

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta elektrotechniky
a komunikačních technologií

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Brno, 2022

Matyáš Sedláček



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY

A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION

ÚSTAV RADIOELEKTRONIKY

DEPARTMENT OF RADIO ELECTRONICS

ANALÝZA SPEKTRÁLNÍCH CHARAKTERISTIK SIGNÁLŮ

ANALYSIS OF SPECTRAL CHARACTERISTICS OF SIGNALS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Matyáš Sedláček

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

**doc. RNDr. Jitka Poměnková,
Ph.D.**

BRNO 2022

Bakalářská práce

bakalářský studijní program **Elektronika a komunikační technologie**

Ústav radioelektroniky

Student: Matyáš Sedláček

ID: 221069

Ročník: 3

Akademický rok: 2021/22

NÁZEV TÉMATU:

Analýza spektrálních charakteristik signálů

POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

Seznamte se s problematikou náhodných procesů a spektrální analýzou signálů. Prostudujte existující metody spektrální analýzy a jejich vliv na základní vlastnosti odhadů. Na základě rešerše literatury stanovte vliv faktorů na kvalitu odhadu spektra (dostupná délka signálu, počet realizací signálu, míra zašumění signálu, parametry metod apod.). Sestavte soubor zkoumaných signálů obsahující simulované i reálné signály s různými vlastnostmi/parametry.

Popište sestavený soubor signálů ve Vámi vytvořené databázi. V prostředí Matlab vytvořte sadu funkcí pro spektrální odhady s grafickými výstupy a s možností volby ovlivňujících parametrů. Dále vytvořte vhodné uživatelské prostředí pro snadné ovládání programu a výběr vhodné metody (preferované je např. GUI při použití Matlabu). Demonstrujte vliv různých nastavení parametrů na odhad spektra simulovaných signálů (využijte zvolených měřítek kvality). Sumarizujte zjištěné poznatky a formulujte doporučení pro nalezení odhadu spektra. Doplněte informace o vhodnosti zvolených metod z pohledu typu signálu. Zjištěné poznatky ověřte při odhadech spekter reálných signálů. Vytvořte návod pro počítačové cvičení.

DOPORUČENÁ LITERATURA:

[1] SOVKA, P., POLÁK, P. Vybrané metody číslicového zpracování signálů. Vyd. 2. Praha: ČVUT, 2003, 258 s. ISBN 80-01-02821-6.

[2] PROAKIS, J. G., RADER, Ch. M., LING, F., MOONEN, M., PROUDLER, I. K., NIKIAS, Ch. L. Algorithms for Statistical Signal Processing. 1st Edition, . New Jersey: Prentice Hall, 2002, 564 pp.. ISBN 0-13-062219-2

Termín zadání: 11.2.2022

Termín odevzdání: 1.6.2022

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jitka Poměnková, Ph.D.

doc. Ing. Lucie Hudcová, Ph.D.
předseda rady studijního programu

UPOZORNĚNÍ:

Autor bakalářské práce nesmí při vytváření bakalářské práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č.40/2009 Sb.

Abstrakt

Bakalářská práce se zabývá vlastnostmi odhadů spektrální výkonové hustoty, v závislosti na použité metodě a parametrech signálu. V práci jsou stanoveny z pohledu spektrální analýzy důležité vlastnosti signálu a kritéria pro posouzení kvality výsledného spektrálního odhadu. Následně jsou na jejich základě popsány vlastnosti vybraných neparametrických a parametrických metod. Jsou provedeny analýzy na simulovaných signálech, na jejichž základě jsou stanovena doporučení pro nalezení odhadu vhodnou metodou. Doporučení jsou následně ověřována a diskutována při odhadech PSD reálných signálů. Součástí práce je také aplikace v MATLAB App Designeru pro generování odhadů PSD a sbírka použitých signálů.

Klíčová slova

spektrální analýza, odhad PSD, stochastické signály, neparametrické metody, parametrické metody, Welch, Burg, Multitaper, MATLAB App Designer

Abstract

The subject of this bachelor's thesis are the properties of power spectral density estimates, mainly how their properties depend on the analyzed signal's parameters and the method being used. Important signal properties from the perspective of spectral analysis are defined, as well as measures for judging the estimate. Based on those, a choice of nonparametric and parametric spectral estimation methods is described. Analysis is performed on simulated signals and the results generalized into a set of recommendations for finding an estimate via an optimal method. These recommendations are then scrutinized and further discussed through estimation of real signal PSDs. Included is an application in MATLAB App Designer for generating spectral estimates and a collection of signals used.

Keywords

spectral analysis, PSD estimation, stochastic signals, nonparametric methods, parametric methods, Welch, Burg, Multitaper, MATLAB App Designer

Bibliografická citace

SEDLÁČEK, Matyáš. *Analýza spektrálních charakteristik signálů*. Brno, 2022. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/141525>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav radioelektroniky. Vedoucí práce Jitka Poměnková.

Prohlášení autora o původnosti díla

Jméno a příjmení studenta:	Matyáš Sedláček
VUT ID studenta:	221069
Typ práce:	Bakalářská práce
Akademický rok:	2021/22
Téma závěrečné práce:	Analýza spektrálních charakteristik signálů

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucí/ho bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této bakalářské práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

V Brně dne: 1. června 2022

podpis autora

Poděkování

Děkuji vedoucí bakalářské práce doc. RNDr. Jitce Poměnkové, Ph.D. za účinnou metodickou, pedagogickou a odbornou pomoc a další cenné rady při zpracování mé bakalářské práce.

V Brně dne: 1. června 2022

podpis autora

Obsah

SEZNAM OBRÁZKŮ	9
SEZNAM TABULEK.....	14
ÚVOD	15
1. SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA NÁHODNÝCH SIGNÁLŮ	16
1.1 NÁHODNÉ SIGNÁLY	16
1.2 ODHAD SPEKTER NÁHODNÝCH SIGNÁLŮ	18
1.3 OVLIVŇUJÍCÍ PARAMETRY A KRITÉRIA KVALITY SPEKTRÁLNÍHO ODHADU	21
1.3.1 <i>Parametry signálu ovlivňující výsledné spektrum</i>	21
1.3.2 <i>Kritéria kvality spektrálního odhadu</i>	22
2. NEPARAMETRICKÉ METODY SPEKTRÁLNÍ ANALÝZY	26
2.1 METODA PERIODOGRAMU	26
2.2 MODIFIKOVANÝ PERIODOGRAM A VÁHOVACÍ OKNA	28
2.3 WELCHOVA METODA.....	32
2.4 KORELOGRAM A METODA BLACKMAN–TUKEYOVA.....	35
2.5 METODA MULTITAPER (MTM).....	37
3. PARAMETRICKÉ METODY SPEKTRÁLNÍ ANALÝZY	39
3.1 AUTOREGRESNÍ MODELOVÁNÍ ODHADU SPEKTRA (AR)	40
3.1.1 <i>Yule-Walkerova metoda</i>	41
3.1.2 <i>Burgova metoda</i>	43
3.2 MA A ARMA MODELY	44
4. ODHADY PSD SIMULOVANÝCH SIGNÁLŮ	46
4.1 VLIV DÉLKY SIGNÁLU A PARAMETRŮ METOD NA FREKVENČNÍ ROZLIŠENÍ ODHADU PSD	46
4.2 VLIV DÉLKY SIGNÁLU A PARAMETRŮ METOD NA ROZPTYL A VYCHÝLENÍ ODHADU PSD	54
4.3 VLIV HODNOTY SNR NA VLASTNOSTI ODHADU PSD, ROZLIŠITELNOST ÚZKOPÁSMOVÝCH SLOŽEK NA ŠUMOVÉM POZADÍ	69
4.4 SHRUTÍ METOD A DOPORUČENÍ PRO NALEZENÍ ODHADU PSD	76
5. ODHADY PSD REÁLNÝCH SIGNÁLŮ	82
5.1 POŽADAVEK NA VYSOKÉ ROZLIŠENÍ ODHADU	82
5.1.1 <i>Délka signálu: velká; Odstup signálu a šumu: nízký</i>	82
5.1.2 <i>Délka signálu: malá; Odstup signálu a šumu: nízký</i>	85
5.1.3 <i>Délka signálu: velká; Odstup signálu a šumu: vysoký</i>	87
5.1.4 <i>Délka signálu: malá; Odstup signálu a šumu: vysoký</i>	89
5.2 POŽADAVEK NA VYHLAZENÝ ODHAD, VĚRNOU REPREZENTACI PSD.....	90
5.2.1 <i>Délka signálu: velká; Vliv dynamického rozsahu PSD</i>	90
5.2.2 <i>Délka signálu: malá</i>	92
6. APLIKACE PRO GENEROVÁNÍ SPEKTRÁLNÍCH ODHADŮ	96
7. DATABÁZE SIGNÁLŮ	98
7.1 SIMULOVANÉ SIGNÁLY	98
7.2 ZÁZNAMY REÁLNÝCH SIGNÁLŮ.....	99

8. ZÁVĚR.....	102
LITERATURA.....	103
SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK	105
SEZNAM PŘÍLOH.....	106
PŘÍLOHA A - NÁVOD K APLIKACI SPECAN	107
PŘÍLOHA B - NÁVOD PRO POČÍTAČOVÉ CVIČENÍ.....	113

SEZNAM OBRÁZKŮ

1.1	Základní členění stochastických signálů	17
1.2	Spektra dvou nezávislých realizací náhodného procesu.....	19
1.3	Odhad výkonové spektrální hustoty získaný průměrem deseti realizací procesu z obrázku 1.2	20
1.4	Prosakování ve spektru sinusového průběhu.....	23
2.1	Rozptyl periodogramu v závislosti na délce záznamu.....	27
2.2	Reprezentace obdélníkového, trojúhelníkového a Hannova okna v diskretní časové a frekvenční doméně	29
2.3	Reprezentace Hammingova, Blackmanova a Nuttallova okna v diskretní časové a frekvenční doméně	29
2.4	Vliv okénkových funkcí na odhad pomocí periodogramu $f_s = 200 \text{ Hz}$; $N = 400$; $f_1 = 49 \text{ Hz}$; $f_2 = 51 \text{ Hz}$	31
2.5	Naznačení principu Welchovy metody	32
2.6	Vliv počtu segmentů na odhad Welchovou metodou $f_s = 200 \text{ Hz}$; $N = 1000$; překryv 50 %; Hammingovo okno.....	34
2.7	Srovnání vychýleného a nevychýleného odhadu autokorelační funkce	36
2.8	První, druhá a sedmá Slepianova sekvence v časové i frekvenční doméně.....	38
3.1	Vzhled odhadů PSD pomocí modelů AR(4), MA(4), ARMA(4,4); pozice složek na 0,1 a 0,3 násobcích vzorkovacího kmitočtu	45
4.1	Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu o výkonu 1 W pomocí periodogramu, za použití počtu vzorků a) $N = 333$; b) $N = 500$; c) $N = 1000$; d) $N = 2000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$	47
4.2	Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu o výkonu 1 W pomocí periodogramu modifikovaného Hammingovým oknem, za použití počtu vzorků a) $N = 333$; b) $N = 500$; c) $N = 1000$; d) $N = 2000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$	48
4.3	Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu o výkonu 1 W pomocí periodogramu modifikovaného Nuttallovým oknem, za použití počtu vzorků a) $N = 333$; b) $N = 500$; c) $N = 1000$; d) $N = 2000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$	48
4.4	Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu o výkonu 1 W pomocí Welchovy metody, za použití počtu vzorků v segmentu $M = 2000$ s překryvem a) 0 %; b) 25 %; c) 50 %; d) 75 %; $f_s = 1 \text{ kHz}$	49
4.5	Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu o výkonu 1 W pomocí metody Multitaper, s parametrem $NW = 1,5$ a počtu vzorků a) $N = 800$; b) $N = 1500$; c) $N = 2000$; a za použití počtu vzorků $N = 2000$ a d) $NW = 3$; e) $NW = 10$; $f_s = 1 \text{ kHz}$	50
4.6	Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu o výkonu 1 W pomocí metody Multitaper, s parametrem $NW = 3$ a počtu vzorků $N = 2000$ při použití a) 5; b) 2 nejnižších Slepianových sekvencí; $f_s = 1 \text{ kHz}$	50
4.7	Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu o výkonu 1 W pomocí Yule-Walkerovy metody, řád modelu $p = 4$; pro počet vzorků N a) 30; b) 100; c) 1000; d) 10000; $f_s = 1 \text{ kHz}$	51
4.8	Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu o výkonu 1 W pomocí Yule-Walkerovy metody, pro počet vzorků $N = 1000$, $f_s = 1 \text{ kHz}$ a řád modelu p a) 20; b) 50; c) 120; d) 200.....	52

4.9	Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu o výkonu 1 W pomocí Burgovy metody, řád modelu $p = 4$; pro počet vzorků N a) 30; b) 100; c) 1000; d) 10000; $f_s = 1 \text{ kHz}$	53
4.10	Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu o výkonu 1 W pomocí Burgovy metody, pro počet vzorků $N = 1000$, $f_s = 1 \text{ kHz}$ a řád modelu p a) 20; b) 50; c) 120; d) 200	53
4.11	Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu o výkonu 1 W pomocí Burgovy metody, pro počet vzorků $N = 500$, $f_s = 500 \text{ Hz}$ a řád modelu p a) 50; b) 60	54
4.12	Odhady PSD (černá) autoregresního procesu 4. řádu pomocí periodogramu. Proloženo pravým PSD (modrá). Počet použitých vzorků a) $N = 333$; b) $N = 500$; c) $N = 1000$; d) $N = 2000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$	55
4.13	a) Závislost MSE odhadů PSD autoregresního procesu 4. řádu pomocí periodogramu na počtu vzorků od 100 do 20000; b), c), d) Odhady PSD (černá) $AR(4)$ pomocí periodogramu pro 100 nezávislých realizací, jejich průměr (červená) a pravé PSD (modrá). Počet použitých vzorků b) $N = 1000$; c) $N = 10000$; d) $N = 20000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$	56
4.14	Odhady PSD (černá) autoregresního procesu 4. řádu pomocí periodogramu s Hammingovým oknem. Proloženo pravým PSD (modrá). Počet použitých vzorků a) $N = 333$; b) $N = 500$; c) $N = 1000$; d) $N = 2000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$	57
4.15	a) Závislost MSE odhadů PSD autoregresního procesu 4. řádu pomocí periodogramu s Hammingovým oknem na počtu vzorků od 100 do 20000; b), c), d) Odhady PSD (černá) $AR(4)$ pomocí periodogramu s Hammingovým oknem pro 100 nezávislých realizací, jejich průměr (červená) a pravé PSD (modrá). Počet použitých vzorků b) $N = 1000$; c) $N = 10000$; d) $N = 20000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$	58
4.16	a) Závislost MSE odhadů PSD autoregresního procesu 4. řádu pomocí Welchovy metody na počtu vzorků od 1000 do 20000; délka segmentu $M = 1000$; překryv 50 %; Hannovo okno; b), c), d) Odhady PSD (černá) $AR(4)$ pomocí Welchovy metody se stejným nastavením parametrů. Počet použitých vzorků b) $N = 1000$; c) $N = 3000$; d) $N = 5000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$	58
4.17	a) Závislost MSE odhadů PSD autoregresního procesu 4. řádu pomocí Welchovy metody na délce segmentu M od 100 do 20000 vzorků; počet vzorků signálu $N = 20000$; překryv 50 %; Hannovo okno; b), c), d) Odhady PSD (černá) $AR(4)$ pomocí Welchovy metody se stejnými parametry. Délka segmentů b) $N = 1000$; c) $N = 5000$; d) $N = 10000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$	59
4.18	Závislost MSE odhadů PSD autoregresního procesu 4. řádu pomocí Welchovy metody na překryvu segmentů od 0 do 100 %; počet vzorků signálu $N = 10000$; délka segmentu, použité okno: a) $M = 1000$, Hannovo; b) $M = 1000$, Nuttallovo; c) $M = 500$, Hannovo; d) $M = 500$, Nuttallovo; $f_s = 1 \text{ kHz}$	60
4.19	Odhady PSD (černá) autoregresního procesu 4. řádu pomocí metody Multitaper, $NW = 3$, počet použitých sekvencí 5. Proloženo pravým PSD (modrá). Počet použitých vzorků a) $N = 333$; b) $N = 500$; c) $N = 1000$; d) $N = 2000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$	61
4.20	Odhady PSD (černá) $AR(4)$ pomocí metody Multitaper pro 100 nezávislých realizací, jejich průměr (červená) a pravé PSD (modrá). Použitá délka signálu $N = 500$ vzorků; parametry: a) $NW = 3$, sekvencí: 5; b) $NW = 10$, sekvencí: 19; c) $NW = 3$, sekvencí: 3; d) $NW = 10$, sekvencí: 16; $f_s = 1 \text{ kHz}$	62
4.21	Závislost MSE na délce signálu pro odhady PSD pomocí metody Multitaper pro N od 100 do 20000. Použité parametry: a) $NW = 3$, sekvencí: 5; b) $NW = 10$, sekvencí: 19; c) $NW = 3$, sekvencí: 3; d) $NW = 10$, sekvencí: 16; $f_s = 1 \text{ kHz}$	63

4.22	Odhady PSD (černá) autoregresního procesu 4. řádu pomocí metody Yule-Walker, řád odhadu $p = 4$. Proloženo pravým PSD (modrá). Počet použitých vzorků a) $N = 50$; b) $N = 200$; c) $N = 500$; d) $N = 1000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$	64
4.23	a) Závislost MSE odhadů PSD jedné realizace autoregresního procesu 4. řádu pomocí Yule-Walkerovy metody na počtu vzorků od 5 do 20000; b), c), d) Odhady PSD (černá) $AR(4)$ pomocí Yule-Walkerovy metody pro 100 nezávislých realizací, jejich průměr (červená) a pravé PSD (modrá). Počet použitých vzorků b) $N = 50$; c) $N = 1000$; d) $N = 20000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$	64
4.24	a) Závislost MSE odhadů PSD jedné realizace autoregresního procesu 4. řádu pomocí Yule-Walkerovy metody na řádu modelu od 1 do 300; $N = 1000$ b), c), d) Odhady PSD (černá) $AR(4)$ pomocí Yule-Walkerovy metody pro 100 nezávislých realizací, jejich průměr (červená) a pravé PSD (modrá). Počet použitých vzorků a řád modelu b) $N = 1000, p = 3$; c) $N = 1000, p = 40$; d) $N = 5000, p = 120$; $f_s = 1 \text{ kHz}$	65
4.25	Odhady PSD (černá) autoregresního procesu 4. řádu pomocí Burgovy metody, $p = 4$. Proloženo pravým PSD (modrá). Počet použitých vzorků a) $N = 50$; b) $N = 200$; c) $N = 500$; d) $N = 1000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$	66
4.26	a) Závislost MSE odhadů PSD jedné realizace autoregresního procesu 4. řádu pomocí Yule-Walkerovy metody na počtu vzorků od 5 do 20000; b) detail průběhu pro N od 5 do 500; $f_s = 1 \text{ kHz}$	67
4.27	Odhady PSD (černá) $AR(4)$ pomocí Burgovy metody pro 100 nezávislých realizací, jejich průměr (červená) a pravé PSD (modrá). Řád modelu $p = 4$, počet použitých vzorků a) $N = 50$; b) $N = 200$; c) $N = 500$; d) $N = 1000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$	67
4.28	a) Závislost MSE odhadů PSD jedné realizace autoregresního procesu 4. řádu pomocí Burgovy metody na řádu modelu od 1 do 300; $N = 1000$ b), c), d) Odhady PSD (černá) $AR(4)$ pomocí Burgovy metody pro 100 nezávislých realizací, jejich průměr (červená) a pravé PSD (modrá). Počet použitých vzorků a řád modelu b) $N = 1000, p = 3$; c) $N = 50, p = 40$; d) $N = 1000, p = 40$; $f_s = 1 \text{ kHz}$	68
4.29	Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu pomocí periodogramu, za použití počtu vzorků $N = 1000$; výkon šumu a SNR: a) $P = 32 \text{ W}$, $SNR = -12 \text{ dB}$; b) $P = 8 \text{ W}$, $SNR = -6 \text{ dB}$; c) $P = 2 \text{ W}$, $SNR = 0 \text{ dB}$; d) $P = 0.2 \text{ W}$, $SNR = 10 \text{ dB}$; $f_s = 1 \text{ kHz}$	69
4.30	Stejný odhad PSD jako na obrázku 4.29 a) pro počet vzorků a vzorkovací kmitočet: a) $N = 10000$, $f_s = 1 \text{ kHz}$; b) $N = 10000$, $f_s = 10 \text{ kHz}$;	70
4.31	Odhady PSD (černá) kódu Manchester s přídavným bílým šumem pomocí periodogramu modifikovaného Hannovým oknem; proloženo teoretickým (ideálním) PSD (modrá). Počet vzorků $N = 2000$; SNR: a) $SNR = -12 \text{ dB}$; b) $SNR = -6 \text{ dB}$; c) $SNR = 0 \text{ dB}$; d) $SNR = 10 \text{ dB}$; $f_s = 100 \text{ Hz}$	71
4.32	Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu o výkonu 32 W, $SNR = -12 \text{ dB}$; Welchova metoda, trojúhelníkové okno, délka segmentu $M = 1000$, překryv 75 %, počet vzorků a) $N = 2000$ b) $N = 5000$; metoda Multitaper, počet vzorků $N = 3000$ c) $NW = 2$, sekvencí: 3; d) $NW = 3$, sekvencí: 5; $f_s = 1 \text{ kHz}$	72
4.33	Odhady PSD (černá) kódu Manchester s přídavným bílým šumem, proloženo teoretickým (ideálním) PSD (modrá). Odhady pomocí Welchovy metody, $N = 5000$, $M = 2000$, překryv 75 % a) $SNR = -12 \text{ dB}$; b) $SNR = 0 \text{ dB}$; Odhady pomocí metody Multitaper, $N = 2000$, $NW = 3$, použité sekvence: 3 c) $SNR = -12 \text{ dB}$; d) $SNR = 0 \text{ dB}$; $f_s = 100 \text{ Hz}$	72
4.34	Odhady PSD (černá) kódu Manchester s přídavným bílým šumem, proloženo teoretickým (ideálním) PSD (modrá). Odhady pomocí Yule-Walkerovy metody, $N = 2000$, $p = 60$, a) $SNR = -12 \text{ dB}$; b) $SNR = 0 \text{ dB}$; Odhady pomocí metody Burg, $N = 2000$, $p = 60$, c) $SNR = -12 \text{ dB}$; d) $SNR = 0 \text{ dB}$; $f_s = 100 \text{ Hz}$	73

4.35	Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu pomocí autoregresního modelování, $p = 150$, $N = 1000$, Yule-Walkerova metoda a) $P = 32$ W, $SNR = -12$ dB; b) $P = 8$ W, $SNR = -6$ dB; c) $P = 2$ W, $SNR = 0$ dB; d) $P = 0.2$ W, $SNR = 10$ dB; Burgova metoda e) - h) stejné hodnoty; $f_s = 1$ kHz.....	74
4.36	Odhady PSD jedné sinusoidy o výkonu 2 W, na kmitočtu 150 Hz v bílém šumu o výkonu 0,02 W, $SNR = 20$ dB pomocí autoregresního modelování, $p = 240$, a) Burgova metoda, $N = 500$ b) Yule-Walkerova metodou $N = 500$; c) Burgova metoda, $N = 1000$ d) Yule-Walkerova metoda, $N = 1000$; $f_s = 1$ kHz	75
4.37	Diagram pro usnadnění volby metody pro nalezení odhadu PSD	81
5.1	Odhad PSD signálu <i>TriTonyA5H5C6.mat</i> pomocí periodogramu modifikovaného Hammingovým oknem a Welchovy metody, délka segmentu $M = 2500$, překryv 75 % (21 segmentů), Nuttallovo okno. a) PSD na celém vzorkovaném pásmu; b) detail na úzkopásmové složky; Počet vzorků $N = 15000$; $f_s = 48$ kHz délka záznamu $t = 0,3125$ s, $\Delta f = 4,35$ Hz	83
5.2	Odhad PSD signálu <i>TriTonyA5H5C6.mat</i> pomocí Welchovy metody a) délka segmentu $M = 5000$, překryv 75 % (9 segmentů), Nuttallovo okno. Počet vzorků $N = 15000$; $T = 0,3125$ s, $\Delta f = 17,28$ Hz b) délka segmentu $M = 5000$, překryv 75 % (21 segmentů), Nuttallovo okno. Počet vzorků $N = 30000$; $f_s = 48$ kHz délka záznamu $t = 0,625$ s, $\Delta f = 17,28$ Hz	83
5.3	Odhad PSD signálu <i>TriTonyA5H5C6.mat</i> pomocí všech v práci uvažovaných metod, plný počet vzorků $N = 190000$, $f_s = 48$ kHz, $t = 3,958$ s	84
5.4	Odhad PSD signálu <i>TriTonyA5H5C6.mat</i> pomocí periodogramu modifikovaného Hammingovým oknem a Welchovy metody, délka segmentu $M = 2500$, překryv 75 % (21 segmentů), Nuttallovo okno. a) PSD na celém vzorkovaném pásmu; b) detail na úzkopásmové složky; Počet vzorků $N = 15000$; $f_s = 48$ kHz délka záznamu $t = 0,3125$ s, $\Delta f = 4,35$ Hz	85
5.5	Odhad PSD signálu <i>TriTonyA5H5C6.mat</i> pomocí periodogramu modifikovaného Hammingovým oknem; Welchovy metody, překryv 75 % (9 segmentů), Nuttallovo okno a metody Multitaper, $NW = 5$, sekvencí: 9 a) $N = 10000$, Welch $M = 3300$; b) $N = 8000$, Welch $M = 2600$; c) $N = 5000$, Welch $M = 1650$; d) $N = 3000$, Welch $M = 1000$; $f_s = 48$ kHz	86
5.6	a) Odhad PSD signálu <i>AMmodulace.mat</i> pomocí Yule-Walkerovy a Burgovy metody, $N = 30000$, řád na základě AIC, $p = 498$ b) Odhad PSD signálu <i>FMmodulace.mat</i> pomocí Yule-Walkerovy a Burgovy metody, $N = 30000$, řád na základě AIC, $p = 498$; $f_s = 1,56$ MHz	87
5.7	Odhady PSD signálu <i>AMmodulace.mat</i> pomocí Yule-Walkerovy a Burgovy metody, $N = 15000$ a) řád na základě AIC, $p = 170$, c) řád volený $p = 1000$; signálu <i>FMmodulace.mat</i> b) řád na základě AIC, $p = 272$, d) řád volený $p = 1000$; $f_s = 1,56$ MHz; e) <i>FMmodulace.mat</i> filtrovaný strmou dolní propustí s $f_m \cong f_s/2$ a převzorkovaný na $N = 2500$, $f_s = 260$ kHz, dle AIC řád $p = 253$	88
5.8	Odhady PSD signálu <i>AMmodulace.mat</i> pomocí periodogramu, Yule-Walkerovy a Burgovy metody a) řád modelu $p = 400$, $N = 3000$ b) $p = 400$, $N = 1500$ c) $p = 400$, $N = 1000$ d) $p = 400$, $N = 800$; $f_s = 1,56$ MHz;	89
5.9	Odhady PSD signálu <i>Lednice.mat</i> pro $N = 5000$ vzorků pomocí Welchovy a Multitaper metody a) $M = 2000$, překryv 75 %, obdélníkové okno; $NW = 4$, sekvencí: 7; b) $M = 1000$, překryv 75 %, Nuttallovo okno; $NW = 10$, sekvencí: 16; Odhady pomocí Burgovy a Yule-Walkerovy metody c) $p = 40$ d) dle AIC $p = 147$; $f_s = 22,05$ kHz;	90
5.10	Odhady PSD pomocí Burgovy a Yule-Walkerovy metody pro $N = 200000$ vzorků a) signál <i>UnderwaterBPSK1m.mat</i> , řád dle AIC $p = 491$ b) signál <i>UnderwaterBPSK1m.mat</i> , řád dle AIC $p = 500$; $f_s = 22,05$ kHz;	91
5.11	Odhady PSD signálu <i>ModemV29.mat</i> pomocí Welchovy a Burgovy metody a) $N = 45600$, $M = 5000$, překryv 75 %, Nuttall, řád dle AIC $p = 500$; b) $N = 1200$, $M = 1200$, překryv 75 %, Nuttall, řád dle AIC $p = 31$; c) $N = 1200$, $M = 300$, překryv 75 %, Nuttall, řád volený $p = 250$; d)	

	$N = 1200, M = 600$, překryv 75 %, Nuttall, řád volen $p = 150$; e) $N = 1200, M = 500$, překryv 75 %, Hann, řád volen $p = 150$; f) $N = 1200$ z jiné části časového průběhu, $M = 500$, překryv 75 %, Hann, řád volen $p = 150$; $fs = 6,8$ kHz;.....	93
5.12	Odhady PSD signálu <i>EEGrestFiltered.mat</i> pomocí Welchovy metody a) $N = 24000, M = 1000$, překryv 75 %, Nuttall b) $N = 16000:24000, M = 1000$, překryv 75 %, Nuttall; $fs = 200$ Hz; Červeně vyznačeno je pásmo alfa vln, na kterém se odečítá výkon.....	95

SEZNAM TABULEK

2.1	Vlastnosti vybraných okénkových funkcí	30
-----	--	----

ÚVOD

Tato bakalářská práce se zabývá problematikou vlastností odhadů výkonové spektrální hustoty náhodných signálů. Rozložení výkonu signálu ve spektru je předmětem zájmu v řadě technických či vědních odvětvích. Je proto důležité, aby odhady nevykazovaly chybu způsobenou například pro danou situaci nevhodně použitou metodou. Hlavním cílem práce je tedy zhodnotit dopad kombinace parametrů signálu a použité metody na vlastnosti výsledného spektrálního odhadu.

Teoretická část práce je obsažena v prvních třech kapitolách. První kapitola je úvodem do problematiky analýzy stochastických signálů a zabývá se popisem statistických veličin využívaných při jejich členění. Navázáno je problematikou odhadu výkonových spektrálních hustot těchto signálů. Kapitola je uzavřena popisem sledovaných vlastností signálu a výčtem kritérií, dle kterých budou odhady posuzovány. Druhá kapitola se věnuje popisu principu vybraných neparametrických metod odhadu, třetí kapitola je zaměřena na parametrické metody.

Navazující kapitoly spadají do praktické části práce. Čtvrtá kapitola se věnuje vlastním analýzám spektrálních odhadů simulovaných signálů. V jejím závěru jsou zjištěné poznatky sumarizovány a jsou uvedena obecná doporučení pro volbu metody a jejího nastavení na základě vlastností signálu. V páté kapitole jsou informace ze čtvrté ověřovány na záznamech reálných signálů. Metody vhodné pro danou kombinaci parametrů signálu jsou vzájemně porovnávány. Doporučení jsou diskutována a případně rozšířena. Šestou kapitolu tvoří popis v rámci práce vytvořené MATLAB aplikace pro generování spektrálních odhadů. Sedmá kapitola je výčtem signálů použitých během analýz, včetně krátkého popisu a případně odkazu na další zdroj informací. V přílohách je obsažen návod k aplikaci a návod pro počítačové cvičení, zaměřené na vlastnosti odhadů spekter stochastických signálů.

1. SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA NÁHODNÝCH SIGNÁLŮ

Spektrální analýza je souhrnným názvem pro celou řadu metod, jež se zabývají transformací konečné časové posloupnosti dat do frekvenční oblasti za účelem zobrazení distribuce výkonu v kmitočtových pásmech, případně odhalení periodicit, které v oblasti časové nemusejí být patrné. Takovéto informace o pozorovaných jevech jsou žádoucí v celé řadě různorodých odvětví lidského poznání. Se spektrální analýzou se můžeme setkat například při analýze řečových signálů, kdy lze získané poznatky využít k rozpoznávání, potažmo syntéze mluveného slova. Dále také u radarových či sonarových systémů, kdy rozložení spektra nese informace o poloze snímaných objektů, nebo ve zdravotnictví, kupříkladu obsah spektra EEG (elektroencefalografie) signálu může udávat údaje o stavu pacienta a napomoci tím správné diagnóze. Také lze zmínit oblasti jako ekonomie, meteorologie, astronomie, seismologie a další. [1][2]

Obecně lze zkoumané veličiny signálu uvažovat buď jako spojité nebo diskrétní. Tato volba ovlivňuje, jakým způsobem budou probíhat výpočty. Jelikož zpracování signálů probíhá nejběžněji v digitální formě a výstupem této práce je mimo jiné aplikace využívající prostředí MATLAB, budou používané signály diskretizované. Pro výpočty budou také použity diskrétní formy vztahů a metod. [2]

1.1 Náhodné signály

Definující vlastností náhodných (stochastických) signálů je fakt, že není předem známo, jaká bude přesná hodnota jejich amplitudy v čase. Při jejich analýze a popisu tedy není vhodné se zaměřovat na konkrétní hodnoty, ale spíše na statistický popis procesu, který generuje jednotlivé realizace signálu. Lze tedy tento proces popsat i jako množinu všech možných realizací, pokud jednotlivé realizace proběhly za stejných podmínek a jsou na sobě nezávislé. Hledání vlastností procesu je potom otázkou nalezení vlastností společných všem realizacím. [3]

Pro popis náhodných signálů používáme několik základních ukazatelů. Jestliže náhodný proces v diskrétním čase označíme $X[n]$, kde n představuje diskrétní index, můžeme získat střední hodnotu tohoto procesu jako [4][3]

$$\bar{x}[n] = E\{X[n]\} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{(i)}[n], \quad (1.1)$$

kde $\bar{x}[n]$ značí posloupnost hodnot střední hodnoty (lze pojmout jako aritmetický průměr hodnot amplitud uvažovaných realizací) pro diskrétní indexy n , $E\{\}$ je operátor střední hodnoty, N je počet dostupných realizací a $x_{(i)}[n]$ představuje i -tou realizaci procesu. Analogickým ekvivalentem střední hodnoty pro deterministické procesy je stejnosměrná složka. [5]

Dalším významným ukazatelem je rozptyl. Ten, jak napovídá název, určuje rozptyl hodnot možných realizací kolem střední hodnoty. Lze jej vypočítat následovně: [3]

$$\sigma_x^2[n] = E\{|X[n] - \bar{x}[n]|^2\} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_{(i)}[n] - \bar{x}[n]|^2. \quad (1.2)$$

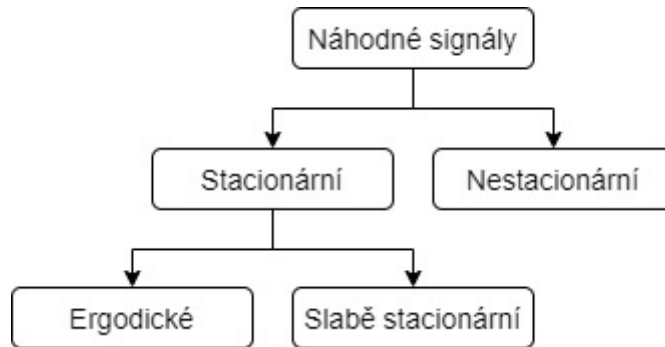
Za jeho deterministický ekvivalent lze považovat výkon střídavé složky. [5]

Mimo to je třeba ještě zmínit a definovat autokorelační funkci, kterou lze pro diskrétní posloupnost hodnot představující jednu realizaci $x[n]$ náhodného procesu $X[n]$, přibližně vypočítat podle vztahu [2][6]

$$r_{xx}[k] = E\{x^*[n]x[n+k]\} \approx \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-k-1} x[n]x^*[n+k], \quad (1.3)$$

kde $x^*[n]$ je posloupnost hodnot komplexně sdružených k hodnotám původní posloupnosti $x[n]$ a k reprezentuje vzájemný posuv mezi $x[n]$ a $x^*[n]$. Vzorec v (1.3) představuje nevychýlený odhad autokorelace; rozdílům mezi vychýleným a nevychýleným odhadem je věnován počátek podkapitoly 2.4, kde má tato volba vliv na vlastnosti výsledného odhadu spektra.

Výše zmíněné ukazatele (střední hodnota, rozptyl a autokorelační funkce) napomáhají při rozlišení různých typů stochastických procesů, jejichž členění je znázorněno na obrázku 1.1.



Obrázek 1.1 Základní členění stochastických signálů

Nestacionární procesy je označení pro kategorii náhodných procesů, jejichž střední hodnota a rozptyl jsou proměnné v čase a jejichž autokorelační funkce se taktéž vztahuje pouze na dva dané časové okamžiky. To je při použití metod spektrální analýzy značná překážka, jelikož přesné odhady spektra lze tvořit pouze pro tyto krátké okamžiky, kdy pouze pro tento krátký úsek lze proces považovat za stacionární (stacionární proces vysvětlen v dalším odstavci). Pokud se při vytváření odhadu nepřihlédne ke skutečnosti, že je zkoumaný proces nestacionární, vedou výpočty na chybné odhady. Je to proto, že se okamžiky procesu v různých stavech (s odlišnými hodnotami ukazatelů), smísí do jediného odhadu, který logicky není schopen věrně reprezentovat proměnlivou podstatu

zkoumaného procesu. Nestacionárními procesy se tedy tato práce zabývat nebude, jelikož jsou k jejich analýze vhodnější časově-frekvenční metody. [3]

Stacionární procesy definujeme jako procesy, u nichž nedojde ke změně střední hodnoty, rozptylu a autokorelační funkce, pokud provedeme posun po časové ose. Tato definice je velmi těžko ověřitelná, a tak byla zavedena kategorie slabě stacionárních procesů (potažmo také stacionárních v širším smyslu, wide-sense stationary). Slabě stacionární proces musí mít na čase nezávislou, tedy konstantní střední hodnotu a jeho autokorelační funkce musí být funkcí závislou čistě na vzájemném posuvu posloupností hodnot (toto zjednodušuje její výpočet, jelikož místo autokorelační matice s rozměry N^2 se úloha zredukuje na vektor $2N - 1$ prvků, kde N je délka/počet vzorků konečného úseku signálu). Toto lze matematickým zápisem vyjádřit takto: [4][3]

$$\bar{x}[n] = \bar{x}[n + d] = \bar{x}, \quad (1.4)$$

$$r_{xx}[m, n] = r_{xx}[m + d, n + d] = r_{xx}[m - n] = r_{xx}[k], \quad (1.5)$$

kde d představuje posun v indexu (po časové ose) a k je rozdíl v hodnotě indexů autokorelovaných posloupností, resp. jejich vzájemný posun. Z této podmínky také vyplývá skutečnost, že autokorelační funkce stacionárního procesu je sudá, pro její úplný popis konečného úseku signálu tedy stačí pouze N , namísto všech $2N - 1$ hodnot. Pro autokorelační funkci slabě stacionárního procesu také platí, že její hodnota pro $k = 0$ reprezentuje průměrný výkon signálu $x[n]$. Definici slabě stacionárního procesu může být pro některé aplikace žádoucí učinit robustnější, často např. zahrnutím podmínky konstantního rozptylu v čase, avšak nejčastěji bývá postačující pouze definice slabě stacionárního procesu ve své základní formě. [4][3]

Zvláštním případem procesů stacionárních výhodným pro praxi jsou procesy ergodické. Výhodným proto, že např. výpočet střední hodnoty uvedený v rovnici (1.1) je založený na souborovém průměru, tj. na průměrování hodnot jednotlivých realizací, což může představovat problém, jelikož mnohdy je dostupná pouze jediná realizace. V takovém případě je možnost použít časový průměr, tedy zprůměrovat hodnoty amplitudy získané v čase. Ovšem to, že je proces stacionární nezaručuje, že se výsledek časového průměru blíží realitě, a v mnoha případech toto vede na špatný výsledek. Ergodický proces je potom takový proces, jehož popisující veličiny lze určit pouze z jediné realizace, tedy je možno si vystačit s časovými průměry za předpokladu, že je dostupná dostatečná délka signálu. [2][3][4]

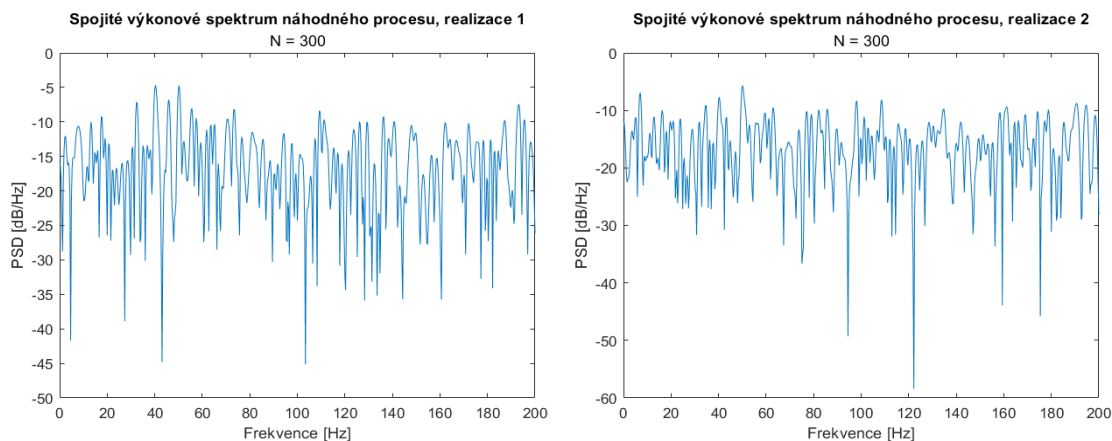
1.2 Odhad spekter náhodných signálů

V případě stochastických signálů je důležitá správná forma reprezentace údajů ve frekvenční oblasti. V případě konečné posloupnosti (např. naměřených) dat $x[n]$ s počtem vzorků N , která představuje jednu realizaci slabě stacionárního procesu je možno ji považovat za deterministický signál, jelikož tato realizace se skládá

ze známých konkrétních hodnot. Jelikož je realizace konečná a má tím pádem konečnou energii, lze použít Fourierovu transformaci v diskrétním čase (DTFT, Discrete-time Fourier transform), pro níž je konečná hodnota energie podmínkou konvergence. [2] DTFT posloupnosti $x[n]$ je dána jako [6]:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fn}, \quad (1.6)$$

kde f představuje normovanou frekvenci, j je imaginární jednotka $\sqrt{-1}$ a $e^{-j2\pi fnT}$ je komplexní exponenciála. Spektrum $X(f)$ je potom komplexní funkcí. Toto spektrum ovšem není příliš věrnou reprezentací samotného náhodného procesu. Pokud by byla vypočtena tímto způsobem spektra několika nezávislých realizací, při vzájemném porovnání se společné rysy nacházejí obtížně.



