo se, že je možné ji využít i pro řešení dynamiky technických soustav. Časová náročnost této metody spočívá především ve volbě matematického modelu a iteračním určení velikosti a počtu jeho parametrů. Pro MIMO systémy je nutné provést identifikaci vztahů všech vstupů se všemi výstupy, z čehož plyne, že s jejich počtem roste i potřebný čas.

Co se týče znalostí nutných k realizaci tohoto přístupu, zahrnují především znalost dostupných matematických modelů, jejich aplikovatelností a vhodností pro daný problém. Znalost zpracování signálů je v tomto případě též žádoucí.

Univerzálnost metody jde ruku v ruce s univerzálností experimentu. Bodové ohodnocení dle tohoto kritéria je pak o něco menší, než v případě experimentu, a to z toho důvodu, že ne všechna provedená měření mohou být použitelná pro identifikaci systému.

Přesnost metody je též velmi vysoká. Jedinou limitací byla v našem případě linearizace identifikovaného systému, avšak v dnešní době jsou formulovány metody pro identifikaci i nelineárních systémů (např. NARX či NARMAX), které pak vyžadují hlubší znalosti této problematiky.

Celkově se tento přístup umístil na druhém místě. Přesnost metody je velmi vysoká a je omezena především přesností vstupních dat, jež pochází z experimentu.

14.3. FEM solid

Metoda konečných prvků je nejrozšířenější metodou pro řešení strukturních problémů. I v oblasti dynamiky jde o velmi používanou metodu, její vhodnost je však velmi omezena

mnoha faktory, z nichž nejzávažnější je lidský. V případě výpočtového modelu pomocí solid prvků je časově náročné vytvoření všech dílčích modelů, vytvoření sítě a realizace vlastního výpočtu. Přechodová analýza pro určení odezvy je kvůli velkému počtu iterací časově velmi náročná. Jiné typy simulací, například harmonickou analýzu, je možné provést sice v kratším čase, avšak je nutné opět znát všechny předpoklady, za jakých je tyto metody možné použít (především linearita). Z tohoto důvodu je tento přístup z hlediska potřebného času nejméně vhodný ze všech uvažovaných přístupů.

Znalostní báze uživatele musí být v případě použití této metody poměrně značná. Musí ovládat nejen vlastní výpočetní software, ale i teorii, která je v pozadí řešení. Protože drtivá většina komerčních softwarů pro metodu konečných prvků dá uživateli výsledky i při zadání špatných vstupních podmínek (okrajové podmínky, zatížení, parametry simulace aj.), v takových případech jsou zcela vzdáleny od správných výsledků.

Univerzálnost této metody je z vlastní podstaty poměrně široká, avšak je nutné vzít v potaz, že každý problém vyžaduje vytvoření nových dílčích a složených modelů. Zatímco v případě identifikace můžeme využít známé matematické modely pro jakékoli systémy vykazující odezvu, v tohoto přístupu tomu tak není. Jak tomu bylo i v našem případě, dílčí modely musí být často vytvořeny na základě zidealizovaných předpokladů, které se pro každý technický problém liší.

Přesnost této metody, jak již bylo zmíněno dříve, je úzce spjata se znalostmi uživatele-inženýra, který ji využívá. Dotyčný si musí být jistý, že zadávané údaje odpovídají předpokladům, pro získání výsledků je zpravidla nutná jejich verifikace pomocí jiného přístupu, ať už pomocí experimentu či analytického výpočtu. Volba metody, délka časového kroku a dalších parametrů simulace je pro přesnost klíčová.

Celkově se z hlediska bodového ohodnocení ukázala tato metoda jako nejméně vhodná. Vysoká míra potřebných znalostí a časová náročnost je velkým nedostatkem, který se pro užití v praxi může jevit jako nepřipustný.

14.4. FEM CMS

Metoda založená na použití substruktur je v dnešní době velmi často využívá pro řešení technických problémů soustav s velkým počtem komponent, tedy tam, kde by výpočtový model pomocí *solid* či jiných prvků byl z časového hlediska nerealizovatelný. I přestože tato metoda vyžaduje více nutných kroků ve fázi tvorby výpočtových modelů, urychlení vlastního výpočtu je díky ní řádově vyšší. Pro srovnání byl čas potřebný k provedení transientní analýzy pro výpočtový model ze *solid* prvků, při počtu prvků 1688 a počtu časových kroků 10000, 36 minut. Pro výpočtový model realizovaný pomocí CMS, přičemž síť i délka časového kroku zůstala stejná, trval tento výpočet 4 minuty. Je vidět, že i na takto jednoduché úloze došlo ke zkrácení času potřebnému k provedení simulace téměř o 90%.

Nutné znalosti k realizaci této metody jsou v podstatě stejné, jako v případě FEM solid, jen jsou navýšeny o znalost metod založených na substrukturách, jejich principu a realizaci.

Univerzálnost této metody je oproti FEM solid navýšena o použití pro výpočtové modelování technických soustav s velkým počtem komponent. Ostatní omezení uvedená v předcházející kapitole však zůstávají stejná.

Přesnost metody je rovněž obdobná, jako u přístupu FEM solid a je založena především na volbě metody, délce časového kroku a přesnosti dílčích výpočtových modelů.

Dle celkového hodnocení se tato metoda jeví jako vhodnější, než FEM solid, avšak i přesto zaujmula mezi ostatními přístupy předposlední místo. Sice je metoda o něco rychlejší, avšak všechny ostatní nedostatky předcházející metody zůstávají.

14.5. Stavový prostor

Výhoda této metody spočívá především v redukci stupňů volnosti oproti přístupům využívající FEM. Nahrazení systému s velkým počtem stupňů volnosti MIMO systémem s řádově nižším počtem DOF vede ke značnému zkrácení času potřebného pro simulace. K úspoře času přispívá i fakt, že je metoda založena pouze na modální analýze, která je ve srovnání s transientní analýzou řádově rychlejší.

Znalosti potřebné k realizaci tohoto přístupu jsou o něco nižší, než v předcházejících případech. Stavový prostor může být vytvořen buď pomocí výpočtového modelu pomocí *solid* či jiných prvků, nebo pomocí CMS. V předcházející části této práce bylo dokázáno, že výsledky jsou pro obě zmíněné varianty totožné. Znalost problematiky tvorby stavového prostoru je snížena díky tomu, že v prostředí ANSYS je jeho vytvoření automatizováno.

Tato metoda může být uplatněna na velkou škálu technických problémů, ve kterých simulujeme odezvu systému na nějaký vstupní signál, což je drtivá většina úkolů dynamiky. Je omezena pouze nutností provedení modální analýzy, která je však v dnešní době výchozí analýzou pro určování dynamických vlastností technických soustav.

Z hlediska kvality výsledků je tato metoda srovnatelná s předcházejícími metodami FEM, jak tomu bylo dokázáno v kapitole 13.10.

Celkově se tento přístup umístil na třetím místě. Je velmi vhodný pro simulaci dynamických vlastností v těch aplikacích, kde klíčovým požadavkem je čas.

15. ZÁVĚR

Tato diplomová práce se zabývala analýzou potenciálu dostupných výpočetních nástrojů pro převedení komplexních modelů technických soustav v modely jednodušší a jejich integrací s experimentálními modely.

Vlastní práce se skládala ze dvou částí, teoretické a praktické. V první části byly shrnuty teoretické základy nutné k pochopení a aplikaci uvedených metod pro popis dynamických systémů, přičemž pozornost byla věnována především problematice stavového prostoru a identifikace dynamických systémů. V druhé části byly tyto metody představeny na jednoduché experimentální soustavě, přičemž byly rozlišeny dva přístupy:

1. Přístup založený na experimentálním určení odezvy, která byla následně využita pro identifikaci dynamického systému pomocí odhadu přenosové funkce.
2. Přístup založený na simulacích provedených na výpočtových modelech sestavených pomocí metody konečných prvků a substruktur, které byly následně převedeny do stavového prostoru.

V závěru této práce byly srovnány odezvy na skok všech vytvořených modelů. Bylo dokázáno, že stavový model vytvořený na základě výsledků modální analýzy dokáže věrohodně nahradit výpočtový model pomocí metody konečných prvků, a to v případě výpočtového modelu sestaveného jak z objemových prvků, tak substruktur. Kvalitativní a kvantitativní rozdíl simulovaných a experimentálních dat byl očekáván, a to především kvůli zjednodušenému modelu tlumení a idealizaci vazeb. Je nutné podotknout, že v této práci nebylo cílem dokonale ztotožnit výsledky experimentu a simulací, tedy vytvořit výpočtové modely, které by zahrnovaly veškeré možné vlivy ovlivňující dynamické vlastnosti.