Obrázek 1.2 Spektra dvou nezávislých realizací náhodného procesu

Průměrováním spekter realizací tak, jak jsou na výstupu z DTFT nelze dosáhnout zlepšení, jelikož pro náhodný signál jsou komplexní argumenty, resp. fáze spektrálních složek náhodné, což by vedlo s rostoucí velikostí průměrovaného souboru realizací na hodnoty blíží se nule.[3]

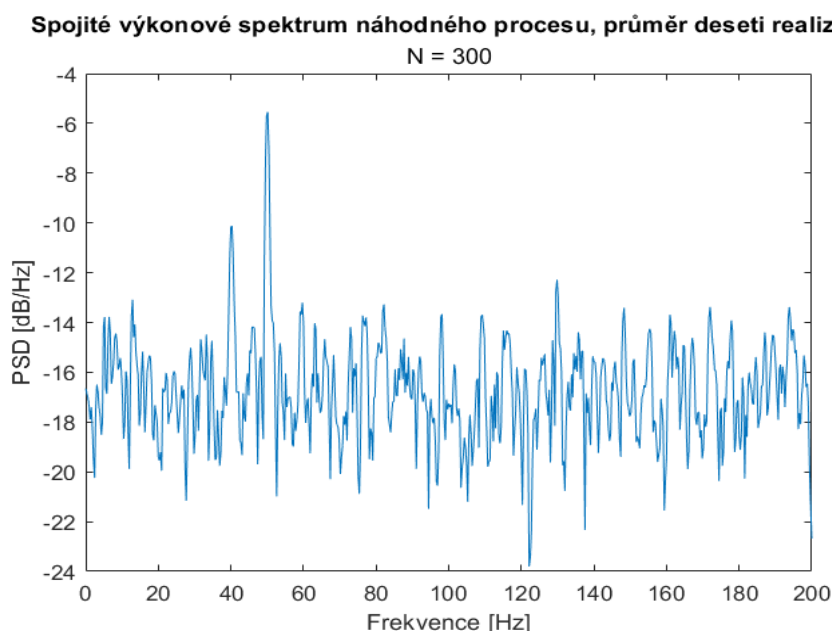
Proto se pracuje pouze s moduly $|X(f)|$, nejčastěji s jejich druhými mocninami $|X(f)|^2$. To je dáno tím, že druhá mocnina amplitud ve spektru má často užitečný význam v řadě aplikací. Dobrým příkladem je právě zpracování signálů v elektrotechnice. Pokud amplitudové spektrum představuje hodnoty napětí ve voltech přidělené kmitočtům, pak druhá mocnina amplitudového spektra je výkon připadající na příslušné kmitočty, pokud je impedance zátěže normovaná jako 1Ω . Je třeba neopomenout skutečnost, že takto vytvořené spektrum pochází z konečné realizace procesu a pro smysluplný výsledek je třeba normovat jeho hodnoty konstantou $1/N$, kde N je počet vzorků. Výše popsané lze matematicky zapsat jako [3][2]

$$S_{xx(i)}(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_{(i)}[n] e^{-j2\pi f n} \right|^2 = \frac{1}{N} |X(f)|^2, \quad (1.7)$$

kde výsledné $S_{xx(i)}(f)$ je odhadem výkonové spektrální hustoty (PSD, power spectral density, tedy výkonu připadajícího na kmitočtové pásmo) jedné realizace náhodného signálu, který slouží jako odhad výkonové spektrální hustoty náhodného procesu $S_{xx}(f)$. Průměrováním PSD spekter jednotlivých realizací:

$$S_{xx}(f) \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M S_{xx(i)}(f) \quad (1.8)$$

lze odhad za vhodných podmínek zpřesnit (viz obrázek 1.3, kde se průměrováním zvýraznili dvě úzkopásmové složky na 40 a 50 Hz), což je potom základní myšlenkou několika standardizovaných metod pro nalézání PSD. [2]



Obrázek 1.3 Odhad výkonové spektrální hustoty získaný průměrem deseti realizací procesu z obrázku 1.2

Existuje i další definice PSD, na základě Fourierovy transformace autokorelační funkce [6]

$$S_{xx}(f) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} r_{xx}[k] e^{-j2\pi f k}. \quad (1.9)$$

Tato forma odhadu je přímým důsledkem Wiener-Chinčinova teorému, dle kterého tvoří PSD a autokorelační funkce stacionárního procesu Fourierovskou transformační dvojici, a je ekvivalentní variantě definované vztahem (1.8). [1]

Tyto dva různé přístupy k nalezení odhadu spektra potom bývají v literatuře často označovány jako přístup přímý, kdy PSD získáváme aplikací DTFT přímo na analyzovaná data, jak je tomu v rovnici (1.7), a nepřímý, tedy nejprve je třeba vypočítat autokorelační funkci signálu a na tu pak použít DTFT. Metoda přímá dala za vznik kategorii odhadů založených na periodogramu, což je pro ně jiné, historické, označení a na přístupu nepřímém je založena skupina metod označovaných jako korelogramy. [4]

Ze široka potom bývají metody odhadu PSD členěny do dvou skupin. První jsou metody neparametrické, které nevyžadují předchozí znalost vlastností zkoumaného náhodného procesu a zpravidla jsou založeny na aplikaci Fourierovy transformace. Do této skupiny se řadí výše zmíněný periodogram a korelogram. Druhou odnož tvoří metody parametrické, u nichž třeba vytvořit model náhodného procesu na základě jeho povětšinou předem známých vlastností a pak odhadnout jeho parametry, s jejichž pomocí se vypočítá spektrum. [2][7]

1.3 Ovlivňující parametry a kritéria kvality spektrálního odhadu

1.3.1 Parametry signálu ovlivňující výsledné spektrum

Vlastnosti samotného naměřeného signálu mají samozřejmě vliv na výsledný odhad jeho spektra, taktéž různé metody odhadu se lépe či hůře s danými vlastnostmi vypořádávají, což je detailněji diskutováno v sekci každé metody v kapitolách 2 a 3.

Dostupná délka záznamu má na výsledný odhad zásadní vliv, jelikož představuje ve své podstatě množství dat, které bude dostupné pro další analýzu. V případě, že je k dispozici jen jediná realizace náhodného procesu, je žádoucí, aby byla délka záznamu co největší. S délkou záznamu totiž roste množství dostupných informací pro analýzu náhodného procesu, který tuto zaznamenanou realizaci vytváří. Obecně tedy lze říct, že čím větší je délka posloupnosti navzorkovaných hodnot signálu, resp. počet vzorků, tím věrnější vznikne odhad, byť jednotlivé metody mají v tomto ohledu pro ně specifické limitace. Malá délka záznamu je omezení, se kterým se lze běžně setkat, jelikož u dlouhodobých dějů, kdy se vzorek pořizuje např. jednou za měsíc, je ze samozřejmých důvodů žádoucí schopnost vytvořit co nejpřesnější spektrální odhad z malého množství dat, což se může týkat např. ekonomických náhodných procesů. Druhým problémem může být skutečnost, že studovaný proces je kvazistacionární, tj. je stacionární pouze v krátkých omezených intervalech, což je zase případ řečového signálu. [1][3]

Počet dostupných realizací velmi úzce souvisí s výše zmíněnou délkou záznamu, neboť opět jde o množství dat, ze kterých lze tvořit odhad spektra. Větší množství realizací umožňuje zprůměrovat vícero navzájem nezávislých odhadů PSD, což vede na přesnější odhad celkový. Jak již bylo několikrát zmíněno, v praxi může nastat situace, kdy je k dispozici pouze jediná realizace zkoumaného procesu. V takovém případě, pokud je daný signál stacionární a dostatečné délky, lze průběh rozdělit na segmenty,

kteře můžeme považovat za oddělené realizace, a tyto segmenty, resp. z nich určené spektrální odhady, pak průměrovat mezi sebou. [5]

Míra zašumění signálu má vliv především na schopnost metody nalézt úzkopásmové složky ve spektru. Pokud totiž roste výkonová úroveň šumu, resp. se snižuje odstup mezi signálem a šumem (SNR, signal to noise ratio), úzkopásmové složky se šumovým pozadím splývají a stávají se těžko odlišitelnými. U různých metod se vysoká míra zašumění projevuje i jinak, např. v případě odhadu autoregresním modelováním klesá s nízkým odstupem signálu a šumu rozlišení na frekvenční ose. Toto je třeba kompenzovat vyšším řádem modelu, což může vyústit v nestabilní odhad. [8]

1.3.2 Kritéria kvality spektrálního odhadu

Určení kvality vzniklého odhadu není přímočarou záležitostí. Část vlastností, které jsou posuzovány totiž nelze snadno, pokud vůbec, kvantifikovat. Kvalita je tedy určována kombinací empirického a statistického přístupu. Empirickým přístupem je myšleno srovnání odhadů jednotlivých metod (případně odhadů jedné metody), mezi sebou. Přístup statistický se týká vlastností, které lze reprezentovat číselně, např. střední kvadratická chyba (viz níže) odhadů v závislosti na konkrétním parametru signálu. Kvalita také záleží na tom, co je vlastně úkolem spektrálního odhadu. Kupříkladu, jestliže je odhad vytvořený metodou, která spektrum vyhlazuje za účelem přesnější reprezentace jeho celkového tvaru, a tedy přesnějšího odhadu PSD, nemusí být tento odhad vhodný pro nalézání kmitočtově blízkých úzkopásmových složek. [7][4]

Vychýlení a rozptyl odhadu vyjadřují, nakolik se odhad z konečného počtu vzorků přibližuje skutečnému spektru procesu. Jde o vlastnosti odhadu, které jsou vyčíslitelné, ovšem pro většinu případů je to příliš komplikované. V takovém případě lze rozptyl a vychýlení posoudit pomocí vícero odhadů z vícero realizací, potažmo segmentů jedné realizace. Odhady se proloží přes sebe a lze vyvozovat závěry, např. v pásmech, která vykazují nízký rozptyl možno přikládat jejich obsahu větší význam než obsahu pásmech, kde je hodnota rozptylu vysoká. Je nutné neopomenout skutečnost, že k jakýmkoliv závěrům je tímto způsobem dospěno vzájemným porovnáním. Pokud je tedy dostupná pouze jediná realizace natolik krátká, že ji segmentovat nelze, tento přístup je neuskutečnitelný. Jestliže mají posuzované odhady nízký rozptyl a vychýlení, které s rostoucím počtem vzorků klesají, tak jde o statisticky stabilní odhad. [4][7]

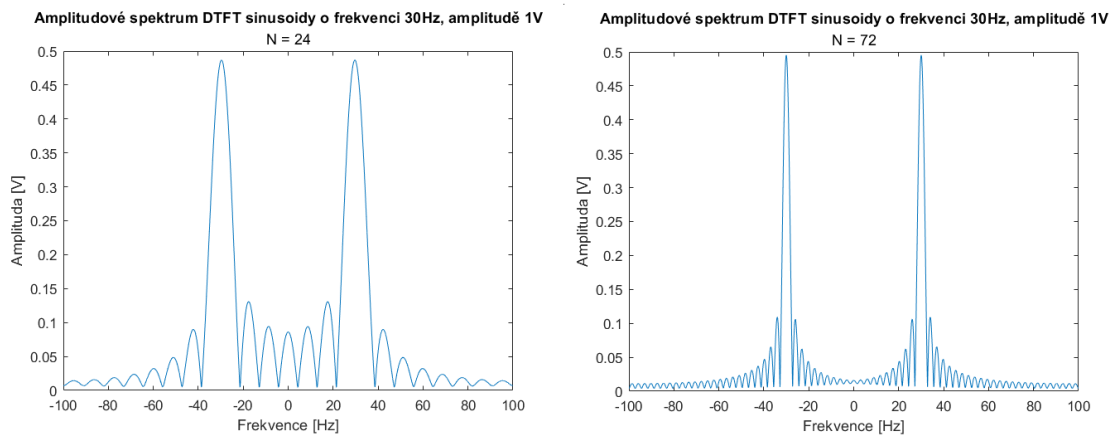
Prosakování spektra označuje přesun energie ve spektru z hlavních laloků složek do postranních, tedy jakési její rozprostření. Prosakování je způsobeno konečnou délkou záznamu v kombinaci s váhováním spektra. Svým způsobem už konečnou délku signálu lze považovat za formu váhování, jelikož je zde váhovaný teoretický nekonečný signál pravoúhlou okénkovou funkcí $w[n]$, jež má hodnotu 1 na délce zaznamenaného signálu a 0 všude jinde. [2] Tedy: [2]

$$w_R[n] = \begin{cases} 1, & n \in \{0, 1, \dots, N-1\} \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}, \quad (1.10)$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_R[n]x[n]e^{-j2\pi fn}. \quad (1.11)$$

V nejjednodušším případě, kdy je zkoumaným signálem deterministická sinusoida, dochází ve frekvenční doméně ke konvoluci spektrálního obrazu sinusoidy, což je Diracův jednotkový impuls na příslušné frekvenci, a spektrálního obrazu obdélníka, což je funkce *sinc*. Konvolucí těchto dvou spekter je potom *sinc*, jehož střed leží na kmitočtu sinusoidy. [3]

Šířka pásma, kterou potom hlavní lalok funkce *sinc* zabírá ve spektru, je nepřímo úměrná délce okénkové funkce. Takže pro užší reprezentaci úzkopásmových složek je třeba větší dostupné délky záznamu. Opačně lze získat vyhlazenější odhad, pokud zvolíme délku okna kratší než délku naměřené posloupnosti. Pro příklad vlivu délky okénkové funkce viz obrázek 1.4. [7]



Obrázek 1.4 Prosakování ve spektru sinusového průběhu

To vše se týká případu, kdy je $w[n]$ pravoúhlou okénkovou funkcí. Okénkových funkcí existuje ovšem celá řada, s různými úrovněmi potlačení postranních laloků (tedy snížení prosakování), které ale zároveň znamená rozšíření laloku hlavního (rozmazání spektrálních složek, snížení frekvenčního rozlišení). Pravoúhlé okno má ze všech sice nejvyšší hlavní lalok, ale tím pádem také nejvyšší úroveň postranních laloků. Snaha omezit prosakování plyne především ze skutečnosti, že není žádoucí, aby prosakování složek s vyšší amplitudou (výkonem) zamaskovalo sousední složky s amplitudou (výkonem) nižší. K vybraným druhům okénkových funkcí a jejich dopadu na spektrum více v podkapitole 2.2. [4][5]

Frekvenční rozlišení je označení pro schopnost metody odlišit ve spektru kmitočtově blízké úzkopásmové složky se stejnými výkonovými úrovněmi. Pro metody založené na Fourierově transformaci jde vlastně o vzdálenost na frekvenční ose mezi dvěma body vytvořenými diskrétní Fourierovou transformací (DFT, Discrete Fourier transform).

Výstupem DFT je navzorkované spektrum DTFT. Používá se při reálných výpočtech, kvůli konečnému počtu výstupních hodnot a řídí se obecným předpisem [5]

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi nk/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (1.12)$$

Často používaným odhadem frekvenčního rozlišení Δf v Hz je v tomto případě převrácená hodnota délky záznamu T_0 v sekundách, což lze upravit i do tvaru:

$$\Delta f = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{NT} = \frac{f_s}{N}, \quad (1.13)$$

kde N je počet vzorků, T je vzorkovací perioda a $f_s = 1/T$ je vzorkovací kmitočet. Je nutné si uvědomit, že nelze zvýšit rozlišení pouze zvýšením vzorkovacího kmitočtu, jelikož automaticky narůstá počet vzorků, čímž se zachovává poměr v (1.13). Rozlišení lze zvýšit pouze pořízením větší délky záznamu. Takto vypočítaná hodnota rozlišení je maximální dosažitelnou hodnotou rozlišení pro odhad vytvořený Fourierovou transformací. Použití okénkových funkcí za účelem potlačení prosakování, jak bylo zmíněno výše, vede k větší šířce pásma hlavních laloků a tím i ke snížení rozlišení, jelikož nárok na kmitočtovou separaci úzkopásmových složek je nyní logicky vyšší. Právě s obětováním frekvenčního rozlišení za cenu vyhlazení odhadu okénkovou funkcí se lze setkat velmi často. [3][7]

Nutno ještě zmínit možnost naměřenou posloupnost doplnit posloupností nul, tzv. zero-padding, což sice vede na zdánlivě detailnější spektrum, ale frekvenční rozlišení přesto zůstává stejné. Nezvýšilo se totiž rozlišení samotného odhadu, ale pouze jeho zobrazení, v podstatě bylo jen vykresleno větší množství bodů DTFT stejné posloupnosti. Ostatně takto byla vykreslena detailnější spektra z obrázku 1.4. [1][7]

Také je třeba si uvědomit, že informace výše se netýkají parametrických metod, jak už bylo zmíněno, např. odhady vytvořené pomocí modelování autoregresním procesem mají frekvenční rozlišení závislé místo na délce záznamu na odstupu signálu a šumu (SNR). Jen pro představu se řídí touto rovnicí: [4]

$$\Delta f = \frac{1,03}{Tp[SNR(p+1)]^{0,31}}, \quad (1.14)$$

kde T je vzorkovací perioda, p je nejvyšší hodnota zpoždění autokorelační funkce a SNR je odstup signálu a šumu vyjádřený jako bezrozměrný poměr.

Střední kvadratická chyba, též MSE (mean squared error), je běžně užívaným měřítkem přesnosti odhadu. Vyjadřuje střední hodnotu čtverců rozdílu hodnot odhadu $\hat{X}$ dané veličiny a hodnot pravých X , což lze zapsat jako [1][4]

$$MSE(X) = E \{ |\hat{X} - X|^2 \}. \quad (1.15)$$

Důležitou vlastností MSE je, že jej lze vyjádřit i jako součet druhé mocniny vychýlení $B\{X\}$ a rozptylu σ_X^2 [1][4]

$$MSE(X) = \sigma_X^2 + |B\{X\}|^2, \quad (1.16)$$

což pak umožňuje lepší představu o MSE zkoumané veličiny, resp. náhodného procesu.

Určitý problém představuje při odhadech PSD skutečnost, že pro výpočet MSE je třeba právě spektrální výkonové hustoty procesu (pravá podoba odhadovaného PSD), jejíž získání je u řady stochastických signálů problematické (byť se nabízí kupříkladu průměrování odhadů, avšak by bylo třeba zajistit že jednotlivé odhady jsou nevychýlené) a tím pádem je problematický i výpočet MSE (jde o stejný problém jako byl zmíněn v části podkapitoly o rozptylu a vychýlení odhadů). To je ovšem poměrně elegantně řešeno pro případ PSD autoregresního procesu s předem známým řádem a parametry. PSD přinejmenším velmi blízké tomu pravému lze získat pomocí odhadu autoregresním modelem nevychýlenou metodou s odpovídajícím řádem a velkým dostupným počtem vzorků. Tento poznatek bude tedy uplatněn při posuzování rozptylu a vychýlení odhadů PSD jednotlivých metod.

2. NEPARAMETRICKÉ METODY SPEKTRÁLNÍ ANALÝZY

Skupina neparametrických metod odhadu spektra je charakterizována jejich uplatnitelností přímo na zkoumaná data, bez potřeby předchozích znalostí o procesu, jež je generuje. Jediným požadavkem je, aby proces splňoval podmínky slabé stacionarity, tak jak byla definována v podkapitole 1.1. [2]

2.1 Metoda periodogramu

Základní, a také historicky první metodou pro odhad spektra náhodného signálu je periodogram. Je založený na přímé aplikaci DTFT na posloupnost měřených hodnot, a jeho definiční vztah vychází přímo z definice PSD, tedy rovnice (1.7), resp. (1.8) pokud je uvážen průměr několika realizací. [2] Pro přehlednost:

$$S_{PER}(f) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x_{(i)}[n] e^{-j2\pi f n} \right|^2. \quad (2.1)$$

kde $x_{(i)}[n]$ představuje i -tou realizaci procesu o N vzorcích a M je počet realizací.

Pokud je pro začátek uvažována situace, kdy je dostupná pouze jedna realizace, tedy $M = 1$, má odhad vlastnosti popsané níže. Jelikož jde o okénkovými funkcemi nemodifikovaný periodogram (pomíjeje pravoúhlé/obdélníkové okno), jeho frekvenční rozlišení závisí pouze na naměřené délce signálu a řídí se tedy rovnicí (1.13). [1]

Na délce záznamu je také závislé vychýlení hodnot periodogramu. Pro malou délku signálu je odhad vlivem prosakování ve spektru a větší šířkou hlavních laloků složek značně vychýlen a má nízké rozlišení, což není vhodné pro přesné nacházení úzkopásmových složek. Na druhou stranu toto nepředstavuje zásadní problém, pokud je cílem zjistit celkový tvar PSD signálu, kde nebude mít maskování částí spektra vlivem prosakování příliš velký vliv. Často uváděným příkladem je odhad výkonové spektrální hustoty bílého šumu, která je specifická tím, že má pro všechny kmitočty konstantní hodnotu. Pro bílý šum představuje periodogram nevychýlenou metodu odhadu i pro konečnou posloupnost hodnot. V obecném případě potom platí, že vychýlení odhadu klesá s rostoucí délkou záznamu, a v případě, kdy se délka záznamu blíží nekonečnu, [1][4]

$$\lim_{T_0 \rightarrow \infty} E\{S_{PER}(f)\} = S_{xx}(f), \quad (2.2)$$

je odhad nevychýlený. Periodogram je tedy asymptoticky nevychýleným odhadem pravé výkonové spektrální hustoty.

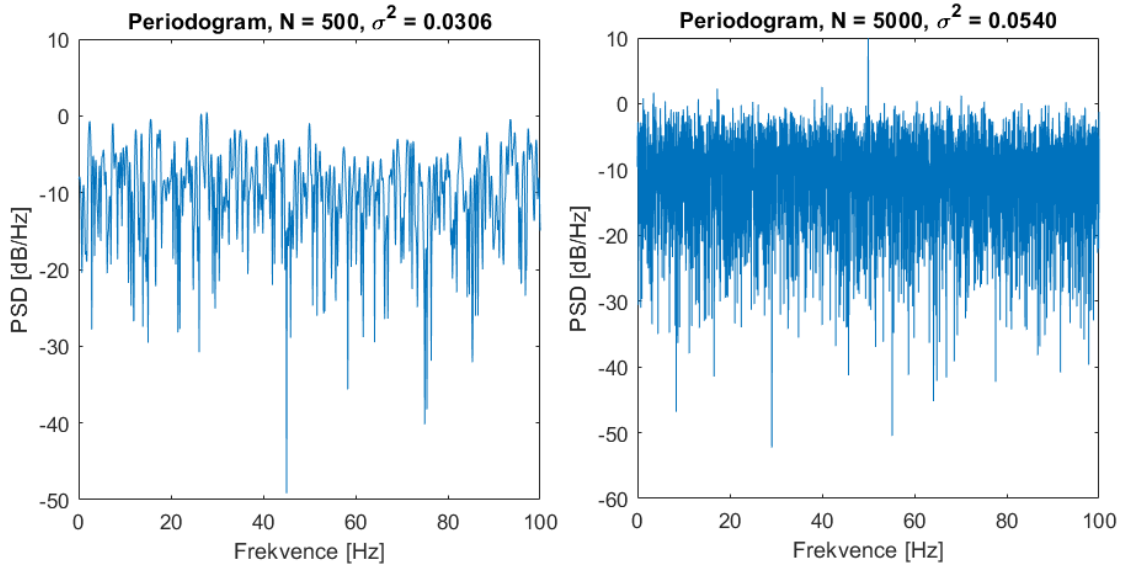
Mimo vychýlení je hlavní nevýhodou periodogramu jeho rozptyl. V literatuře bývá demonstrován opět na bílém šumu (obecněji na náhodném procesu s normálním rozdělením), kdy pro tento platí, že rozptyl jeho periodogramu je na kmitočtu f [6][4]

$$\sigma_w^2\{S_{PER}(f)\} = S_{xx}^2(f) \left[1 + \left(\frac{\sin(2\pi fTN)}{N\sin(2\pi fT)} \right)^2 \right], \quad (2.3)$$

kde $\sigma_w^2\{S_{PER}(f)\}$ představuje rozptyl hodnot periodogramu bílého šumu, $S_{xx}^2(f)$ je druhou mocninou skutečné výkonové spektrální hustoty, T je vzorkovací interval a N je počet vzorků. Potom v limitě pro N blížící se nekonečnu je umocněný člen uvnitř závorky roven nule, a z toho plyne [6]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_w^2\{S_{PER}(f)\} = S_{xx}^2(f), \quad (2.4)$$

tedy s rostoucí délkou záznamu rozptyl periodogramu neklesá a ustaluje se na hodnotě druhé mocniny jeho pravého spektra. V obecném případě toto platí pouze přibližně, ale skutečnost, že je rozptyl pro libovolnou délku záznamu nenulový, zůstává zachována, viz obr. 2.1. Což tím pádem znamená, že ani samotný periodogram nekonverguje k pravému PSD. Z tohoto důvodu je potom periodogram utvořený z jedné realizace procesu statisticky nestabilním (nekonzistentním) odhadem. [6][4][1]



Obrázek 2.1 Rozptyl periodogramu v závislosti na délce záznamu

Jedním způsobem, jak napravit nevhodné rozptylové vlastnosti periodogramu je průměrování vícero nezávislých realizací, jinými slovy, ve vztahu (2.1) je $M > 1$. Na jedné straně je takto snížen rozptyl odhadu, přičemž frekvenční rozlišení se nemění, což je ideální stav. Na straně druhé je ovšem nutné mít k dispozici potřebný počet realizací. Jelikož toto mnohdy není při spektrální analýze možné, potažmo velmi obtížné, v praxi bývá periodogram upozaděn na úkor z něj odvozených metod diskutovaných dále. [3]

Co se týče schopnosti periodogramu rozlišit úzkopásmové složky v závislosti na SNR, dle [9] při porovnání s ostatními metodami založenými na Fourierově transformaci si při konstantním SNR periodogram vede ze všech nejlépe, pokud jde o spektra zašuměných sinusoid.

2.2 Modifikovaný periodogram a váhovací okna

Ve snaze zlepšit vlastnosti periodogramu byla vytvořena řada okénkových funkcí pro nahrazení základního obdélníkového okna. Různé varianty poskytují různé úrovně potlačení prosakování ve spektru, taktéž dochází ke snížení rozptylu odhadu, a to za cenu snížení frekvenčního rozlišení. Níže jsou uvedeny definiční vztahy pro výběr z nejčastěji používaných typů okénkových funkcí, společně s jejich reprezentací v diskrétně časové a frekvenční doméně (pro $N = 53$ vzorků) na obrázcích 2.2 a 2.3. Obecně platí, že mimo $n \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ je $w[n] = 0$. [5][4][10]

Obdélníkové okno:

$$w_{RECTANGLE}[n] = 1 \quad n \in \{0, 1, \dots, N - 1\}, \quad (2.5)$$

Trojúhelníkové okno:

$$w_{TRIANGLE}[n] = \begin{cases} \frac{2n}{N} & n \in \left\{0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1\right\} \\ 2 - \frac{2n}{N} & n \in \left\{\frac{N}{2}, \dots, N - 1\right\} \end{cases} \quad (2.6)$$

Hannovo okno:

$$w_{HANN}[n] = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{N} \right) \quad n \in \{0, 1, \dots, N - 1\} \quad (2.7)$$

Hammingovo okno:

$$w_{HAMMING}[n] = 0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi n}{N} \quad n \in \{0, 1, \dots, N - 1\} \quad (2.8)$$

Blackmanovo okno:

$$w_{BLACKMAN}[n] = 0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi n}{N} - 0,5 \cos \frac{4\pi n}{N} \quad (2.9)$$

$$n \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$$

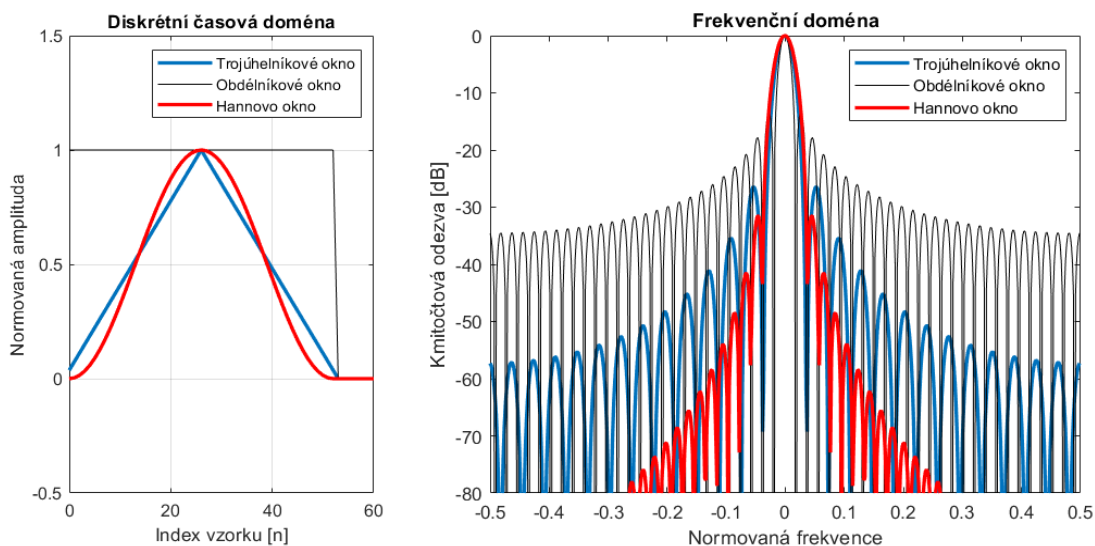
Nuttalovo okno:

$$w_{NUTTALL}[n] = a_0 - a_1 \cos \frac{2\pi n}{N} - a_2 \cos \frac{4\pi n}{N} - a_3 \cos \frac{6\pi n}{N} \quad (2.10)$$

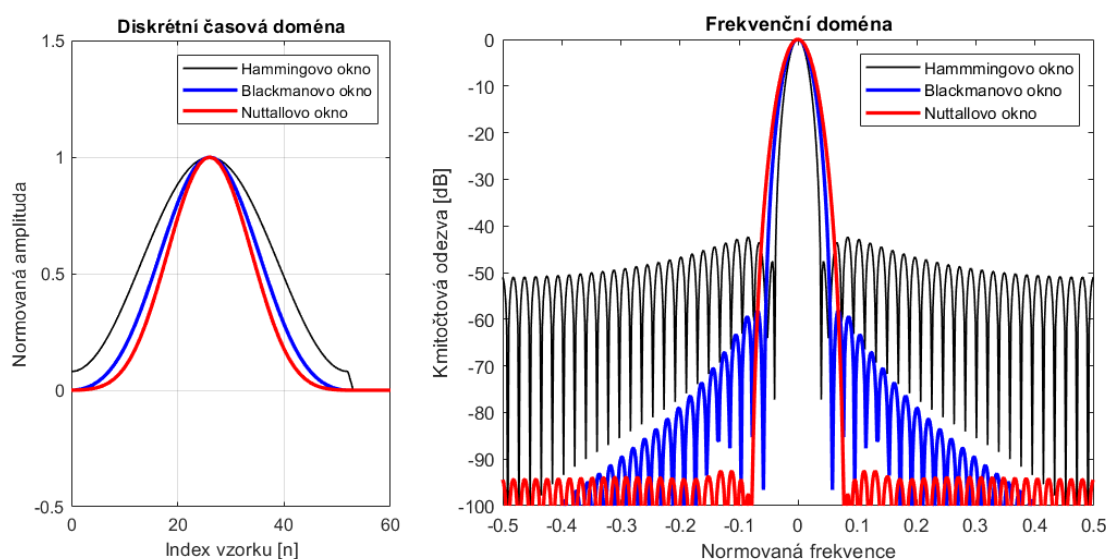
$$n \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$$

$$a_0 = 0,3635819, a_1 = 0,4891775,$$

$$a_2 = 0,1365995, a_3 = 0,0106411$$



Obrázek 2.2 Reprezentace obdélníkového, trojúhelníkového a Hannova okna v diskrétní časové a frekvenční doméně



Obrázek 2.3 Reprezentace Hammingova, Blackmanova a Nuttallova okna v diskrétní časové a frekvenční doméně

Konkrétní hodnoty koeficientů u okénkových funkcí jsou voleny tak, aby docházelo k co největšímu potlačení nejvyššího postranního laloku.

Důležité vlastnosti vykreslených oken jsou číselně vyjádřeny v tabulce 2.1. K této tabulce poznamenejme, že ekvivalentní šumová šířka, též ENBW (equivalent noise

bandwidth), představuje šířku obdélníka, jehož výškou je druhá mocnina maxima amplitudového spektra a jehož plocha reprezentuje stejný celkový výkon jako má okénková funkce, tedy ji lze určit jako podíl těchto dvou hodnot: [11]

$$ENBW = \frac{\sum_n |w[n]|^2}{|\sum_n w[n]|^2}. \quad (2.11)$$

V tabulce potom Δf představuje normalizaci pro konkrétní frekvenční rozlišení, resp. krok na frekvenční ose, přibližně určitelné podle rovnice (1.13).

Tabulka 2.1 Vlastnosti vybraných okénkových funkcí [5][4][11]

Okénková funkce	Nejvyšší postranní lalok	Asymptotický pokles postranních laloků	Ekvivalentní šumová šířka
Obdélníková	-13.3 dB	-6 dB/okt	$1\Delta f$
Trojúhelníková	-26.5 dB	-12 dB/okt	$1,33\Delta f$
Hannova	-31.5 dB	-18 dB/okt	$1,5\Delta f$
Hammingova	-43 dB	-6 dB/okt	$1,36\Delta f$
Blackmanova	-58 dB	-18 dB/okt	$1,73\Delta f$
Nuttallova	-98 dB	-6 dB/okt	$1,8\Delta f$

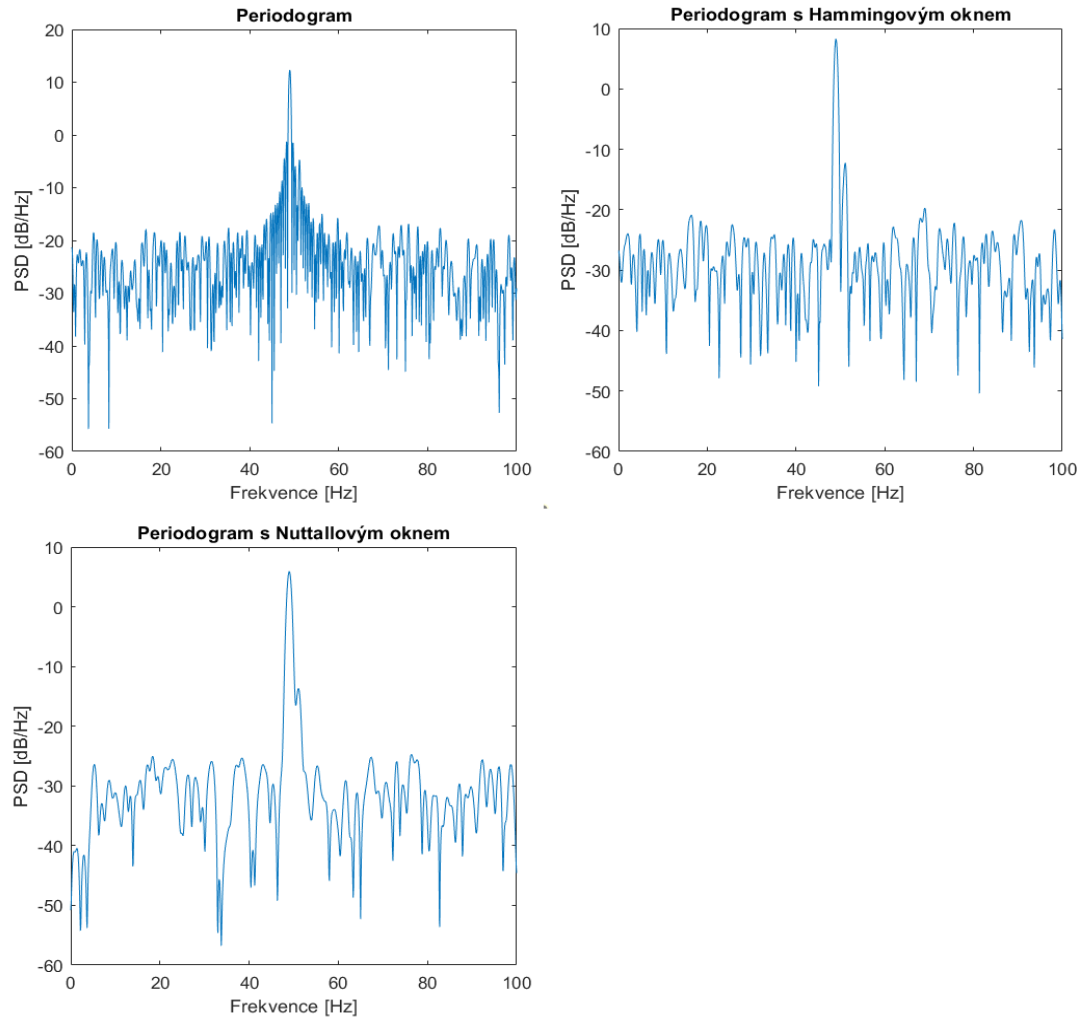
Pokud jde o vhodnou volbu okénkové funkce, záleží na vlastnostech konkrétního zkoumaného signálu. V případě, že je snaha detekovat frekvenčně blízké složky signálu, je vhodné zvolit okno, které potlačí postranní laloky a tím pádem prosakování. Ovšem zároveň je třeba dávat pozor, aby vlivem rozšiřování hlavních laloků, tedy poklesu rozlišení, nedošlo k vizuálnímu splynutí složek, viz obrázek 2.4. Jestliže je cílem zjistit pouze kmitočty nízkého počtu blízkých složek a je dostupná dostatečná délka záznamu, tak za předpokladu, že složky nezanikají v šumu či postranních lalocích sousední složky, může být vhodné spektrum neokénkovat vůbec, aby se zachovalo maximální frekvenční rozlišení. Na druhou stranu lze záměrně aplikovat okno, které sníží frekvenční rozlišení, čímž se vyhladí odhad a tím poskytuje lepší představu o tvaru spektra pro odečet PSD na pásmu. V případě že jsou od sebe složky frekvenčně vzdálenější a jedna z nich je na nižší výkonové úrovni, je zase vhodné volit okno tak, aby úroveň postranních laloků klesla na zanedbatelnou úroveň před dosažením kmitočtu druhé složky. [4]

Při výpočtu modifikovaného periodogramu je třeba brát v potaz, že váhování oknem způsobuje vychýlení hodnot spektra, a tak je potřeba výpočet normalizovat [6]

$$S_{MPER}(f) = \frac{1}{UN} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n]w[n]e^{-j2\pi fn} \right|^2, \quad (2.12)$$

kde $x[n]$ představuje hodnoty realizace náhodného procesu násobené posloupností hodnot okénkové funkce $w[n]$ délky N vzorků a U představuje energii použité okénkové funkce, dané jako [6]

$$U = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |w[n]|^2. \quad (2.13)$$



Obrázek 2.4 Vliv okénkových funkcí na odhad pomocí periodogramu $f_s = 200 \text{ Hz}$; $N = 400$; $f_1 = 49 \text{ Hz}$; $f_2 = 51 \text{ Hz}$

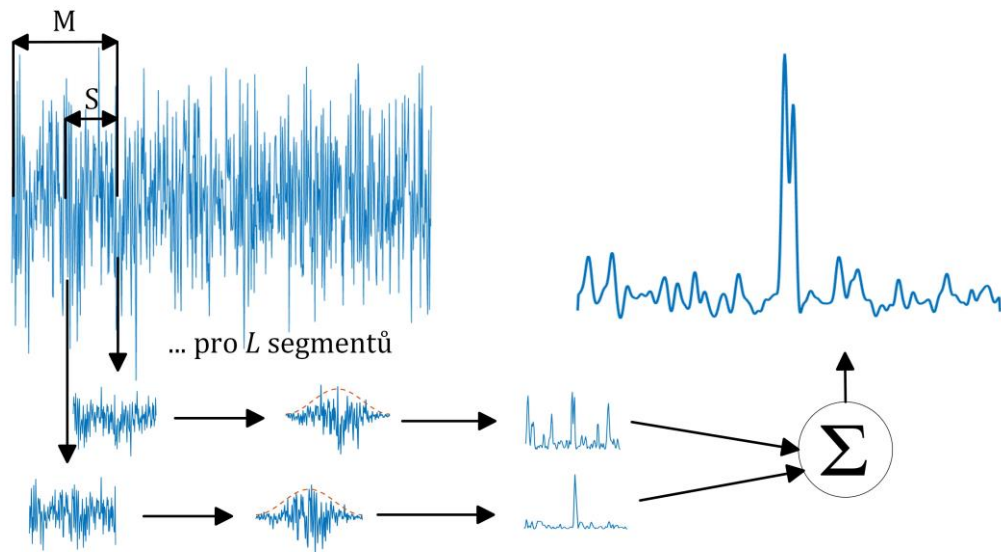
2.3 Welchova metoda

Jelikož jsou vlastnosti metody periodogramu v mnoha ohledech neideální, jak bylo diskutováno výše, Peter Welch navrhl metodu výpočtu PSD, která by zlepšila rozptylové vlastnosti odhadu, a dále zaručila, že odhad bude konzistentní, a to za eliminace nutnosti použití několika realizací procesu.

Základem Welchovy metody je rozdělení N vzorků dostupného časového průběhu na překrývající se segmenty délky M , s posunem o S vzorků mezi jednotlivými segmenty, tak aby platilo $S \leq M$, viz obrázek 2.5. Pak počet segmentů L je dán jako [4][5]

$$L = \left\lfloor \frac{N - M}{S} + 1 \right\rfloor, \quad (2.14)$$

kde $\lfloor \cdot \rfloor$ představuje celočíselné zaokrouhlení dolů. Tyto segmenty jsou potom každý zvlášť váhovány okénkovou funkcí, viz obrázek 2.5, za účelem potlačení vlivu postranních laloků a snížení vychýlení odhadu, byť toto způsobí snížení frekvenčního rozlišení. Zde je třeba odhady ze segmentů vypočítat dle rovnice (2.12), aby použití okénkové funkce nevychýlilo hodnoty odhadu.



Obrázek 2.5 Naznačení principu Welchovy metody

Pro určení bodů připadajících na i -tý váhovaný segment lze použít vztah [6][4]

$$x_{(i)}[n] = w[n]x[n + iS]; \quad \begin{matrix} n = 0, 1, \dots, M - 1 \\ i = 0, 1, \dots, L - 1 \end{matrix}, \quad (2.15)$$

kde iS představuje počáteční index daného segmentu. Výsledný odhad se potom vytvoří jako průměr z L odhadů jednotlivých segmentů [7]

$$S_W(f) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} S_{MPER(i)}(f) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \frac{1}{UM} \left| \sum_{n=0}^{M-1} x_{(i)}[n]w[n]e^{-j2\pi fn} \right|^2. \quad (2.16)$$

V situaci, kdy posun segmentů S roven délce segmentu M , ze vztahu (2.15) vyplývá, že se segmenty nebudou překrývat. Jde potom o speciální případ Welchovy metody (pokud segmenty nejsou váhovány okénkovou funkcí), starší Bartlettova metoda, na které Welch založil tu svou. Možnost překrývání segmentů je motivována zvýšením počtu dílčích odhadů k průměrování, což vede na vyhlazenější výsledný odhad. [1]

Nejčastěji používanou variantou je $S = M/2$, tedy 50% překryv, jehož hodnotu takto doporučil už sám Welch. Důvodem je, mimo jiné, že takto jsou všechny vzorky zahrnuty do výpočtu PSD dvakrát (až na M vzorků na okrajích). Toto vede na relativně vyrovnané váhování, neboť vzorek na okraji jednoho segmentu s malou váhou je v segmentu sousedním poblíž středu, kde je mu přiřazena větší váha. Pokud je ovšem snaha minimalizovat rozptyl odhadu, je třeba uvážit i jakým oknem byla data váhována, kdy například pro Welchem uvedené Hannovo (běžně používané je také Hammingovo) okno je nejvhodnější použít překryv 65 %. [5][4]

Co se týče vychýlení Welchovy metody, podobně jako pro periodogram platí, že je odhad asymptoticky nevychýlený, avšak pro neokénkovanou konečnou sekvenci dat je jeho vychýlení horší než u periodogramu. Je to dáno tím, že se následně průměrované odhady počítají pouze z M vzorků, namísto všech N .

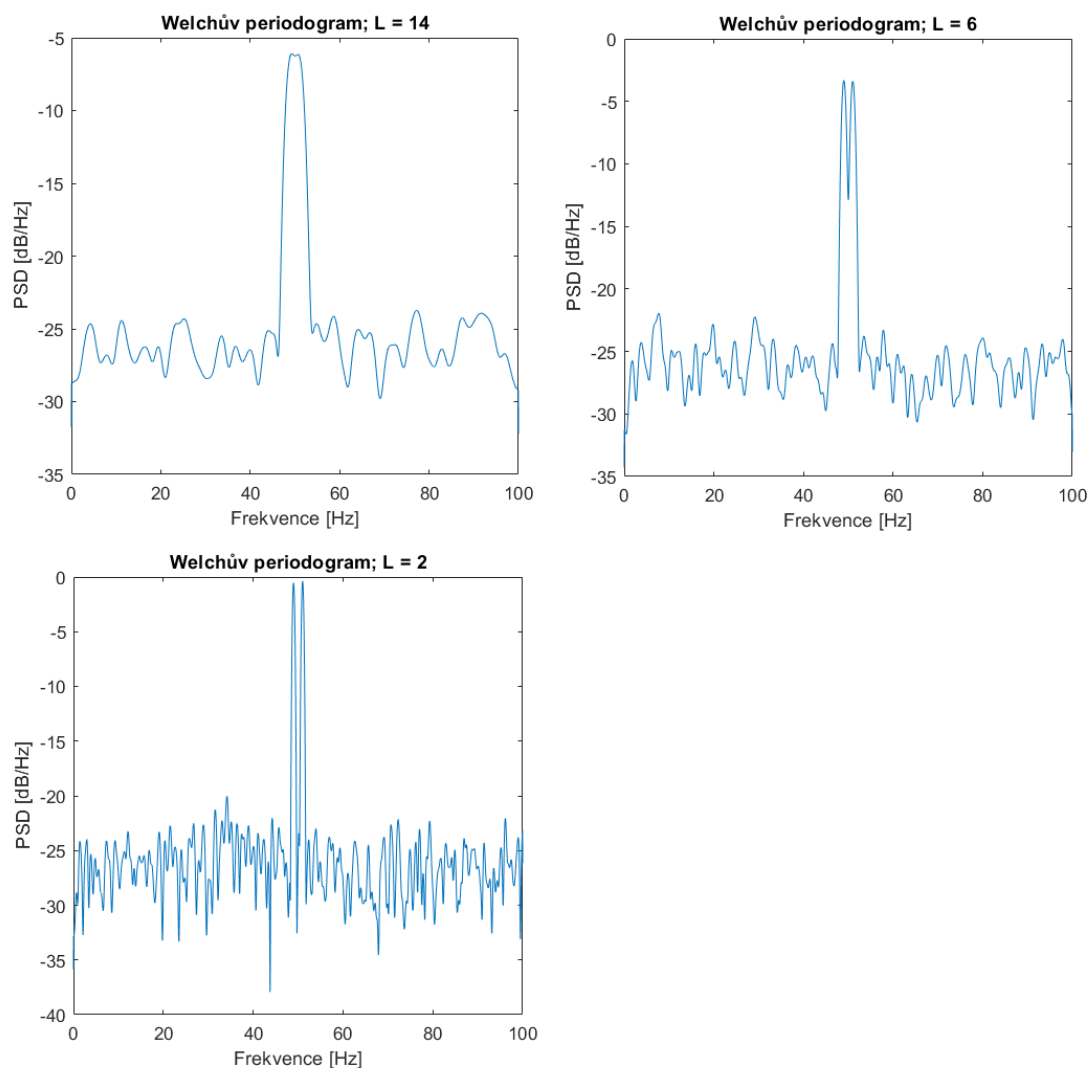
Ze stejné příčiny je i frekvenční rozlišení Welchova odhadu nižší než u periodogramu, krok na frekvenční ose Δf je zde, v teoretickém případě obdélníkového okna, nepřímo úměrný délce trvání jednoho segmentu, oproti délce celého signálu u periodogramu. Ve skutečnosti bude rozlišení ještě nižší, kvůli váhování segmentů. Což s sebou ale nese žádoucí zlepšení vychýlení a snížení rozptylu.

Rozptyl Welchovy metody závisí na počtu segmentů, také na jejich překryvu a použité okénkové funkci. Z toho důvodu se rozptyl pro jednotlivé kombinace liší, obecně však lze říci, že je rozptyl nepřímo úměrný počtu použitých segmentů [4][6]

$$\sigma_w^2\{S_W(f)\} \propto \frac{S_{xx}^2(f)}{L}, \quad (2.17)$$

kdy pro speciální případ nulového překryvu a neváhovaných segmentů (Bartlettova metoda) lze úměru ($\propto$) nahradit přibližnou rovností. Je to dáno tím, že pokud se segmenty překrývají, nemůžeme dílčí odhady považovat za naprosto nezávislé. S překryvem ale dosahuje metoda mírně nižšího rozptylu, z výše uvedených důvodů. [4]

Z výše uvedeného také plyne, že je při vytváření odhadu Welchovou metodou třeba volit počet segmentů tak, aby se vyvážily nároky na frekvenční rozlišení a požadovaný rozptyl, viz obrázek 2.6. Jelikož s nárůstem počtu dostupných dat klesá vychýlení i rozptyl odhadu, lze Welchovu metodu označit jako statisticky stabilní.



Obrázek 2.6 Vliv počtu segmentů na odhad Welchovou metodou $f_s = 200 \text{ Hz}$; $N = 1000$; překryv 50 %; Hammingovo okno

Pokud jde o schopnost rozlišit sinusoidu v šumu, tak při konstantním SNR má, dle [9], hned po základním periodogramu nejlepší šanci na úspěšnou detekci varianta s překryvem 50 % bez použití váhování, na druhou stranu nejmenší má varianta s nulovým překryvem za použití Hannova okna. Další kombinace produkují každá odlišný výsledek. Z toho lze usoudit, že i tato vlastnost Welchovy metody je závislá na konkrétních parametrech, a tím pádem v tomto ohledu nelze tvořit obecné závěry.

2.4 Korelogram a metoda Blackman–Tukeyova

Korelogram je metoda odhadu spektra založená na platnosti Wiener-Chinčinovy věty. Nejprve se vypočítá autokorelace posloupnosti hodnot daného signálu a odhad PSD je potom její Fourierova transformace. Jelikož Fourierova transformace není aplikována přímo na data, bývají korelogram a jemu příbuzné metody označovány jako metody nepřímé. Definičním vztahem korelogramu je rovnice (1.9), pro přehlednost:

$$S_{KOR}(f) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} r_{xx}[k] e^{-j2\pi f k} . \quad (2.18)$$

Je samozřejmě potřeba vytvořit odhad $r_{xx}[k]$, k čemuž lze využít dva postupy. Buďto odhad vychýlený, který lze pro kladné hodnoty vzájemného posunu k určit jako [3][1]

$$r_{biased}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-k-1} x^*[n] x[n+k], \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad (2.19)$$

nebo odhad nevychýlený, uvedený v obdobné formě v rovnici (1.3) jako [3][1]

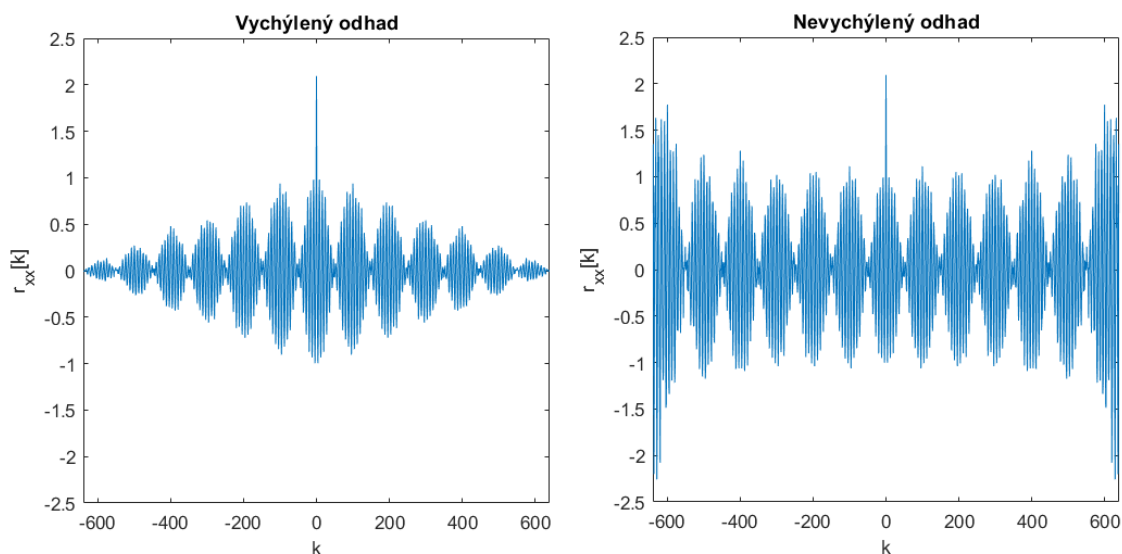
$$r_{unbiased}[k] = \frac{1}{N-k} \sum_{n=0}^{N-k-1} x^*[n] x[n+k], \quad 0 \leq k \leq N-1 . \quad (2.20)$$

Jelikož pro slabě stacionární proces platí, že je jeho autokorelační funkce sudá,

$$r_{xx}[-k] = r_{xx}[k], \quad 0 \leq k \leq N-1 , \quad (2.21)$$

lze hodnoty pro záporná k dopočítat pouhým invertováním $r_{xx}[k]$ z (2.19) a (2.20) kolem vertikální osy.

Byť na první dojem může nevychýlený odhad působit jako lepší volba, pokud je konečným účelem odhad PSD, není tomu tak. Z rovnice (2.19) plyne, že jak k roste, hodnoty $r_{xx}[k]$ se zmenšují, což je vhodné, jelikož čím větší je vzájemný posun mezi posloupnostmi, tím menší počet vzorků je zahrnut do výpočtu autokorelace, a proto okraje autokorelační funkce nemají příliš velkou vypovídací hodnotu o zkoumaném signálu. Naproti tomu za použití rovnice (2.20) k poklesu $r_{xx}[k]$ nedochází, viz obrázek 2.7 , a tak se ve výsledném odhadu PSD výrazně projeví právě oblasti autokorelační funkce s velkým k , které mohou pozměnit tvar spektrálního odhadu či mohou představit falešné úzkopásmové složky. Z těchto důvodů bývá pro odhady PSD pomocí korelogramu preferován vychýlený odhad autokorelační funkce. [1][3]



Obrázek 2.7 Srovnání vychýleného a nevychýleného odhadu autokorelační funkce

Odhad vytvořený pomocí (2.18) a (2.19), tedy korelogram ve své základní formě má potom vlastnosti ekvivalentní základnímu periodogramu. [1][4]

Z obrázku 2.7 si lze povšimnout, že vychýlený odhad je v podstatě nevychýlený odhad váhovaný trojúhelníkovým oknem. Což lze vyvodit i z jejich definičních vztahů, kdy platí, že

$$r_{biased}[k] = \frac{N-k}{N} r_{unbiased}[k], \quad 0 \leq k \leq N-1, \quad (2.22)$$

kde právě člen $\frac{N-k}{N}$ představuje váhování polovinou trojúhelníkového okna. Na myšlence manipulace této váhovací funkce je poté založena metoda Blackman-Tukey

$$S_{BT}(f) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} r_{xx}[k] w[k] e^{-j2\pi f k}, \quad (2.23)$$

kde $r_{xx}[k]$ je nevychýlený odhad autokorelační funkce a $w[k]$ je okénková funkce délky $M < N-1$ splňující dvě podmínky. Za prvé musí být symetrická podle $k=0$ a za druhé musí mít spektrum, které je nezáporné, jelikož v opačném případě budou vycházet záporné hodnoty PSD, což je nežádoucí. Druhou podmínku nesplňuje řada jinak často užívaných váhovacích oken, např. Hammingovo nebo Hannovo, a tak, byť další možnosti existují, nejčastěji se zůstává u trojúhelníkového okna. [2][4][6]

Odhad spektra je potom ovlivnitelný změnou délky M okénkové funkce $w[k]$, kdy platí, že rozptyl odhadu s nižší hodnotou M klesá, zároveň však klesá frekvenční rozlišení a dochází k nárůstu vychýlení. Pro hodnoty $M \ll N$ potom platí [1][2]

$$\sigma_w^2\{S_{BT}(f)\} \approx \frac{3M}{2N} S_{xx}^2(f), \quad (2.24)$$

z čehož plyne, že Blackman-Tukeyova metoda má lepší rozptylové vlastnosti než periodogram. Je v tomto ohledu srovnatelná s Welchovou metodou (dosahuje mírně lepšího rozptylu než Bartlettova metoda), v závislosti na nastavení parametrů obou metod. Velkou nevýhodou této metody je právě to, že snížení rozptylu omezením autokorelační funkce má za následek nárůst vychýlení odhadu, které je pro hodnoty $M \ll N$ velmi výrazné.[1]

2.5 Metoda Multitaper (MTM)

Někdy označována také jako Multiwindow či Thomsonova metoda, tato metoda je opět založena na maximálním využití dostupných dat z jedné realizace procesu. Na rozdíl od Welchovy metody však k tomuto problému nepřistupuje prostřednictvím segmentace, ale přes váhování celé posloupnosti dat různými okénkovými funkcemi a následným průměrováním [2]

$$S_{MTM}(f) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} S_{MTM(i)}(f). \quad (2.25)$$

Pro tento účel jsou ovšem funkce definované v podkapitole 2.2 nedostačující, jelikož by dílčí odhady byly vzájemně korelované, což by významně zkreslovalo výsledný odhad. Proto metoda MTM využívá Slepianových sekvencí, v zahraniční literatuře také DPSS (discrete prolate spheroidal/Slepian sequences), jejichž výhodou je vzájemná ortogonalita a tím pádem na sobě nezávislé odhady. V rovnici (2.25) potom $S_{MTM(i)}(f)$ představuje spektrum časového průběhu váhovaného i -tou Slepianovou sekvencí (též i -té vlastní spektrum), definované jako [2]

$$S_{MTM(i)}(f) = \frac{1}{\lambda_{(i)}} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] w_{(i)}[n] e^{-j2\pi f n} \right|^2, \quad (2.26)$$

kde $\lambda_{(i)}$ je i -tá Slepianova vlastní hodnota a $w_{(i)}[n]$ je k ní korespondující i -tá Slepianova sekvence, kdy i nabývá hodnot od 1 do L (celkový počet Slepianových sekvencí, podmínky pro optimální volbu jsou diskutovány níže). Požadavek na vlastní hodnoty je, aby sekvence měli v předem zvoleném pásmu frekvencí $[-W; W]$, kdy W bývá voleno $1,5/N$ až $20/N$, maximální koncentraci energie.

Vlastní hodnoty a sekvence lze vypočítat z výrazu [2][12]

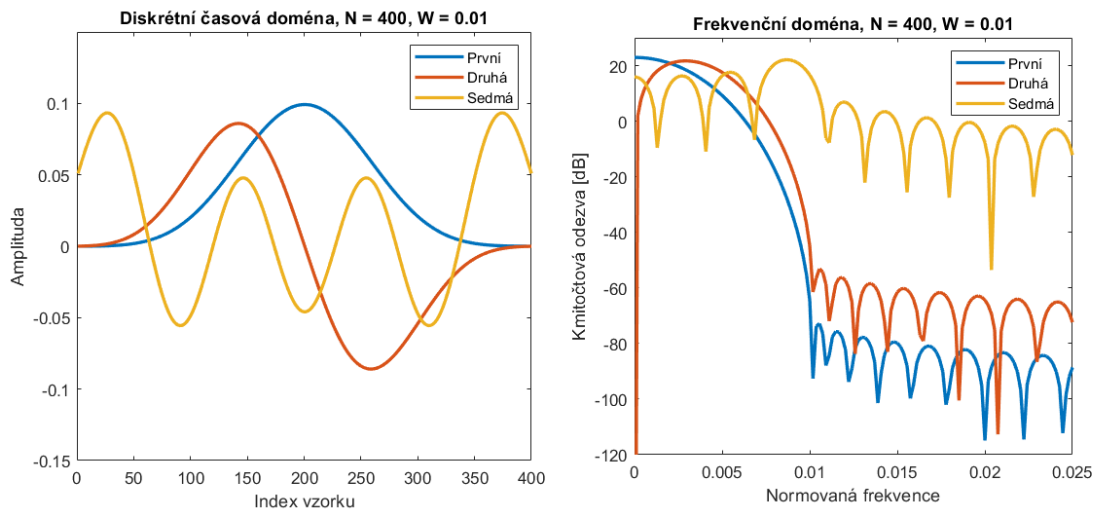
$$\mathbf{C}_{mn} \mathbf{w}[m]_{(i)} = \lambda_{(i)}(N, W) \mathbf{w}[n]_{(i)}, \quad m, n = 1, 2, \dots, N, \quad (2.27)$$

kde $\mathbf{C}_{mn}$ je matice $N \times N$ jejíž prvky jsou dány vztahem [12]

$$C_{mn} = \frac{\sin(2\pi W(m-n))}{\pi(m-n)}, \quad m, n = 1, 2, \dots, N \quad (2.28)$$

a $\mathbf{w}[n]_{(i)}$ je vlastní vektor délky N matice C_{mn} , jemuž náleží příslušná vlastní hodnota $\lambda_{(i)}$. Kupříkladu nejvyšší vlastní hodnota bude značena $\lambda_{(1)}$ ($\lambda_{(i)}$ nabývá hodnot od 0 do 1), a k ní bude příslušet vlastní vektor $\mathbf{w}[n]_{(1)}$, který bývá označován jako první Slepianova sekvence.

Řešením vztahu (2.27) je potom L vlastních vektorů matice C_{mn} , kterým náleží L nejvyšších vlastních hodnot. Maximální počet Slepianových sekvencí, tak aby byly jejich vlastní hodnoty, resp. koncentrace energie do pásma šířky $2W$, co nejvyšší, je $L = [2NW] - 1$. Na obrázku 2.8 je vidět, že pro $L = 7$ sedmá sekvence v porovnání s první a druhou není do pásma po kmitočet W koncentrována téměř vůbec. [2]



Obrázek 2.8 První, druhá a sedmá Slepianova sekvence v časové i frekvenční doméně

Metoda Multitaper je statisticky stabilním odhadem PSD, jelikož pro jedinou hodnotu W s rostoucím počtem vzorků N rozptyl klesá, asymptoticky se potom blíží nule. Obecně se však všechny zásadní vlastnosti odhadu odvíjí od hodnoty W , které jakožto polovina přibližné šířka hlavních laloků Slepianových sekvencí v podstatě představuje polovinu maximálního dosažitelného frekvenčního rozlišení. Opět zde platí, že vyšší rozlišení odhadu znamená vyšší rozptyl. Stejně tak W ovlivní i vychýlení odhadu prosakováním, které je při vhodné volbě počtu sekvencí poměrně nízké, viz obrázek 2.8. Z obrázku je také patrné, že sekvence s větším pořadovým číslem než L už budou trpět na výrazné prosakování energie z hlavního laloku do postranních. [2]

Co se týče schopnosti metody věrně reprezentovat zašuměná data, z výsledků prezentovaných v [13] vyplývá, že v tomto ohledu podává Multitaper mírně lepší výsledky než periodogram modifikovaný, v tomto případě Hammingovým oknem.

3. PARAMETRICKÉ METODY SPEKTRÁLNÍ ANALÝZY

Neparametrické metody, které byly uvedeny v předchozí kapitole, spoléhají při vytváření odhadu PSD na aplikaci Fourierovy transformace přímo na zkoumaná data. Toto má ovšem zásadní nevýhody, co se týče věrné reprezentace spektrální hustoty náhodného procesu. Jak bylo diskutováno, při použití Fourierovy transformace dochází k okénkování dat, což způsobuje nežádoucí prosakování ve spektru. Dalším omezením je, že dosažitelné frekvenční rozlišení se přímo odvíjí od délky záznamu. Především tyto dvě slabiny neparametrických metod motivovaly vývoj metod parametrických. [4][6]

Parametrický přístup odhadu spektrální hustoty spočívá ve vytvoření vhodného modelu vzniku zkoumaného signálu (buďto na základě předem známých vlastností procesu, případně výběrem dle obdržených výsledků vícero typů modelů), výpočtu jeho parametrů použitím vhodné metody a konečně výpočtem odhadu spektra na základě těchto parametrů.

Modely většinou vycházejí z myšlenky, že zkoumaný signál $x[n]$ se tvoří na výstupu lineárního časově invariantního (LTI, linear time invariant) filtru s impulsní odezvou $h[k]$ na jehož vstupu je signál $u[n]$, v případě spektrální analýzy neznámý, ale pro odvození vztahů se předpokládá bílý šum, jehož střední hodnota je nulová $\bar{u}[n] = 0$ a jehož rozptyl σ_u^2 je konstantní. Diferenční rovnicí lze $x[n]$ vypočítat dle

$$x[n] = \sum_{k=0}^q b_k u[n-k] - \sum_{k=1}^p a_k x[n-k]. \quad (3.1)$$

Po použití z-transformace na (3.1) vede úprava na tvar $X(z) = H(z)U(z)$, kde funkci $H(z)$ lze vyjádřit i jako [5][6]

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}}. \quad (3.2)$$

Potom pokud lze v obecném případě říci, že je vstupní proces stacionární, lze odhad spektra $x[n]$ určit podle [5][6]

$$\begin{aligned} S_{xx}(e^{j\omega}) &= |H(e^{j\omega})|^2 S_{uu}(e^{j\omega}) \\ &\text{nebo} \\ S_{xx}(f) &= |H(f)|^2 S_{uu}(f) \end{aligned} \quad (3.3)$$

z čehož plyne, že výsledný spektrální odhad se získává zkreslováním PSD vstupního signálu pomocí frekvenční charakteristiky filtru $H(f)$. Například v případě bílého šumu, jehož PSD je konstantní a má hodnotu jeho rozptylu přechází rovnice (3.3) na tvar

$$S_{xx}(f) = \sigma_u^2 |H(f)|^2, \quad (3.4)$$

kde je tvar $S_{xx}(f)$ udáván explicitně frekvenční charakteristikou filtru. [4]

Z toho důvodu je třeba pro získání odhadu spektra určit parametry a_k a b_k . Použité parametry určují, o jaký typ modelu se jedná. V případě, že je v rovnici (3.2) zachován pouze jmenovatel $A(z)$, tedy $B(z) = 1$, je model označován jako autoregresní model p -tého řádu, $AR(p)$; pokud je naopak zachováno $B(z)$ a $A(z) = 1$, pak jde o model klouzavých součtů (moving average) q -tého řádu, $MA(q)$; finální možností je (3.2) v nezměněné podobě, tedy $ARMA(p, q)$ model, a jak název, tak model samotný je kombinací dvou předchozích. [2][5]

3.1 Autoregresní modelování odhadu spektra (AR)

Ze tří modelů uvedených v předchozí části je autoregresní model tím nejběžněji používaným, což je dáno relativní jednoduchostí výpočtu, kdy určení parametrů a_k je otázkou řešení lineárních rovnic, a také tím, že autoregresní model má dobrou schopnost vystihnout ve spektru ostré špičky, viz obrázek 3.1, a tím vystihnout v odhadu PSD úzkopásmové složky. [4]

Pro autoregresní proces přechází diferenční rovnice (3.1) na tvar [2]

$$x[n] = - \sum_{k=1}^p a_k x[n-k] + u[n] \quad (3.5)$$

a jeho frekvenční charakteristika je dána jako [2]

$$H(f) = \frac{1}{A(f)} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j2\pi f k}}. \quad (3.6)$$

Odhad spektrální hustoty lze vyjádřit kombinací rovnic (3.4) a (3.6)

$$S_{AR}(f) = \frac{\sigma_u^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j2\pi f k} \right|^2}. \quad (3.7)$$

Na vlastnosti vytvořeného odhadu má zásadní vliv volba řádu modelu p , jelikož přímo souvisí s počtem modelovaných špiček ve spektru. Příliš nízký řád povede na spektrum s nízkým rozlišením, ve kterém může dojít ke ztrátě informace o některých úzkopásmových složkách. Naopak příliš velký řád modelu může způsobit, že se v odhadovaném spektru objeví špičky falešné. Jedna špička ve spektru je tvořena komplexně sdruženou dvojicí pólů funkce $H(f)$, potažmo jedním pólem reálným, proto pro vystihnoutí n špiček musí být minimální řád modelu $p = 2n$. Vliv má také to, jestli je počet pólů sudý či lichý. Spektrum modelu sudého řádu je generováno daným počtem komplexně sdružených dvojic pólů, kdežto lichý řád obsahuje i pól reálný, který se ve spektru projeví modelováním špičky na nulovém kmitočtu, což nemusí být např. u signálu s nulovou střední hodnotou žádoucí. S volbou řádu napomáhají různá kritéria, která budou diskutována níže, po představení Yule-Walkerovy metody. [5]

3.1.1 Yule-Walkerova metoda

Pro nalezení koeficientů a_k a rozptylu šumu σ_u^2 v rovnici (3.7) bývá často využíván jejich vztah s autokorelační funkcí (z toho důvodu alternativní označení Yule-Walkerovy metody jako autokorelační). Ten lze odvodit tak, že jsou obě strany rovnice (3.5) násobeny komplexně sdruženou posloupností $x^*[n-m]$ a na obě je použit operátor střední hodnoty [2]

$$E\{x[n]x^*[n-m]\} = -\sum_{k=1}^p a_k E\{x[n-k]x^*[n-m]\} + E\{u[n]x^*[n-m]\}, \quad (3.8)$$

což lze upravit do tvaru [2][6]

$$r_{xx}[m] = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k r_{xx}[m-k], & m > 0 \\ -\sum_{k=1}^p a_k r_{xx}[m-k] + \sigma_u^2, & m = 0 \end{cases}, \quad (3.9)$$

kde platí, že pro $m < 0$, $r_{xx}[m] = r_{xx}^*[-m]$. Tento vztah nese název Yule-Walkerovy rovnice a práce s nimi tvoří základ obou metod diskutovaných v této kapitole. Z výrazu (3.9) vyplývá, že pro určení modelu řádu p je třeba p rovnic, a také hodnota autokorelační funkce pro prvních p hodnot vzájemného posunu. Hodnoty autokorelace je vhodné určit pomocí vychýleného odhadu, tedy rovnice (2.19). Je to proto, aby níže uvedená autokorelační matice $\mathbf{R}_p$ byla pozitivně semidefinitní, jelikož je pak zaručena stabilita modelu. [6]

Rovnice (3.9) lze maticovým zápisem vyjádřit jako [6]

$$\begin{bmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}[-1] & \cdots & r_{xx}[1-p] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \cdots & r_{xx}[2-p] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[p-1] & r_{xx}[p-2] & \cdots & r_{xx}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} r_{xx}[1] \\ r_{xx}[2] \\ \vdots \\ r_{xx}[p] \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

alternativně zkráceným zápisem

$$\mathbf{R}_p \mathbf{a} = -\mathbf{r}_p. \quad (3.11)$$

Z (3.9) je také odvoditelné, že rozptyl σ_u^2 je dán výrazem

$$\sigma_u^2 = r_{xx}[0] + \sum_{k=1}^p a_k r_{xx}[-k], \quad (3.12)$$

který pak často bývá kombinován se vztahem (3.10) pro alternativní vyjádření Yule-Walkerových rovnic [1][6]

$$\mathbf{R}_{p+1} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

$$\begin{bmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}[-1] & \cdots & r_{xx}[-p] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \cdots & r_{xx}[1-p] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[p] & r_{xx}[p-1] & \cdots & r_{xx}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_u^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Parametry a_k lze tedy určit řešením (3.11), potažmo (3.14) bez prvního řádku, tedy $\mathbf{a} = -\mathbf{R}_p^{-1} \mathbf{r}_p$. Po získání vektoru $\mathbf{a}$ je hodnota σ_u^2 vypočtena buďto podle rovnice (3.12) nebo ekvivalentně z prvního řádku v (3.14). Dosazením výsledků do rovnice (3.7) se získá odhad spektra.

Výsledný odhad je značně ovlivněn volbou řádu modelu, jak bylo zmíněno výše. Proto byla vytvořena kritéria, která mají tuto volbu usnadnit. Byť kritérií a jejich modifikací existuje celá řada, pro příklad jsou zde uvedena dvě.

Prvním je kritérium *FPE* (final prediction error) definováno jako [4][7]

$$FPE[p] = \sigma_u^2 \frac{N + p + 1}{N - p - 1}, \quad (3.15)$$

kde N je délka záznamu (počet vzorků), p je řád modelu a σ_u^2 představuje odhad rozptylu bílého šumu podle vztahů (3.12) a (3.14) výše. Principem kritéria je, že σ_u^2 s rostoucím řádem klesá, čímž jsou penalizovány nízké řády modelu. Naopak zlomková část výrazu s řádem narůstá a tím postihuje zase řády vysoké. Vhodný řád zpoždění je potom minimum funkce $FPE[p]$. Ovšem je dobré zmínit, že toto kritérium mívá (v závislosti na aplikaci, např. geofyzika) tendenci volit příliš nízký řád. [4][7]

Druhým kritériem je *AIC* (Akaike information criterion) dáno [4]

$$AIC[p] = N \ln \sigma_u^2 + 2p, \quad (3.16)$$

založeno na obdobném principu. Pro obě kritéria a pro kritéria obecně ovšem platí, že pro velmi krátké signály neposkytují nejlepší řád, ale spíše tíhnou právě k řádům nižším, totéž, pokud jde o výrazně zašuměný harmonický signál. [4]

Frekvenční rozlišení Yule-Walkerovy a parametrických metod obecně téměř nezávisí na délce analyzovaného signálu, na rozdíl od metod neparametrických. To je dáno schopností parametrických metod extrapolovat hodnoty autokorelační funkce impulsní odezvy z rovnice (3.9) za maximální hodnotu vzájemného posuvu m , kterou nabízí autokorelace signálu. Což umožňuje vytvářet kvalitní spektrální odhady i za dostupnosti nízkého počtu vzorků. [3] [7]

Pojem nízký počet vzorků, resp. malá délka signálu, znamená pro různé signály různé hodnoty, ale obecně lze hovořit o časové délce signálu, jejíž převrácená hodnota se pohybuje ve stejném řádu jako potřebné frekvenční rozlišení. Jak již ale bylo zmíněno v podkapitole 1.3.2, na frekvenční rozlišení má výrazný dopad míra zašumění signálu,

v kontrastu s neparametrickými metodami, které odolávají vysoké výkonové úrovni šumu podstatně lépe. Tato metoda také není příliš přesná, pokud jde o určení výkonové úrovně, hlavně v případě úzkopásmových složek. [3][4][7]

3.1.2 Burgova metoda

Burgova metoda je rekurzivní přístup k výpočtu koeficientů AR modelu, odvozený od filtru křížové struktury. Je založena na minimalizaci rozptylů dopředné a zpětné chyby predikce posloupnosti $x[n]$, které jsou definovány jako [1][6]

$$\begin{aligned} f_m[n] &= x[n] + \sum_{k=1}^m a_m[k]x[n-k], & 0 \leq k \leq m-1 \\ g_m[n] &= x[n-m] + \sum_{k=1}^m a_m^*[k]x[n+k-m], & 1 \leq m \leq p \end{aligned} \quad (3.17)$$

kde $f_m[n]$ a $g_m[n]$ jsou chyba dopředná a zpětná m -tého řádu a $a_m[k]$ jsou koeficienty predikce. Minimalizovat je třeba výraz pro chybu nejmenších čtverců [1][5][6]

$$J_m = \frac{1}{2N} \sum_{n=m}^{N-1} (|f_m[n]|^2 + |g_m[n]|^2), \quad (3.18)$$

vhodnou volbou koeficientů predikce tak, aby splňovaly rekurzivní vztah daný pomocí Levinson-Durbinova algoritmu jako [4][6]

$$a_m[k] = a_{m-1}[k] + K_m a_{m-1}^*[m-k], \quad (3.19)$$

kde koeficienty k a m nabývají stejných hodnot jako ve vztahu (3.17) a kde $K_m = a_m[m]$ je m -tý koeficient odrazu filtru s křížovou strukturou. Po minimalizaci J_m vzhledem ke koeficientu odrazu platí pro m -tý komplexní koeficient vztah [5][6]

$$\hat{K}_m = -\frac{2 \sum_{n=m+1}^N f_{m-1}[n] g_{m-1}^*[n-1]}{\sum_{n=m+1}^N (|f_{m-1}[n]|^2 + |g_{m-1}[n-1]|^2)}, \quad 1 \leq m \leq p, \quad (3.20)$$

z něž plyne, jelikož jmenovatel bude vždy větší než číselník, že pro koeficienty odrazu vypočítané pomocí Burgovy metody platí $|K_m| < 1$ a všechny póly modelu tedy leží uvnitř jednotkové kružnice. Při výpočtu Burgovou metodou je tedy zajištěna stabilita řešení. [5][6]

Pro usnadnění výpočtu lze dopřednou a zpětnou chybu vypočítávat i rekurzivně, a to dle předpisu [4]

$$\begin{aligned} f_m[n] &= f_{m-1}[n] + \hat{K}_m g_{m-1}[n-1] \\ g_m[n] &= g_{m-1}[n] + \hat{K}_m^* f_{m-1}[n-1] \end{aligned} \quad (3.21)$$

Parametry modelu jsou potom získány jako průběžné výsledky rovnice (3.19). Posledním, co chybí pro vytvoření odhadu spektra je ekvivalent rozptylu šumu σ_u^2

z rovnice (3.7). Tím je celková chyba predikce pro m -tý řád modelu J_m , kterou lze vypočítat i rekurzivně jako [6]

$$J_m = [1 - |K_m|^2]J_{m-1} - |f_m[m]|^2 - |g_m[N-1]|^2. \quad (3.22)$$

Výsledný odhad PSD je potom definován vztahem [6]

$$S_B(f) = \frac{J_p}{|1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-j2\pi f k}|^2}. \quad (3.23)$$

Co se vlastností odhadu vytvořeného pomocí Burgovy metody týče, frekvenční rozlišení se řídí obdobným mechanismem jako u Yule-Walkerovy metody, tj. závisí především na míře zašumění signálu. Ovšem nutno zmínit, že pro velmi krátké signály poskytuje Burgova metoda lepší frekvenční rozlišení než Yule-Walkerova, pro vyšší počet vzorků už jsou si odhady velmi podobné. [7]

Burgova metoda má několik vad. První vadou je její citlivost na změny fáze signálu, což je znatelné obzvláště při určování spektra směsi sinusoid se šumem, která se ve spektru projevuje jako vychýlení spektra vzhledem ke kmitočtové ose. Druhou vadou metody je štěpení úzkopásmových složek, tj. ve spektru se místo jednoho vrcholku objeví dva sobě blízké. Pravděpodobnost tohoto úkazu se zvyšuje, pokud je SNR velké, tj. šum má v porovnání se signálem nízkou úroveň, dále pokud je počáteční fáze harmonické složky lichým násobkem 45° , také pokud je analyzovaná posloupnost tvořena lichým násobkem čtvrtperiod sinusoid a konečně pokud je řád AR modelu příliš vysoký. Štěpení zpravidla vymizí, jak narůstá počet vzorků. [4]

V porovnání s odhadem spektra signálu neobsahujícího sinusoidy pomocí Yule-Walkerovy metody, Burgova metoda dosahuje nižší hodnoty rozptylu PSD za cenu případného vyššího vychýlení na frekvenční ose. [4]

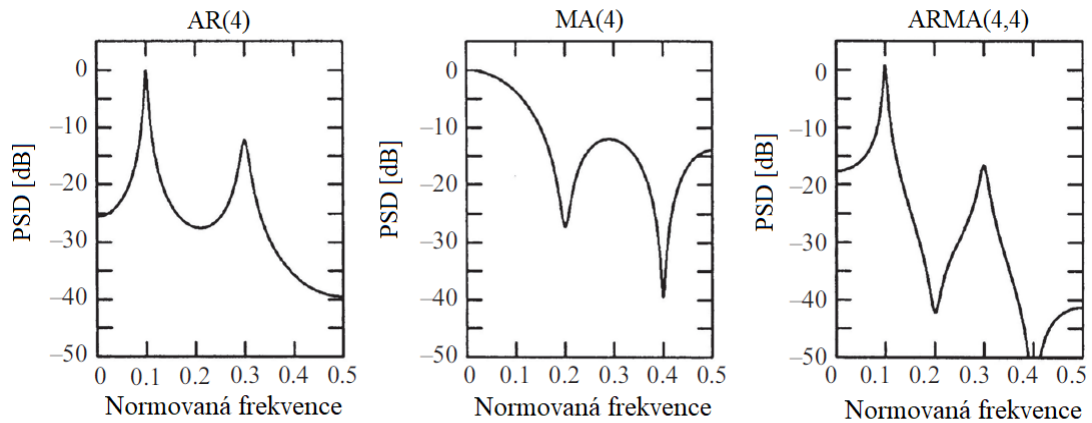
3.2 MA a ARMA modely

Pro vzájemné vztahy mezi různými typy modelů platí, že spektra vytvořena pomocí MA a ARMA modelů libovolného řádu mohou být odhadnuty pomocí AR modelu řádu teoreticky nekonečného. Obdobně i pro MA model. [6]

Z obrázku 3.1 je při srovnání odhadů pomocí typů modelů patrné, že MA model dokáže ve spektru dobře vystihnout údolí, jelikož odhad modeluje pomocí konkávních tvarů. Zároveň to ale znamená, že úzkopásmové složky oproti AR modelu (konvexní tvary) nereprezentuje příliš výrazně. Odhad pomocí ARMA modelu potom kombinuje vlastnosti modelů předchozích, dokáže výrazně vystihnout jak špičky, tak údolí PSD daného signálu. [4]

Modely MA se v praxi téměř nepoužívají, což je dáno složitějším výpočtem jejich parametrů oproti AR modelu, jelikož jde o řešení nelineárních rovnic. I přes náročnější výpočet neposkytují žádnou zásadní výhodu oproti metodám neparametrickým. Ty

reprezentují tvary ve spektru (vlivem šířky pásma hlavního laloku okénkové funkce) podobným konkávním způsobem. [7]



Obrázek 3.1 Vzhled odhadů PSD pomocí modelů AR(4), MA(4), ARMA(4,4); pozice složek na 0,1 a 0,3 násobcích vzorkovacího kmitočtu [4]

Naproti tomu ARMA modely využívány jsou, jelikož obtížnost jejich výpočtu (opět nelineární rovnice, a také není zaručena konvergence parametrů k smysluplnému výsledku) je vyvážena jejich schopností věrněji vystihnout tvar spektra než v případě AR modelu, s nižším počtem parametrů. Právě kvůli jejich složitosti je popis jejich vlastností v literatuře udáván povětšinou na empirickém základě. Jejich obtížnost je také důvodem proč se jimi tato práce nebude zabývat ve větším detailu. [4]

4. ODHADY PSD SIMULOVANÝCH SIGNÁLŮ

V této kapitole jsou uvedeny příklady odhadů PSD, vytvořené pomocí výše popsaných metod. Tyto odhady jsou tvořeny pro signály ze simulované části sesbírané databáze (kapitola 7), tudíž lze předpokládat jaké formy PSD nabyde a na základě toho následně posoudit kvalitu odhadu, dbaje kritérií stanovených v první kapitole.