Pro účely praxe bylo vhodné srovnat jednotlivé přístupy na základě několika klíčových kritérií, mezi která patří čas potřebný k realizaci, množství znalostí nutných k realizaci, univerzálnost metody pro použití pro jiné typy úloh, a přesnost. Na základě bodového hodnocení byla určena silná a slabá místa jednotlivých metod pro určení dynamických vlastností systému.

Při práci s experimentálně určenými daty se metoda identifikace jevila jako velmi vhodná a to nejen díky její jednoduchosti a realizovatelnosti, ale i přesnosti, s jakou dokáže replikovat projevy experimentální soustavy. Pracujeme-li s výpočtovými modely, které jsou dnes zpravidla založeny na metodě konečných prvků, je vhodné je před vlastními simulacemi převést do stavového prostoru, který nám zaručí velmi významné zkrácení času nutného nejen k provedení vlastních simulací, ale i pro skládání jednotlivých subsystémů do větších celků.

Přestože uvedené metody nejsou na poli mechaniky těles v dnešní době příliš rozšířené, může v budoucnu jejich implementace do procesu tvorby výpočtových modelů sloužících k určování dynamických vlastností být velmi přínosná. Časová úspora těchto

metod může být zásadní při optimalizačních procesech, které jsou založeny na opakovaném provádění simulací.

Tato práce bude dále sloužit jako výchozí stav pro doktorské studium, ve kterém bude cílem využít výsledky experimentu a simulací pro tvorbu jednotného modelu. U něj by bylo vhodné sloučit výhody experimentu, tedy zahrnutí vlivu většiny přítomných jevů ovlivňujících dynamické vlastnosti, a výhody jednoduchých výpočtových modelů umožňujících provádění časově méně náročných simulací. Dále by bylo vhodné pozorovat vliv nelinearit, které jsou přítomné ve všech reálných technických soustavách a mohou mít zásadní vliv na jejich dynamické chování.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] T. V Light and I. a Gorlach, “Dynamic Modelling of a Special Purpose CNC Machine,” *WSEAS Int. Conf. Syst.*, pp. 207–213, 2011.
- [2] H. P. Gavin, *Vibrations of Single Degree of Freedom Systems*. 2010.
- [3] M. R. Hatch, *Vibration Simulation Using MATLAB and ANSYS*. 2001.
- [4] J. Kratochvíl, C.; Slavík, *Dynamika*. 2007.
- [5] A. G. Piersol and T. L. Paez, *Harris’ shock and vibration handbook*, vol. 48, no. 1. 2010.
- [6] S. Besset, “Dynamic Substructuring Based,” *J. Vib. Acoust.*, vol. 130, no. February, pp. 1–5, 2008.
- [7] T. Ghosh, B. N. American, and C. Park, “Component Mode Synthesis of Structures With Geometric Stiffening in Msc / Nastran,” pp. 1–26.
- [8] S. Gordon, “The Craig Bampton Method.” 1999.
- [9] T. Lee, M. Leok, and N. H. McClamroch, “Geometric numerical integration for complex dynamics of tethered spacecraft,” *Proc. 2011 Am. Control Conf.*, no. February, pp. 1885–1891, 2011.
- [10] P. Gmbh, “Basics of Experimental Modal Analysis,” vol. 49, no. 0, pp. 4–7.
- [11] B. J. Schwarz and M. H. Richardson, “Experimental Modal Analysis,” *CSI Reliab. Week*, vol. 35, no. 1, pp. 1–12, 1999.
- [12] M. Balda, “Úvod Přímá identifikace SISO systémů,” no. 3.
- [13] L. Ljung, “Ljung L System Identification Theory for User.pdf,” *PTR Prentice Hall Upper Saddle River NJ*, vol. 25. pp. 475–476, 1987.
- [14] M. Gevers, “System Identification without Lennart Ljung: what would have been different?,” *Forever Ljung Syst. Identif.*, pp. 139–162, 2006.
- [15] M. Jansson, “Subspace identification and ARX modeling,” *Proc. 13th IFAC Symp. Syst. Identif.*, no. February, pp. 1625–1630, 2003.
- [16] P. A. Bemporad, “Automatic Control 2 System identification,” pp. 1–27, 2011.
- [17] F. Of and M. Engineering, “Vysoké učení technické v brně,” 2015.
- [18] Carlos Galván-Duque, Ricardo Zavala-Yoé, Gerardo Rodríguez-Reyes, Felipe Mendoza-Cruz, MichelínÁlvarez-Camacho, and Ricardo Ramírez-Mendoza,

- “Comparison between Classical and Intelligent Identification Systems for Classification of Gait Events,” *J. Control Sci. Eng.*, vol. 3, no. 1, pp. 21–34, 2015.
- [19] A. C. Gondhalekar, “Strategies for Non - Linear System Identification,” 2009.
- [20] “NI SignalExpress.” [Online]. Available: <https://www.ni.com/labview/signalexpress/>. [Accessed: 18-Apr-2016].
- [21] L. Ljung, “System Identification,” 1998, pp. 163–173.
- [22] L. Ljung, “State of the art in linear system identification: Time and frequency domain methods,” *Ieeexplore.Ieee.Org*, vol. 0, no. 2, pp. 1–14, 2007.
- [23] N. B. Modeling, “Dynamic Systems Identification Part 1 - Linear systems,” vol. 31, pp. 1–19, 1995.
- [24] “System Identification Toolbox.” [Online]. Available: <http://www.mathworks.com/products/sysid/>.
- [25] T. Irvine, “Craig-Bampton Method, Fixed Interface Model,” 2013. [Online]. Available: <https://vibrationdata.wordpress.com/2013/04/30/craig-bampton-method/>. [Accessed: 13-Feb-2016].
- [26] P. Janíček, *Systémová metodologie*, 1. ed. Akademické nakladatelství CERM, 2014.
- [27] S. James, “Coupled Rotor - Housing Dynamics Using Component Mode Synthesis,” 2011.
- [28] A. Dazio, “Fundamentals of Structural Dynamics,” p. 663, 2011.
- [29] M. Gibanica, “Experimental-Analytical Dynamic Substructuring,” p. 83, 2013.
- [30] D. Rixen and D. De Klerk, “Dynamic Substructuring Concepts,” pp. 1–17, 2008.
- [31] D. Akc, “a Hybrid Design Optimization Method Using Enriched Craig-Bampton Approach,” *Synthesis (Stuttg.)*, no. July, pp. 5–9, 2009.
- [32] “ANSYS Mechanical APDL Command Reference,” 2013. [Online]. Available: [http://148.204.81.206/Ansys/150/ANSYS Mechanical APDL Command Reference.pdf](http://148.204.81.206/Ansys/150/ANSYS_Mechanical_APDL_Command_Reference.pdf). [Accessed: 22-Mar-2016].
- [33] S. M. Khot and N. P. Yelve, “Modeling and response analysis of dynamic systems by using ANSYS(C) and MATLAB(C),” *J. Vib. Control*, vol. 17, no. 6, pp. 953–958, 2011.
- [34] C. Demir and Y. Alapan, “Modeling and Dynamic Response Analysis of an Point Supported Plate by Using ANSYS and MATLAB,” *Adv. Mater. Res.*, vol. 445, pp. 1088–1093, Jan. 2012.

SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK

MDOF	Multiple Degrees of Freedom
SDOF	Single Degree of Freedom
FRF	Frequency Response Function
IRF	Impulse Response Function
SISO	Single Input Single Output
MIMO	Multiple Input Multiple Output
CMS	Component Mode Synthesis
DOF	Degree of Freedom
LTI	Linear Time-Invariant
ARX	Auto-Regressive with eXogenous variable
NARX	Nonlinear Auto-Regressive with eXogenous variable
ARMAX	Auto-Regressive Moving Average with eXogenous variable
NARMAX	Nonlinear Auto-Regressive Moving Average with eXogenous variable
OE	Output Error
BJ	Box-Jenkins
AIC	Akaike's Information theoretic Criterion
FPE	Akaike's Final Prediction Error
MDL	Rissanen's Minimum Description Length
FFT	Fast Fourier Transform
CAD	Computer Aided Design
FREE	Free-interface (CMS method)
FIX	Fixed-interface (CMS method)
RFFI	Residual-flexible free-interface (CMS method)
SUBSTR	Substructure analysis
FEM	Finite Element Method

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ

Symbol	Jednotka	Význam
0	–	nulová matice
A	–	systémová matice
A	–	amplituda
b	Nsm^{-1}	tlumení
B	Nsm^{-1}	matice tlumení
B	–	matice vstupů
b_p	%, –	poměrný útlum
C	–	matice výstupů
D	–	matice vazebná
E	MPa	modul pružnosti
f	N	síla
f	Hz, s^{-1}	frekvence
f_0	Hz, s^{-1}	netlumená vlastní frekvence
f_m	N	síla v master uzlech (Guyanova statická redukce)
$G(\omega)$	N^{-1}m	přenosová funkce, dynamická poddajnost
I	–	jednotková matice
i	–	počet vstupů
j	–	imaginární jednotka komplexního čísla
k	Nm^{-1}	tuhost
K	Nm^{-1}	matice tuhosti
K_{CB}	Nm^{-1}	globální matice tuhosti (Craig-Bamptonova)
K_{mm}	Nm^{-1}	submatice tuhosti (Guyan)
K_{ms}	Nm^{-1}	submatice tuhosti (Guyan)
k_n	–	normovaná matice tuhosti
K_{sm}	Nm^{-1}	submatice tuhosti (Guyan)
K_{ss}	Nm^{-1}	submatice tuhosti (Guyan)
m	kg	hmotnost
M	kg	matice hmotnosti
M_{CB}	kg	globální matice hmotnosti (Craig-Bamptonova redukce)
M_{mm}	kg	submatice hmotnosti (Guyan)
M_{ms}	kg	submatice hmotnosti (Guyan)
m_n	–	normovaná matice hmotnosti
M_{sm}	kg	submatice hmotnosti (Guyan)
M_{ss}	kg	submatice hmotnosti (Guyan)
n	–	počet stupňů volnosti

o	—	počet výstupů
$\mathbf{q}$	—	vektor modálních stupňů volnosti
s	—	komplexní číslo Laplaceovy transformace
t	s	čas
$\mathbf{U}(s)$	—	vstup
$\mathbf{u}_A$	—	vektor všech stupňů volnosti (Craig-Bampton)
$\mathbf{u}_b$	—	vektor hraničních stupňů volnosti (Craig-Bampton)
$\mathbf{u}_L$	—	vektor vnitřních stupňů volnosti (Craig-Bampton)
x	m	výchylka
$\dot{x}$	ms ⁻¹	rychlost
$\ddot{x}$	ms ⁻²	zrychlení
x_m	—	modální matice
x_m	m	vektor výchylek v <i>master</i> uzlech (Guyan)
x_s	m	vektor výchylek v <i>slave</i> uzlech (Guyan)
$\ddot{x}_m$	ms ⁻²	vektor zrychlení v <i>master</i> uzlech (Guyan)
$\ddot{x}_s$	ms ⁻²	vektor zrychlení ve <i>slave</i> uzlech (Guyan)
$\mathbf{Y}(s)$	—	výstup
α	s ⁻¹	konstanta, konstrukční tlumení
β	s	konstanta, materiálové tlumení
$\mathbf{I}$	—	pomocná matice (stavový prostor)
δ	—	součinitel doznívání
ε	—	měřitelná chyba
λ	—	vlastní číslo
μ	—	Poissonovo číslo
ζ	—	poměrný útlum
$\phi(t)$	rad	fáze
ϕ_c	—	matice vazebných módů (Craig-Bampton)
ϕ_{CB}	—	transformační matice (Craig-Bampton)
ϕ_n	—	matice normálních módů (Craig-Bampton)
ω	rad/s	úhlová rychlost
ω_0	rad/s	netlumená vlastní frekvence
ω_{tl}	rad/s	tlumená vlastní frekvence

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1: Výpočtový model vertikální frézy (převzato z [1]).....	13
Obr. 2: Popis dynamické soustavy.....	17
Obr. 3: Systém s jedním stupněm volnosti	18
Obr. 4: Odezva SDOF v časové oblasti	20
Obr. 5: Odezva SDOF ve frekvenční oblasti	21
Obr. 6: Zobrazení pólů SDOF v komplexní rovině	22
Obr. 7: Nuly přenosových funkcí pro MDOF (převzato z [3]).....	23
Obr. 8: Charakteristické rozměry matic stavového prostoru	25
Obr. 9: Schéma soustavy se třemi stupni volnosti	29
Obr. 10: Struktura modální matice	31
Obr. 11: Sestavování dynamického modelu soustavy (převzato z [10])	38
Obr. 12: Postup experimentální modální analýzy (převzato z [11]).....	39
Obr. 13: Princip identifikace dynamického systému	40
Obr. 14: Schéma ARX modelu	41
Obr. 15: Schéma ARMAX modelu.....	42
Obr. 16: Schéma OE modelu	42
Obr. 17: Schéma BJ modelu	43
Obr. 18: Struktura řešení problému	44
Obr. 19: Snímek experimentální soustavy	46
Obr. 20: Místo buzení a místo umístění akcelerometru	47
Obr. 21: Odezva experimentální soustavy v časové oblasti	48
Obr. 22: Odezva experimentální soustavy ve frekvenční oblasti	49
Obr. 23: Určení šířky pásma z amplitudo-frekvenční charakteristiky	50
Obr. 24: Grafické rozhraní System Identification Toolboxu	52
Obr. 25: Vstupní data do identifikačního algoritmu	53
Obr. 26: Porovnání odezvy identifikovaných přenosových funkcí ve frekvenční oblasti....	55
Obr. 27: Uvažovaná soustava pro ilustraci Craig-Bamptonovy metody	57
Obr. 28: Model geometrie.....	61
Obr. 29: Působíště budící síly.....	62
Obr. 30: Měřicí bod zrychlení.....	62
Obr. 31: Model soustavy pomocí solid prvků.....	64
Obr. 32: Model spodního prutu s definovanými master uzly	65
Obr. 33: Model distančního dílu s definovanými master uzly.....	65
Obr. 34: Model horního prutu s definovanými master uzly	65
Obr. 35: Model přídatné hmotnosti s definovanými master uzly	66
Obr. 36: Model soustavy vytvořený pomocí CMS	67
Obr. 37: Ohybové vlastní tvary.....	69
Obr. 38: Odezva modelů v časové oblasti	70
Obr. 39: Validace stavového modelu pomocí odezvy v časové oblasti.....	73
Obr. 40: Odezva stavového modelu ve frekvenční oblasti	74
Obr. 41: Srovnání odezvy (zrychlení) ve frekvenční oblasti	76

Obr. 42: Srovnání odezvy (výchylka) ve frekvenční oblasti	77
Obr. 43: Srovnání bodového hodnocení jednotlivých přístupů	78

SEZNAM TABULEK

Tabulka 1: Diferenciální rovnice MDOF ve fyzikálním a modálním souřadném systému ..	35
Tabulka 2: Hodnoty hmotností pro uvažovaný systém	57
Tabulka 3: Hodnoty tuhostí pro uvažovaný systém.....	58
Tabulka 4: Vlastní frekvence při zachování 1 módu pro každý subsystem (celkem 2)	58
Tabulka 5: Vlastní frekvence při zachování 3 módů pro každý subsystem (celkem 6)	59
Tabulka 6: Vlastní frekvence systému.....	68
Tabulka 7: Bodové hodnocení jednotlivých přístupů	78

SEZNAM PŘÍLOH

A SKRIPTY PRO MATLAB

A 1	Skript pro aplikaci Craig-Bamptonovy metody pro MDOF systém.....	93
A 2	Funkce pro sestavení matic hmotnosti a tuhosti	96
A 3	Funkce pro sestavení částečných Craig-Bamptonových matic.....	97
A 4	Funkce pro sestavení redukovaných Craig-Bamptonových matic	99
A 5	Funkce pro sestavení globálních Craig-Bamptonových matic	100
A 6	Funkce pro určení modálních vlastností MDOF systému	101
A 7	Funkce pro separaci stavových matic z ANSYSu	102

B MAKRA PRO ANSYS

B 1	Makro pro modální a transientní analýzu dvojitého nosníku pomocí <i>solid</i> prvků ..	103
B 2	Makro pro modální a transientní analýzu dvojitého nosníku pomocí CMS	108