Na začátek je třeba zmínit, jak jsou zde uvedené odhady normovány, tak aby měřítko na vertikální ose odpovídalo, resp. aby plocha pod křivkou odpovídala celkovému výkonu, potažmo druhé mocnině veličiny analyzovaného signálu. Níže uvedené je platné pro v práci používané reálné signály vzorkované v základním pásmu, tj. signály se spektry symetrickými podle nulového kmitočtu.

Pro metody, které jsou založeny na použití Fourierovy transformace (tj. modifikace periodogramu, Welchova metoda) je PSD násobeno výrazem $1/(f_s N)$, kde f_s je vzorkovací kmitočet a N je počet vzorků použitých pro Fourierovu transformaci. V případě, že je při výpočtu odhadu použita okénková funkce, je třeba toto zohlednit ještě zahrnutím parametru U ze vztahu (2.13), tedy odhad PSD násobíme výrazem $1/(f_s NU)$. Pokud jde o odhady vytvořené pomocí autoregresního modelování (Yule-Walker, Burg), je odhad násoben pouze vzorkovací periodou, tedy výrazem $1/f_s$. Stejně tak i odhad pomocí metody Multitaper. [4][12]

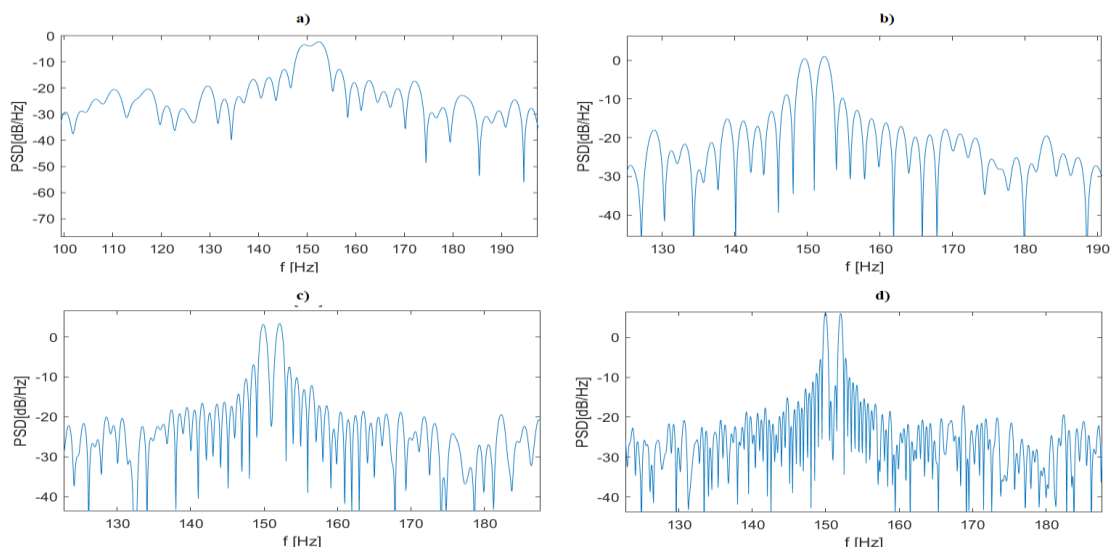
Jelikož zde uvedené odhady jsou jednostranné, je ještě třeba hodnotu PSD zdvojnásobit, aby se započítaly i příspěvky složek se zápornými kmitočty. Výjimkou je nulový kmitočet a Nyquistova frekvence (polovina vzorkovacího kmitočtu), neboť se v takto získaném jednostranném odhadu PSD vyskytují pouze jednou. [4]

4.1 Vliv délky signálu a parametrů metod na frekvenční rozlišení odhadu PSD

Prvním předmětem zájmu je vliv délky, respektive **počtu vzorků N** analyzovaného signálu a použitých **parametrů metody** na vlastnosti spektrálního odhadu. Pro každé sledované kritérium kvality jsou vytvořeny odhady pomocí všech zkoumaných metod pro několik nastavení daného parametru signálu. Pokud není uvedeno jinak, všechny odhady jsou vytvořeny za pomoci doplnění posloupnosti nulami, tak aby byl odhad co nejdetailnější.

Vhodným signálem pro testování dosaženého frekvenčního rozlišení je signál složený ze dvou zašuměných sinusoid, v tomto konkrétním případě s kmitočtovým rozestupem 2 Hz. Základním případem je **periodogram**, kde je teoretické dosažitelné rozlišení dáno přímo vztahem (1.13). Jak je vidět na obrázku 4.1 níže, s rostoucím počtem vzorků se frekvenční rozlišení zlepšuje, pro čtyři uvedené případy jde o hodnoty Δf : a) 3 Hz; b) 2 Hz; c) 1 Hz; d) 0,5 Hz. V případě a) jsou dle očekávání úzkopásmové složky spojené, byť je patrný náznak separace, kdežto v ostatních případech už je separace složek

jednoznačná. Složky v případě a) jsou viditelně vychýlené na frekvenční ose, s rostoucím počtem vzorků se toto vychýlení zlepšuje, až v případě d) vymizí. Z toho plyne, že pokud se rozlišení odhadu pohybuje na hranici nutného minimálního rozlišení, je třeba počítat s kmitočtovým vychýlením složek.

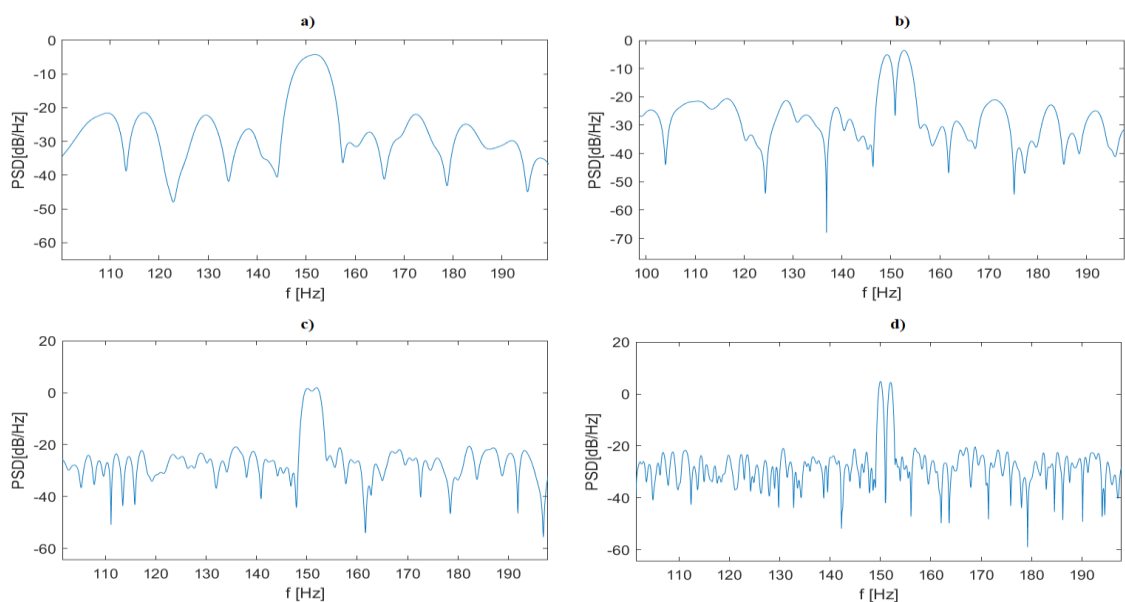


Obrázek 4.1 Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu o výkonu 1 W pomocí periodogramu, za použití počtu vzorků a) $N = 333$; b) $N = 500$; c) $N = 1000$; d) $N = 2000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$

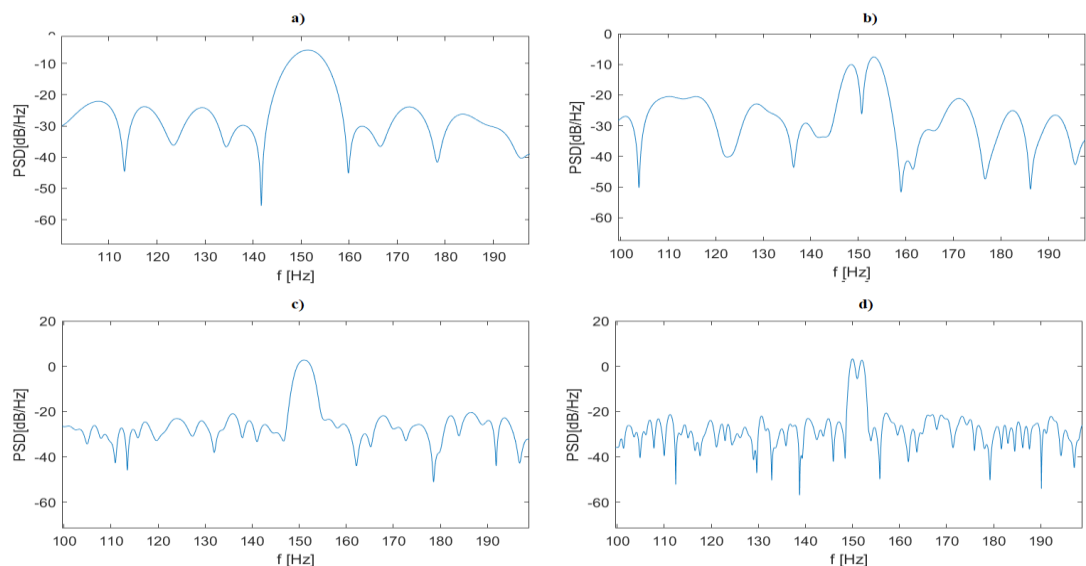
Pokud bude odhad pomocí **periodogramu modifikován** okénkovou funkcí, např. za účelem potlačení vychýlení na vertikální ose vlivem prosakování, dojde k rozšíření hlavních laloků složek, jak bylo zmíněno v podkapitole 2.2. Pokud stejné odhady jako výše provedeme za použití Hammingova (obrázek 4.2) nebo Nuttallova (obrázek 4.3) okna, je třeba uvažovat faktor $1,36\Delta f$ resp. $1,8\Delta f$. Použití okénkové funkce tedy znamená snížení frekvenčního rozlišení.

Pro odhady pomocí periodogramu s Hammingovým oknem to znamená, že je hodnota rozlišení Δf nyní: a) 4,08 Hz; b) 2,72 Hz; c) 1,36 Hz; d) 0,68 Hz. Je vidět, že v případě a) již složky nejsou rozlišitelné vůbec, v případě b) (obdobně jako tomu bylo pro případ a) bez použití okénkové funkce) se složky jeví oddělené, ovšem jsou viditelně kmitočtově vychýleny. Pro případ c), byť složky téměř splynuly, jsou jejich kmitočty správné. V případě d) jsou potom obě složky dobře rozlišitelné a jejich kmitočty správné.

Obdobně při použití Nuttallova okna (obrázek 4.3) je nyní hodnota rozlišení u jednotlivých délek modifikována: a) 5,4 Hz; b) 3,6 Hz; c) 1,8 Hz; d) 0,9 Hz. Zajímavý je případ b), složky se opět jeví odděleny (jako případ b) pro Hammingovo okno) s vychýlenými kmitočty. Z toho pro obecný případ vyplývá, že je třeba minimální rozlišení dodržet, jelikož i pokud se složky jeví jako separované, hodnoty jejich kmitočtů poblíž této hranice jsou zavádějící i při použití okénkové funkce.

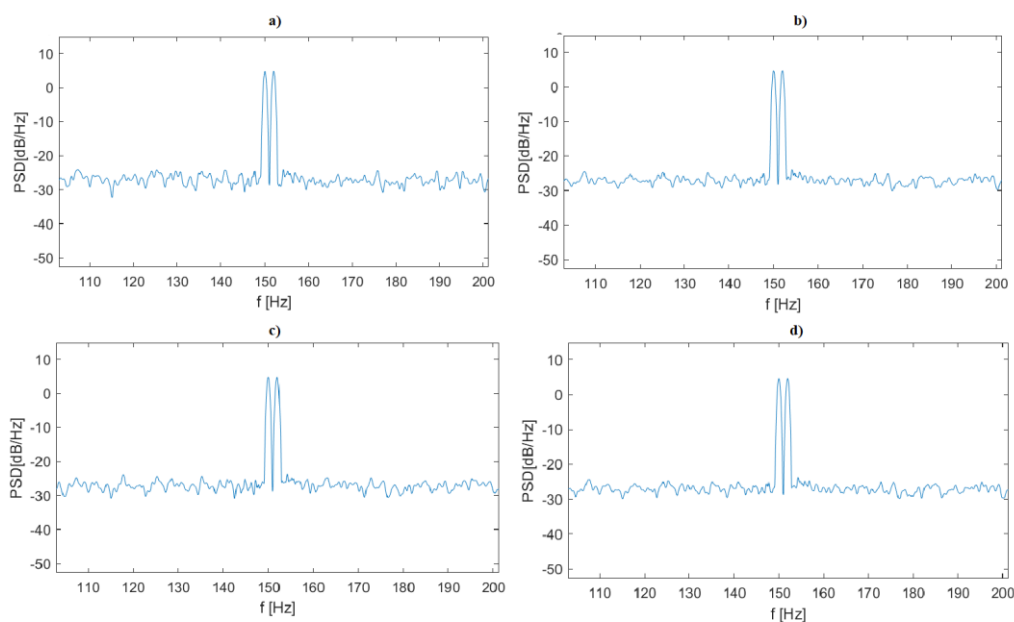


Obrázek 4.2 Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu o výkonu 1 W pomocí periodogramu modifikovaného Hammingovým oknem, za použití počtu vzorků a) $N = 333$; b) $N = 500$; c) $N = 1000$; d) $N = 2000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$



Obrázek 4.3 Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu o výkonu 1 W pomocí periodogramu modifikovaného Nuttallovým oknem, za použití počtu vzorků a) $N = 333$; b) $N = 500$; c) $N = 1000$; d) $N = 2000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$

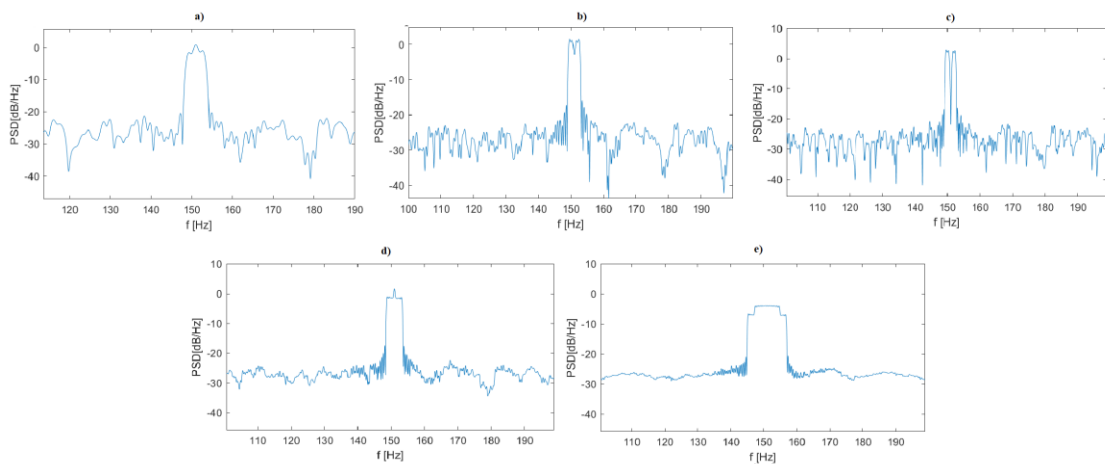
Welchova metoda je založená na průměrování modifikovaných periodogramů. Z toho vyplývá, že frekvenční rozlišení se bude v závislosti na délce signálu řídit stejnými pravidly jako tomu bylo výše, jelikož průměrování nemá na frekvenční rozlišení žádný dopad. Jediným, co se liší, a je pro Welchovu metodu typické, je možnost provádět odhady z překrývajících se segmentů. Ovšem jak je patrné z obrázku 4.4, tak překrývání segmentů, nezávisle na hodnotě překryvu, nemá na frekvenční rozlišení vliv. Metoda ale odstraňuje vychýlení na frekvenční ose, které se projevovalo při použití periodogramu (i s modifikacemi) na signál s nízkým počtem vzorků.



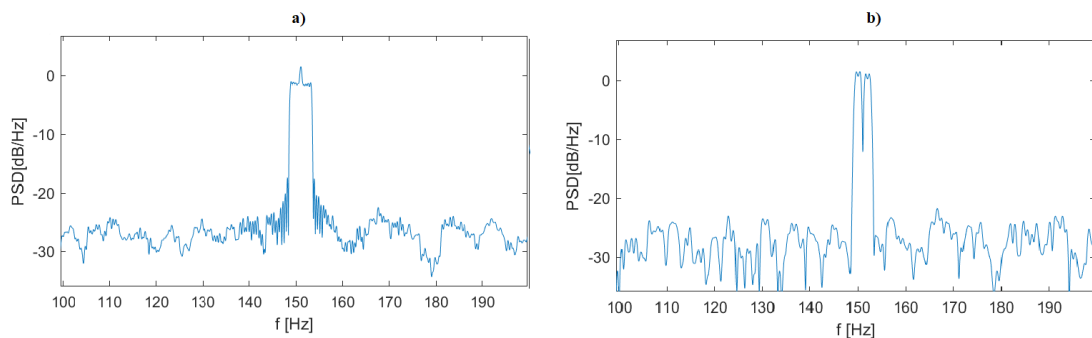
Obrázek 4.4 Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu o výkonu 1 W pomocí Welchovy metody, za použití počtu vzorků v segmentu $M = 2000$ s překryvem a) 0 %; b) 25 %; c) 50 %; d) 75 %; $f_s = 1 \text{ kHz}$

Metoda Multitaper je z hlediska frekvenčního rozlišení specifická tím, že požadované frekvenční rozlišení je jedním z volených parametrů při vytváření odhadu, tj. je volena polovina šířky hlavního laloku Slepianových funkcí W , jako součást součinu s počtem vzorků NW . Od této hodnoty se bude odvíjet i maximální dosažitelné frekvenční rozlišení, kdy logicky vyplývá, že jej lze určit jako $2NW \cdot \frac{f_s}{N}$, což také znamená, že je frekvenční rozlišení zároveň opět nepřímě úměrné délce signálu.

Na obrázku 4.5 je vidět vliv obou těchto parametrů, dle vztahu výše je frekvenční rozlišení pro a) 3,75 Hz; b) 2 Hz; c) 1,5 Hz; d) 3 Hz; e) 10 Hz. Jediné dva odhady, které vystihnou obě složky odděleně by tedy měly být případ b) a c), což obrázek potvrzuje. Je také zřejmé, že z hlediska dosažení vysokého rozlišení je u metody Multitaper nejvhodnější volit nízké NW .



Obrázek 4.5 Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu o výkonu 1 W pomocí metody Multitaper, s parametrem $NW = 1,5$ a počtu vzorků a) $N = 800$; b) $N = 1500$; c) $N = 2000$; dále za použití počtu vzorků $N = 2000$ a d) $NW = 3$; e) $NW = 10$; $f_s = 1 \text{ kHz}$



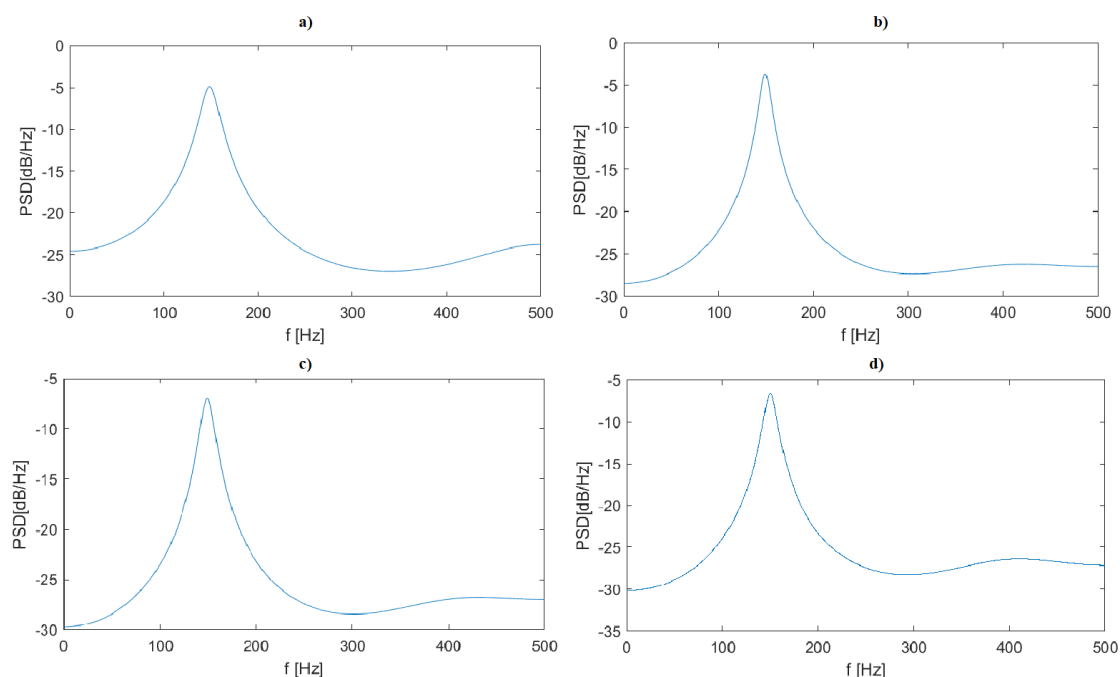
Obrázek 4.6 Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu o výkonu 1 W pomocí metody Multitaper, s parametrem $NW = 3$ a počtu vzorků $N = 2000$ při použití a) 5; b) 2 nejnižších Slepianových sekvencí; $f_s = 1 \text{ kHz}$

Ještě nutno poznamenat, že hodnota rozlišení určena dle vztahu v předchozím odstavci bude pouze přibližná, jelikož jak bylo ukázáno na obrázku 2.8, čím vyšší je pořadí Slepianovy sekvence, tím více energie prosakuje z hlavního laloku. Z toho plyne, že pokud pro daný součin NW použijeme všechny dostupné Slepianovy sekvence, frekvenční rozlišení bude horší, než kdybychom se omezili pouze na několik prvních, což je demonstrováno na obrázku 4.6. I tak je ale zřejmé, že pro dosažení nejlepšího rozlišení je třeba volit NW co nejmenší.

Pro metody založené na autoregresním modelování odhadu PSD, např. **metoda Yule-Walker**, se frekvenční rozlišení řídí jiným mechanismem, než jak tomu bylo u metod založených na aplikaci DFT přímo na data. Na jakých veličinách přibližně závisí

frekvenční rozlišení můžeme vidět ze vztahu (1.14), kdy tedy závisí především na poměru signálu a šumu SNR a řádu modelu p . Vlivem hodnoty SNR na vlastnosti odhadu se práce zabývá až v podkapitole 4.3. Prozatím bude ověřeno, jaký vliv má na frekvenční rozlišení počet vzorků v kombinaci s řádem modelu.

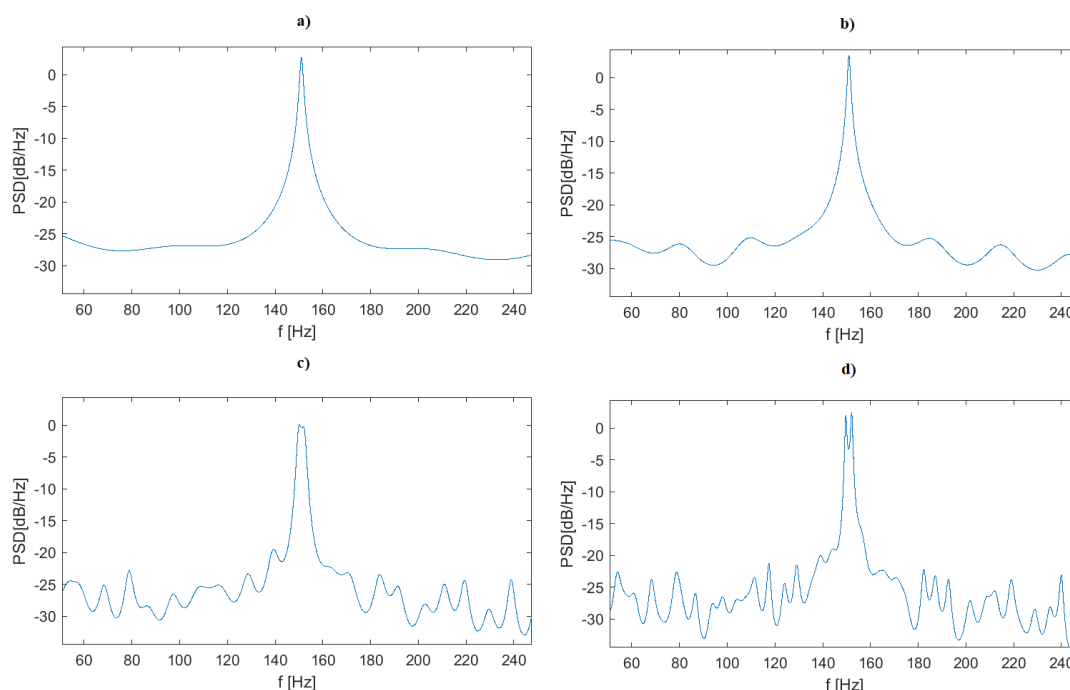
Jelikož víme, že zkoumaný signál by měl obsahovat dvě úzkopásmové složky, pro posouzení vlivu délky signálu bude použit řád modelu $p = 4$ (jelikož, jak je uvedeno v podkapitole 3.1, počet špiček odhadu PSD pomocí autoregresního modelování je $p/2$). Na obrázku 4.7 je potom vidět, že po překročení hranice cca $N = 50$ vzorků se již jakýkoliv vliv na frekvenční rozlišení neprojevuje. Špička, která v odhadu reprezentuje obě úzkopásmové složky si zachovává stejnou šířku pásma a metoda umísťuje do odhadu jako druhou špičku mírné vyvýšení PSD na $f = 400$ Hz. Za povšimnutí stojí, že v případě a), kdy je $N = 30$ sice nejsou sinusoidy rozlišeny, ale odhad i s velmi nízkým počtem vzorků napomáhá určit, že se v okolí $f = 150$ Hz nachází úzkopásmová složka.



Obrázek 4.7 Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu o výkonu 1 W pomocí Yule-Walkerovy metody, řád modelu $p = 4$; pro počet vzorků N a) 30; b) 100; c) 1000; d) 10000; $f_s = 1$ kHz

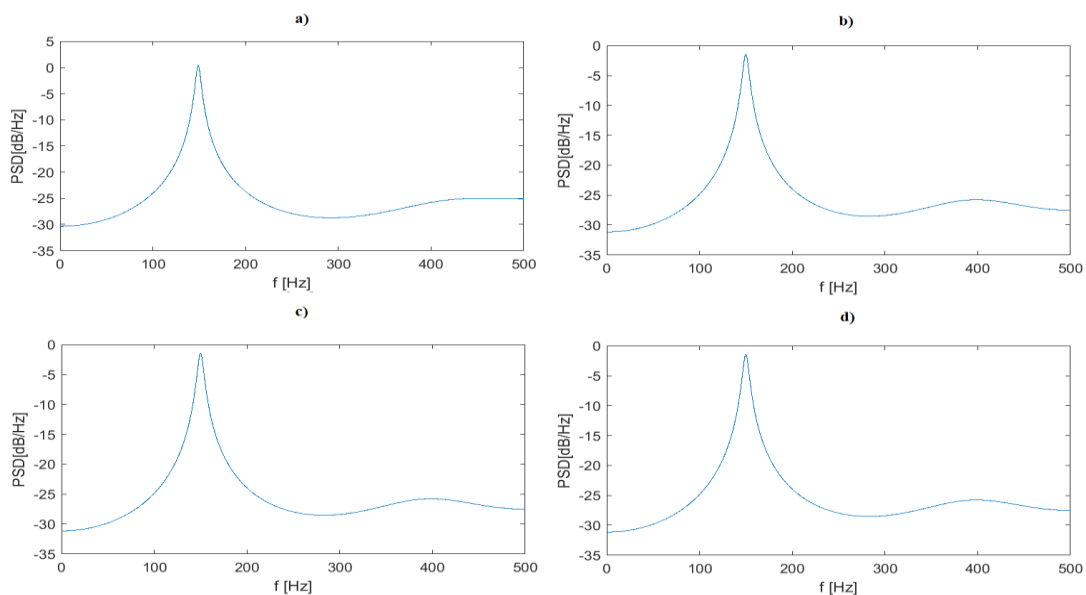
Jak bylo řečeno výše, frekvenční rozlišení závisí mimo jiné na řádu modelu p , nabízí se tedy pro dosažení vyššího rozlišení možnost řád zvýšit. Odhady PSD pro různé řády modelu jsou na obrázku 4.8. Pokud uvažíme $SNR = 2$ [–], tak dosažená frekvenční rozlišení Δf podle vztahu (1.14) jsou: a) 16,17 Hz; b) 4,91 Hz; c) 1,57 Hz; d) 0,8 Hz. Z výsledků je patrné, že se sice tímto přístupem podařilo docílit odhadu, který obě úzkopásmové složky zobrazuje odděleně (dle očekávání případy c), kde dochází pro

složku na frekvenci 150 Hz k vychýlení o 0,5 Hz a d), kde je složka již na správné frekvenci). Na první pohled je patrná jedna zásadní nevýhoda, tj. že zvýšením řádu se do odhadu PSD představilo velké množství špiček, jejichž přítomnost jednak zhoršuje rozptyl odhadu, ale především, pokud není složení signálu předem známo, vede potenciálně na chybnou identifikaci těchto špiček jako dalších úzkopásmových složek. Je ale možné velikost těchto přidaných špiček, resp. rozptylu do jisté míry omezit, jak bude ukázáno v podkapitole 4.2.

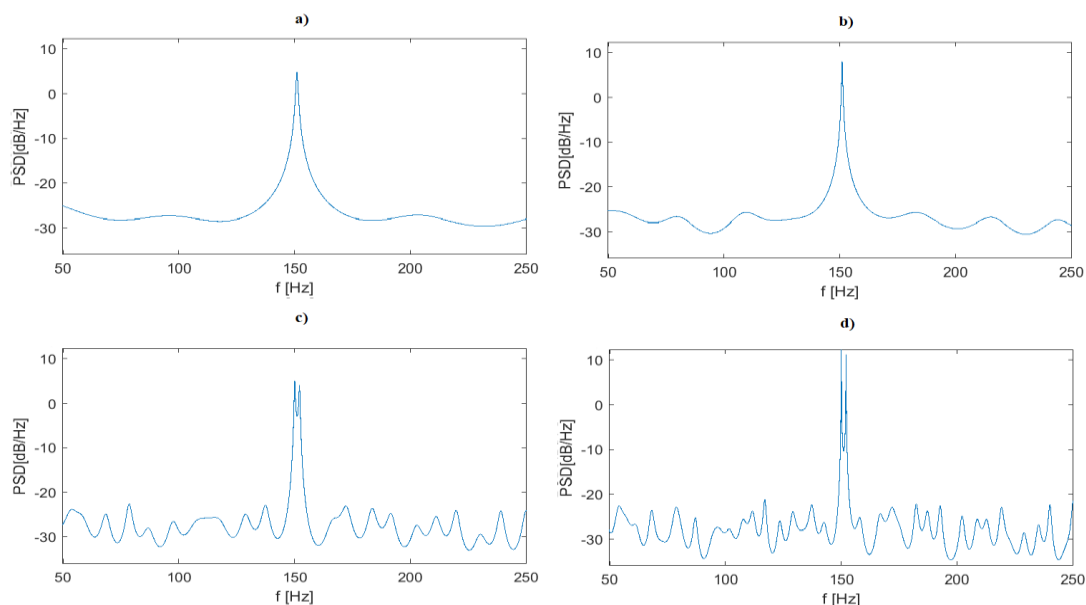


Obrázek 4.8 Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu o výkonu 1 W pomocí Yule-Walkerovy metody, pro počet vzorků $N = 1000$, $f_s = 1 \text{ kHz}$ a řád modelu p a) 20; b) 50; c) 120; d) 200

Jelikož **metoda Burg** je příbuzná té Yule-Walkerově, vztah pro přibližné určení frekvenčního rozlišení zde platí stejný, a tak se dají předpokládat i podobné vlastnosti, což je patrné z výsledků na obrázku 4.9. Při stejných počtech vzorků, jako tomu bylo na obrázku 4.7 je vidět, že změna délky signálu nemá na frekvenční rozlišení opět téměř žádný vliv. Oproti Yule-Walkerově metodě zde případ a) pro $N = 30$ vzorků diskutabilně vykazuje lepší vlastnosti z hlediska frekvenčního rozlišení. Totiž rozdíl v šířce pásma špičky reprezentující sinusoidy oproti vyšším počtům vzorků je zde menší, než tomu bylo v případě Yule-Walkerovy metody. Obdobně jako u Yule-Walkerovy metody lze rozlišení zvýšit navýšením řádu modelu. Jak je vidět z obrázku 4.10, pro Burgovu metodu jsou špičky podstatně výraznější. V případě c) i d) jsou špičky na 152 Hz o cca 0,5 Hz vychýleny, což odpovídá rešerši z podkapitoly 3.1.2.

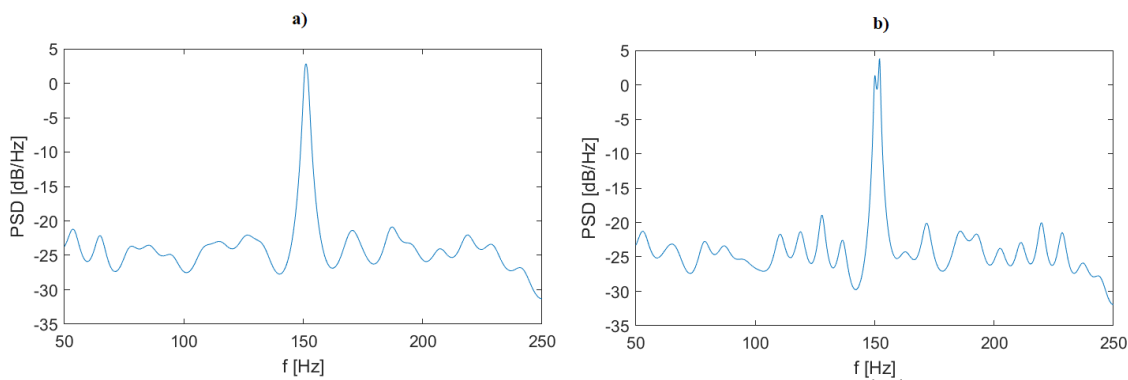


Obrázek 4.9 Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu o výkonu 1 W pomocí Burgovy metody, řád modelu $p = 4$; pro počet vzorků N a) 30; b) 100; c) 1000; d) 10000; $f_s = 1 \text{ kHz}$



Obrázek 4.10 Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu o výkonu 1 W pomocí Burgovy metody, pro počet vzorků $N = 1000$, $f_s = 1 \text{ kHz}$ a řád modelu p a) 20; b) 50; c) 120; d) 200

Je k dispozici ještě jedna možnost, jak rozlišení u parametrických metod zvýšit, obzvlášť v případě, kdy je PSD zaznamenaného signálu poměrně členité (čímž je myšleno že na úzkém pásmu se nachází vícero úzkopásmových složek s větším dynamickým odstupem oproti jinak relativně plochému navzorkovanému pásmu) a předmětem zájmu je rozlišit úzkopásmové složky na nízkých kmitočtech. Díky tomu, že rozlišení prakticky nezávisí na počtu vzorků můžeme záznam převzorkovat tak, že stále splníme vzorkovací teorém, ale zúžíme pásmo, které musí parametrická metoda odhadnout. Tím se zvýší frekvenční rozlišení, které je dle vztahu (1.14) závislé na hodnotě vzorkovacího kmitočtu. Například níže na obrázku 4.11 je odhad stejných sinusoid jako na obrázku 4.10, ale záznam byl filtrován strmou dolní propustí s mezním kmitočtem na Nyquistově frekvenci pro nový, poloviční vzorkovací kmitočet 500 Hz. Tím pádem se zachovává každý druhý vzorek. Nyní jsme složky schopni rozlišit již při řádu modelu $p = 60$.



Obrázek 4.11 Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu o výkonu 1 W pomocí Burgovy metody, pro počet vzorků $N = 500$, $f_s = 500$ Hz a řád modelu p a) 50; b) 60

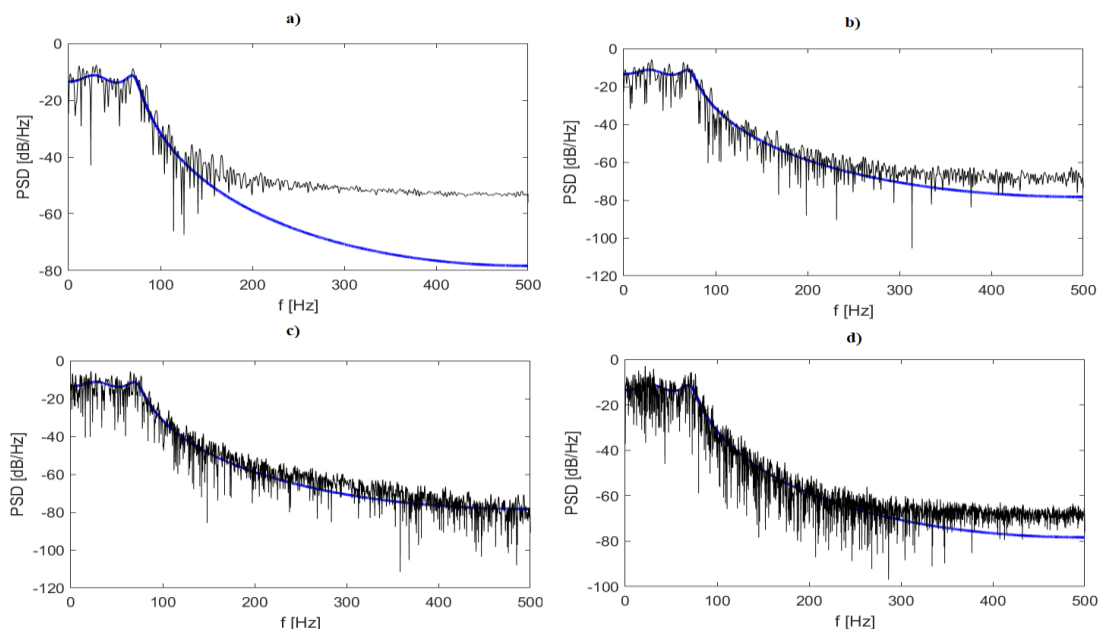
4.2 Vliv délky signálu a parametrů metod na rozptyl a vychýlení odhadu PSD

Pro zkoumání rozptylu a vychýlení odhadů v závislosti na délce nejsou kmitočtově blízké sinusoidu v šumu vhodným typem signálu. Vhodnější bude signál, kde je předmětem zájmu spíše tvar PSD, např. za účelem odečtení výkonu na pásmu. Jelikož se také při analýzách bude míra podobnosti odhadu pravému (teoretickému) PSD posuzovat pomocí MSE, je třeba signál, jehož pravé PSD lze získat (kupříkladu nelze pravé PSD vytvořit průměrováním odhadů, které jsou zatíženy vychýlením) a použít pro výpočty. Navíc pro vizuálně výrazné vystihnoutí vychýlení vlivem prosakování v odhadech je třeba signál, jehož PSD bude mít velký dynamický rozsah.

Všechny tyto požadavky splňuje autoregresní proces, který je zde volen čtvrtého řádu, tedy $AR(4)$, generován bílým šumem o výkonu 1,25 mW, s koeficienty

$a_1 = -3.492$; $a_2 = 4.769$; $a_3 = -3.007$; $a_4 = 0.7374$. Pro účely výpočtů je téměř pravé PSD generováno jako odhad Burgovy metody řádu $p = 4$ z milionu vzorků.

Odhady v této kapitole jsou za účelem získání konzistentních výsledků tvořeny z jedné zaznamenané realizace procesu.

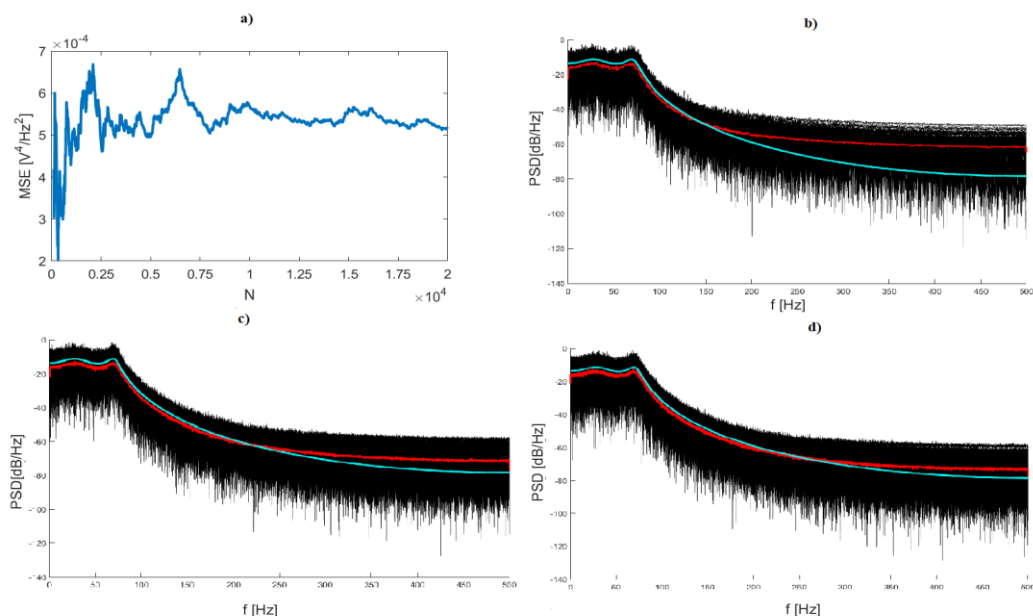


Obrázek 4.12 Odhady PSD (černá) autoregresního procesu 4. řádu pomocí periodogramu. Proloženo pravým PSD (modrá). Počet použitých vzorků a) $N = 333$; b) $N = 500$; c) $N = 1000$; d) $N = 2000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$

Na obrázku 4.12 výše je patrný dopad délky signálu na rozptyl a vychýlení odhadu pomocí **periodogramu**. Při vzájemném porovnání jednotlivých případů a) až d) je rozptyl odhadů dle obrázku 4.12 dobře patrný. S nárůstem délky nemají odhady konzistentní charakter, mezi případy a) a b) odchýlení odhadu nejprve klesne, v případě c) téměř vymizí a v případě d) je opět na stejné úrovni jako tomu bylo v případě b). Vzhledem k obsahu podkapitoly 2.1 lze předpokládat, že odhady jsou vychýleny. Každopádně pro posuzování rozptylu a vychýlení metod bude zřejmě vhodné využít vícero realizací procesu.

Situaci lépe osvětluje obrázek 4.13 a) na němž je vynesena závislost MSE odhadů jedné realizace na počtu vzorků. Z průběhu vyplývá to, co už naznačily odhady na obrázku 4.12, tj. hodnoty MSE vlivem rozptylu s rostoucím počtem vzorků kolísavě narůstají a následně se ustálí na přibližně konstantní hodnotě. Obrázky 4.13 b), c), d) byly vytvořeny ze 100 nezávislých realizací AR(4) procesu za účelem osamostatnění vychýlení odhadů a lepší vizualizace jejich rozptylu. Z těchto obrázků je patrné, že vychýlení s rostoucím počtem vzorků klesá. Případ b) ilustruje, že nepřítomnost vychýlení na obrázku 4.12 c) je zavádějící a platná pouze pro konkrétní realizaci, což

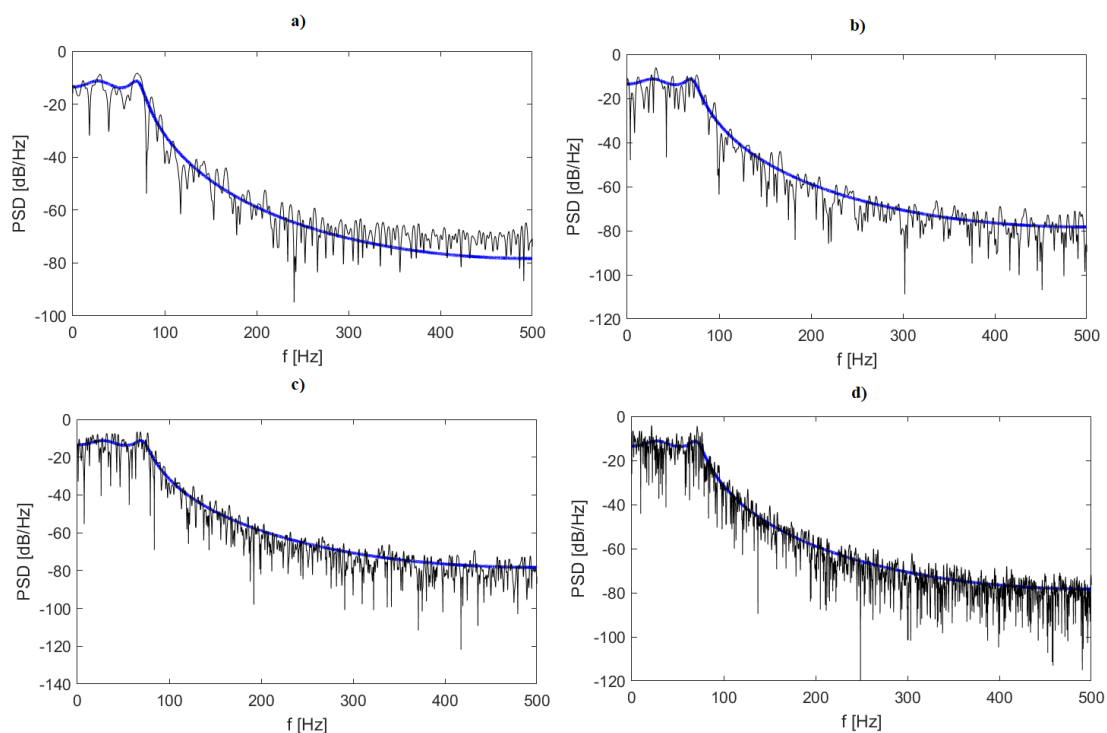
podtrhuje výhody dostupnosti vícero realizací procesu. Z toho lze usoudit, že většina příspěvku hodnoty MSE je dána rozptylem odhadů, který se s rostoucím počtem vzorků ustaluje na konstantní hodnotě. Výše zmíněné potvrzuje informace získané během literární rešerše, totiž že periodogram není statisticky stabilním (konzistentním) odhadem PSD.



Obrázek 4.13 a) Závislost MSE odhadů PSD autoregresního procesu 4. řádu pomocí periodogramu na počtu vzorků od 100 do 20000; b), c), d) Odhady PSD (černá) $AR(4)$ pomocí periodogramu pro 100 nezávislých realizací, jejich průměr (červená) a pravé PSD (modrá). Počet použitých vzorků b) $N = 1000$; c) $N = 10000$; d) $N = 20000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$

Některé nedostatky **periodogramu** lze vyřešit jeho **modifikací** okénkovou funkcí. Očekávat lze zlepšení především v oblasti vychýlení, jelikož většina vychýlení v obyčejném periodogramu je způsobena prosakováním a okénkové funkce tyto postranní laloky potlačují. Do jisté míry se dá očekávat i mírné zlepšení rozptylu, jelikož se zároveň rozšíří laloky hlavní a tím se odhad vyhladí.

Na obrázku 4.14 jsou zobrazeny odhady PSD pomocí periodogramu s Hammingovým oknem pro stejné počty vzorků jako na obrázku 4.12. Použití okénkové funkce viditelně odstranilo vychýlení odhadů, s výjimkou odhadu a) pro $N = 333$, takže i když je vychýlení stále závislé na délce signálu, začne klesat už při malých délkách, což potvrzuje i obrázek 4.15 b), c), d). Na něm je vidět pro případ b) při průměrování odhadů 100 realizací délky $N = 1000$ ještě mírné vychýlení na vysokých kmitočtech, v případě c) a d) již není toto vychýlení přítomno. Potlačení vychýlení na vysokých kmitočtech se odvíjí od vlastností okénkové funkce, především od hodnoty asymptotického poklesu postranních laloků. Výpis pro jednotlivé funkce je v tabulce 2.1.

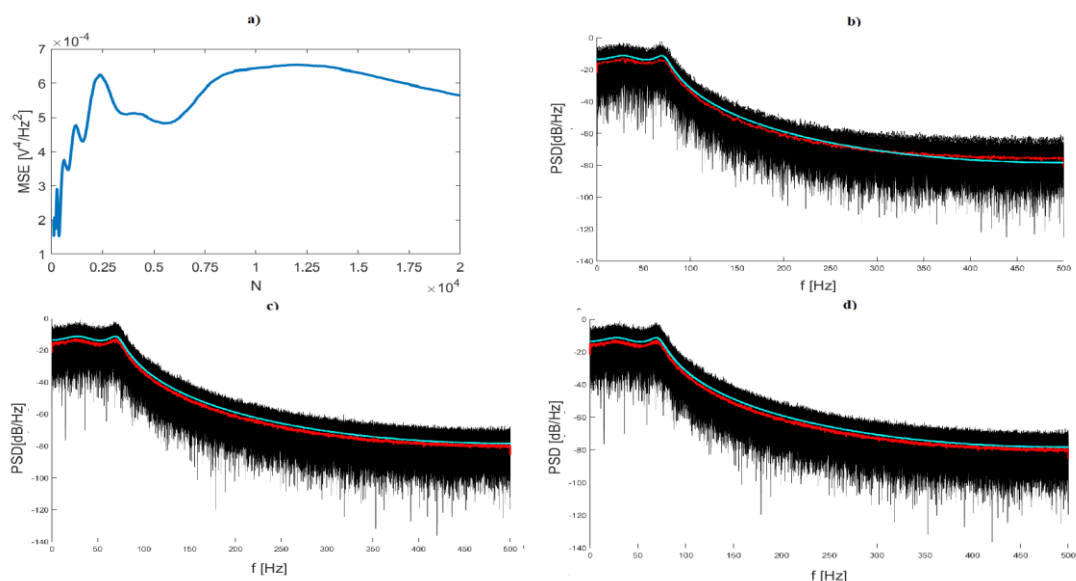


Obrázek 4.14 Odhady PSD (černá) autoregresního procesu 4. řádu pomocí periodogramu s Hammingovým oknem. Proloženo pravým PSD (modrá). Počet použitých vzorků a) $N = 333$; b) $N = 500$; c) $N = 1000$; d) $N = 2000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$

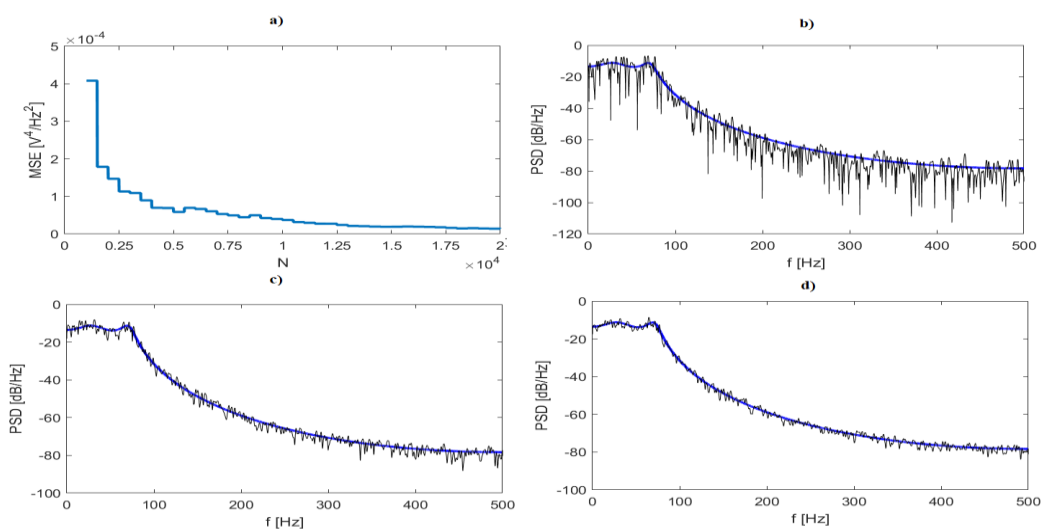
Průběh MSE na obrázku 4.15 a) ukazuje, že oproti obrázku 4.13 a) použití okénkové funkce cca nad $N = 1000$ vzorků minimalizuje příspěvek vychýlení, který se projevoval jako výrazné špičky průběhu. Průběh MSE s Hammingovým oknem oproti základnímu periodogramu vykazuje vyšší hodnoty MSE (vzhledem k omezení vychýlení vlastně rozptylu) pro velké délky signálu ($N = 10000$ a víc), naproti tomu dosahuje nižších hodnot pro délky kratší.

Vlastnosti odhadu pomocí **Welchovy metody** v oblasti rozptylu a vychýlení se pro danou délku signálu odvíjí od použité okénkové funkce, délky segmentu a překryvu mezi segmenty. Okénková funkce slouží kromě vyhlazení dílčích odhadů především k potlačení jejich vychýlení, tak jak bylo demonstrováno na obrázcích 4.13 a 4.15.

V první řadě bude předmětem zájmu vliv délky signálu na rozptyl a vychýlení odhadu, pokud použijeme fixní délku jednoho segmentu, překryvu a stejnou okénkovou funkci. Z odhadů na obrázku 4.16 b), c), d) vyplývá, že s rostoucím počtem vzorků dochází k poklesu rozptylu, což je dáno vlivem průměrování při použití narůstajícího počtu segmentů. Vychýlení je vlivem použitého Hannova okna minimalizováno.



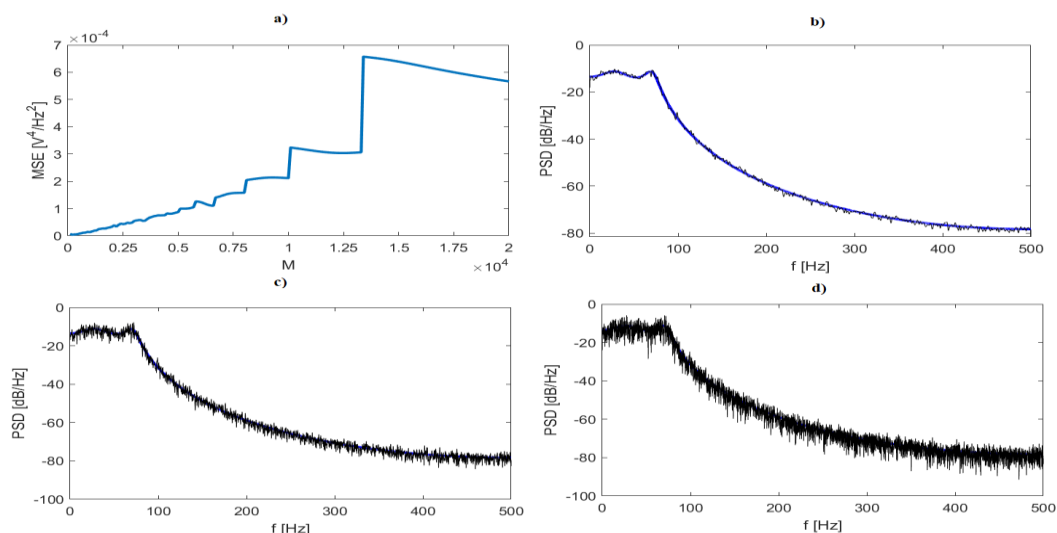
Obrázek 4.15 a) Závislost MSE odhadů PSD autoregresního procesu 4. řádu pomocí periodogramu s Hammingovým oknem na počtu vzorků od 100 do 20000; b), c), d) Odhady PSD (černá) $AR(4)$ pomocí periodogramu s Hammingovým oknem pro 100 nezávislých realizací, jejich průměr (červená) a pravé PSD (modrá). Počet použitých vzorků b) $N = 1000$; c) $N = 10000$; d) $N = 20000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$



Obrázek 4.16 a) Závislost MSE odhadů PSD autoregresního procesu 4. řádu pomocí Welchovy metody na počtu vzorků od 1000 do 20000; délka segmentu $M = 1000$; překryv 50 %; Hannovo okno; b), c), d) Odhady PSD (černá) $AR(4)$ pomocí Welchovy metody se stejným nastavením parametrů. Počet použitých vzorků b) $N = 1000$; c) $N = 3000$; d) $N = 5000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$

Průběh na obrázku 4.16 a) dobře ukazuje chování rozptylu (díky potlačení vychýlení tvoří drtivou většinu MSE) v závislosti na počtu vzorků. Schodovité poklesy v hodnotě indikují, kde se do průměrování zapojuje další segment. Dobrého omezení rozptylu dosahuje metoda při průměrování 10 a více segmentů, v případě nároků na vyšší rozlišení by měly být dle průběhu MSE průměrovány alespoň 4 segmenty. Jelikož se hodnota rozptylu s rostoucí délkou asymptoticky blíží nule, lze odhad Welchovou metodou označit jako statisticky stabilní (konzistentní).

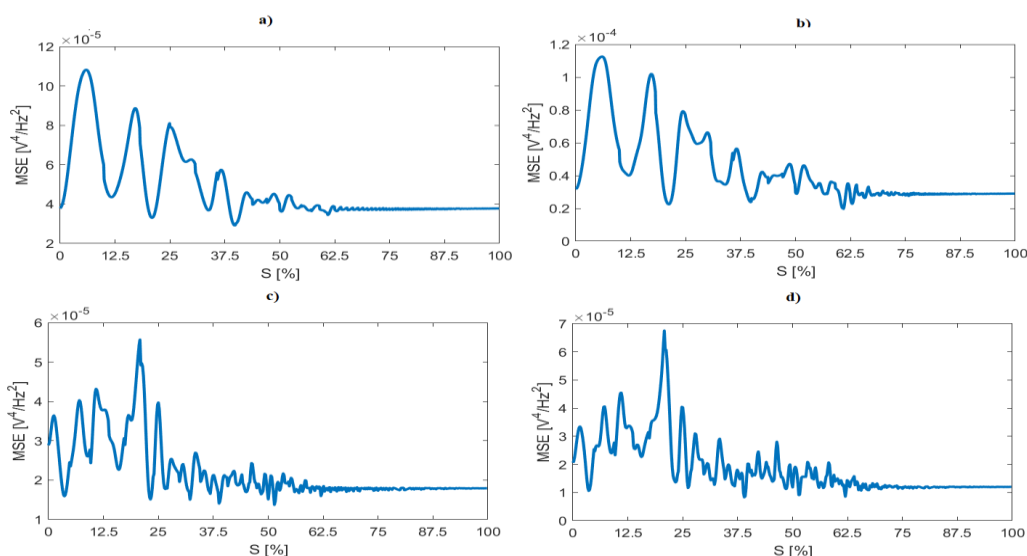
Obdobný dopad na rozptyl odhadu lze očekávat i při změnách délky segmentu, při pevném nastavení počtu vzorků, překryvu a okénkové funkce. S rostoucí délkou segmentu se jejich počet zmenšuje, tím pádem se jich průměruje méně, a dochází k nárůstu rozptylu odhadu, viz obrázek 4.17. Na průběhu MSE, 4.17 a) je patrné, že rozptyl odhadů tvořených z nízkých počtů segmentů (přibližně 5 a méně) nabývá stejného charakteru, jako rozptyl odhadu modifikovaného periodogramu, obrázek 4.15 a), soudě dle tvaru křivek mezi přechody v počtu segmentů.



Obrázek 4.17 a) Závislost MSE odhadů PSD autoregresního procesu 4. řádu pomocí Welchovy metody na délce segmentu M od 100 do 20000 vzorků; počet vzorků signálu $N = 20000$; překryv 50 %; Hannovo okno; b), c), d) Odhady PSD (černá) $AR(4)$ pomocí Welchovy metody se stejnými parametry. Délka segmentů b) $N = 1000$; c) $N = 5000$; d) $N = 10000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$

Efekt překryvu segmentů na hodnotu MSE při fixním počtu vzorků a délce segmentu pro Hannovo a Nuttallovo okno je zobrazen na obrázku 4.18. Byť se průběhy liší v detailech v závislosti na použité okénkové funkci a délce segmentu, jejich společným rysem je ustálení hodnoty MSE (v tomto případě opět především tvořeného rozptylem) na minimální hodnotě pro vysoké procento překryvu, v případě Hannova okna v okolí překryvu 62,5 %, v případě Nuttallova okna od mírně vyšší hodnoty 70 %. Společné mají

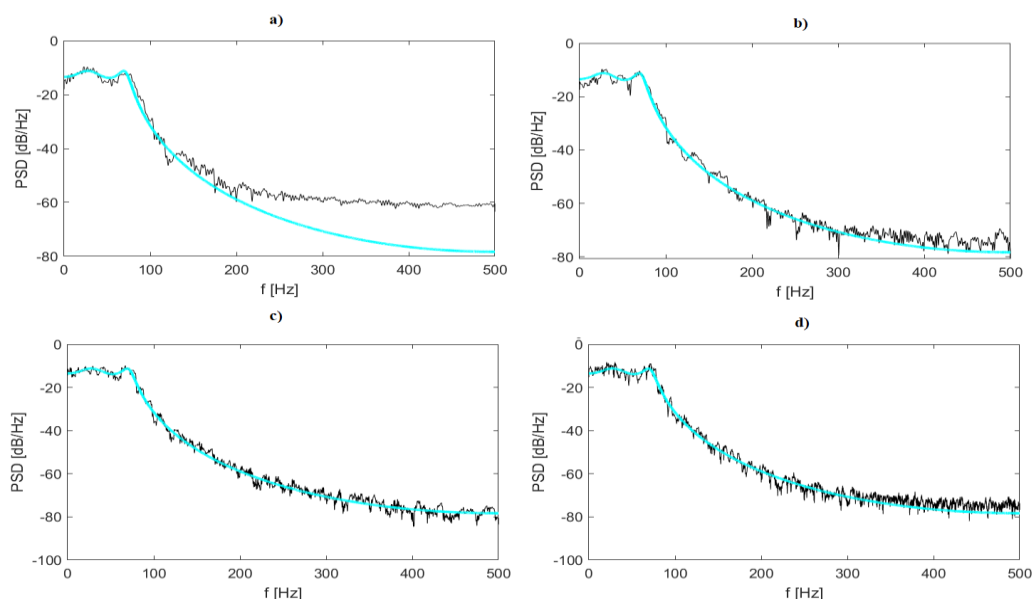
průběhy také přítomnost lokálního poklesu rozptylu v blízkém okolí překryvu 50 %. Tyto výsledky podporují běžně používané hodnoty překryvu 50 % a 75 %. [5]



Obrázek 4.18 Závislost MSE odhadů PSD autoregresního procesu 4. řádu pomocí Welchovy metody na překryvu segmentů od 0 do 100 %; počet vzorků signálu $N = 10000$; délka segmentu, použité okno: a) $M = 1000$, Hannovo; b) $M = 1000$, Nuttallovo; c) $M = 500$, Hannovo; d) $M = 500$, Nuttallovo; $f_s = 1 \text{ kHz}$

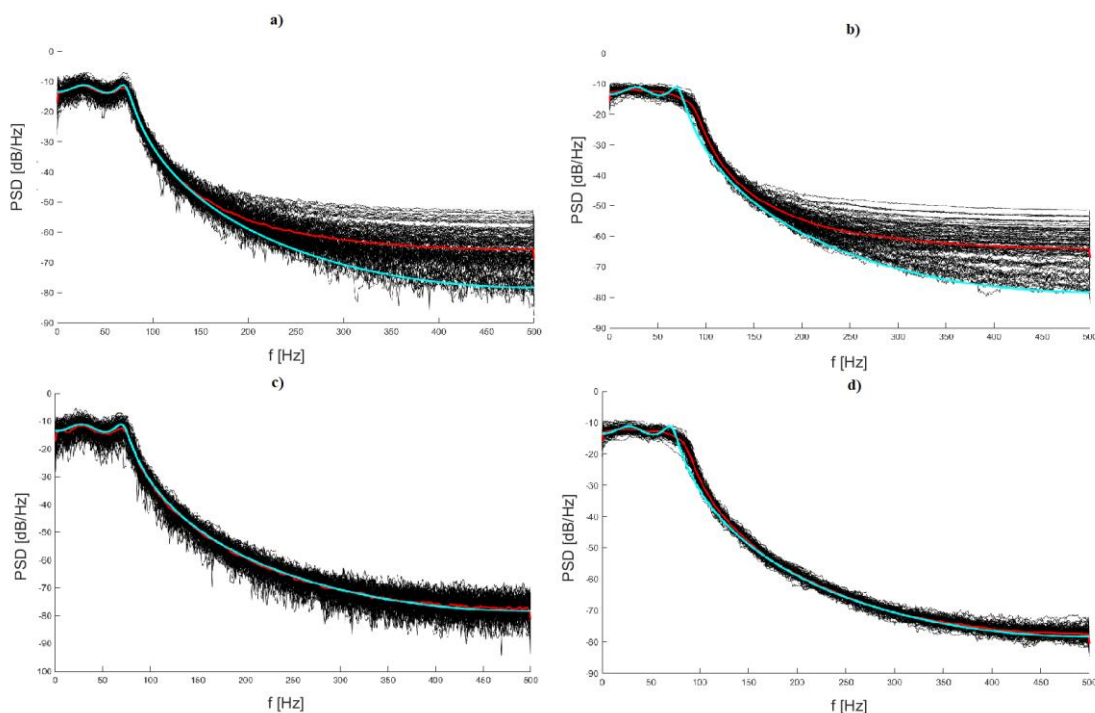
Samozřejmě je také možné pro konkrétní konfiguraci ostatních parametrů metody dosáhnout i nižších hodnot rozptylu, jak indikuje obrázek 4.18 a), kde se minimum průběhu pro signál délky $N = 10000$ vzorků o délce segmentu $M = 1000$ vzorků za použití Hannova okna nachází na hodnotě překryvu 40 %. Jelikož toto ale platí právě jen pro danou konfiguraci, je v obecném případě pro předvídatelnější výsledek nejlepší zvolit výše zmíněný překryv 75 %, potažmo 50 %.

Vliv délky signálu na rozptyl a vychýlení odhadu (pro jednu hodnotu součinu $NW = 3$ při použití maximálního počtu Slepianových sekvencí, tj. 5) **metody Multitaper** je patrný na obrázku 4.19. Z průběhů na obrázku plyne, že zřejmě nedochází s nárůstem počtu vzorků k výraznému poklesu rozptylu, především je ale ve všech případech kromě c) viditelné vychýlení průběhu na vyšších kmitočtech. Toto vychýlení je způsobeno několika posledními použitými Slepianovými sekvencemi, jejichž energie již oproti nižším sekvencím prosakuje z hlavního laloku šířky $2W$, viz obrázek 2.8. Proto lze toto vychýlení omezit odebráním těchto sekvencí z výpočtu odhadu PSD, viz obrázek 4.20, z něž plyne, že odstranění posledních 2 až 3 sekvencí vychýlení odhadu na vysokých kmitočtech výrazně omezí. Zároveň však odstraněním těchto okénkových funkcí dojde ke zvýšení rozptylu odhadu, viz obrázek 4.21.



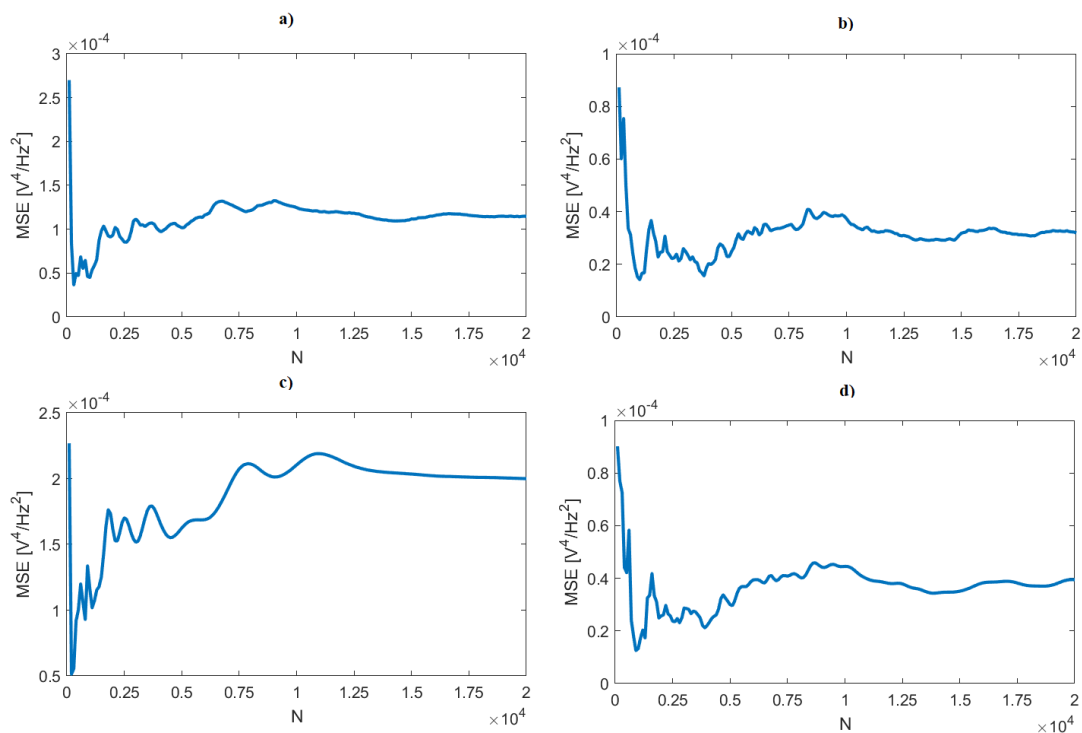
Obrázek 4.19 Odhady PSD (černá) autoregresního procesu 4. řádu pomocí metody Multitaper, $NW = 3$, počet použitých sekvencí 5. Proloženo pravým PSD (modrá). Počet použitých vzorků a) $N = 333$; b) $N = 500$; c) $N = 1000$; d) $N = 2000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$

Obrázek 4.20 také dobře demonstruje hlavní mechanismus omezení rozptylu odhadu u metody Multitaper, a to je nastavení parametru W , který představuje polovinu šířky pásma hlavního laloku použitých okénkových funkcí (Slepianových sekvencí). Logicky tedy vyplývá, že čím vyšší bude pro danou fixní délku signálu hodnota NW , tím nižší bude hodnota rozptylu. Při srovnání případů a), c), kde $NW = 3$ s případy b), d), kde $NW = 10$, je u odhadů s vyšší použitou hodnotou součinu NW viditelně omezen rozptyl. Je zde ovšem patrný problém, dobře viditelný na nízkých kmitočtech ve spektru případů b) a d). Vlivem velké šířky hlavního laloku okénkových funkcí došlo ke snížení frekvenčního rozlišení a tím i ku vyhlazení tvarované části PSD na nízkých kmitočtech. Tímto došlo snížením rozptylu odhadu ku zvýšení jeho vychýlení, a to i v případě, že vychýlení na vysokých kmitočtech vlivem prosakování je potlačeno, viz obrázek 4.20 d).



Obrázek 4.20 Odhady PSD (černá) $AR(4)$ pomocí metody Multitaper pro 100 nezávislých realizací, jejich průměr (červená) a pravé PSD (modrá). Použitá délka signálu $N = 500$ vzorků; parametry: a) $NW = 3$, sekvencí: 5; b) $NW = 10$, sekvencí: 19; c) $NW = 3$, sekvencí: 3; d) $NW = 10$, sekvencí: 16; $f_s = 1 \text{ kHz}$

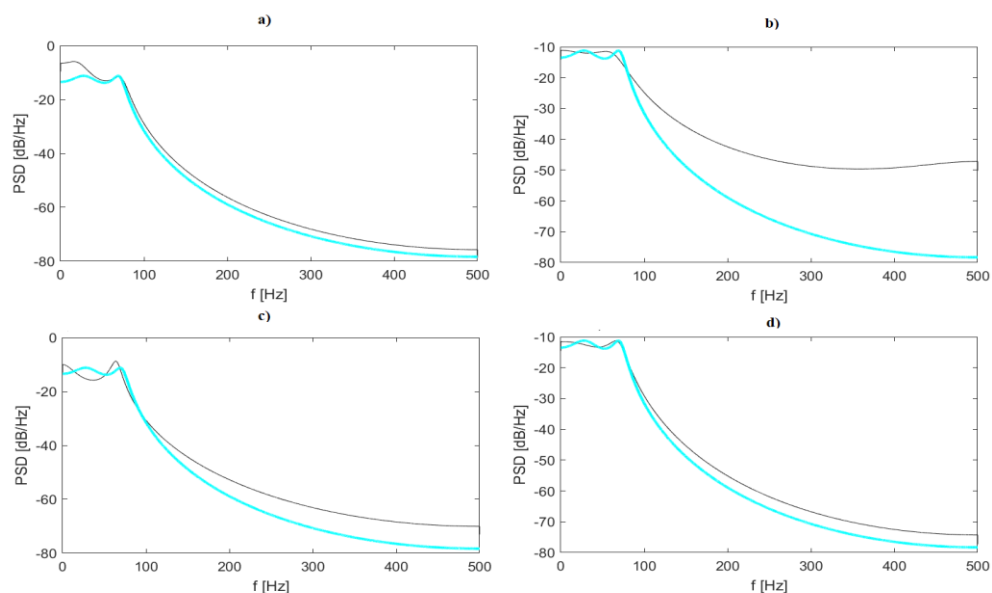
Ke stejným závěrům lze dospět i posouzením závislosti MSE na délce signálu, obrázek 4.21, pro stejné parametry metody, jako na obrázku 4.20. Z průběhů je patrné, že odebráním prosakujících sekvencí došlo ke zvýšení hodnoty rozptylu, která pro konkrétní nastavení součinu NW je pro krátké signály (pod $N = 1000$) vysoká, v okolí $N = 1000$ dosahuje minima, a především pak s rostoucí délkou narůstá, až se ustálí v okolí hodnoty, která se odvíjí od použitého NW (opět, čím vyšší je NW , tím nižší je rozptyl odhadu). Je zřejmé, že pro $NW = 10$ nedojde k tak velkému nárůstu rozptylu jako pro $NW = 3$, jelikož při větším množství použitých sekvencí je odebrání několika posledních z hlediska vyhlazení odhadu méně významné (odhad se pořád okénkuje 16 sekvencemi). Zároveň je také v případě d) na průběhu pro krátké délky signálu (pod $N = 1000$) patrná přítomnost vychýlení způsobeného nízkým rozlišením odhadu, jako nárůst hodnot MSE.



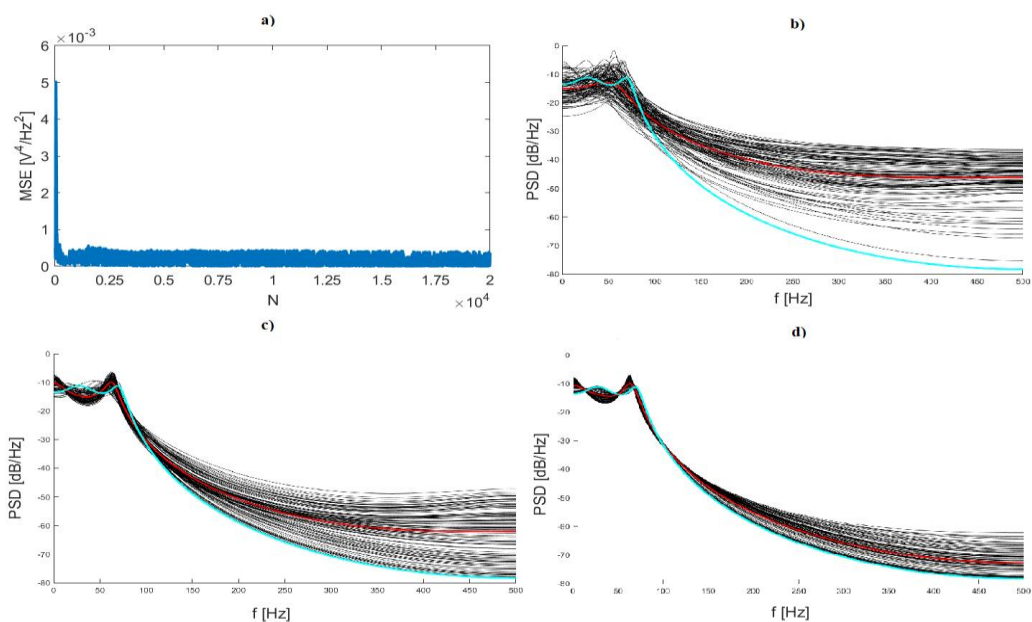
Obrázek 4.21 Závislost MSE na délce signálu pro odhady PSD pomocí metody Multitaper pro N od 100 do 20000. Použité parametry: a) $NW = 3$, sekvencí: 5; b) $NW = 10$, sekvencí: 19; c) $NW = 3$, sekvencí: 3; d) $NW = 10$, sekvencí: 16; $f_s = 1 \text{ kHz}$

Chování rozptylu a vychýlení jednotlivých odhadů vytvořených pomocí **metody Yule-Walker** je vidět na obrázku 4.22. Pro zjednodušení v tomto případě předpokládáme znalost vhodného řádu odhadu (řádu $p = 4$) a zaměřujeme se tedy pouze na vliv délky signálu. Obrázek 4.22 sám o sobě nepodává o vztahu mezi délkou signálu a rozptylem a vychýlením odhadu příliš dobrou představu. Je vidno, že pro délky, jež byly zvoleny jsou odhady zasaženy chybou střídavě jak na nízkých (případ a)), tak na vysokých (případ b)) kmitočtech, taktéž dochází v různé míře k vychýlení na kmitočtové ose (při pohledu na pozice dvou špiček PSD na nízkých kmitočtech).

Lepší představu proto poskytuje obrázek 4.23, kde konkrétně 4.23 a) udává závislost MSE odhadů tvořených z jedné realizace procesu na počtu použitých vzorků. Je zde patrné výrazné maximum MSE pro velmi krátkou délku signálu, do $N = 85$. Pro větší počty vzorků se sice hodnota MSE jako taková drží nízkých hodnot, ovšem ty chaoticky kolísají, což odpovídá výsledkům z obrázku 4.22. Jde tedy o skutečnost, že pokud odhad provádíme pomocí Yule-Walkerovy metody z jedné realizace procesu, odhad se může mírně lišit i při změně délky o několik vzorků. Na vině je už na obrázku 4.22 viditelné kmitočtové vychýlení špiček na nízkých kmitočtech odhadovaného PSD.