A SKRIPTY PRO MATLAB

A 1 Skript pro aplikaci Craig-Bamptonovy metody pro MDOF systém

```

%% Craig-Bampton method for undamped MDOF system with 2 subsystems
% Filip Ksica, © VUT 2016

clc;clear all;close all
format short
format compact

%% Global parameters
output_on = 1; % 1 = output to command window, 0 = no output to command
window

%% Define mass and stiffness matrices for MDOF
% System 1
m1 = [10 2 2 1]; % [kg] mass vector
k1 = [9e4 6e4 1e4 1e4]; % [N/m] stiffness vector
bc1 = 1; % boundary condition, 0 = free-free, 1 = fixed-free (fixed
first node), 2 = fixed-fixed, 3 = fixed-free (fixed last node)
[M1, K1] = MDOF_MK(m1,k1,bc1);

% System 2
m2 = [0.3 0.1 0.1 0.6]; % [kg] mass vector
k2 = [5e4 5e4 5e3]; % [N/m] stiffness vector
bc2 = 0; % boundary condition, 0 = free-free, 1 = fixed-free (fixed
first node), 2 = fixed-fixed, 3 = fixed-free (fixed last node)
[M2, K2] = MDOF_MK(m2,k2,bc2);

% Parameters
n_dof1 = length(m1); % number of DOF of system 1
n_n1 = length(m1) + bc1; % number of nodes of system 1
n_dof2 = length(m2); % number of DOF of system 2
n_n2 = length(m2) + bc2; % number of nodes of system 2

%% Define boundary nodes
bn1 = [4]; % index of boundary nodes of system 1
n_bn1 = length(bn1); % number of boundary nodes of system 1
bn2 = [1]; % index of boundary nodes of system 2
n_bn2 = length(bn2); % number of boundary nodes of system 2

%% Define interior nodes
n_in1 = n_dof1 - n_bn1; % number of interior nodes of system 1
n_in2 = n_dof2 - n_bn2; % number of interior nodes of system 2

%% Define partitioned mass and stiffness matrices
[M11_1,M12_1, M21_1,M22_1, K11_1, K12_1, K21_1, K22_1 ] = CB_PART(M1,K1,bn1);
[M11_2,M12_2, M21_2,M22_2, K11_2, K12_2, K21_2, K22_2 ] = CB_PART(M2,K2,bn2);

%% Assemble final partitioned matrices
MP1 = [M11_1 M12_1; M21_1 M22_1];
KP1 = [K11_1 K12_1; K21_1 K22_1];
MP2 = [M11_2 M12_2; M21_2 M22_2];
KP2 = [K11_2 K12_2; K21_2 K22_2];

%% Fixed boundary natural frequencies and modes
[f_n1, omega_1,modeshape_1] = MDOF_EIG(M11_1,K11_1);
[f_n2, omega_2,modeshape_2] = MDOF_EIG(M11_2,K11_2);

%% Define Craig-Bampton reduced component matrices
n_mtk1 = 3; % number of modes to keep for system 1

```

```

n_mtk2 = 3; % number of modes to keep for system 2
[MR1, KR1] = CB_RCM(modeshape_1,MP1,KP1,K11_1,K12_1,n_mtk1,n_dof1,n_bn1);
[MR2, KR2] = CB_RCM(modeshape_2,MP2,KP2,K11_2,K12_2,n_mtk2,n_dof2,n_bn2);

%% Assemble global Craig-Bampton matrices
[ M_CB, K_CB ] = CB_GLOB(MR1,KR1,MR2,KR2,n_mtk1,n_mtk2,n_bn1,n_bn2);

%% Determine natural frequencies and modes of combined system
[f_ncb, omega_cb,modeshape_cb] = MDOF_EIG(M_CB,K_CB);
f_ncbs = sort(f_ncb,'ascend');

%% Determine natural frequencies and modes for complete system
m = [10 2 2 1.3 0.1 0.1 0.6]; % [kg] mass vector
k = [9e4 6e4 1e4 1e4 5e4 5e4 5e3]; % [N/m] stiffness vector
bc = 1; % boundary condition, 0 = free-free, 1 = fixed-free, 2 =
fixed-fixed
[M, K] = MDOF_MK(m,k,bc);
[f_n, omega,modeshape] = MDOF_EIG(M,K);

%% Output - Component matrices
if output_on == 1
    disp(' ')
    disp('Mass and stiffness matrices of subsystem 1:')
    M1
    K1

    disp(' ')
    disp('Mass and stiffness matrices of subsystem 2:')
    M2
    K2

    disp(' ')
    disp('Partitioned mass and stiffness matrices for subsystem 1:')
    MP1
    KP1

    disp(' ')
    disp('Partitioned mass and stiffness matrices for subsystem 2:')
    MP2
    KP2

    disp(' ')
    disp('Reduced Craig-Bampton mass and stiffness matrices for subsystem 1:')
    MR1
    KR1

    disp(' ')
    disp('Reduced Craig-Bampton mass and stiffness matrices for subsystem 2:')
    MR2
    KR2

    disp(' ')
    disp('Global Craig-Bampton mass and stiffness matrices:')
    M_CB
    K_CB

    disp(' ')
    disp('Mass and stiffness matrices for complete system:')
    M
    K
end

%% Compare natural frequencies of C-B and complete system
for i = 1:length(f_ncbs)
    fn_error(i) = abs(f_n(i) - f_ncbs(i))./(f_n(i))*100;
end

disp(' ')

```

```
disp('Number of modes to keep:')
out = sprintf('Subsystem 1: %d',n_mtk1);
disp(out)
out = sprintf('Subsystem 2: %d',n_mtk2);
disp(out)

disp(' ')
disp('Natural frequencies of system:')
disp('Mode      Craig-Bampton    Complete    Error')
disp('[-]      [Hz]              [Hz]        [%]')
for i=1:length(f_n)
    if i>length(f_ncbs)
        f_ncbs(i) = NaN;
        fn_error(i) = NaN;
    end
    out = sprintf('%d.      %10.4f      %10.4f      %3.4f',i,f_ncbs(i),f_n(i),fn_error(i));
    disp(out)
end
```

A 2 Funkce pro sestavení matic hmotnosti a tuhosti

```
function [ m, k ] = MDOF_MK( mm, kk, bc)
% Function for assembling mass and stiffness matrix for MDOF
% Filip Ksica, © VUT 2016

%% Parameters
n_dof = length(mm);      % number of mass elements
n_k = length(kk);        % number of stiffness elements
n_nodes = n_dof + bc;    % number of nodes

%% Mass Matrix
m = diag(mm);

%% Stiffness Matrix
k = zeros(n_nodes,n_nodes);
for i = 1:n_k
    T = zeros(2,n_nodes);    % transformation matrix for assembly of stiffness matrix
    T(1,i) = 1;
    T(2,i+1) = 1;

    k_temp = [kk(i) -kk(i); -kk(i) kk(i)];
    k = k + T'*k_temp*T;
end

switch bc
case 0      % free-free
    k = k(1:end,1:end);
case 1      % fixed-free (fixed first node)
    k = k(2:end,2:end);
case 2      % fixed-fixed
    k = k(2:end-1,2:end-1);
case 3      % fixed-free (fixed last node)
    k = k(1:end-1,1:end-1);
otherwise
    disp('Stiffness matrix assembly error!')
end
end
```

A 3 Funkce pro sestavení částečných Craig-Bamptonových matic

```
function [ M11, M12, M21, M22, K11, K12, K21, K22 ] = CB_PART(M,K,bn)
% Function for generating partitioned Craig-Bampton mass and stiffness matrices for defined
% MDOF
% Filip Ksica, © VUT 2016

n_dof = length(M);           % number of degrees of freedom
n_bn = length(bn);           % number of boundary nodes
n_in = n_dof - n_bn;         % number of interior nodes of system 1

% Define empty submatrices
M11 = zeros(n_in,n_in);
M12 = zeros(n_in,n_bn);
M21 = zeros(n_bn,n_in);
M22 = zeros(n_bn,n_bn);

K11 = zeros(n_in,n_in);
K12 = zeros(n_in,n_bn);
K21 = zeros(n_bn,n_in);
K22 = zeros(n_bn,n_bn);

% Prepare indexing variables
i11 = 1;
j11 = 1;
i12 = 1;
j12 = 1;
i21 = 1;
j21 = 1;
i22 = 1;
j22 = 1;

% Fill the matrices M11, M12, M21, M22
for i = 1:n_dof           % rows
    % Prepare variables for flagging which submatrix current cell belongs to
    flag11 = 0;
    flag12 = 0;
    flag21 = 0;
    flag22 = 0;

    for j = 1:n_dof       % columns
        if ismember(i,bn) ~= 1
            if ismember(j,bn) ~= 1 % cell belongs to M11
                flag11 = 1;
                M11(i11,j11) = M(i,j);
                K11(i11,j11) = K(i,j);
                j11 = j11 + 1;
            else % cell belongs to M12
                flag12 = 1;
                M12(i12,j12) = M(i,j);
                K12(i12,j12) = K(i,j);
                j12 = j12 + 1;
            end
        else
            if ismember(j,bn) ~= 1 % cell belongs to M21
                flag21 = 1;
                M21(i21,j21) = M(i,j);
                K21(i21,j21) = K(i,j);
                j21 = j21 + 1;
            else % cell belongs to M22
                flag22 = 1;
                M22(i22,j22) = M(i,j);
                K22(i22,j22) = K(i,j);
                j22 = j22 + 1;
            end
        end
    end
end
```

```
    end
end

% Increase row index of submatrix cell
if flag11 == 1
    i11 = i11 + 1;
end
if flag12 == 1
    i12 = i12 + 1;
end
if flag21 == 1
    i21 = i21 + 1;
end
if flag22 == 1
    i22 = i22 + 1;
end

% Reset column position
j11 = 1;
j12 = 1;
j21 = 1;
j22 = 1;

end

end
```

A 4 Funkce pro sestavení redukováných Craig-Bamptonových matic

```
function [ MR, KR, T_CB ] = CB_RCM(modeshape,MP,KP,K11,K12,n_mtk,n_dof,n_bn)
% Function for generating reduced component Craig-Bampton mass and stiffness matrices for
% defined MDOF
% Filip Ksica, © VUT 2016

% Input parameters: modeshape - eigenvector of system being reduced
%                   MP - partitioned mass matrix
%                   KP - partitioned stiffness matrix
%                   K11 - interior DOF stiffness submatrix
%                   K12 - interior-boundary DOF stiffness submatrix
%                   n_mtk - number of modes to keep
%                   n_dof - number of degrees of freedom
%                   n_bn - number of boundary nodes

% Parameters
n_col = n_bn + n_mtk;      % number of columns of C-B transformation matrix
n_in = n_dof - n_bn;      % number of internal nodes

% Interior constraint modes
ICM = -pinv(K11)*K12;      % interior partition of constraint mode matrix

% Craig-Bampton transformation matrix
T_CB = zeros(n_dof, n_mtk); % define dimensions of transformation matrix
T_CB(1:n_in,1:n_mtk) = modeshape(1:n_in,1:n_mtk); % fill transformation matrix with kept
modeshapes

T_CB = [ modeshape(1:n_in,1:n_mtk), ICM;
         zeros(n_dof-n_in,n_mtk), ones(n_bn,n_bn) ];

% Reduced component matrices
MR = T_CB'*MP*T_CB;
KR = T_CB'*KP*T_CB;

end
```

A 5 Funkce pro sestavení globálních Craig-Bamptonových matic

```
function [ M_CB, K_CB ] = CB_GLOB(MR1, KR1, MR2, KR2, n_mtk1, n_mtk2, n_bn1, n_bn2)
% Function for generating global Craig-Bampton mass and stiffness matrices for MDOF
% Filip Ksica, © VUT 2016

% Define empty submatrices
M_CB = zeros(n_mtk1 + n_mtk2 + n_bn2, n_mtk1 + n_mtk2 + n_bn1);
K_CB = zeros(n_mtk1 + n_mtk2 + n_bn2, n_mtk1 + n_mtk2 + n_bn1);

% Define mass submatrices
Ik1k1 = MR1(1:n_mtk1, 1:n_mtk1);
Ik2k2 = MR2(1:n_mtk2, 1:n_mtk2);
Ok1k2 = zeros(n_mtk1, n_mtk2);
Ok2k1 = zeros(n_mtk2, n_mtk1);
Mk1b = MR1(1:n_mtk1, (n_mtk1+1):(n_mtk1+n_bn1));
Mk2b = MR2(1:n_mtk2, (n_mtk2+1):(n_mtk2+n_bn2));
Mb1k = MR1((n_mtk1+1):(n_mtk1+n_bn1), 1:n_mtk1);
Mb2k = MR2((n_mtk2+1):(n_mtk2+n_bn2), 1:n_mtk2);
Mbb = MR1((n_mtk1+1):(n_mtk1+n_bn1), (n_mtk1+1):(n_mtk1+n_bn1)) +
MR2((n_mtk2+1):(n_mtk2+n_bn2), (n_mtk2+1):(n_mtk2+n_bn2));

% Define stiffness submatrices
Lk1k1 = KR1(1:n_mtk1, 1:n_mtk1);
Lk2k2 = KR2(1:n_mtk2, 1:n_mtk2);
Ok1k2 = zeros(n_mtk1, n_mtk2);
Ok2k1 = zeros(n_mtk2, n_mtk1);
Kk1b = KR1(1:n_mtk1, (n_mtk1+1):(n_mtk1+n_bn1));
Kk2b = KR2(1:n_mtk2, (n_mtk2+1):(n_mtk2+n_bn2));
Ob1k = KR1((n_mtk1+1):(n_mtk1+n_bn1), 1:n_mtk1);
Ob2k = KR2((n_mtk2+1):(n_mtk2+n_bn2), 1:n_mtk2);
Kbb = KR1((n_mtk1+1):(n_mtk1+n_bn1), (n_mtk1+1):(n_mtk1+n_bn1)) +
MR2((n_mtk2+1):(n_mtk2+n_bn2), (n_mtk2+1):(n_mtk2+n_bn2));

% Fill the matrices
M_CB = [ Ik1k1 Ok1k2 Mk1b ; ...
          Ok2k1 Ik2k2 Mk2b ; ...
          Mb1k Mb2k Mbb ];

K_CB = [ Lk1k1 Ok1k2 Ok1b ; ...
          Ok2k1 Lk2k2 Ok2b ; ...
          Ob1k Ob2k Kbb ];

end
```

A 6 Funkce pro určení modálních vlastností MDOF systému

```
function [ f_n, omega, mode_shape ] = MDOF_EIG(M,K)
% Function for evaluating natural frequencies and shapes for MDOF
% Filip Ksica, © VUT 2016

% Parameters
n_dof = length(M);

% Determine eigenvalues and eigenvectors
[eigenvectors, eigenvalues] = eig(K,M);

% Evaluate natural frequency
omega = sqrt(diag(eigenvalues));
f_n = omega/(2*pi);

% Determine modal matrix orthonormal with respect to mass matrix
QTMQ = eigenvectors'*M*eigenvectors;

scale = 1./sqrt(QTMQ);
for i = 1:n_dof
    if sum(eigenvectors(:,i))<0
        scale(i,i) = -scale(i,i);
    end
    mode_shape(:,i) = eigenvectors(:,i)*scale(i,i);
end
end
```

A 7 Funkce pro separaci stavových matic z ANSYSu

```

function [ A, B, C, D ] = read_spm( filename )
% Read .spm file exported from modal analysis in ANSYS.
% Returns state-space matrices A, B, C, D.
% Syntax: [A, B, C, D] = read_spm( filename )
%
% Filip Ksica © 2016

spm = fopen(filename, 'r');                                % open specified spm file for reading
D_infile = 0;                                              % 0 - D is not included in file

while (~feof(spm))                                       % while loop with end-of-file condition
    line = fgetl(spm);                                    % read next line
    label = sscanf(line, [%s 'MATRIX']);                 % convert to string

    switch label                                          % find A, B, C labels
        case 'A'                                         % A - System Matrix
            line = fgetl(spm);                            % read next line for size
            dim_A = sscanf(line, %u);                    % convert to integer
            for ia = 1:dim_A(1)                          % for loop - read next 'size_A' lines
                line = fgetl(spm);                        % read next line
                A(ia,:) = sscanf(line, %f);               % convert to floating-point number and save to A
            end

        case 'B'                                         % B - Input Matrix
            line = fgetl(spm);                            % read next line for size
            dim_B = sscanf(line, %u);                    % convert to integer
            for ib = 1:dim_B(1)                          % for loop - read next 'size_B' lines
                line = fgetl(spm);                        % read next line
                B(ib,:) = sscanf(line, %f);               % convert to floating-point number and save to B
            end

        case 'C'                                         % C - Output Matrix
            line = fgetl(spm);                            % read next line for size
            dim_C = sscanf(line, %u);                    % convert to integer
            for ic = 1:dim_C(1)                          % for loop - read next 'size_C' lines
                line = fgetl(spm);                        % read next line
                C(ic,:) = sscanf(line, %f);               % convert to floating-point number and save to C
            end

        case 'D'                                         % D - Feedforward Matrix
            D_infile = 1;                                 % D is included in file
            line = fgetl(spm);                            % read next line for size
            dim_D = sscanf(line, %u);                    % convert to integer
            for id = 1:dim_D(1)                          % for loop - read next 'size_D' lines
                line = fgetl(spm);                        % read next line
                D(id,:) = sscanf(line, %f);               % convert to floating-point number and save to D
            end
        otherwise
    end
end
fclose(spm);                                              % close filename

if D_infile == 0                                         % if D was not included in file, it is created
    artificially
        dim_D = [dim_C(1); dim_B(2)];                   % dimensions of D - no. of output x no. of input
        D = zeros(dim_D(1), dim_D(2));                  % D - feedforward matrix
end
end