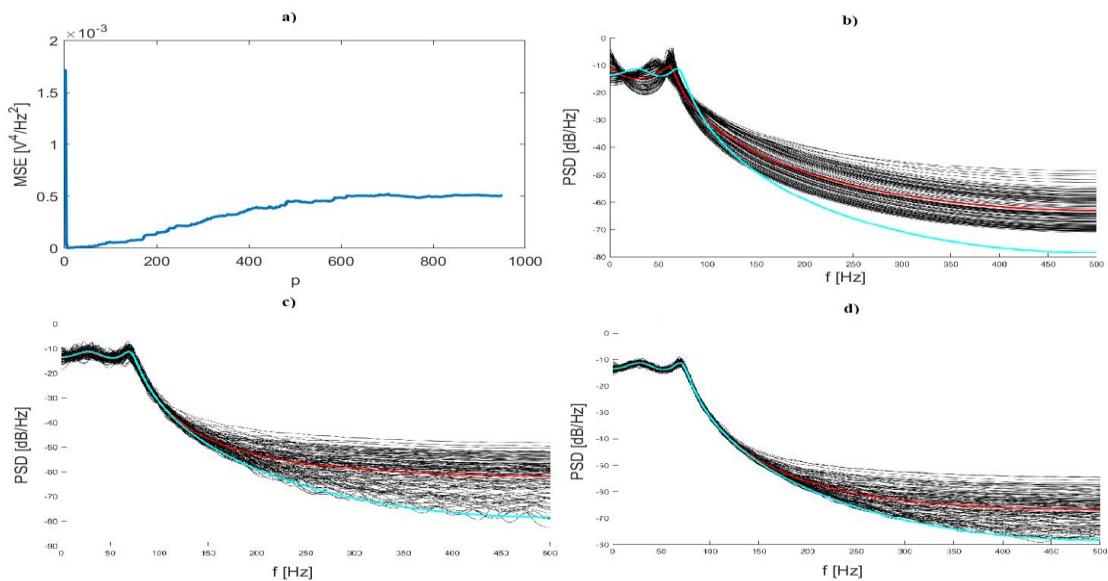
Obrázek 4.22 Odhady PSD (černá) autoregresního procesu 4. řádu pomocí metody Yule-Walker, řád odhadu $p = 4$. Proloženo pravým PSD (modrá). Počet použitých vzorků a) $N = 50$; b) $N = 200$; c) $N = 500$; d) $N = 1000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$



Obrázek 4.23 a) Závislost MSE odhadů PSD jedné realizace autoregresního procesu 4. řádu pomocí Yule-Walkerovy metody na počtu vzorků od 5 do 20000; b), c), d) Odhady PSD (černá) $AR(4)$ pomocí Yule-Walkerovy metody pro 100 nezávislých realizací, jejich průměr (červená) a pravé PSD (modrá). Počet použitých vzorků b) $N = 50$; c) $N = 1000$; d) $N = 20000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$

Spektrální odhady na obrázcích 4.23 b), c), d) v kombinaci s výše zmíněným objasňují, že z obecného pohledu s rostoucím počtem vzorků vychýlení odhadu klesá a klesá i jejich rozptyl. Problémem ale zůstává vychýlení na frekvenční ose (neschopnost odhadu vystihnout špičky PSD na nízkých kmitočtech na jejich správných pozicích), kdy jenom část realizací je schopna věrně vystihnout tvar spektra jako takový. Toto vede k přesvědčení, že v případě použití Yule-Walkerovy metody je třeba zvolit za účelem odstranění těchto problémů vyšší řád modelu. Např. kritérium AIC doporučuje pro tento odhad řád modelu $p = 8$.

Vliv řádu AR modelu na rozptyl a vychýlení odhadu je ilustrován na obrázku 4.24 a), kde vidíme, že MSE je pro příliš nízké řády vzhledem k počtu vzorků ($N = 1000$), do $p = 8$, vysoké, ovlivněno vychýlením odhadu z důvodu neschopnosti vystihnout všechny tvary ve spektru. Pro řády vyšší než $p = 8$ s nárůstem řádu narůstá i MSE, především pak od $p = 50$ rozptyl odhadů, vyvolaný přidáním nadbytečných špiček do spektra. Přibližně od řádu modelu $p = 500$, který odpovídá polovině dostupných vzorků, se MSE ustálí na přibližně konstantní hodnotě. Co je ale důležitým poznatkem o řádu modelu, viditelným na obrázku 4.24 c), zvýšení řádu má za následek odstranění kmitočtového vychýlení (viditelné na nízkých kmitočtech), samozřejmě za cenu navýšení rozptylu. Jak pak ukazuje obrázek 4.24 d), rozptyl odhadů a vychýlení mají potom stejné chování v závislosti na délce jako tomu bylo pro nízké řády, tj. s rostoucí délkou klesají.

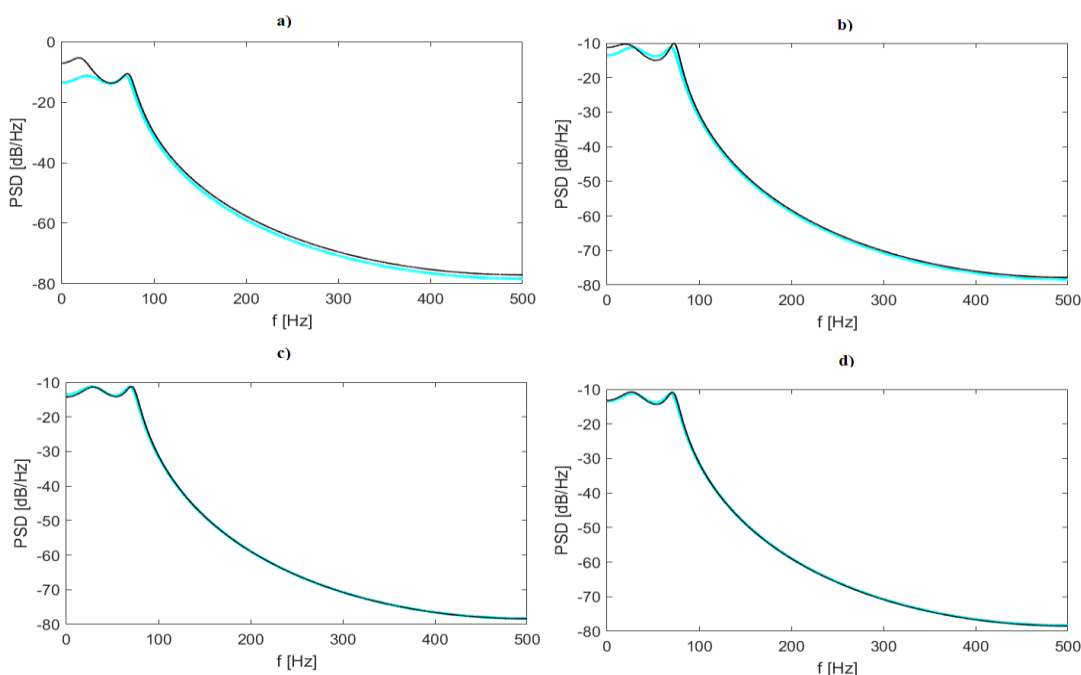


Obrázek 4.24 a) Závislost MSE odhadů PSD jedné realizace autoregresního procesu 4. řádu pomocí Yule-Walkerovy metody na řádu modelu od 1 do 300; $N = 1000$ b), c), d) Odhady PSD (černá) AR(4) pomocí Yule-Walkerovy metody pro 100 nezávislých realizací, jejich průměr (červená) a pravé PSD (modrá). Počet použitých vzorků a řád modelu b) $N = 1000, p = 3$; c) $N = 1000, p = 40$; d) $N = 5000, p = 120$; $f_s = 1 \text{ kHz}$

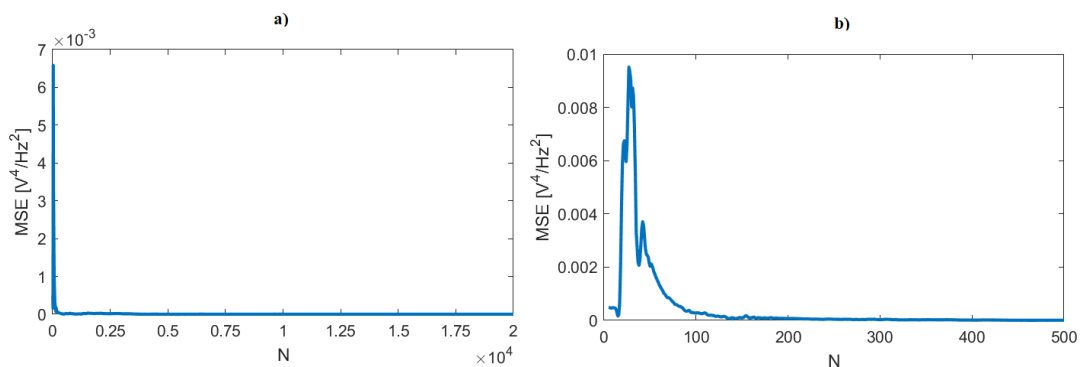
Výše zmíněné poznatky lze potom využít při snaze dosáhnout co největšího frekvenčního rozlišení pro odlišení dvou blízkých úzkopásmových složek. Navýšení rozlišení se dosáhne zvýšením řádu modelu a úroveň nadbytečných špiček, viz obrázek 4.8, lze potlačit výpočtem odhadu z většího počtu vzorků.

Rozptyl a vychýlení odhadů PSD jedné realizace $AR(4)$ procesu pomocí **Burgovy metody** můžeme pozorovat na obrázku 4.25, kde stejně jako u předchozí metody předpokládáme pro zjednodušení a izolaci vlivu délky signálu řád modelu $p = 4$. Jak je na obrázku patrné, odhady téměř nevykazují vychýlení na vysokých kmitočtech. V případě a) je přítomná na vysokých kmitočtech sice chyba, ovšem ve srovnání s Yule-Walkerovou metodou je drobná. Na nízkých kmitočtech při použití nízkého počtu vzorků je patrné kmitočtové vychýlení špiček, ovšem menší, než tomu bylo v případě Yule-Walkerovy metody. Tato chyba odhadu s rostoucím počtem vzorků vymizí, zdá se tedy, že řád $p = 4$ je zde dostatečný.

Stojí tedy za povšimnutí, že Burgova metoda ve srovnání s Yule-Walkerovou dokáže při vhodném řádu věrněji vystihnout tvar PSD při použití nízkého počtu vzorků. Schopnost poskytnout vyhlazený odhad potvrzuje i průběh MSE v závislosti na počtu vzorků na obrázku 4.26, pro velmi krátkou délku záznamu ($N < 80$) je MSE vysoké, vyšší než v případě metody Yule-Walker. Poté ale rapidně klesá a od $N = 150$ se MSE udržuje na konstantní nízké hodnotě.



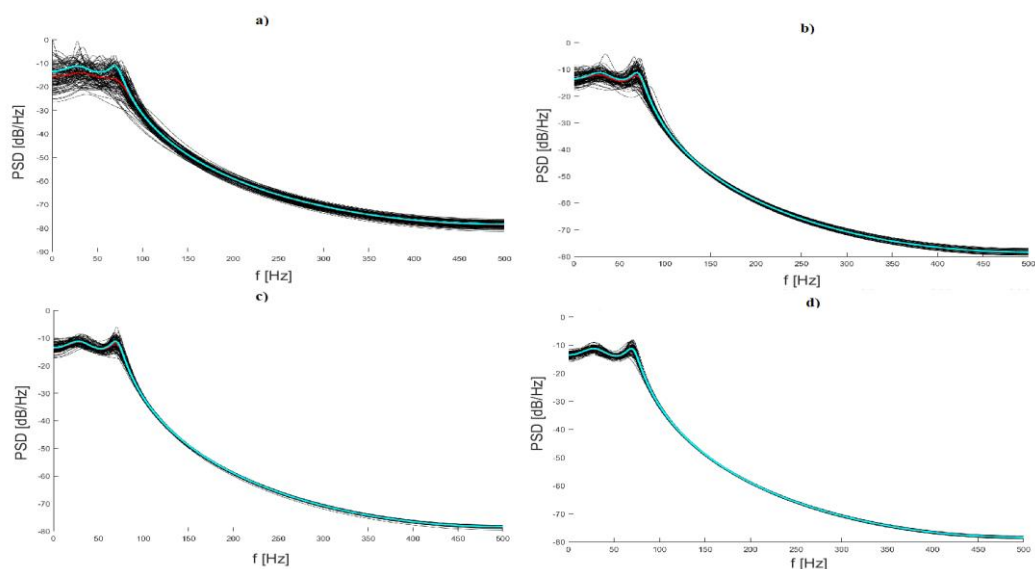
Obrázek 4.25 Odhady PSD (černá) autoregresního procesu 4. řádu pomocí Burgovy metody, $p = 4$. Proloženo pravým PSD (modrá). Počet použitých vzorků a) $N = 50$; b) $N = 200$; c) $N = 500$; d) $N = 1000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$



Obrázek 4.26 a) Závislost MSE odhadů PSD jedné realizace autoregresního procesu 4. řádu pomocí Yule-Walkerovy metody na počtu vzorků od 5 do 20000; b) detail průběhu pro N od 5 do 500; $f_s = 1 \text{ kHz}$

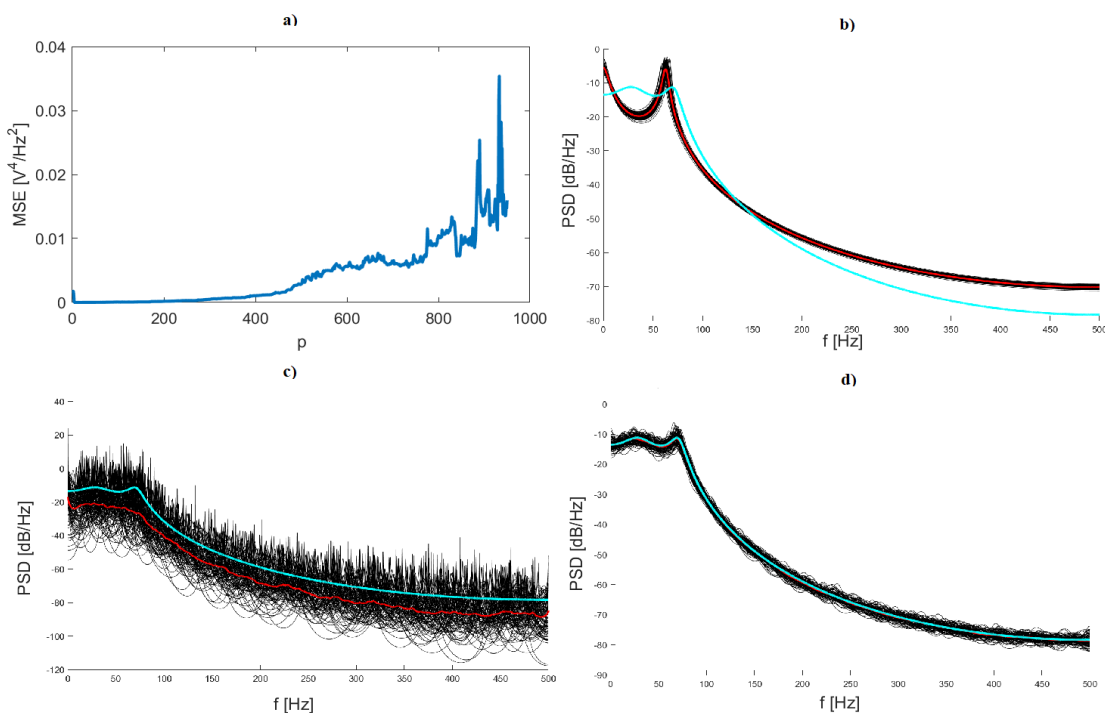
Výše uvedené značí, že z pohledu rozptylu (jelikož vychýlení prakticky vymizí) je při správné volbě řádu modelu Burgova metoda pro určení tvaru PSD velmi výhodná. Má však stále problém s kmitočtovým vychýlením, které se projevuje při modelování výrazných úzkopásmových složek, což bude předvedeno v následující podkapitole.

Pro lepší představu o chování rozptylu a vychýlení Burgovy metody viz obrázek 4.27. Nárůst počtu vzorků způsobí vymizení vychýlení na nízkých kmitočtech, kdy v případě b) už téměř není viditelné. Rozptyl odhadů pak dle očekávání s délkou klesá na velmi nízkou hodnotu, což je dáno i pro AR model vhodným tvarem odhadovaného spektra, viz podkapitola 3.2.



Obrázek 4.27 Odhady PSD (černá) AR(4) pomocí Burgovy metody pro 100 nezávislých realizací, jejich průměr (červená) a pravé PSD (modrá). Řád modelu $p = 4$, počet použitých vzorků a) $N = 50$; b) $N = 200$; c) $N = 500$; d) $N = 1000$; $f_s = 1 \text{ kHz}$

Co se týče vlastností Burgovy metody v závislosti na řádu autoregresního modelu, ty jsou ilustrovány obrázkem 4.28. Průběh MSE v závislosti na řádu modelu, obrázek 4.28 a), vykazuje podobné vlastnosti tomu u metody Yule-Walker, tj. dokud je řád příliš nízký, je odhad vychýlen, jelikož model nedovede reprezentovat všechny tvary ve spektru, viz obrázek 4.28 b). Při narůstajícím řádu odhadu narůstá i jeho rozptyl, kvůli přítomnosti většího počtu špiček v PSD. Rozdílem je zde strmost nárůstu MSE, kdy pro řády do $p = 500$, tj. poloviny vzorků signálu, je u Burgovy metody tato hodnota srovnatelná s případem Yule-Walkerovy metody. Příliš vysoký řád ($p > 500$) má za následek rapidní nárůst MSE, jehož hodnoty se pohybují o řád výše než u Yule-Walkerovy metody. Z toho vyplývá, že je vhodné řád volit maximálně do poloviny hodnoty počtu vzorků. Pro ilustraci odhadu s příliš vysokým řádem viz obrázek 4.28 c). Je zde taky patrné pro Burgovu metodu typické štěpení špiček odhadovaného spektra, kdy z odhadů některých realizací (černé průběhy) na pozici špičky na 80 Hz je na této frekvenci patrný důlek obklopený vyššími špičkami. Obdobně jako u předchozí metody, pokud je řád takto zvýšen za účelem vyššího frekvenčního rozlišení, lze nežádoucí vychýlení a rozptyl omezit poručením větší délky záznamu, viz obrázek 4.28 d).



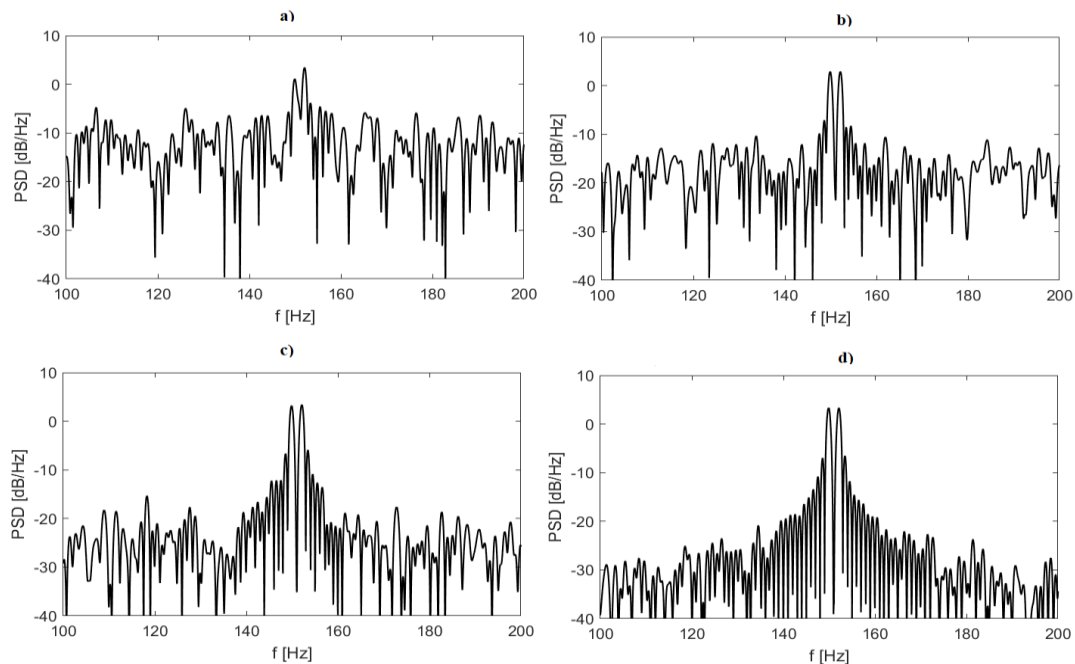
Obrázek 4.28 a) Závislost MSE odhadů PSD jedné realizace autoregresního procesu 4. řádu pomocí Burgovy metody na řádu modelu od 1 do 300; $N = 1000$ b), c), d) Odhady PSD (černá) $AR(4)$ pomocí Burgovy metody pro 100 nezávislých realizací, jejich průměr (červená) a pravé PSD (modrá). Počet použitých vzorků a řád modelu b) $N = 1000, p = 3$; c) $N = 50, p = 40$; d) $N = 1000, p = 40; f_s = 1 \text{ kHz}$

4.3 Vliv hodnoty SNR na vlastnosti odhadu PSD, rozlišitelnost úzkopásmových složek na šumovém pozadí

V zájmu přehlednosti je vliv odstupů signálu a šumu na vlastnosti odhadu diskutován zvlášť, v těchto následujících podkapitolách. Pro posuzování frekvenčního rozlišení bude opět použita směs sinusoid a bílého šumu, jelikož jsou na tomto typu signálu změny v rozlišení dobře viditelné. Při pozorování ostatních vlastností odhadu se dobře uplatní signál s tvarovaným spektrem, který je směsí užitečné složky a nežádoucího šumu. Takovým signálem je například linkový kód Manchester (zde pro posloupnost 200 pseudonáhodně generovaných bitů, na bit připadá 100 vzorků), u nějž je znám teoretický tvar PSD, který lze tedy použít jako vizuální referenci. Teoretické PSD pro kód Manchester lze vypočítat dle [14]

$$S_{Manchester}[f] = A^2 T_b \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\pi f T_b}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi f T_b}{2}\right), \quad (4.1)$$

kde A představuje maximální hodnotu signálu (hodnotu logických úrovní) a T_b je doba trvání jednoho bitu. Pro jednoduchost jsou v textu hodnoty voleny jako 1.

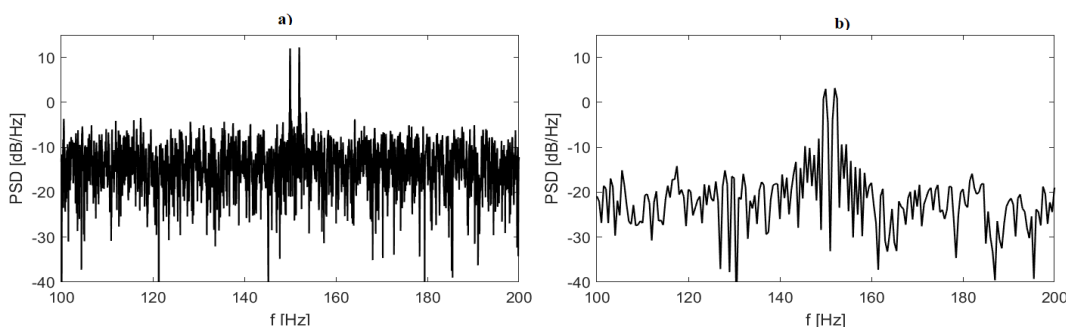


Obrázek 4.29 Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu pomocí periodogramu, za použití počtu vzorků $N = 1000$; výkon šumu a SNR: a) $P = 32$ W, $SNR = -12$ dB; b) $P = 8$ W, $SNR = -6$ dB; c) $P = 2$ W, $SNR = 0$ dB; d) $P = 0.2$ W, $SNR = 10$ dB; $f_s = 1$ kHz

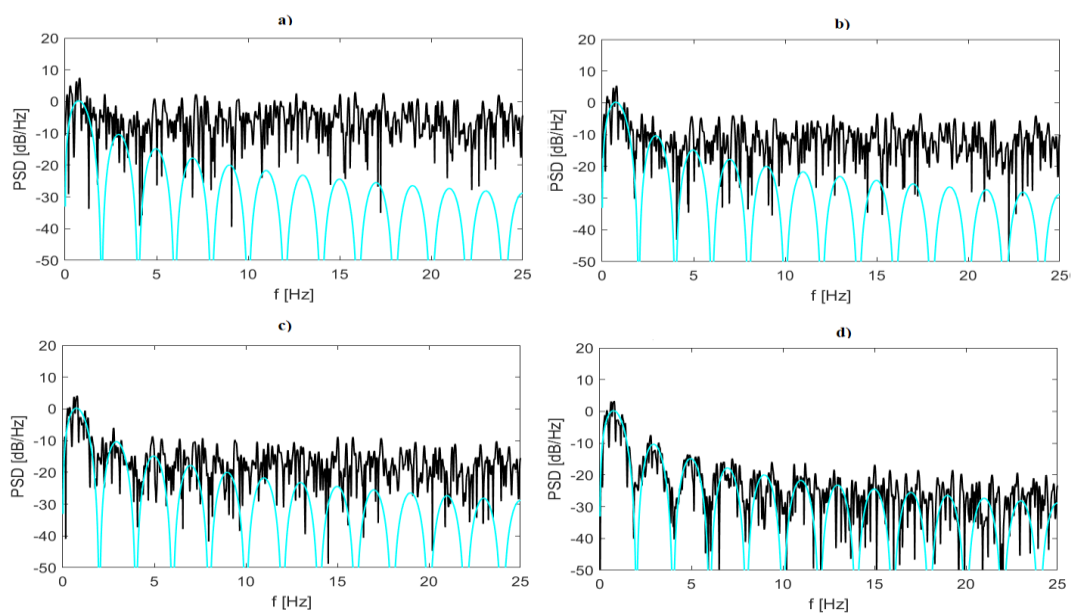
U odhadu vytvořeného **metodou periodogramu**, obdobně i **modifikovaného periodogramu** lze očekávat, že dopad SNR na frekvenční rozlišení samotné bude nulový. Na obrázku 4.29 výše se toto potvrzuje, frekvenční rozlišení se nemění. Ovšem co se týče schopnosti rozlišit sinusoidy v šumu, je na obrázku patrné, že vyšší výkon šumu samozřejmě znamená nárůst jeho spektrální výkonové hustoty. To může vést k tomu, že jsou sinusoidy od šumu neodlišitelné, jelikož náhodné špičky způsobené šumem se blíží úrovni skutečných sinusoid.

Problém, který představuje narůstající úroveň přídavného šumu ilustruje obrázek 4.31. Jelikož s klesajícím SNR narůstá úroveň šumového pozadí, znamená to, že pokud je část spektra pod úrovní šumu, nejsme schopni ji odhadem PSD zobrazit. Zároveň však ale odhad sám není nijak zasažen, co se týče rozptylu a vychýlení. Odchylku odhadu od teoretické hodnoty PSD v tomto případě nelze považovat za vychýlení, jelikož metoda správně zobrazuje úroveň šumu v dané části spektra.

U metod založených na aplikaci DFT přímo na data existují ale dva způsoby, jak v odhadu PSD zvýraznit sinusoidy oproti šumu. Jde o fakt, že PSD zobrazuje výkonovou hustotu ve spektru. Což znamená, že pokud má širokopásmový šum daný celkový výkon, tak i při změně počtu vzorků zachovává stejnou úroveň hustoty, jelikož jde stále o stejné pásmo navzorkovaných kmitočtů. Kdežto u úzkopásmové složky dojde ke změně šířky pásma hlavního laloku, a tím se její hustota změní. Tedy můžeme úzkopásmovou složku zvýraznit tím, že pořídíme větší počet vzorků při zachování stejného vzorkovacího kmitočtu, viz obrázek 4.30 a), kde zdesetinásobení počtu vzorků vede k nárůstu hustoty úzkopásmových složek o 10 dB, ve srovnání s obrázkem 4.29 a). Druhou možností je snížit úroveň hustoty šumu, čehož můžeme docílit navýšením vzorkovacího kmitočtu, jelikož pak se výkon rozprostírá na větším pásmu. Toto ovšem povede na pokles výkonové hustoty v celém spektru, a tak je třeba stejnou měrou navýšit i počet vzorků, což zajistí, že úzkopásmová složka si udrží stejnou úroveň, viz obrázek 4.30 b), kde zdesetinásobení vzorkovacího kmitočtu a zároveň zdesetinásobení počtu vzorků vede na pokles výkonové hustoty šumu o 10 dB.



Obrázek 4.30 Stejný odhad PSD jako na obrázku 4.29 a) pro počet vzorků a vzorkovací kmitočet: a) $N = 10000$, $f_s = 1 \text{ kHz}$; b) $N = 10000$, $f_s = 10 \text{ kHz}$;

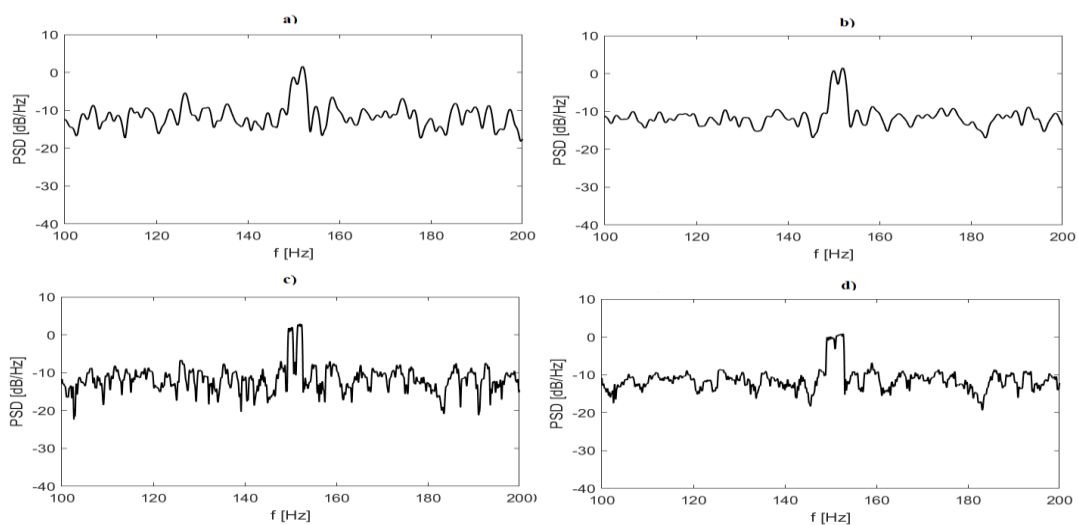


Obrázek 4.31 Odhady PSD (černá) kódu Manchester s přídavným bílým šumem pomocí periodogramu modifikovaného Hannovým oknem; proloženo teoretickým (ideálním) PSD (modrá). Počet vzorků $N = 2000$; SNR: a) $SNR = -12 \text{ dB}$; b) $SNR = -6 \text{ dB}$; c) $SNR = 0 \text{ dB}$; d) $SNR = 10 \text{ dB}$; $f_s = 100 \text{ Hz}$

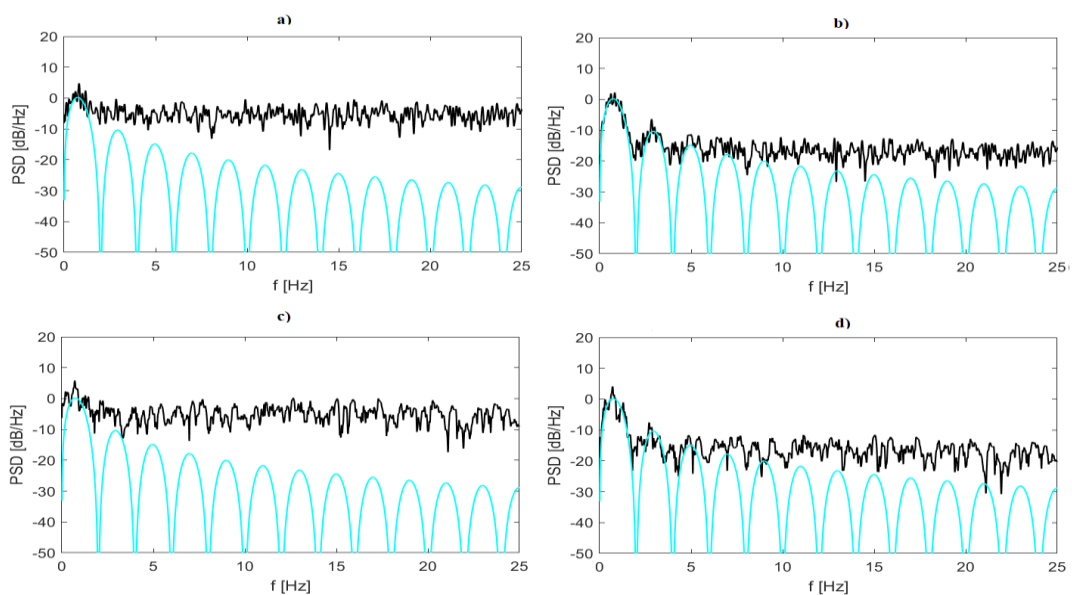
V případě **Welchovy metody** a **metody Multitaper** je dopad SNR na frekvenční rozlišení stejný jako výše, tj. nulový, jelikož v obou případech se jedná o modifikované periodogramy. V čem ale mají tyto metody oproti modifikovanému periodogramu výhodu je použití průměrování, které sice neovlivní rozlišení odhadu, avšak vyzdvihne sinusoidy v porovnání se šumem, viz obrázek 4.32. Respektive se průměrováním vyhladí špičky způsobené šumem, tedy se omezí rozptyl odhadu.

Je také třeba si uvědomit, že např. u Welchovy metody je pro zachování rozlišení třeba pořídit větší délku záznamu, aby byla k dispozici data pro průměrování, resp. se zvýšil počet segmentů, které se průměrují, viz obrázky 4.32 a) a b). U metody Multitaper se průměruje tolik odhadů, kolik je při výpočtu odhadu použito Slepianových sekvencí. Jelikož navýšení jejich počtu vede ku snížení rozlišení, viz předchozí dvě podkapitoly, je opět třeba pro zachování přijatelného rozlišení pořídit větší délku záznamu, viz obrázky 4.32 c) a d).

Průměrování odhadů použité v těchto metodách samozřejmě nepomůže se zobrazením částí spektra, které jsou pod úrovní šumového pozadí, viz obrázek 4.33. Ve srovnání s obrázkem 4.31 ale průměrování napomůže k vyhlazenějšímu odhadu PSD (omezení rozptylu), což je v případě tvarovaných spekter žádoucí.

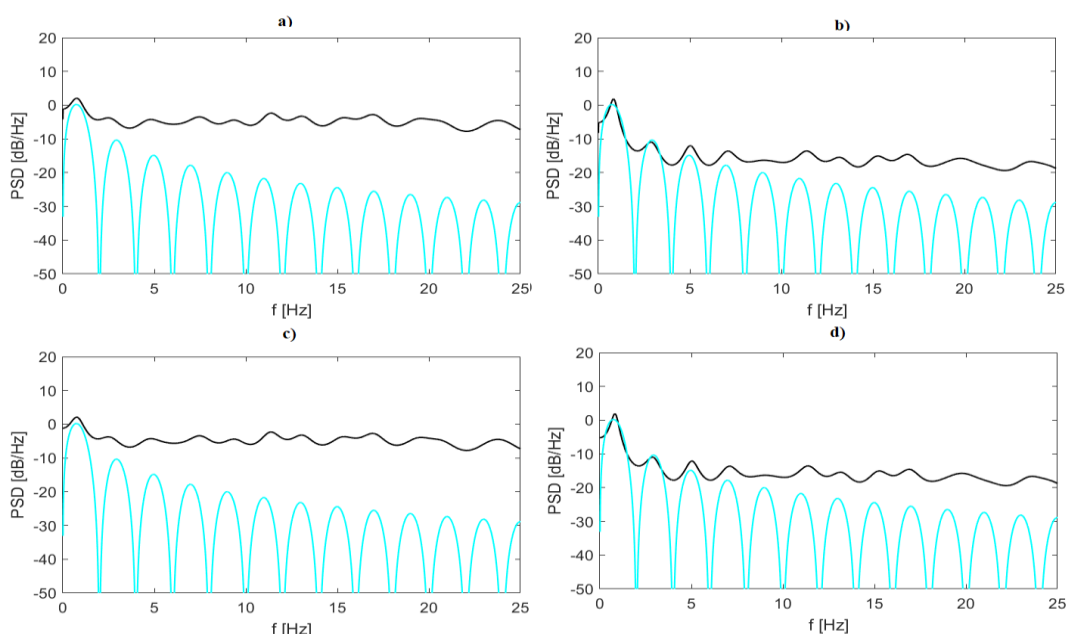


Obrázek 4.32 Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu o výkonu 32 W, $SNR = -12$ dB; Welchova metoda, trojúhelníkové okno, délka segmentu $M = 1000$, překryv 75 %, počet vzorků a) $N = 2000$ b) $N = 5000$; metoda Multitaper, počet vzorků $N = 3000$ c) $NW = 2$, sekvencí: 3; d) $NW = 3$, sekvencí: 5; $f_s = 1$ kHz



Obrázek 4.33 Odhady PSD (černá) kódu Manchester s přídavným bílým šumem, proloženo teoretickým (ideálním) PSD (modrá). Odhady pomocí Welchovy metody, $N = 5000$, $M = 2000$, překryv 75 % a) $SNR = -12$ dB; b) $SNR = 0$ dB; Odhady pomocí metody Multitaper, $N = 2000$, $NW = 3$, použité sekvence: 3 c) $SNR = -12$ dB; d) $SNR = 0$ dB; $f_s = 100$ Hz

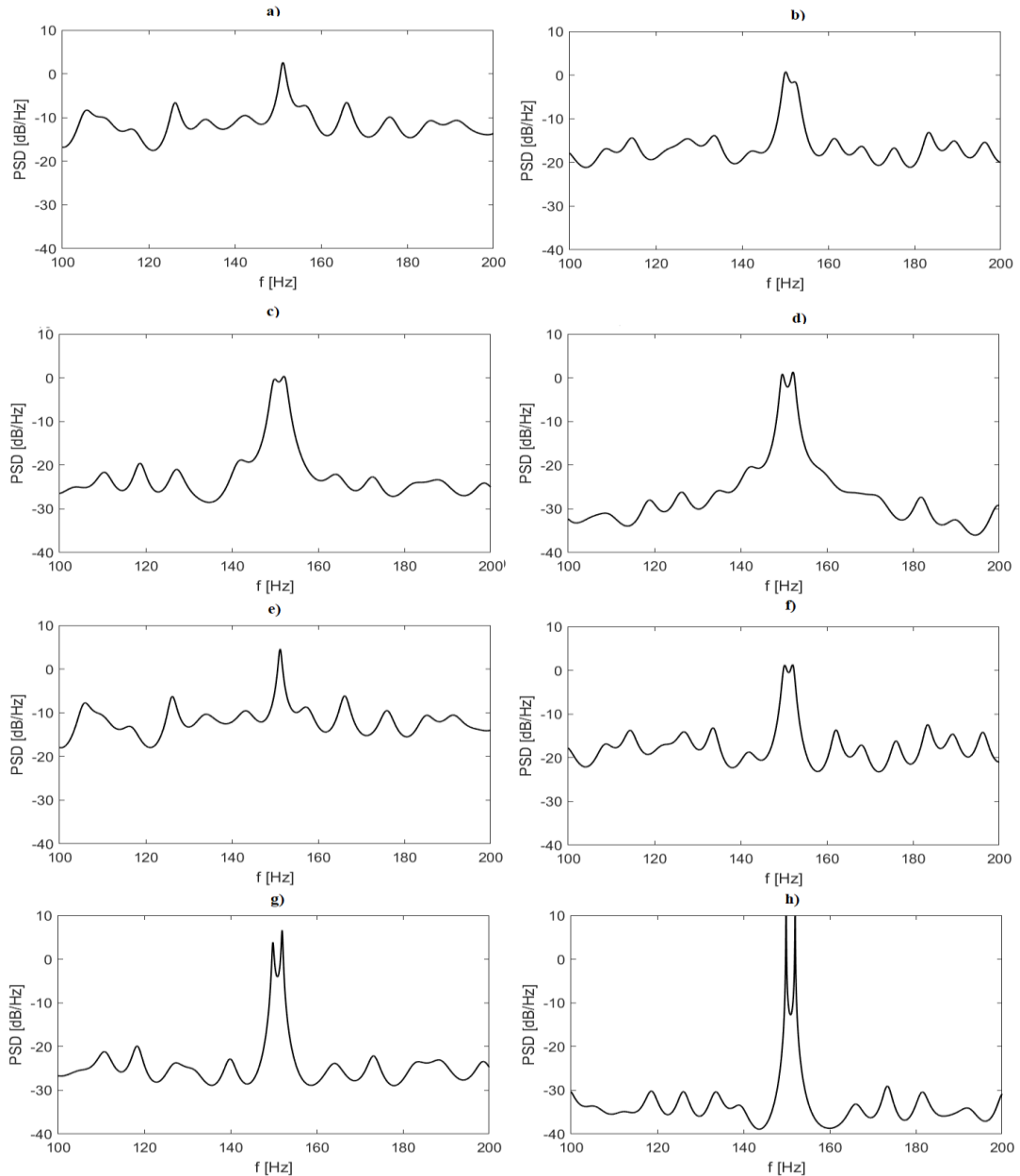
Jak již bylo zmiňováno, frekvenční rozlišení metod využívajících autoregresního modelování, tj. **Yule-Walkerova** a **Burgova** metoda, závisí na řádu modelu, a právě hodnotě SNR. Na obrázku 4.35 na následující straně potom vidno jak se s klesajícím SNR zlepšuje frekvenční rozlišení odhadů PSD. U odhadů vytvořených pomocí Burgovy jsou sinusoidy lépe rozlišitelné i při vyšší míře zašumění, než u Yule-Walkerovy metody (srovnání případů b) a f)), jelikož Burgova metoda má tendenci produkovat výrazné úzké špičky, což se velmi viditelně projevuje v případech g) a h)). Problémem může být jejich kmitočtové vychýlení, které se pro sinusoidu na $f = 152$ Hz pohybuje od jejího zobrazení v případě f) mezi 0,5 až 1 Hz. Sinusoida na $f = 150$ Hz vychýlena není, což činí rozpoznání tohoto jevu problematickým.