```

B MAKRA PRO ANSYS

B 1 Makro pro modální a transientní analýzu dvojitého nosníku pomocí *solid* prvků

```

!!!!!!! Beam Sandwich - Solid
!!!!!!! Filip Ksica © 2016

FINISH
/clear, nostart

!! PREPROCESOR !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
/PREP7
!! MATERIALS
! MATERIAL 1 - STEEL
MP,EX,1,2.1e11      ! Young's modulus [Pa]
MP,NUXY,1,0.3       ! Poisson ratio
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,1,,7850 ! density [kg.m^-3]

! MATERIAL 2 - ALUMINIUM
MP,EX,2,7.0e10      ! Young's modulus [Pa]
MP,NUXY,2,0.33      ! Poisson ratio
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,2,,2700 ! density [kg.m^-3]

!! ELEMENT TYPE
ET,1,SOLID185      ! solid element 185 (8node)

!! VARIABLES
*SET, length_beam_top, 500e-3      ! beam length [m] (always the shorter of the two
beams)
*SET, width_beam_top, 50e-3        ! beam width [m]
*SET, height_beam_top, 10e-3       ! beam height [m]
*SET, force_top, -70               ! force in the middle of top beam [N]
*SET, length_beam_bottom, 500e-3   ! bottom beam length [m]
*SET, width_beam_bottom, 50e-3     ! bottom beam width [m]
*SET, height_beam_bottom, 10e-3    ! bottom beam height [m]
*SET, force_bottom, 0              ! force in the middle of bottom beam[N]

*SET, beam_gap, 10e-3              ! gap between the beams [m]

*SET, length_connector, 40e-3      ! connector length [m]
*SET, height_connector, beam_gap    ! connector height [m]
*SET, width_connector, min(width_beam_top, width_beam_bottom) ! connector width [m], min
of beam widths

*SET, length_clamp_mass, 20e-3      ! length of additional mass (mass of clamps)
*SET, height_clamp_mass, 30e-3      ! height of additional mass (mass of clamps); x =
0.23/(7850*50e-3*20e-3); m = 0.23kg
*SET, width_clamp_mass, 50e-3      ! width of additional mass [m]

*SET, damping_alfa, 10.6            ! proportional damping - alfa (mass coefficient)
*SET, damping_beta, 6.92e-7        ! proportional damping - beta (stiffness coefficient)
*SET, damping_ratio, 0              ! damping ratio, dmprat = c/(2*m*omega)

*SET, n_freq, 15                    ! number of eigenvalues

!! GEOMETRY
BLOCK,0,length_beam_bottom,-height_beam_bottom/2,height_beam_bottom/2,-
width_beam_bottom/2,width_beam_bottom/2      ! bottom beam geometry

```

```

BLOCK,length_beam_bottom-
length_beam_top,length_beam_bottom,height_beam_bottom/2+beam_gap,height_beam_bottom/2+beam_g
ap+height_beam_top,-width_beam_top/2,width_beam_top/2      ! top beam geometry
BLOCK,length_beam_bottom-
length_connector,length_beam_bottom,height_beam_bottom/2,height_beam_bottom/2+beam_gap,-
width_connector/2,width_connector/2      ! connector geometry
BLOCK,length_beam_bottom,length_beam_bottom+length_clamp_mass,-height_beam_bottom/2,-
height_beam_bottom/2+height_clamp_mass,-width_clamp_mass/2,width_clamp_mass/2      !
additional mass geometry (clamp mass)

!! MESHING
LPLOT
ALLS
LESIZE,ALL,12.5e-3      ! set global element size [m]

LSEL,s,LINE,,1
LSEL,a,LINE,,3
LSEL,a,LINE,,6
LSEL,a,LINE,,8
LSEL,a,LINE,,13
LSEL,a,LINE,,15
LSEL,a,LINE,,18
LSEL,a,LINE,,20
LSEL,a,LINE,,25
LSEL,a,LINE,,27
LSEL,a,LINE,,30
LSEL,a,LINE,,32
LESIZE,ALL,,-1,,1      ! clear previously set element size
LESIZE,ALL,2.5e-3      ! set element size on thickness [m]
ALLS

ALLS
LSEL,s,LINE,,2
LSEL,a,LINE,,4
LSEL,a,LINE,,5
LSEL,a,LINE,,7
LSEL,a,LINE,,14
LSEL,a,LINE,,16
LSEL,a,LINE,,17
LSEL,a,LINE,,19
LSEL,a,LINE,,26
LSEL,a,LINE,,28
LSEL,a,LINE,,29
LSEL,a,LINE,,31
LESIZE,ALL,,-1,,1      ! clear previously set element size
LESIZE,ALL,10e-3      ! set element size on length [m]
ALLS

MAT,1      ! material 1 - steel
VSEL,s,VOLU,,1      ! select bottom beam
VSEL,a,VOLU,,4      ! select additional mass
VMESH,ALL
ALLS

MAT,2      ! material 2 - aluminium
VSEL,s,VOLU,,2      ! select top beam
VSEL,a,VOLU,,3      ! select connector
VMESH,ALL
ALLS

!! COUPLING
CPINTF,ALL      ! merges all DOF on interface nodes within tolerance

!! NAMED SELECTIONS
node_bottom_end = NODE(length_beam_bottom-length_connector,0,0)
node_bottom_mid = NODE(length_beam_bottom/2,-height_beam_bottom/2,0)
node_top_mid = NODE(length_beam_bottom-
length_beam_top*(2/3),height_beam_bottom/2+beam_gap+height_beam_top,0)

```

```

node_top_end = NODE(length_beam_bottom-
length_connector,height_beam_bottom/2+beam_gap+height_beam_top,0)

!! BOUNDARY CONDITIONS
ALLS
NSEL,s,LOC,X,0
D,ALL,ALL ! fixed end of bottom beam
ALLS

NSEL,s,LOC,X,length_beam_bottom-length_beam_top
NSEL,r,LOC,Y,height_beam_bottom/2+beam_gap,height_beam_bottom/2+beam_gap+height_beam_top
D,ALL,ALL ! fixed end of top beam
ALLS

F,node_bottom_mid,FY,force_bottom ! input force on bottom beam
ALLS

F,node_top_mid,FY,force_top ! input force on top beam
ALLS

! DAMPING
ALPHAD, damping_alfa ! proportional damping - mass coefficient
BETAD, damping_beta ! proportional damping - stiffness coefficient
DMPRAT, damping_ratio ! damping ratio (will be replaced by experimental
value)

!! SOLUTION !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!! MODAL ANALYSIS !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
FINISH
/SOL
ANTYPE,2 ! analysis type - modal
MODOPT,LANB,n_freq,0,0, ,OFF ! method - BlockLanczos, 10 modes
!MXPAND,,,,YES ! expand the results and calculate element results
!MODOPT,DAMP,n_freq,0,0, ,OFF ! method - damped, 10 modes
SOLVE
SAVE

!! POSTPROCESSOR !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
/POST1

!! SPMWRITE - STATE SPACE SYSTEM EXTRACTION
! INPUTS DEFINITION
*DIM,inputTab,,1,2
*DIM,inputLab,CHAR,1
inputTab(1,1) = node_top_mid ! top beam middle node
inputTab(1,2) = 2 ! FY
inputLab(1) = 'FY_MID'

! OUTPUTS DEFINITION
*DIM,outputTab,,1,2
*DIM,outputLab,CHAR,1
outputTab(1,1) = node_top_end ! top beam end node
outputTab(1,2) = 2 ! UY
outputLab(1) = 'UY_END'

SPMWRITE,MODAL,,inputTab,inputLab,outputTab,outputLab,,OFF,0 ! OFF - velocity and
acceleration not included

!! ANSYS AUXILIARY PROCESSOR !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!! MASS AND STIFFNESS MATRIX EXTRACTION
!FINISH
!/AUX2
!FILE,,full
!HBMAT,beam_stiff_HB,txt,,ASCII,STIFF,NO,NO
!HBMAT,beam_mass_HB,txt,,ASCII,MASS,NO,NO
!HBMAT,beam_damp_HB,txt,,ASCII,DAMP,NO,NO

```

```

! OUTPUT MODAL DATA
*DIM,EIGENVALUES_tab,ARRAY,n_freq,1 ! define table for eigenvalues
*DIM,DAMPING_tab,ARRAY,n_freq,1 ! define table for damping ratios of modes

*DO,i,1,n_freq,1

    *GET,FREQUENCY,MODE,i,FREQ,IMAG ! get current eigenvalue (imaginary part)
    EIGENVALUES_tab(i) = FREQUENCY ! store current eigenvalue to table
    *GET,DAMPING,MODE,i,DAMP ! get damping ratio of current mode
    DAMPING_tab(i) = DAMPING ! store current damping ratio to table

    SET,1,i ! load current substep
    /title, shape=%i%

    /SHOW,PNG ! format of output images
    PLNSOL,U,SUM ! results for output image - displacement vector sum
    /SHOW,CLOSE

*ENDDO

*CFOPEN,EIGENVALUES,txt ! write eigenvalues table to file
*VWRITE,EIGENVALUES_tab(1)
(F12.4)
*CFCLOSE

*CFOPEN,DAMPING,txt ! write damping ratios table to file
*VWRITE,DAMPING_tab(1)
(E12.4)
*CFCLOSE

FINISH

!! EXPORT FOR ADAMS
!/prep7
!/UNITS,SI
!ADAMS,10

!! TRANSIENT ANALYSIS !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
*SET, time_step, 1e-4 ! fixed time step
*SET, time_load, 0.002 ! end time of the load step
*SET, time_end, 1 ! end time of simulation
n_steps = time_end/time_step ! number of simulation steps

!! STEP RESPONSE - SET LOADS
/SOL
ANTYPE,4
TRNOPT,FULL
!TRNOPT,MSUP,n_freq,,1,0
LUMPM,0

OUTRES,ALL,1
DELTIM,time_step,time_step,time_step
TIME,time_load

! INPUT FORCE
F,node_bottom_mid,FY,force_bottom ! input force on bottom beam
ALLS
F,node_top_mid,FY,force_top ! input force on top beam
ALLS
! DAMPING
ALPHAD, damping_alfa ! proportional damping - mass coefficient
BETAD, damping_beta ! proportional damping - stiffness coefficient
DMPRAT, damping_ratio ! damping ratio

! SOLUTION
SOLVE

```

```

FINISH

!! STEP RESPONSE - ZERO LOADS
/SOL
ANTYPE,,REST,1,,CONTINUE
!TRNOPT,FULL
LUMPM,0
!TRNOPT,MSUP,n_freq, ,n_freq,0
OUTRES,ALL,1
DELTIM,time_step,time_step,time_step
TIME,time_end

! INPUT FORCE
F,node_bottom_mid,FY,0          ! input force on bottom beam
ALLS
F,node_top_mid,FY,0              ! input force on top beam
ALLS

! DAMPING
ALPHAD, damping_alfa            ! proportional damping - mass coefficient
BETAD, damping_beta             ! proportional damping - stiffness coefficient
DMPRAT, damping_ratio           ! damping ratio

! SOLUTION
SOLVE
FINISH

!! EXPORT !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
/POST1
*DIM,time_sim,,n_steps+1,1      ! table for simulation time
*DIM,beam_top_end_UY,,n_steps+1,1 ! table for Y displacement
*DIM,beam_top_end_AY,,n_steps+1,1 ! table for Y acceleration

time_sim(1)= 0                  ! initial time is zero
beam_top_end_UY(1)= 0           ! initial displacement is zero
beam_top_end_AY(1)= 0           ! initial acceleration is zero

*DO,j,1,time_load/time_step
SET,1,j
  *GET,time_sim(j+1),ACTIVE,0,SET,TIME ! end time of 1st loadstep (impulse peak)
  *GET,beam_top_end_UY(j+1),node,node_top_end,U,Y ! displacement at the end of loadstep 1
  (impulse peak)
  *GET,beam_top_end_AY(j+1),node,node_top_end,A,Y ! acceleration at the end of loadstep 2
  (impulse peak)
*ENDDO

*DO,k,1,n_steps-time_load/time_step ! store values of time and displacement from
each substep
SET,2,k
  *GET,time_sim(j+k+1),ACTIVE,0,SET,TIME
  *GET,beam_top_end_UY(j+k+1),node,node_top_end,U,Y
  *GET,beam_top_end_AY(j+k+1),node,node_top_end,A,Y
*ENDDO

*CFOPEN,T,txt                  ! write time table to file
*VWRITE,time_sim(1)
(F10.6)
*CFCLOSE

*CFOPEN,UY,txt                 ! write displacement table to file
*VWRITE,beam_top_end_UY(1)
(E12.4)
*CFCLOSE

*CFOPEN,AY,txt                 ! write acceleration table to file
*VWRITE,beam_top_end_AY(1)
(E12.4)
*CFCLOSE

```

B 2 Makro pro modální a transientní analýzu dvojitého nosníku pomocí CMS

!!!!!!! Beam sandwich - Component Mode Synthesis
!!!!!!! Filip Ksica © 2016

FINISH
/clear, nostart

!! PREPROCESSOR !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
/PREP7

!! VARIABLES

*SET, damping_alfa, 10.6 ! proportional damping - alfa (mass coefficient)
*SET, damping_beta, 6.92e-7 ! proportional damping - beta (stiffness coefficient)
*SET, damping_ratio, 0 ! damping ratio, dmprat = c/(2*m*omega)

*SET, n_freq, 15 ! number of eigenvalues

!! DATA FOR EXPORT

*DIM,EIGENVALUE_tab,ARRAY,n_freq ! define table for eigenvalues
*DIM,DAMPING_tab,ARRAY,n_freq ! define table for damping ratios of modes

!*SET, N_bottom_beam, 825 ! max number of node of bottom beam
!*SET, N_top_beam, 825 ! max number of node of top beam
!*SET, N_connector, 80 ! max number of node of connector
!*SET, N_clamp_mass, 129 ! max number of node of clamp mass

!! ELEMENT TYPE
ET,1,MATRIX50 ! superelement type

!! LOAD SUPERELEMENT FILES
TYPE,1 ! type of element used

SE,super_bot_beam
*GET,N_bottom_beam,NODE,0,num,max ! get highest node number
!SETRAN,super_bot_beam,,N_bottom_beam,super_top_beam2 ! change numbering of current
superelement file
EDELETE,ALL ! delete all elements
NDELETE,ALL ! delete all nodes

SE,super_top_beam
*GET,N_top_beam,NODE,0,num,max ! get highest node number
SETRAN,super_top_beam,,N_bottom_beam,super_top_beam2 ! change numbering of current
superelement file
EDELETE,ALL ! delete all elements
NDELETE,ALL ! delete all nodes

SE,super_connector
*GET,N_connector,NODE,0,num,max ! get highest node number
SETRAN,super_connector,,N_bottom_beam+N_top_beam,super_connector2 ! change numbering of
current superelement file
EDELETE,ALL ! delete all elements
NDELETE,ALL ! delete all nodes

SE,super_clamp_mass
*GET,N_clamp_mass,NODE,0,num,max ! get highest node number
SETRAN,super_clamp_mass,,N_bottom_beam+N_top_beam+N_connector,super_clamp_mass2 ! change
numbering of current superelement file
EDELETE,ALL ! delete all elements
NDELETE,ALL ! delete all nodes

SE,super_bot_beam ! load bottom beam superelement file
SE,super_top_beam2 ! load top beam superelement file with new numbering

```

SE,super_connector2          ! load connector superelement file with new numbering
SE,super_clamp_mass2         ! load clamp mass superelement file with new numbering

!! NAMED SELECTIONS
node_top_mid = NODE(length_beam_bottom-
length_beam_top*(3/5),height_beam_bottom/2+beam_gap+height_beam_top,0)
node_top_end = NODE(length_beam_bottom-
length_connector,height_beam_bottom/2+beam_gap+height_beam_top,0)

ALLS
NSEL,s,LOC,X,0
NSEL,r,loc,Y,-height_beam_bottom/2,height_beam_bottom/2
CM,fixed_nodes_bot,NODE
ALLS

ALLS
NSEL,s,LOC,X,0
NSEL,r,loc,Y,height_beam_bottom/2+beam_gap,height_beam_bottom/2+beam_gap+height_beam_top
CM,fixed_nodes_top,NODE
ALLS

!! COUPLING
CPINTF,ALL                    ! merges all DOF on interface nodes within tolerance

!! BOUNDARY CONDITIONS
ALLS
CMSEL,s,fixed_nodes_bot      ! fixed end of bottom beam
CMSEL,a,fixed_nodes_top      ! fixed end of top beam
D,ALL,ALL
ALLS

ALLS
F,node_top_mid,FY,force_top  ! input force on top beam
ALLS

!! DAMPING
ALPHAD, damping_alfa         ! proportional damping - mass coefficient
BETAD, damping_beta          ! proportional damping - stiffness coefficient
DMPRAT, damping_ratio        ! damping ratio (will be replaced by experimental
value)

!! SOLUTION !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
FINISH
/SOL
ANTYPE,2                     ! analysis type - modal
MODOPT,LANB,n_freq,0,0, ,OFF ! method - BlockLanczos, 10 modes
!MXPAND,,,YES                ! expand the results and calculate element results
!MODOPT,DAMP,n_freq,0,0, ,OFF ! method - damped, 10 modes
SOLVE
SAVE

!! POSTPROCESSOR !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
/POST1

*DO,j,1,N_FREQ,1
  *GET,FREQUENCY,MODE,j,FREQ,IMAG ! get current eigenvalue (imaginary part)
  EIGENVALUE_tab(j) = FREQUENCY   ! store current eigenvalue to table
  *GET,DAMPING,MODE,i,DAMP         ! get damping ratio of current mode
  DAMPING_tab(j) = DAMPING        ! store current damping ratio to table
*ENDDO

*CFOPEN,EIGENVALUES_CMS,txt       ! write time table to file
*VWRITE,EIGENVALUE_tab(1)
(F10.2)
*CFCLOSE

*CFOPEN,DAMPING_CMS,txt          ! write damping ratios table to file