Obrázek 4.34 Odhady PSD (černá) kódu Manchester s přidavným bílým šumem, proloženo teoretickým (ideálním) PSD (modrá). Odhady pomocí Yule-Walkerovy metody, $N = 2000$, $p = 60$, a) $SNR = -12$ dB; b) $SNR = 0$ dB; Odhady pomocí metody Burg, $N = 2000$, $p = 60$, c) $SNR = -12$ dB; d) $SNR = 0$ dB; $f_s = 100$ Hz

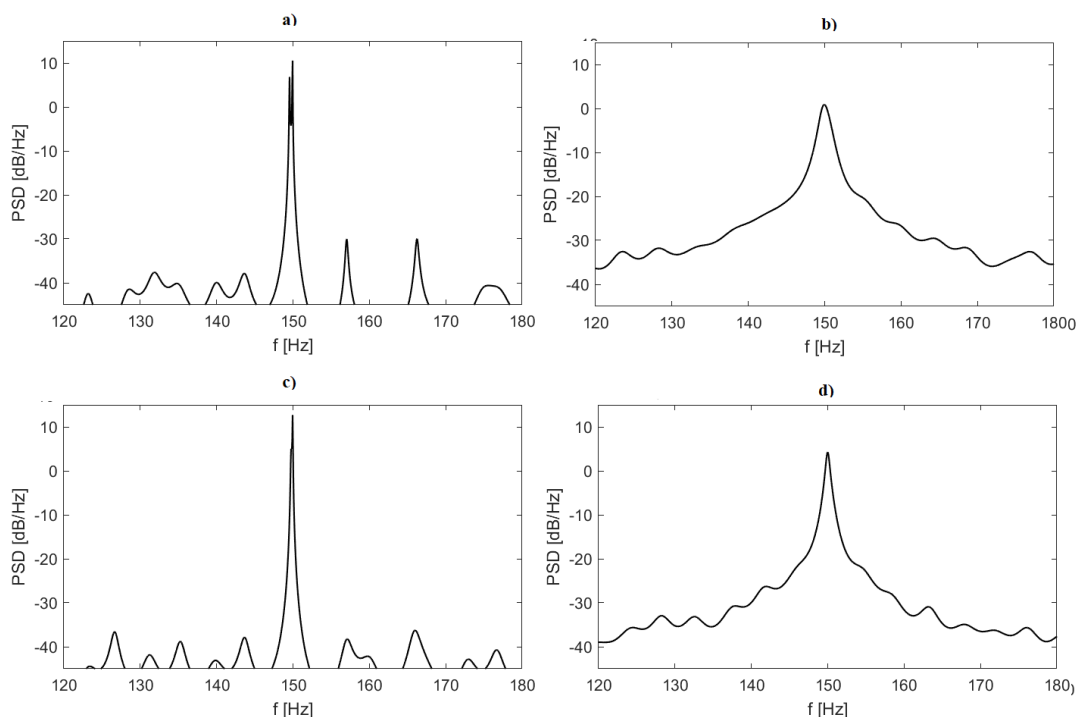
Obrázek 4.34 v první řadě ukazuje, že odhady pomocí Yule-Walkerovy a Burgovy metody vykazují při daném nastavení (velká délka signálu, stejný nepřilíš vysoký řád modelu, dynamický rozsah vzhledem k úrovni šumového pozadí nedostatečný pro projevení vychýlení Yule-Walkerovy metody) stejné vlastnosti natolik, že jsou odhady v tomto případě totožné. Primárním účelem tohoto obrázku je demonstrovat, že se parametrické metody i přes odlišnost výpočtu řídí z hlediska úrovně šumového pozadí stejnými pravidly jako metody DFT. Nejsou tedy schopny rozlišit užitečnou složku signálu, pokud je pod výkonovou úrovní šumu. Oproti DFT metodám mají samozřejmě

v tomto ohledu ještě i nevýhodu v podobě frekvenčního rozlišení ovlivněného hodnotou SNR, jak bylo zmíněno výše. Také se potvrzuje tvrzení z podkapitoly 3.2, kdy je vidět, že oba odhady pomocí AR modelování mají tendenci konkávní části spektra reprezentovat jako špičky s konvexními stranami, které vykazují vychýlení na frekvenční ose.



Obrázek 4.35 Odhady PSD dvou sinusoid o výkonu 2 W, na kmitočtech 150 a 152 Hz v bílém šumu pomocí autoregresního modelování, $p = 150, N = 1000$, Yule-Walkerova metoda a) $P = 32 \text{ W}$, $\text{SNR} = -12 \text{ dB}$; b) $P = 8 \text{ W}$, $\text{SNR} = -6 \text{ dB}$; c) $P = 2 \text{ W}$, $\text{SNR} = 0 \text{ dB}$; d) $P = 0.2 \text{ W}$, $\text{SNR} = 10 \text{ dB}$; Burgova metoda e) - h) stejné hodnoty; $f_s = 1 \text{ kHz}$

Na obrázku 4.36 můžeme na odhadu jedné zašuměné sinusoidy vidět, jak při kombinaci příliš vysokého řádu a vysoké hodnoty SNR může u Burgovy metody, případ a), dojít k rozštěpení špiček. Pro srovnání případ b) Yule-Walkerova metoda pro stejný řád modelu. Na případě c) vidíme, že s navýšením počtu vzorků se tento jev omezí, pro srovnání Yule-Walkerova metoda, případ d). Na odhadech Yule-Walkerovou metodou je zároveň patrné její vychýlení, které je zapříčiněno tvorbou modelu na základě vychýleného odhadu autokorelačních koeficientů, který je nutný pro zaručení jeho stability.



Obrázek 4.36 Odhady PSD jedné sinusoidy o výkonu 2 W, na kmitočtu 150 Hz v bílém šumu o výkonu 0,02 W, $SNR = 20$ dB pomocí autoregresního modelování, $p = 240$, a) Burgova metoda, $N = 500$ b) Yule-Walkerova metoda, $N = 500$; c) Burgova metoda, $N = 1000$ d) Yule-Walkerova metoda, $N = 1000$; $f_s = 1$ kHz

4.4 Shrnutí metod a doporučení pro nalezení odhadu PSD

Z výsledků přechozích podkapitol pro vlastnosti metod vyplývá ve zkratce následující:

Periodogram

Jeho výhoda spočívá jen a pouze v jeho vysokém frekvenčním rozlišení, které nezávisí na hodnotě SNR. Při malé délce signálu, kdy se pohybujeme na hranici rozlišitelnosti složek jsou ale tyto kmitočtově vychýleny, z čímž je třeba počítat. S narůstající délkou signálu frekvenční rozlišení narůstá, ale narůstá rovněž i rozptyl odhadů. Prvním velkým problémem je jeho vychýlení, které sice s rostoucí délkou vymizí, ale bez předchozí znalosti PSD signálu není jisté, zda odhad nezkresluje. Druhým problémem je hodnota rozptylu odhadu, která s rostoucí délkou záznamu prakticky neklesá. Periodogram by proto rozhodně neměl být použit pro odhad PSD samostatně, maximálně v kombinaci se separátním odhadem metodou, která vychýlení nevykazuje a potlačuje rozptyl. Takto lze využít jeho vysokého rozlišení, aniž by vznikla mylná představa o úrovních PSD signálu, přesto je ale jistější za cenu ztráty v rozlišení použít jeho modifikace.

Modifikovaný periodogram

Sdílí rozptylové vlastnosti s periodogramem, oproti základní verzi je ale vychýlení vlivem prosakování omezeno okénkovou funkcí. To se ale netýká kmitočtového vychýlení, v případě, že se délka signálu blíží spodní hranici pro rozlišitelnost složek daného signálu. Výběr okénkové funkce je dán požadavkem na použití modifikovaného periodogramu. Je-li cílem zachovat co nejvyšší frekvenční rozlišení, volíme funkci s úzkým hlavním lalokem, např. Hammingovo okno. Chceme-li omezit prosakování v těsné blízkosti hlavního laloku (možné odkrytí složek o nižší výkonové hustotě) a zajistit vyhlazenější odhad vlivem větší šířky hlavního laloku, volíme např. Nuttallovo okno. Nebo pokud je cílem omezit prosakování napříč spektrem a zároveň zachovat vyšší rozlišení než použitím Nuttallova okna, je vhodná funkce s vysokým asymptotickým poklesem postranních laloků, např. Hannovo okno. Nevýhodou je, že je odhad neprůměrován, a tak se může v závislosti na realizaci vyskytnout v porovnání s dalšími dvěma metodami vysoký rozptyl odhadu.

Welchova metoda

Díky využití průměrování odhadů z několika segmentů její rozptyl s délkou signálu klesá a může být dále omezen překryvem segmentů. Pro universálně nízký rozptyl (nezávisle na použitém okně) je nejvhodnější hodnota 75 %. Nevýhodou je potřeba větší délky signálu pro použití při průměrování, pokud má být zachováno frekvenční rozlišení, protože to se odvíjí od délky jednoho segmentu. Aby při průměrování nedocházelo k systematické chybě (vychýlení) odhadů, je každý segment okénkován, dle stejných zásad jako v předchozím odstavci.

Je dobré si uvědomit, že odhad samostatného segmentu je jen modifikovaným periodogramem, a jako takový vykazuje jeho nárůst rozptylu s délkou signálu. Proto pokud je to s ohledem na rozlišení možné (jelikož to je dáno délkou segmentu), je vhodné pro výrazné potlačení rozptylu průměrovat okolo 10 segmentů (minimálně alespoň 4). Samozřejmě pokud se nabízí možnost průměrovat segmentů více, rozptyl bude více omezen, byť v menších krocích. Z neparametrických metod uvedených v této práci dosahuje společně s metodou Multitaper nejnižších rozptylů odhadu, oproti ní je však její použití snadnější (méně náchylné na uživatelskou chybu nevhodnou volbou parametrů), což Welchovu metodu činí dobrou volbou pro získání vyhlazeného odhadu PSD.

Metoda Multitaper

Obdobně jako Welchova metoda využívá k omezení rozptylu průměrování dílčích odhadů PSD, oproti ní má ale výhodu, že není třeba větší délky signálu, jelikož se průměrují odhady vytvořené z jediného úseku signálu. To je možné díky použití ortogonálních Slepianových sekvencí jako okénkových funkcí. Manipulací jejich vlastností se potom mění vlastnosti odhadu PSD. Jelikož jde v podstatě o odhady pomocí modifikovaného periodogramu, platí, že s délkou signálu vzrůstá rozptyl odhadu a jeho frekvenční rozlišení.

Rozlišení pro konkrétní délku signálu je zde nastavovaným parametrem odhadu, kdy se nastavuje součin délky signálu a poloviny šířky pásma hlavního laloku Slepianových sekvencí, NW , pro který se běžně volí hodnoty od 1,5 do 20. Od této hodnoty se přímo odvíjí počet použitých sekvencí, a tím i počet průměrovaných odhadů PSD. Čím větší je NW , tím více je odhad průměrován, klesá jeho rozptyl, ale zároveň i frekvenční rozlišení.

S počtem sekvencí je třeba nakládat s opatrností, jelikož maximální počet sekvencí pro danou hodnotu NW sice znamená minimální rozptyl, ale několik posledních použitých sekvencí (zpravidla 2 až 3) vykazuje prosakování, což odhad vychyluje. To představuje problém zejména pokud je snahou maximální frekvenční rozlišení ($NW = 1,5$), jelikož jsou použity jen dvě sekvence a takový odhad je tím pádem vždy vychýlen. V případě použití většího NW , např. 10, za účelem vyhlazení odhadu, má již odstranění nejvyšších sekvencí za následek omezení vychýlení, za cenu zvýšení rozptylu. Toto navýšení je ale pro vyšší NW minimální, jelikož i bez nejvyšších sekvencí se průměruje velké množství dílčích odhadů.

Metoda jako taková je tedy vhodná spíše k získání vyhlazeného odhadu PSD, ale díky možnosti volit frekvenční rozlišení přímo lze dosáhnout mezi těmito požadavky dobrého kompromisu. Zároveň je nutné brát v potaz možné vychýlení metody vlivem prosakování, a k jejímu použití pro signály s velkým dynamickým rozsahem PSD přistupovat obezřetně.

Yule-Walkerova metoda

Její hlavní výhodou je, že při vysokém SNR je schopna poskytnout přijatelné frekvenční rozlišení i při použití krátké délky signálu. Krátkou délkou je zde myšlena taková, kdy převrácená hodnota doby záznamu je řádově srovnatelná s požadovaným rozlišením pro daný signál, viz podkapitola 3.1.1. Volba vhodného řádu je pro správný odhad PSD u parametrických metod zásadní, bez předchozí znalosti signálu a jeho spektrálního složení může být ale obtížná. Jak se v této kapitole ukázalo, i předpokládaný vhodný řád nemusí být u této metody dostačující. Proto je výhodné při stanovování řádu uvážit kritéria AIC, FPE či obdobné (kritéria mají ale tendenci řád podcenit, pro kratší délku záznamu obzvlášť, viz podkapitola 3.1.1).

V případě, že je řád modelu příliš nízký není metoda schopna vystihnout věrně tvar spektra, a tak dochází k značnému vychýlení odhadu. Rozlišení odhadu se dá zvýšit navýšením řádu modelu p , což ale zároveň vede k nárůstu rozptylu odhadů, jelikož každé dva řády modelu znamenají další špičku v odhadu PSD. Navýšení rozptylu vlivem vysokého řádu modelu lze redukovat použitím větší délky signálu pro vytvoření odhadu, což ale poněkud znehodnocuje schopnost metody dosahovat vysokých rozlišení pro nízké počty vzorků. Navíc hodnota rozptylu pro odhad z jedné realizace i při, podle znalosti signálu, zdánlivě vhodném (ve skutečnosti příliš nízkém) řádu modelu nepředvídatelně kolísá vlivem kmitočtového vychýlení špiček ve spektru, byť je toto kolísání drobné.

První nevýhodou metody tedy je, že ji za účelem dosažení vysokého rozlišení lze efektivně použít jen při vysokých hodnotách SNR. Druhou, a velmi zásadní nevýhodou je vychýlení metody, dáno vychýleným výpočtem autokorelačních koeficientů při výpočtu koeficientů AR modelu. To sice s rostoucí délkou signálu klesá, ale nelze jej pro libovolnou délku vhodně omezit, případně odstranit. Třetí nevýhodou je, že metoda i pro teoreticky vhodný řád modelu vykazuje kmitočtové vychýlení špiček spektra, které je nutné odstranit zvýšením řádu. Čtvrtou nevýhodou pak představuje fakt, že metoda již ze své podstaty (odhad PSD vytvořením AR modelu) má tendenci reprezentovat tvary v odhadu PSD pomocí špiček s konvexními stranami, které navíc mohou vykazovat vychýlení na kmitočtové ose. To znamená, že pro přesný odhad konkávních tvarů ve spektru je třeba velké navýšení řádu modelu, což s sebou nese nárůst rozptylu z důvodů uvedených výše.

Kvůli jejímu vychýlení by měla metoda být za účelem získání vyhlazeného odhadu používána v kombinaci se separátním odhadem metodou, která vychýlení nevykazuje. Ve většině případů je z toho důvodu vhodnější využít Burgovy metody, která je navíc schopna dosáhnout vyšších rozlišení.

Burgova metoda

Vlastnostmi je velmi podobná Yule-Walkerově metodě. Je ale, jak bylo zmíněno, schopná dosáhnout pro krátké signály vyšších rozlišení, a obecně se pomocí ní ve spektru lépe rozpoznávají úzkopásmové složky, jelikož má tendenci je reprezentovat velmi úzkými špičkami.

Volba řádu je u Burgovy metody ještě podstatnější, než u Yule-Walkerovy, jelikož pro velmi vysoké řády rozptyl odhadu narůstá ve srovnání s ní rapidněji. Odhad je také při vysokém řádu značně vychýlen a tvary v něm jsou kvůli přítomnosti velkého množství špiček nerozlišitelné. To lze redukovat pořízením větší délky záznamu, ale pokud je cílem analýzy dosáhnout s malým počtem vzorků vysokého rozlišení, stejně jako pro předchozí metodu toto není ideální. Proto je vhodné se s volbou řádu omezit maximálně do poloviny počtu vzorků signálu, jelikož za touto hranicí chyba odhadu rapidně narůstá. Pro nízký řád modelu je odhad taktéž vychýlen, jelikož metoda nedokáže kvůli nízkému počtu pólů v modelu vystihnout všechny špičky ve spektru.

Výhoda oproti Yule-Walkerově metodě spočívá především v nízkém vychýlení metody, pokud je řád volen správně. To se projevuje jen minimálně pro velmi krátké signály, pro ostatní délky odhadu je metoda nevychýlena. Všeobecně vykazuje nízkou hodnotu rozptylu, která s rostoucí délkou signálu navíc předvídatelným způsobem klesá, což ji dělá metodou použitelnou i pro vyhlazené odhady za účelem získání tvaru PSD.

Nevýhodou je, opět jako u předchozí metody, potřeba vysoké hodnoty SNR pro dosažení dostatečného frekvenčního rozlišení odhadu. Stejně tak se i zde vyskytuje potíž s vystižením konkávních tvarů PSD a kmitočtové vychýlení špiček, ze stejných důvodů. Pro Burgovu metodu typickou nevýhodou je štěpení špiček, ke kterému dochází při volbě příliš vysokého řádu modelu a jeho výskyt není napříč realizacemi konzistentní. Nutnosti použití příliš vysokého řádu za účelem zvýšení rozlišení se lze vyhnout. Byl uveden příklad pro signály, kde je předmětem zájmu rozlišit složky na nízkých kmitočtech vzorkovaného pásma. Je zvolen n -krát nižší vzorkovací kmitočet a signál zfiltrován strmou dolní propustí s mezním kmitočtem na nové Nyquistově frekvenci. Z původního záznamu je ponechán každý n -tý vzorek. Tím se rozlišení parametrických metod zvýší.

V případě, že výše uvedené není pro daný signál uplatnitelné a je třeba pokusit se o dosažení rozlišení navyšováním řádu modelu, je možno provést odhady dva pomocí Burgovy i Yule-Walkerovy metody, a ty vzájemně srovnat. Jak totiž bylo řečeno výše, Yule-Walkerova metoda při velmi vysokých řádech nevykazuje tak vysoký rozptyl jako Burgova a netrpí štěpením špiček ve spektru. Zároveň však nemusí být schopna dosáhnout požadovaného rozlišení.

Z výše zmíněného vyplývá, že při dodržení výše vyjmenovaných omezení je metoda poměrně versatilní a lze pomocí ní dosáhnout jak odhadu s vysokým rozlišením (i pro krátké záznamy), tak odhadu vyhlazeného.

Doporučení pro nalezení odhadu PSD

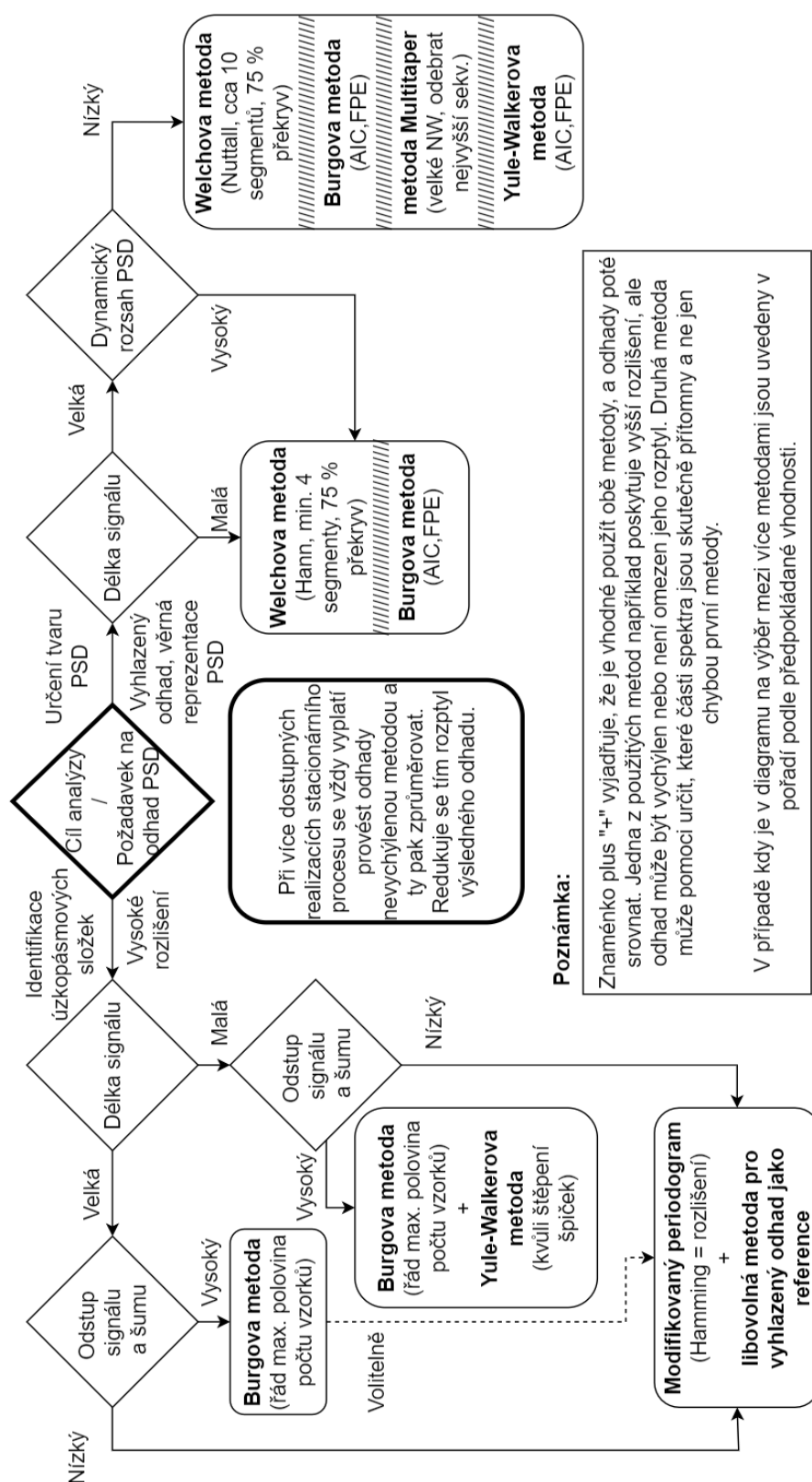
Nalezení spolehlivého odhadu PSD, jak nastínila tato kapitola, spočívá v první řadě na účelu prováděné spektrální analýzy. Na odhad se kladou jiné nároky, pokud je cílem zjistit kmitočty úzkopásmových složek signálu než když je cílem věrně vystihnout celkový tvar PSD. Proto byl na základě poznatků nasbíraných při rešerši a analýzách simulovaných signálů vytvořen diagram na obrázku 4.37. Jeho účelem je napomoci uživateli k volbě co nejspolehlivější metody pro daný případ vlastností signálu a účelu analýzy. Parametry metod by měly být voleny s uvážením shrnutí jejich vlastností výše v této podkapitole.

Pokyny v diagramu slouží jako orientační, jelikož například co lze považovat za malou délku signálu se mění případ od případu, viz podkapitola 3.1.1. a popis Yule-Walkerovy metody výše. Z důvodu přehlednosti diagramu není například uveden ve větvi pro vyhlazené odhady vliv SNR. Analýzy v podkapitole 4.3 ukázaly, že zvyšující se úroveň šumu maskuje části užitečného spektra a žádná z uvažovaných metod pod šumový práh nepronikne, tím pádem by volba metody ovlivněna nebyla.

Doporučení také neplatí absolutně v tom smyslu, že i metoda, která není pro daný případ uvedena může poskytnout za vhodných podmínek použitelný odhad. Příkladem je neuvedení Yule-Walkerovy metody pro případ vyhlazeného odhadu z krátkého záznamu. Klíčové jsou ale právě ony zmiňované vhodné podmínky, protože v závislosti na konkrétním tvaru PSD metoda může i nemusí být schopna dosáhnout dostatečného rozlišení. Metody uvedené poskytují v tomto ohledu lepší vyhlídky, tam kde v tomto případě Yule-Walkerova metoda již z pohledu rozlišení selhává je Burgova metoda stále ještě schopná poskytnout dostatečné rozlišení, aby odhad nebyl vyhlazen příliš.

Obdobně to platí i pro doporučení tvořená kombinací metod, např. použití modifikovaného periodogramu pro dosažení vysokého rozlišení a zároveň metody poskytující vyhlazený odhad jako referenční. Pokud dopředu víme, že je dostupná dostatečná délka signálu, že dosáhneme nutného rozlišení jen pomocí např. Welchovy metody (myšleno tak, že i při průměrování např. 10 segmenty je délka segmentu dostatečná), není modifikovaný periodogram třeba uplatnit.

Pokud nemáme předchozí znalost o podobě signálu, vyplatí se použít pro prvotní nastínění jednu z neparametrických metod využívající průměrování, nastavenou pro vyšší rozlišení (u Welchovy metody větší délka segmentu s průměrováním alespoň 4 segmentů, u metody Multitaper nízké NW , např. 1,5 až 4). Je to proto, že nevhodnou volbou řádu parametrické metody (při použití kritérií lze s určitou jistotou použít i ty, ale na řád doporučený kritériem se nelze plně spolehnout) si můžeme počáteční představu o PSD daného signálu zkreslit. Stejně tak použitím neparametrické metody bez průměrování, tj. bez redukce rozptylu odhadu.



Obrázek 4.37 Diagram pro usnadnění volby metody pro nalezení odhadu PSD

5. ODHADY PSD REÁLNÝCH SIGNÁLŮ

Tato kapitola se zabývá ověřením vyslovených doporučení a poznatků pro nalezení odhadu PSD na reálných záznamech signálů. Z důvodu zachování obecnosti bylo měřítko na vertikální ose ponecháno jako dB/Hz, byť se nyní jedná o hodnoty vztažené k základní jednotce veličiny signálu na druhou mocninu. Detailní popis použitých signálů se nachází v kapitole 7, kde jsou u převzatých signálů uvedeny i případné zdroje. Odhady jsou pro demonstrační účely prováděny i pro daný účel nevhodnou metodou, potažmo metodou vhodnou s nevhodným nastavením. Kapitola je členěna podle doporučení z kapitoly 4.

5.1 Požadavek na vysoké rozlišení odhadu

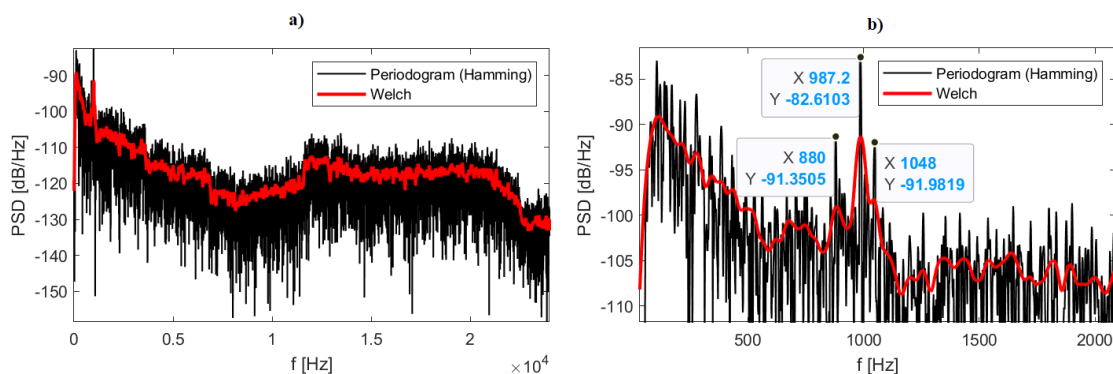
Jak vypovídá název podkapitoly, jako první se práce zabývá levou polovinou diagramu navržených doporučení, obrázek 4.37. Za účelem vytvoření podmínek pro příslušný scénář se jeden signál může objevit v různých délkách záznamu.

5.1.1 Délka signálu: velká; Odstup signálu a šumu: nízký

Jedná se o situaci, kdy ve volbě metody existuje velké množství volnosti. Jako doporučená byla zvolena kombinace metod. Dosažení vysokého frekvenčního rozlišení zajistí modifikovaný periodogram. Modifikovaný proto, že použití obyčejného by způsobovalo prosakování, které může v některých případech zamaskovat úzkopásmové složky na nižších výkonových úrovních. Parametrickou metodu v této situaci pro dosažení potřebného rozlišení nevyužijeme, vzhledem k nízkému odstupu signálu a šumu.

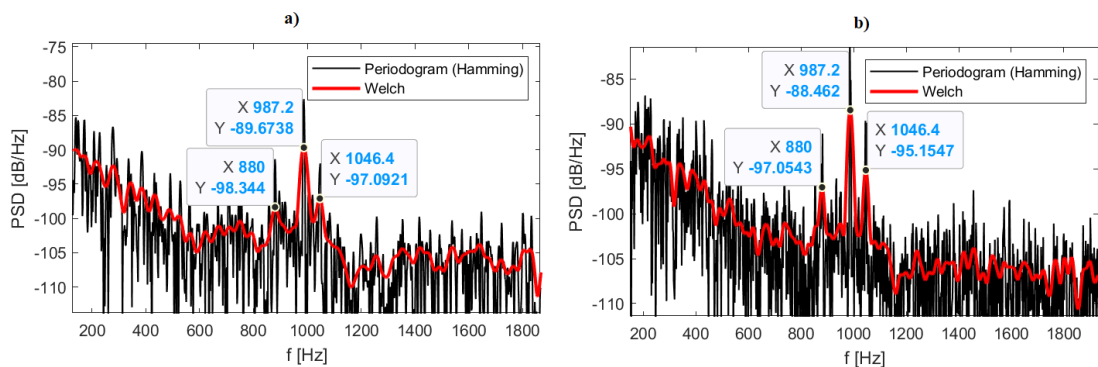
Referenční odhad poskytne jedna z metod pro vyhlazený odhad, pro případ, že by odhad pomocí mod. periodogramu byl zasažen rozptylem. Napomůže určit kde se nachází, respektive nenachází úzkopásmové složky, jelikož vyhledá okolní průběh. Pro referenční odhad je volena Welchova metoda, ale mohou se zde uplatnit i parametrické metody, jelikož účelem referenčního odhadu není nutně špičky rozlišit.

Jako příklad signálu zde byla zvolena zvuková nahrávka tří tónů $A_5(880\text{ Hz})$, $H_5(987,8\text{ Hz})$, $C_6(1046,5\text{ Hz})$ s šumem okolního prostředí (soubor *TriTonyA5H5C6.mat*). Na obrázku 5.1 vidíme provedené odhady. Díky velké délce záznamu dosahuje modifikovaný periodogram vysokého rozlišení, $\Delta f = 4,35\text{ Hz}$, které je tedy více než dostačující. Zároveň však vykazuje odhad vysoký rozptyl hodnot. Právě proto je vhodné zobrazit i odhad např. Welchovou metodou, nastavenou pro vyhlazení PSD. Takto je ve výsledku snadné odečíst kmitočty hledaných složek, s jistotou, že se v okolí nenachází další. Odečtené kmitočty jsou mírně vychýlené, v řádu desetin až nízkých jednotek Hz, což je při daném rozsahu vzorkovaného pásma přijatelné.



Obrázek 5.1 Odhad PSD signálu *TriTonyA5H5C6.mat* pomocí periodogramu modifikovaného Hammingovým oknem a Welchovy metody, délka segmentu $M = 2500$, překryv 75 % (21 segmentů), Nuttallovo okno. a) PSD na celém vzorkovaném pásmu; b) detail na úzkopásmové složky; Počet vzorků $N = 15000$; $f_s = 48 \text{ kHz}$ délka záznamu $t = 0,3125 \text{ s}$, $\Delta f = 4,35 \text{ Hz}$

V případě, že je k dispozici větší délka signálu, je samozřejmě možné odečíst kmitočty i pomocí samotné Welchovy metody. Také je možné prodloužit segmenty, za cenu méně vyhlazeného odhadu. I tak je třeba samozřejmě zajistit dostatečné průměrování, aby složky vynikly, viz obrázek 5.2, kde mají oba odhady stejné rozlišení, ale větší počet průměrovaných segmentů napomůže složky zvýraznit větším poklesem úrovně PSD mezi nimi.



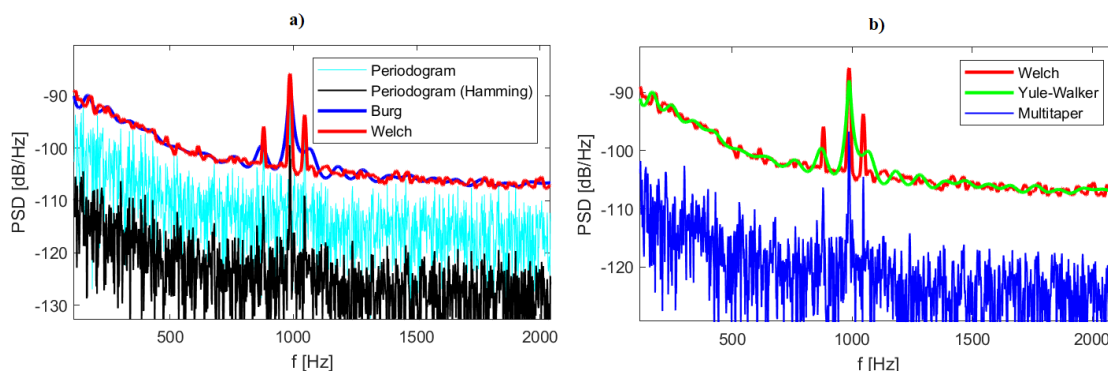
Obrázek 5.2 Odhad PSD signálu *TriTonyA5H5C6.mat* pomocí Welchovy metody a) délka segmentu $M = 5000$, překryv 75 % (9 segmentů), Nuttallovo okno. Počet vzorků $N = 15000$; $T = 0,3125 \text{ s}$, $\Delta f = 17,28 \text{ Hz}$ b) délka segmentu $M = 5000$, překryv 75 % (21 segmentů), Nuttallovo okno. Počet vzorků $N = 30000$; $f_s = 48 \text{ kHz}$ délka záznamu $t = 0,625 \text{ s}$, $\Delta f = 17,28 \text{ Hz}$

Nabízí se myšlenka použít celou délku záznamu. V případě simulovaného signálu by to nepředstavovalo problém, zde ale reálná podstata záznamu znamená, že za slabě

stacionární lze signál považovat jen v krátkých časových intervalech. I v případě odstranění trendu z časového průběhu může docházet ke krátkodobým změnám hodnoty výkonu/rozptylu šumu. To znamená, že pokud provádíme odhad pomocí Fourierovy transformace z jednoho velmi dlouhého naměřeného záznamu, odhad může být vychýlen.

Vychýlení zde tedy závisí na použité metodě. To je dobře vidět na obrázku 5.3. Odhady metod, které používají Fourierovu transformaci na záznam jako celek jsou vychýleny. Výjimkou mezi neparametrickými metodami je Welchova metoda, jelikož ta tvoří odhady z časových úseků signálu, krátkodobé změny v rozptylu šumu se tedy projeví jen v některých dílčích odhadech a jejich vliv je značně omezen následným průměrováním. Obě parametrické metody tvoří odhad správně, jelikož jej generují pomocí modelu, ne přímou aplikací na data.

Je tedy třeba s tímto při odhadu PSD z naměřených dat počítat, a pro jistotu odhad ověřit pomocí jedné z metod vyjmenovaných v tomto odstavci (pozor na Yule-Walkerovu metodu, jejíž odhad může být vychýlen, viz shrnutí vlastností metod, podkapitola 4.4), případně se omezit na kratší úseky záznamu.

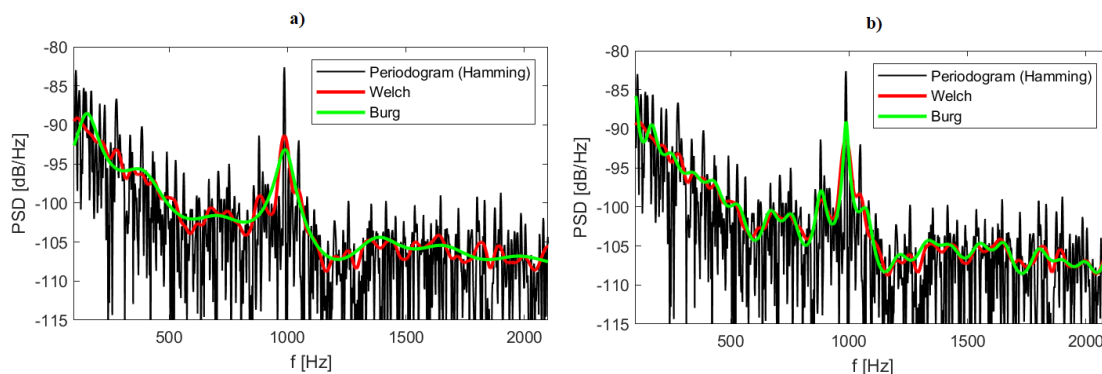


Obrázek 5.3 Odhad PSD signálu *TriTonyA5H5C6.mat* pomocí všech v práci uvažovaných metod, plný počet vzorků $N = 190000$, $f_s = 48 \text{ kHz}$, $t = 3,958 \text{ s}$

Jak bylo zmíněno, lze použít jako referenci pro hodnoty odhadu modifikovaný periodogramem i další metody poskytující vyhlazený odhad. Účinnost například parametrických metod v tomto směru naznačuje už obrázek 5.3. Na obrázku 5.4 jsou stejné odhady jako na obrázku 5.1, včetně Burgovy metody. V případě a) byl řád modelu volen podle kritéria AIC, $p = 156$. Vidíme, že při tomto řádu poskytuje metoda vyhlazenější referenční odhad než Welchova. Na druhou stranu všechny tři složky reprezentuje jedinou špičkou. Při navýšení řádu na $p = 500$ (počet vzorků je $N = 15000$, teoreticky bychom měli být schopni zvýšit řád až do $p = 7500$ bez výrazného zhoršení rozptylu a vychýlení odhadu, ovšem by se jeho vypovídací hodnota příliš nezlepšila, akorát by byl odhad výpočetně náročnější) jsou už referenční odhady srovnatelné, až na reprezentaci nejvýše kmitočtově položené složky, kdy je Burgovou metodou zobrazena na kmitočtu vychýleném o cca 20 Hz. Toto ale nepředstavuje problém, jelikož kmitočty

složek mají být dle doporučení odečítány z odhadu modifikovaným periodogramem, kde je kmitočtové vychýlení menší, viz výše.

Tedy se potvrzuje, že ve výběru metody pro vytvoření referenčního vyhlazeného odhadu máme při této kombinaci parametrů signálu velkou volnost.