```

```

*VWRITE,DAMPING_tab(1)
(E12.4)
*CFCLOS

!! SPMWRITE - STATE SPACE SYSTEM EXTRACTION
! INPUTS DEFINITION
*DIM,inputTab,,1,2
*DIM,inputLab,CHAR,1
inputTab(1,1) = node_top_mid      ! top beam middle node
inputTab(1,2) = 2                  ! FY
inputLab(1) = 'FY_MID'

! OUTPUTS DEFINITION
*DIM,outputTab,,1,2
*DIM,outputLab,CHAR,1
outputTab(1,1) = node_top_end      ! top beam end node
outputTab(1,2) = 2                  ! UY
outputLab(1) = 'UY_END'

SPMWRITE,MODAL,,inputTab,inputLab,outputTab,outputLab,,OFF,0      ! OFF - velocity and
acceleration not included

/sol
!! TRANSIENT ANALYSIS !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
*SET, time_step, 1e-4              ! fixed time step
*SET, time_load, 0.002              ! end time of the load step
*SET, time_end, 1                  ! end time of simulation
n_steps = time_end/time_step        ! number of simulation steps

!! STEP RESPONSE - SET LOADS
/SOL
ANTYPE,4
TRNOPT,FULL
!TRNOPT,MSUP,n_freq,,1,0
LUMPM,0

OUTRES,ALL,1
DELTIM,time_step,time_step,time_step
TIME,time_load

! INPUT FORCE
F,node_bottom_mid,FY,force_bottom  ! input force on bottom beam
ALLS
F,node_top_mid,FY,force_top         ! input force on top beam
ALLS
! DAMPING
ALPHAD, damping_alfa                ! proportional damping - mass coefficient
BETAD, damping_beta                 ! proportional damping - stiffness coefficient
DMPRAT, damping_ratio               ! damping ratio

! SOLUTION
SOLVE
FINISH

!! STEP RESPONSE - ZERO LOADS
/SOL
ANTYPE,,REST,1,,CONTINUE
!TRNOPT,FULL
LUMPM,0
!TRNOPT,MSUP,n_freq, ,n_freq,0
OUTRES,ALL,1
DELTIM,time_step,time_step,time_step
TIME,time_end

! INPUT FORCE

```

```

F,node_bottom_mid,FY,0          ! input force on bottom beam
ALLS
F,node_top_mid,FY,0             ! input force on top beam
ALLS

! DAMPING
ALPHAD, damping_alfa            ! proportional damping - mass coefficient
BETAD, damping_beta             ! proportional damping - stiffness coefficient
DMPRAT, damping_ratio           ! damping ratio

! SOLUTION
SOLVE
FINISH

!! EXPORT !!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
/POST1
*DIM,time_sim,,n_steps+1,1      ! table for simulation time
*DIM,beam_top_end_UY,,n_steps+1,1 ! table for Y displacement
*DIM,beam_top_end_AY,,n_steps+1,1 ! table for Y acceleration

time_sim(1)= 0                  ! initial time is zero
beam_top_end_UY(1)= 0           ! initial displacement is zero
beam_top_end_AY(1)= 0           ! initial acceleration is zero

*DO,j,1,time_load/time_step
SET,1,j
  *GET,time_sim(j+1),ACTIVE,0,SET,TIME ! end time of 1st loadstep (impulse peak)
  *GET,beam_top_end_UY(j+1),node,node_top_end,U,Y ! displacement at the end of loadstep 1
  (impulse peak)
  *GET,beam_top_end_AY(j+1),node,node_top_end,A,Y ! acceleration at the end of loadstep 2
  (impulse peak)
*ENDDO

*DO,k,1,n_steps-time_load/time_step ! store values of time and displacement from
each substep
SET,2,k
  *GET,time_sim(j+k+1),ACTIVE,0,SET,TIME
  *GET,beam_top_end_UY(j+k+1),node,node_top_end,U,Y
  *GET,beam_top_end_AY(j+k+1),node,node_top_end,A,Y
*ENDDO

*CFOPEN,T_CMS,txt                ! write time table to file
*VWRITE,time_sim(1)
(F10.6)
*CFCLOSE

*CFOPEN,UY_CMS,txt               ! write displacement table to file
*VWRITE,beam_top_end_UY(1)
(E12.4)
*CFCLOSE

*CFOPEN,AY_CMS,txt               ! write acceleration table to file
*VWRITE,beam_top_end_AY(1)
(E12.4)
*CFCLOSE

```

C MATICE MDOF SYSTÉMU POMOCÍ CRAIG-BAMPTONOVY METODY

Mass and stiffness matrices of subsystem 1:

M1 =

10	0	0	0
0	2	0	0
0	0	2	0
0	0	0	1

K1 =

150000	-60000	0	0
-60000	70000	-10000	0
0	-10000	20000	-10000
0	0	-10000	10000

Mass and stiffness matrices of subsystem 2:

M2 =

0.3000	0	0	0
0	0.1000	0	0
0	0	0.1000	0
0	0	0	0.6000

K2 =

50000	-50000	0	0
-50000	100000	-50000	0
0	-50000	55000	-5000
0	0	-5000	5000

Partitioned mass and stiffness matrices for subsystem 1:

MP1 =

10	0	0	0
0	2	0	0
0	0	2	0
0	0	0	1

KP1 =

150000	-60000	0	0
-60000	70000	-10000	0
0	-10000	20000	-10000
0	0	-10000	10000

Partitioned mass and stiffness matrices for subsystem 2:

MP2 =

0.1000	0	0	0
0	0.1000	0	0
0	0	0.6000	0
0	0	0	0.3000

KP2 =

100000	-50000	0	-50000
-50000	55000	-5000	0
0	-5000	5000	0
-50000	0	0	50000

Reduced Craig-Bampton mass and stiffness matrices for subsystem 1:

MR1 =

1.0000	0.0000	-0.0000	0.6602
0.0000	1.0000	0	0.4966
-0.0000	0	1.0000	-0.0229
0.6602	0.4966	-0.0229	1.6829

KR1 =

1.0e+04 *			
0.6532	0.0000	-0.0000	-0.0000
0.0000	1.1114	-0.0000	0.0000
-0.0000	-0.0000	4.2353	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.4390

C MATICE MDOF SYSTÉMU POMOCÍ CRAIG-BAMPTONOVY METODY

Reduced Craig-Bampton mass and stiffness matrices for subsystem 2:

MR2 =

1.0000	0.0000	0.0000	0.8054
0.0000	1.0000	0.0000	0.3758
0.0000	0.0000	1.0000	0.1003
0.8054	0.3758	0.1003	1.1000

KR2 =

1.0e+06 *			
0.0069	-0.0000	0.0000	-0.0000
0	0.2280	0.0000	-0.0000
-0.0000	0.0000	1.3234	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000

Global Craig-Bampton mass and stiffness matrices:

M_CB =

1.0000	0.0000	-0.0000	0	0	0	0.6602
0.0000	1.0000	0	0	0	0	0.4966
-0.0000	0	1.0000	0	0	0	-0.0229
0	0	0	1.0000	0.0000	0.0000	0.8054
0	0	0	0.0000	1.0000	0.0000	0.3758
0	0	0	0.0000	0.0000	1.0000	0.1003
0.6602	0.4966	-0.0229	0.8054	0.3758	0.1003	2.7829

K_CB =

1.0e+06 *						
0.0065	0.0000	-0.0000	0	0	0	-0.0000
0.0000	0.0111	-0.0000	0	0	0	0.0000
-0.0000	-0.0000	0.0424	0	0	0	-0.0000
0	0	0	0.0069	-0.0000	0.0000	-0.0000
0	0	0	0	0.2280	0.0000	-0.0000
0	0	0	-0.0000	0.0000	1.3234	-0.0000
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0044

Mass and stiffness matrices for complete system:

M =

10.0000	0	0	0	0	0	0
0	2.0000	0	0	0	0	0
0	0	2.0000	0	0	0	0
0	0	0	1.3000	0	0	0
0	0	0	0	0.1000	0	0
0	0	0	0	0	0.1000	0
0	0	0	0	0	0	0.6000

K =

150000	-60000	0	0	0	0	0
-60000	70000	-10000	0	0	0	0
0	-10000	20000	-10000	0	0	0
0	0	-10000	60000	-50000	0	0
0	0	0	-50000	100000	-50000	0
0	0	0	0	-50000	55000	-5000
0	0	0	0	0	-5000	5000

Number of modes to keep:

Subsystem 1: 3

Subsystem 2: 3

Natural frequencies of system:

Mode	Craig-Bampton	Complete	Error
[-]	[Hz]	[Hz]	[%]
1.	5.9833	5.9826	0.0111
2.	12.9986	12.9986	0.0000
3.	15.5088	15.5087	0.0003
4.	20.6631	20.6629	0.0011
5.	32.7619	32.7619	0.0000
6.	80.1678	80.1678	0.0000
7.	183.8192	183.8192	0.0000