Obrázek 5.4 Odhad PSD signálu *TriTonyA5H5C6.mat* pomocí periodogramu modifikovaného Hammingovým oknem a Welchovy metody, délka segmentu $M = 2500$, překryv 75 % (21 segmentů), Nuttallovo okno. a) PSD na celém vzorkovaném pásmu; b) detail na úzkopásmové složce; Počet vzorků $N = 15000$; $f_s = 48 \text{ kHz}$ délka záznamu $t = 0,3125 \text{ s}$, $\Delta f = 4,35 \text{ Hz}$

5.1.2 Délka signálu: malá; Odstup signálu a šumu: nízký

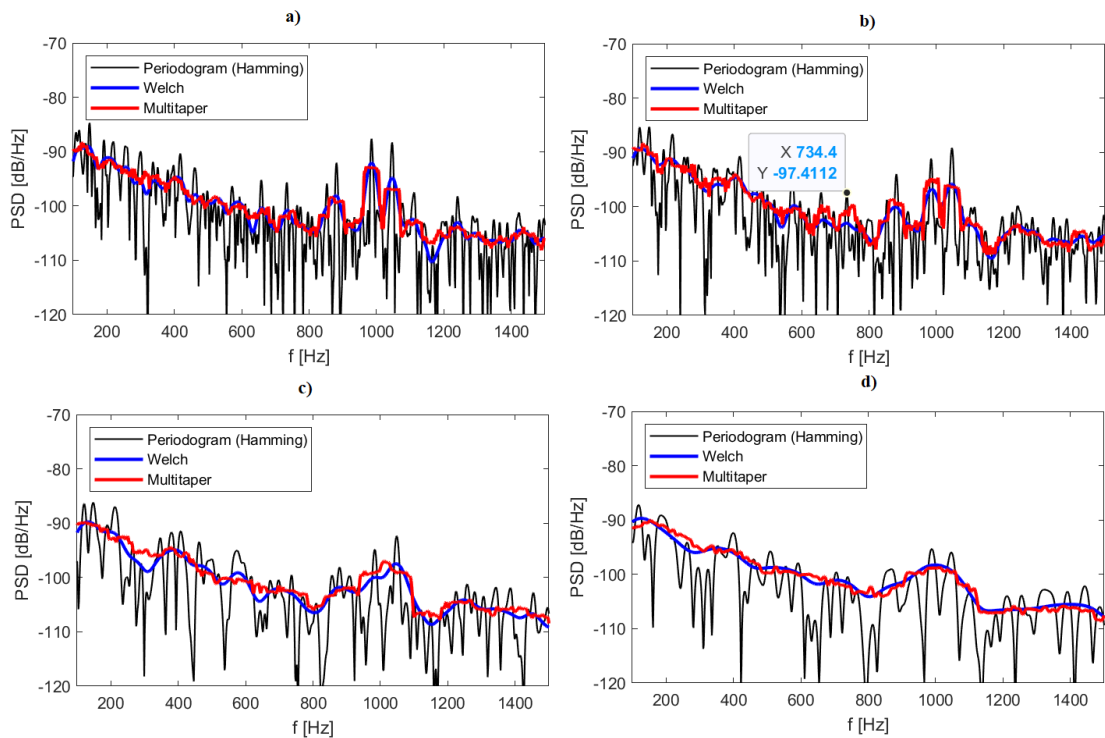
Z kombinací vlastností signálu uvažovaných v práci jde o tu, kde jsme nejvíce limitováni. Úvaha za tímto doporučením je obdobná jako za předchozím. Použijeme kombinaci metody, která je schopna dosáhnout vysokého rozlišení i pro zašuměný signál (modifikovaný periodogram) a metody, která je schopná odhad vyhladit. V tomto případě srovnáme Welchovu metodu a metodu Multitaper. Jelikož bude délka záznamu malá, nemělo by se u Multitaperu projevit vychýlení vlivem změn v rozptylu šumu prostředí.

Pro názornost bude použit stejný signál jako v předchozím případě. Omezení zde přichází v podobě nízké úrovně hustoty úzkopásmových složek (viz podkapitola 4.3, obrázek 4.30) v odhadu mod. periodogramu. To znamená, že se špičky s klesajícím počtem vzorků více přiblíží úrovni šumu. Zároveň jsme omezeni v nastavení metod Welch a Multitaper, kde pro dosažení kompromisu mezi rozlišením a vyhlazením odhadu máme mnohem menší volnost než v předchozím případě. Za účelem omezení rozptylu se může vyplatit využít u Multitaperu maximum dostupných sekvencí, za cenu navýšení vychýlení kvůli prosakování.

Na obrázku 5.5 jsou ve všech případech metody nastaveny tak, aby docházelo k průměrování stejného počtu odhadů, tj. 9. Z odhadů plyne, že pro tato nastavení metoda Multitaper dosahuje dokonce nižších rozlišení než ta Welchova, konkrétně a) Multitaper: $\Delta f = 48 \text{ Hz}$, Welch: $\Delta f = 26,2 \text{ Hz}$; b) Multitaper: $\Delta f = 60 \text{ Hz}$, Welch:

$\Delta f = 33,23$ Hz. Tedy přibližně dvakrát horší, přičemž odhad je méně vyhlazen, například v případě b) v okolí vyznačeného bodu dosahuje odhad pomocí Multitaperu hodnoty PSD srovnatelné s úrovní hledané složky na $f = 880$ Hz. Za výhodu můžeme považovat viditelnější separaci mezi složkami. Oba jevy jsou způsobeny reprezentací složek PSD jako zařezaných špiček.

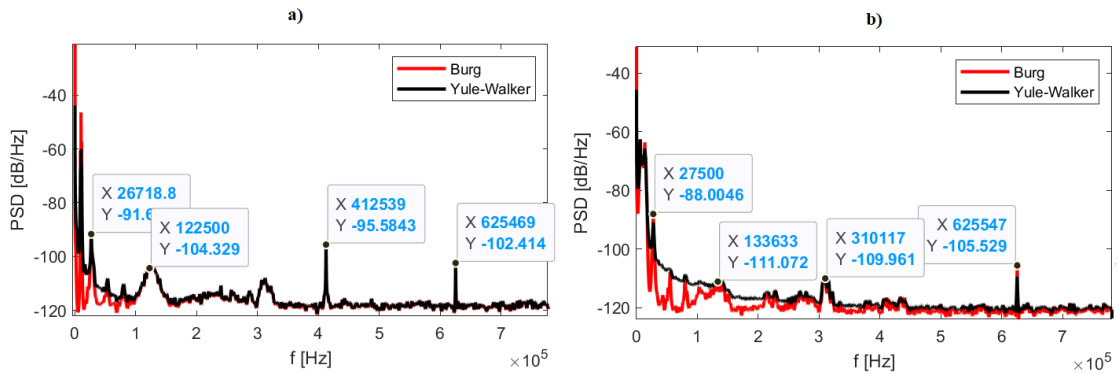
V případě c) ztrácíme schopnost odlišit složku na $f = 880$ Hz od okolního šumu, ale obě metody jsou ještě schopny zvýraznit složky na vyšších kmitočtech, byť ve vyhlazeném odhadu již nejsou separovány. To opodstatňuje kombinaci těchto metod s modifikovaným periodogramem. Vidíme, že v tomto případě obě metody podávají přibližně stejný výsledek. V případě d) je již zvýraznění složek vyhlazeným odhadem diskutabilní. Je sice patrná vyšší úroveň hustoty v oblasti dvou vyšších kmitočtů, ale bez předchozí znalosti o podstatě signálu by bylo obtížné rozhodnout, zda se vůbec o úzkopásmové složky jedná. Odhady obou metod jsou téměř totožné. Z výše uvedených důvodů se opět jako referenční vyhlazený odhad pro tuto variantu parametrů signálu více vyplatí použít Welchovu metodu.



Obrázek 5.5 Odhad PSD signálu *TriTonyA5H5C6.mat* pomocí periodogramu modifikovaného Hammingovým oknem; Welchovy metody, překryv 75 % (9 segmentů), Nuttallovo okno a metody Multitaper, $NW = 5$, sekvencí: 9 a) $N = 10000$, Welch $M = 3300$; b) $N = 8000$, Welch $M = 2600$; c) $N = 5000$, Welch $M = 1650$; d) $N = 3000$, Welch $M = 1000$; $f_s = 48$ kHz

5.1.3 Délka signálu: velká; Odstup signálu a šumu: vysoký

Při velké délce signálu jsme ve volbě metody opět limitováni jen málo. Samozřejmě lze využít i přístup využívající doposud, tj. kombinaci mod. periodogramu a referenčního odhadu. Jelikož je ale odstup signálu a šumu vysoký, můžeme pro dosažení vysokého rozlišení efektivně využít parametrických metod. Lepší volbou je Burgova metoda, jelikož odhad nebude na rozdíl od Yule-Walkerovy vychýlen a velká délka signálu omezí případné štěpení špiček v odhadu PSD.

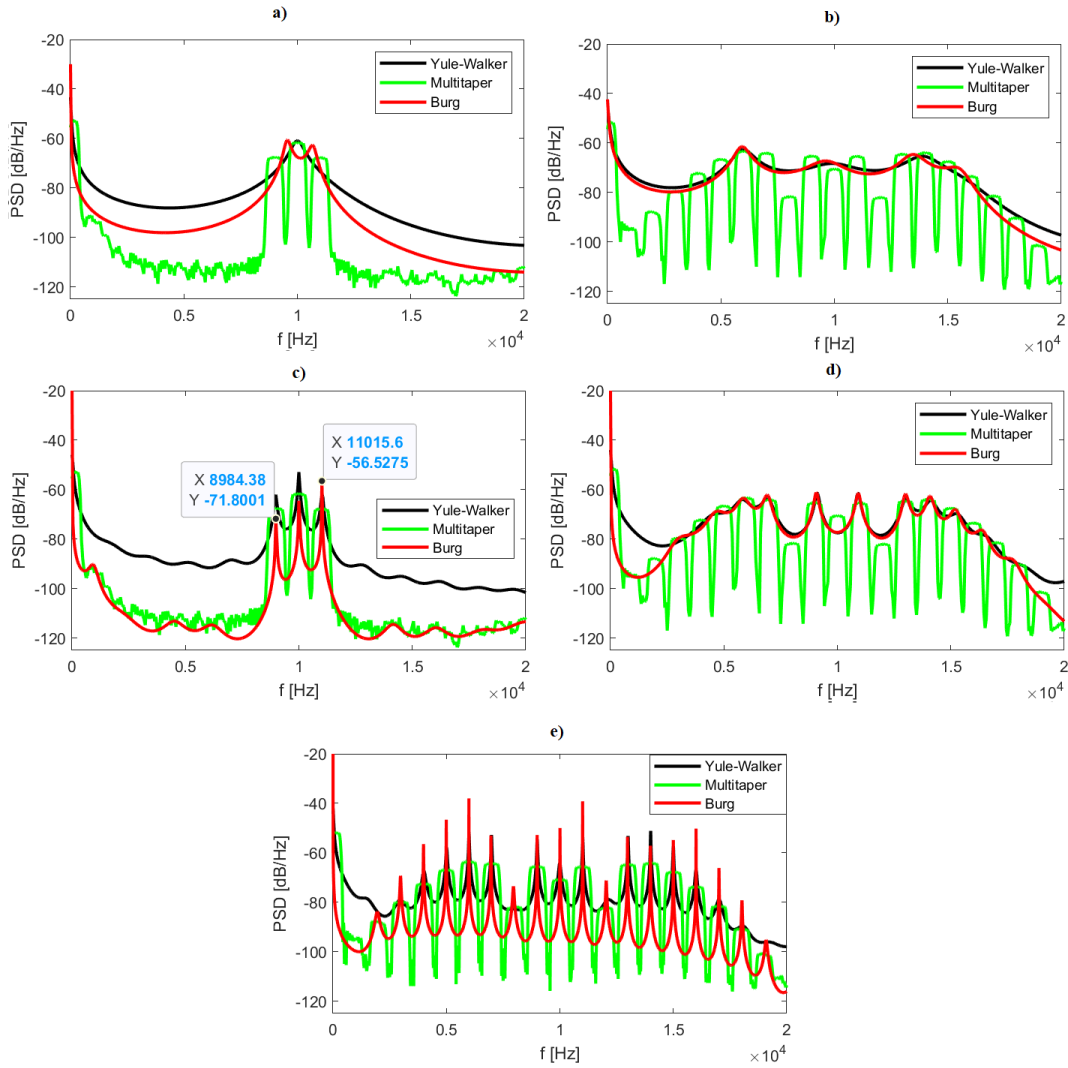


Obrázek 5.6 a) Odhad PSD signálu *AMmodulace.mat* pomocí Yule-Walkerovy a Burgovy metody, $N = 30000$, řád na základě AIC, $p = 498$ b) Odhad PSD signálu *FMmodulace.mat* pomocí Yule-Walkerovy a Burgovy metody, $N = 30000$, řád na základě AIC, $p = 498$; $f_s = 1,56$ MHz

Pro demonstraci jsou použity záznamy amplitudově a frekvenčně modulované sinusoidy, kmitočet nosné je $f_c = 10$ kHz, amplitudou 100 mV_{pp} . Kmitočet modulačního signálu je $f_m = 1$ kHz, v případě frekvenční modulace je kmitočtový zdvih $\Delta f = 5$ kHz. Signály byly navzorkovány kmitočtem $f_s = 1,56$ MHz, odhadované pásmo je tím pádem v porovnání s pásmem hledaného signálu široké. Na obrázku 5.6 a) můžeme vidět odhad pro AM zobrazující celé navzorkované pásmo, na obrázku b) pro FM. Vidno, že mimo hledaného užitečného signálu se v záznamu nachází jak úzkopásmové, tak širokopásmové rušení (část vyznačena). Identifikace jeho příčin sice není předmětem práce, ale jde o vlastnosti signálu, které bychom jen pomocí analýzy v časové doméně nebyli schopni rozpoznat. Obrázek také ukazuje, že vychýlení odhadu Yule-Walkerovy metody ji nedělá ideální pro samostatné použití, jelikož v případě b) jsou takto plně maskovány prvky PSD od 50 do 150 kHz, více k tomuto problému v sekci 5.2.1.

Obrázek 5.7 níže ukazuje detail na pásmo, ve kterém se nachází složky modulací, které chceme rozlišit. Jsou zahrnuty i odhady pomocí metody Multitaper (délka signálu je velká), které poslouží jako vizuální reference. Na obrázcích a) a b) vidíme, že AIC volí pro dosažení požadovaného rozlišení příliš nízký řád, dle očekávání. Několikanásobným navýšením řádu dojde k rozlišení složek v případě c) pro AM, ale případ d) pro FM, kde by bylo třeba v odhadu reprezentovat větší množství blízkých špiček, rozlišen není (i když

se metodě podařilo věrně vystihnout obálku složek). Příklad e) potom ověřuje doporučenou (podkapitola 4.4, sekce pro Burgovu metodu) alternativu dalšího navýšení řádu. Zde konkrétně je záznam zfiltrován dolní propustí s $f_m \cong f_s/12$ a převzorkován na $N/6$ vzorků se vzorkovacím kmitočtem $f_s/6$. Nyní jsou díky nižší hodnotě f_s složky v odhadu parametrických metod rozlišitelné s využitím čtvrtinového řádu. Zároveň se však ale nezměnilo rozlišení Multitaperu, jelikož poměr vzorkovacího kmitočtu a počtu vzorků je zachován.



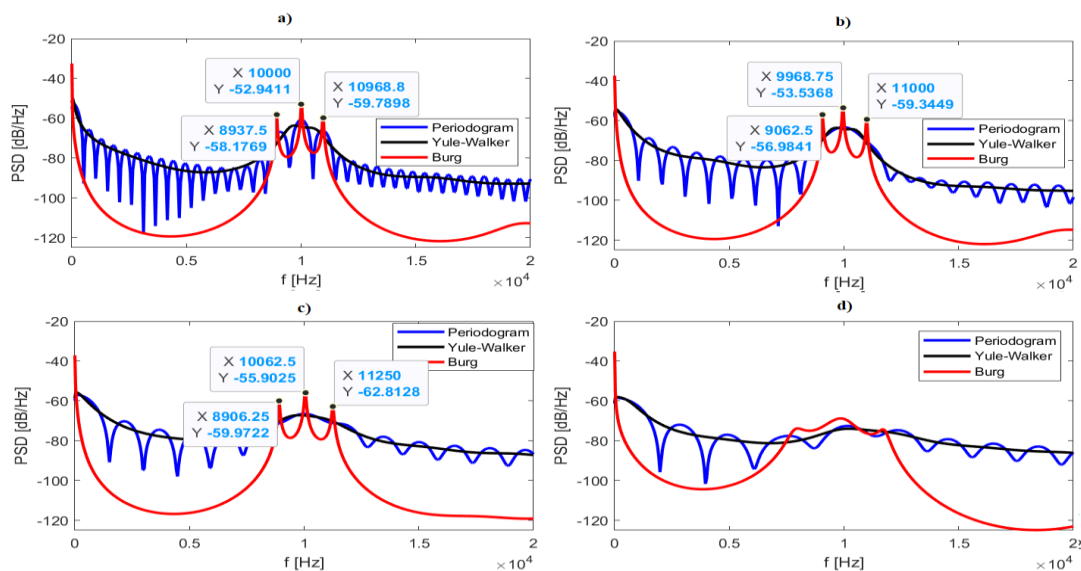
Obrázek 5.7 Odhady PSD signálu *AMmodulace.mat* pomocí Yule-Walkerovy a Burgovy metody, $N = 15000$ a) řád na základě AIC, $p = 170$, c) řád volený $p = 1000$; signálu *FMmodulace.mat* b) řád na základě AIC, $p = 272$, d) řád volený $p = 1000$; $f_s = 1,56$ MHz; e) *FMmodulace.mat* filtrovaný strmou dolní propustí s $f_m \cong f_s/2$ a převzorkovaný na $N = 2500$, $f_s = 260$ kHz, dle AIC řád $p = 253$

5.1.4 Délka signálu: malá; Odstup signálu a šumu: vysoký

Navážeme na sekci 5.1.3 použitím velmi krátkého úseku záznamu amplitudové modulace. Nejlépe by si z hlediska rozlišení v tomto případě měla dle dosavadních výsledků práce vést Burgova metoda. Pro srovnání jsou použity i metoda Yule-Walker a periodogram, který z neparametrických metod dosahuje nejvyššího rozlišení.

Na obrázku 5.8 vidíme provedené odhady pro zkracující se délku signálu. Potřebujeme dosáhnout rozlišení $\Delta f = 1$ kHz. Periodogram má pak pro volené délky signálu rozlišení a) $\Delta f = 521$ Hz, b) $\Delta f = 1042$ Hz, c) $\Delta f = 1563$ Hz, d) $\Delta f = 1953$ Hz. Od případu b) tedy není periodogram schopen složky rozlišit. Yule-Walkerova metoda při těchto odhadech selhává ve všech případech. Toto je poměrně nevýhodné, jelikož jinak nachází uplatnění jako kontrola, že nedošlo k rozštěpení odhadovaných špiček u Burgovy metody. Tím pádem se v případech, kdy rozlišujeme vícero blízkých složek velmi krátkého záznamu nelze na tuto kontrolu spolehnout.

Burgova metoda dosahuje vysokého rozlišení až do případu c). Z odhadů je ale patrné vychýlení špiček na frekvenční ose, v případě c) jde u složky na $f = 11$ kHz o poměrně velkou odchylku 250 Hz. Závisí tedy na uživateli a konkrétní aplikaci, jestli je schopnost Burgovy metody odhadnout při malé délce záznamu přibližné pozice složek za cenu kmitočtového vychýlení výhodná. Každopádně z hlediska dosaženého rozlišení pro krátké signály s velkým odstupem signálu a šumu nemá mezi uvažovanými metodami konkurenci.



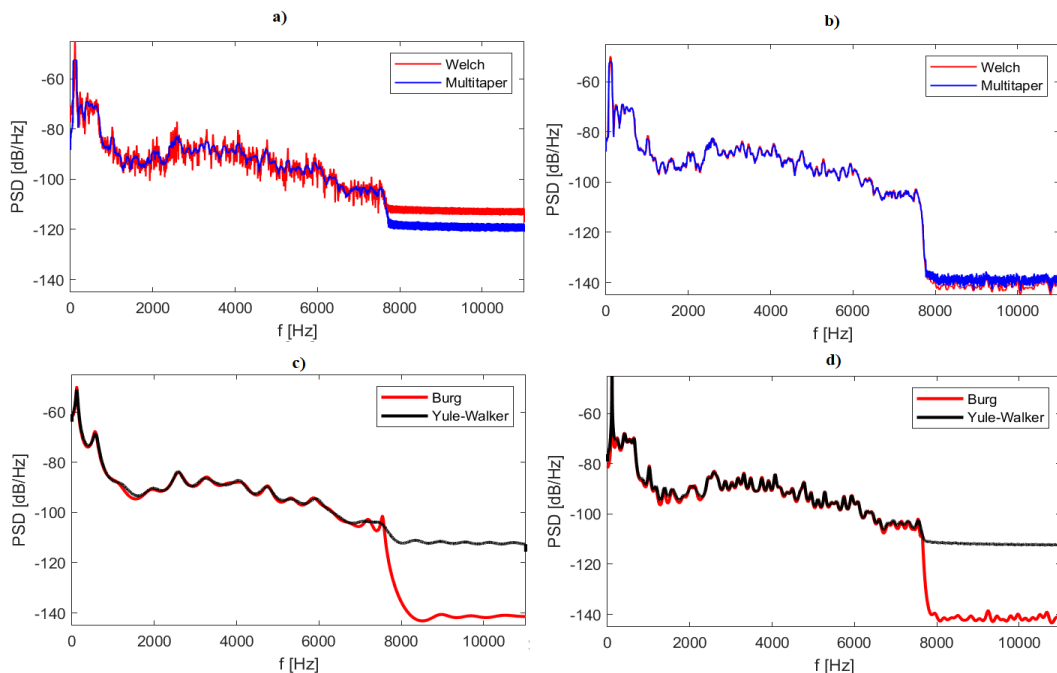
Obrázek 5.8 Odhady PSD signálu *AMmodulace.mat* pomocí periodogramu, Yule-Walkerovy a Burgovy metody a) řád modelu $p = 400$, $N = 3000$ b) $p = 400$, $N = 1500$ c) $p = 400$, $N = 1000$ d) $p = 400$, $N = 800$; $f_s = 1,56$ MHz;

5.2 Požadavek na vyhlazený odhad, věrnou reprezentaci PSD

Druhá část (pravá polovina diagramu) navržených doporučení dle diagramu na obrázku 4.37 je diskutována v této podkapitole. Do jisté míry se dané problematice věnují i části předchozí podkapitoly, kdy bylo třeba získat pro referenční odhad adekvátně vyhlazený průběh.

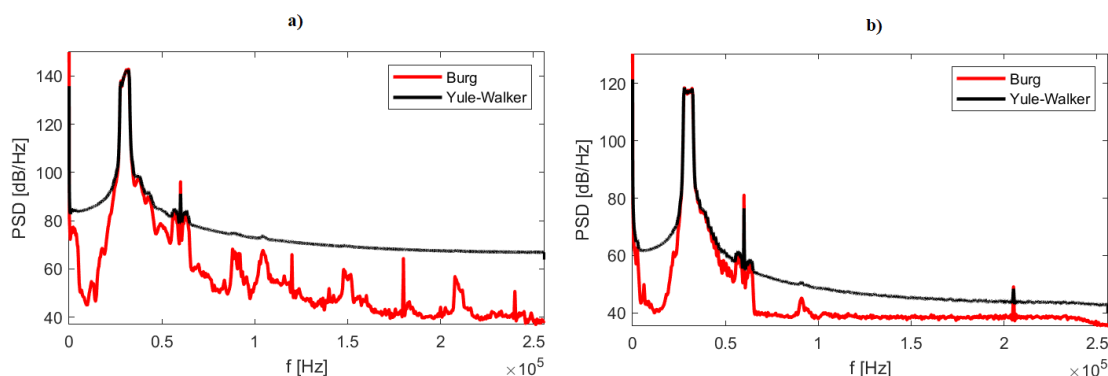
5.2.1 Délka signálu: velká; Vliv dynamického rozsahu PSD

Dynamický rozsah PSD je třeba zohlednit v případě, kdy se chystáme použít metodu, která vykazuje vychýlení úrovně PSD vlivem prosakování. Toto je naznačeno už v komentáři k obrázku 5.6. Periodogram (který vzhledem k jeho v práci dříve popsaným vlastnostem, především rozptylu, pro vyhlazený odhad netřeba uvažovat, stejně tak jeho modifikace) a Yule-Walkerova metoda poskytují vychýlené odhady vždy, byť je velikost vychýlení nepřímo úměrná délce signálu. I ostatní metody lze ale vychýlit nevhodnou volbou parametrů, např. špatná okénková funkce u Welchovy metody, použití všech dostupných sekvencí u metody Multitaper nebo příliš nízkého řádu Burgovy metody. Pro příklad je zvolen záznam *Lednice.mat*, jehož PSD vykazuje vlivem filtrace v nahrávacím zařízení strmý pokles na kmitočtu $f = 7,6$ kHz.



Obrázek 5.9 Odhady PSD signálu *Lednice.mat* pro $N = 5000$ vzorků pomocí Welchovy a Multitaper metody a) $M = 2000$, překryv 75 %, obdélníkové okno; $NW = 4$, sekvencí: 7; b) $M = 1000$, překryv 75 %, Nuttallovo okno; $NW = 10$, sekvencí: 16; Odhady pomocí Burgovy a Yule-Walkerovy metody c) $p = 40$ d) dle AIC $p = 147$; $f_s = 22,05$ kHz;

Dalším dobrým příkladem problému, který představuje vychýlení metody jsou záznamy *UnderwaterBPSK1m.mat* a *UnderwaterBPSK5m.mat*. Ty byly pořízeny jako záznam digitální komunikace využívající modulaci BPSK pomocí akustické vlny ve vodním prostředí. Záznamy se liší vzdáleností přijímače a vysílače, 1 a 5 metrů.



Obrázek 5.10 Odhady PSD pomocí Burgovy a Yule-Walkerovy metody pro $N = 200000$ vzorků a) signál *UnderwaterBPSK1m.mat*, řád dle AIC $p = 491$ b) signál *UnderwaterBPSK1m.mat*, řád dle AIC $p = 500$; $f_s = 22,05$ kHz;

Z obrázku 5.9 c) a d) plyne, že Yule-Walkerova metoda je schopna poskytnout dostatečně vyhlazený odhad, ale její použití je kvůli vychýlení odhadu nutné omezit na signály, jejichž PSD má malý dynamický rozsah. Navíc z výsledků předchozích analýz toto vychýlení pro menší délky záznamu narůstá. Na obrázku 5.10 potom vidíme, že dle odhadů pomocí Yule-Walkerovy se oba případy jeví jako téměř totožné, jen s poklesem ve spektrální hustotě o cca 20 dB. Při použití nevychýlené metody ale vyplývá, že odhad pro vzdálenost přijímače a vysílače 1 m je mnohem rozmanitější. Obsahuje kromě druhého harmonického obrazu ($f = 60$ kHz) i kopie útvaru PSD (základní kmitočet $f_c = 30$ kHz) na vyšších harmonických kmitočtech vlivem rezonance. Z toho důvodu je použití vychýlené metody na signály s větším rozsahem PSD nevhodné a výsledky analýzy jsou pak zavádějící.

Pro metodu Multitaper se z obrázků 5.9 a) a b) potvrzuje doporučení nutnosti vyjmutí posledních několika Slepianových sekvencí z výpočtu odhadu. Na obrázku b) se ukazuje, že ani doporučované 2 až 3 sekvence nemusí pro všechny případy stačit, odhad je na vysokých kmitočtech stále mírně vychýlen. To pro její samostatné použití vyžaduje ze strany uživatele větší míru opatrnosti než pro následující metody. Také vidíme potvrzení doporučení ohledně použití větší hodnoty NW pro vyhlazenější PSD vlivem průměrování. To za cenu poklesu v rozlišení. V podkapitole 5.1 bylo uvedeno, že oproti Welchově metodě je tento pokles pro stejný počet průměrovaných dílčích odhadů výraznější. Dále také, že Multitaper poskytuje v této situaci méně vyhlazený odhad, vlivem reprezentace složek jako zařezaných špiček, což může zvýraznit i složky tvořené šumem.

Metoda Burg, obrázky 5.9 c) a d), produkuje i při nižším řádu odhad, který o PSD signálu poskytne dobrou počáteční představu. Z hlediska vyhlazeného odhadu tvaru PSD je řád poskytnutý kritériem AIC dostačující, což je vidno i na obrázku 5.10. Vzhledem k velké délce signálu případné navýšení řádu jen přispěje k detailnějšímu odhadu zvýšením rozlišení.

Welchovu metodu, obrázky 5.9 a) a b), je obecně velmi obtížné vychýlit. Zde to bylo docíleno použitím obdélníkového okna, což je ale případ, který by při znalosti vlastností metody neměl nastat. Ve volbě okénkové funkce je tedy vhodné držet se doporučení z podkapitoly 4.4 v sekci pro modifikovaný periodogram, upřednostnit pro vyhlazení odhadu a omezení vychýlení Nuttallovo okno apod. Potvrzuje se výsledek z podkapitoly 4.2: kratší segmenty vedou na průměrování více dílčích odhadů, což výsledný odhad vyhlazuje díky potlačení jejich rozptylu. Opět za cenu poklesu v rozlišení.

Při velké délce signálu jsou tedy pro obdržení vyhlazeného odhadu nejrobustnější Welchova a Burgova metoda. Navíc, jak dokladuje obrázek 5.3, jsou schopny zobrazit odhad bez vychýlení i v případě reálného záznamu, který nemusí na celé své délce vykazovat vlastnosti slabě stacionárního procesu.

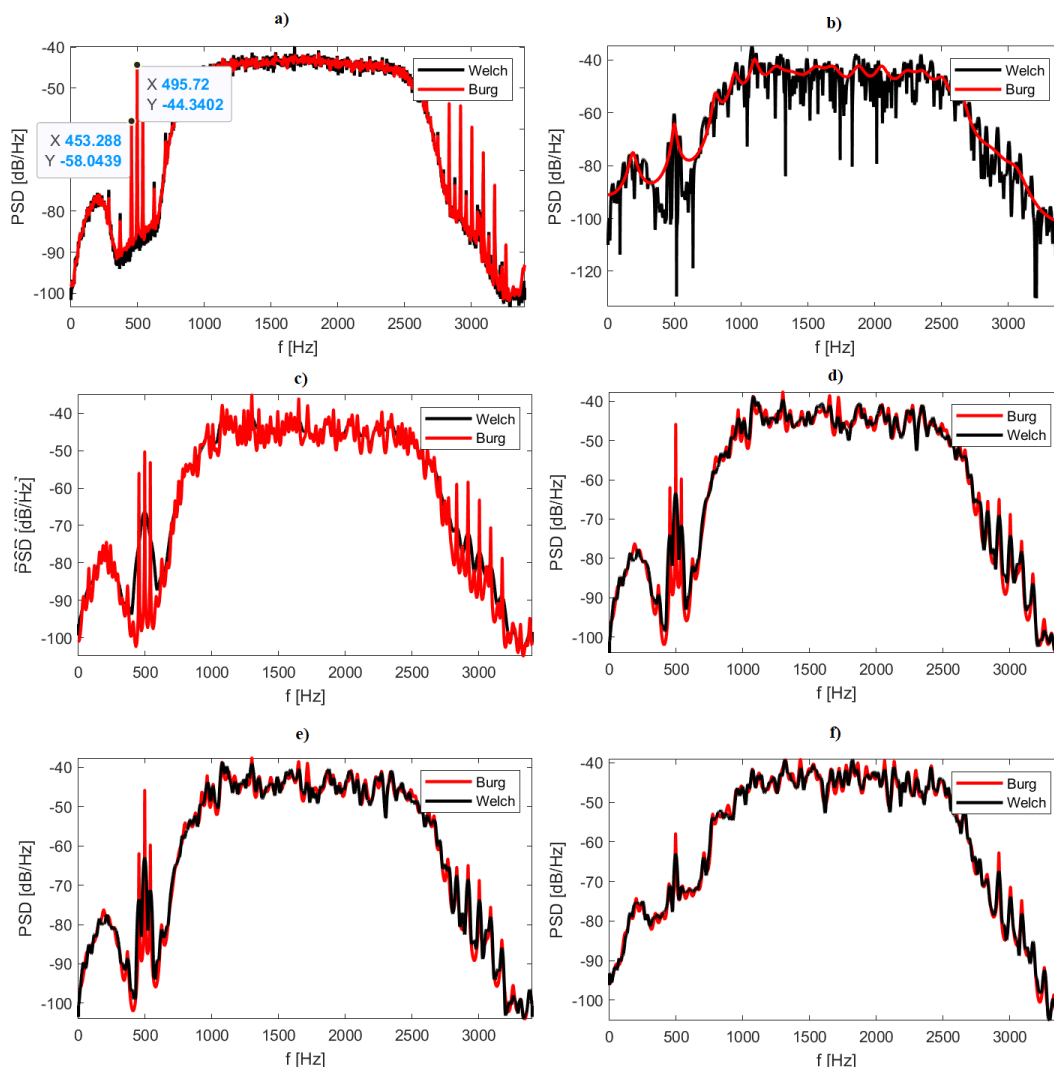
5.2.2 Délka signálu: malá

V tomto případě je důležitým omezením, že metoda musí být schopna dosáhnout dostatečného vyhlazení PSD bez znehodnocení jeho rozlišení. Odhady budou provedeny na signálu *ModemV29.mat*, který je záznamem přenosu dat z modemu pracujícího dle standardu ITU-T V.29 přes linku pobočkové telefonní ústředny. Signál má potlačenou nosnou složku na kmitočtu $f_c = 1,7$ kHz. Při přenosu k přijímači prošel signál pásmovou propustí s pásmem propustnosti od cca 1100 do 2300 Hz. PSD signálu obsahuje špičky, požadavek na jejich rozlišení bude limitovat minimální použitelnou délku signálu.

Na obrázku 5.11 a) je pro referenci odhad generován z plné délky záznamu. Z něj plyne, že je třeba rozlišit složky vzdálené přibližně 45 Hz. Z toho lze vyvodit, že abychom se při použití Nuttallova okna pro omezení vychýlení a vyhlazení odhadu Welchovy metody pracovali s malou délkou segmentu (pohybovali se ve srovnatelném řádu jako nutné rozlišení) je rozsah použitelných délek segmentu pro daný vzorkovací kmitočet přibližně od $M = 300$ do $M = 1200$ vzorků. To odpovídá dosažitelným rozlišením $\Delta f = 40,8$ Hz a $\Delta f = 10,2$ Hz.

Uvažujme, že omezení počtu vzorků N je stejné. Na obrázku b) vidíme odhad, kdy Welchova metoda používá pouze jeden segment (jde vlastně o modifikovaný periodogram). Složky jsou sice rozlišeny, ale naším požadavkem je, aby byl odhad vyhlazen, což viditelně splněno není. Takto totiž není omezen rozptyl odhadu. Burgova metoda má v tomto případě řád volen dle kritéria AIC. Potvrzuje se tvrzení, že toto kritérium má pro malé délky signálu tendenci řád podcenit, odhad naprosto vyhlazuje vše nad 2,5 kHz, a složky v okolí 0,5 kHz jsou reprezentovány pouze jednou špičkou. Tím

byl dosažen opačný případ odhadu Welchovou metodou, odhad je příliš vyhlazen vlivem nízkého rozlišení.



Obrázek 5.11 Odhady PSD signálu *ModemV29.mat* pomocí Welchovy a Burgovy metody a) $N = 45600$, $M = 5000$, překryv 75 %, Nuttall, řád dle AIC $p = 500$; b) $N = 1200$, $M = 1200$, překryv 75 %, Nuttall, řád dle AIC $p = 31$; c) $N = 1200$, $M = 300$, překryv 75 %, Nuttall, řád volen $p = 250$; d) $N = 1200$, $M = 600$, překryv 75 %, Nuttall, řád volen $p = 150$; e) $N = 1200$, $M = 500$, překryv 75 %, Hann, řád volen $p = 150$; f) $N = 1200$ z jiné části časového průběhu, $M = 500$, překryv 75 %, Hann, řád volen $p = 150$; $f_s = 6,8$ kHz;

Obrázek c) ukazuje případ, kdy pro změnu využijeme maximální počet segmentů, což je v tomto případě ($M = 300$) $L = 13$, problém je zřejmý na první pohled. Byť dle

teoretického vztahu pro rozlišení bychom měli být schopni složky rozlišit, téměř tomu tak není. Vyskytuje se jen velmi mírný náznak přítomnosti ostatních složek v okolí kmitočtu 500 Hz. Na teoretický vztah je tedy možné spolehnout se jen orientačně, dosáhli jsme pomocí něj odhadu, který je vyhlazen příliš. Naproti tomu pro Burgovu metodu byl v tomto případě řád volen manuálně. Jelikož bychom se měli ve volbě řádu dle doporučení pro zachování přijatelného rozptylu omezit na řád modelu maximálně poloviny vzorků, $p = 600$, existuje ve volbě stále velké množství volnosti. Na teoretický výpočet řádu se v tomto případě nelze spolehnout, hodnota SNR nám totiž není dopředu známa. V takovém případě, navíc když kritéria selhávají, je volba vhodného řádu otázkou předchozí zkušenosti uživatele metody a doladování opakovaným prováděním odhadu. V takovéto situaci (malá délka signálu znehodnotí výsledky kritérií, SNR je neznámé) je tedy vhodnější upřednostnit neparametrickou metodu. Pro příklad je na obrázku c) volen řád $p = 250$, kdy metoda složky rozliší, ale zároveň se potýkáme s odhadem, který má vyšší rozptyl. Pro danou aplikaci je tedy zřejmě příliš vysoký.

Obrázek d) pak ukazuje kompromis ve volbě délky segmentu u Welchovy metody. Mělo by být pro přijatelné omezení rozptylu dle doporučení dodrženo průměrování alespoň 4 segmentů. Pokud zvolíme $M = 600$, dosáhneme rozlišení $\Delta f = 20,4$ Hz, prakticky dvojnásobek potřebného teoretického minima a bude se průměrovat $L = 5$ segmentů. Složky v tomto případě rozlišíme a odhad je ve srovnání s případy b) nebo c) přijatelně vyhlazen. Burgova metoda zde využívá řád modelu $p = 150$, odhad je nyní více vyhlazen, ale zároveň se vlivem nižšího rozlišení plně nevymezují části PSD, například právě v okolí kmitočtu 500 Hz.

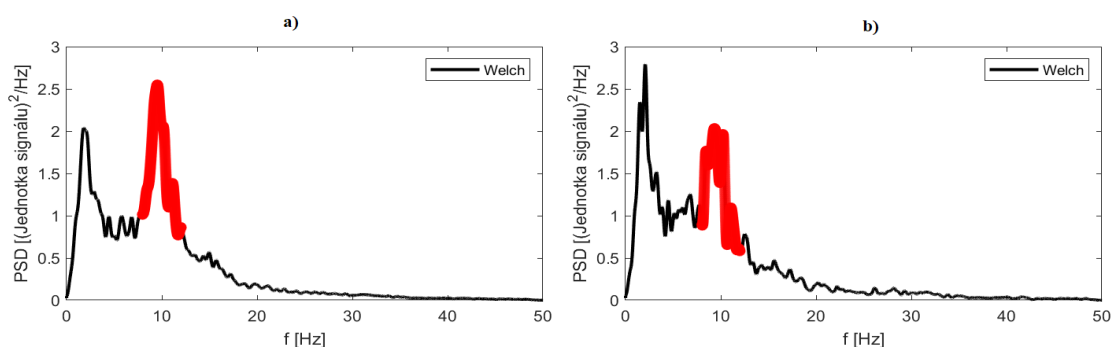
Obrázek e) ukazuje další alternativu dosažení kompromisu, oproti případu d) je zde volena jiná okénková funkce, Hannovo okno, s menší šířkou hlavního laloku, což znamená schopnost dosáhnout vyššího rozlišení při menší délce segmentu, v tomto případě dosáhneme totožného rozlišení už při délce $M = 500$. Takto lze průměrovat více dílčích odhadů, zde $L = 6$ a teoreticky tak dosáhnout většího omezení rozptylu. Z obrázku však není ve vyhlazení odhadu oproti případu d) patrný větší rozdíl. Řád AR modelu Burgovy metody je stejný jako v případě d), $p = 150$.

Obrázek f) pak ilustruje již dříve rozebíraný problém, tj. za jak reprezentativní lze považovat vlastnosti odhadu krátkého úseku signálu, v porovnání s vlastnostmi procesu. Týká se to obzvláště případu reálného záznamu, který nemusí na celé své délce vykazovat stejné statistické vlastnosti, buďto je zkoumaný proces nestacionární nebo je realizace slabě stacionárního procesu mísená s nestacionárními vlivy okolí. Na tomto obrázku je odhad pomocí stejně konfigurovaných metod, jako v případě e), ale odhad je proveden pro stejný počet vzorků na jiné části záznamu. Oproti případu e) se odhad liší hlavně v okolí kmitočtu 500 Hz, v tomto časovém úseku je hustota výkonu na pásmu v porovnání vyšší a je přítomna pouze jedna úzkopásmová složka.

Ani případ e) není reprezentativní z pohledu průměrné výkonové hustoty signálu na tomto pásmu. Kvůli omezené délce záznamu reprezentuje oproti odhadu z celého

záznamu, případ a), na pásmu v okolí 500 Hz nižší hustotu výkonu a výraznější úzkopásmové složky. To v závislosti na účelu analýzy a typu signálu ovlivňuje pohled na odhad. Pokud je cílem zjistit průměrný výkon signálu v daném časovém úseku na pásmu, kde jeho hodnota kolísá, stačí pořídit dlouhý záznam, případně vícero kratších realizací. Poté provést odhad jednou z metod uvedených v komentáři k obrázku 5.3, což je právě případ použitého záznamu *ModemV29.mat*. Problémem je samozřejmě, pokud statistické charakteristiky signálu vykazují trend, pak průměrování představu o spektru signálu zkreslí. Pokud je tedy předmětem analýzy zkoumání rysů a popis náhodného procesu, který realizace tvoří, časovou informaci o signálu nelze zanedbat, a je třeba použít časově-frekvenční analýzu.

Typickým příkladem signálu, kde lze spektrální analýzu uplatnit za účelem odečtu průměrného výkonu na pásmu i v případě nestacionárního procesu je signál EEG. V práci je použit záznam (*EEGrestFiltered.mat*) EEG subjektu, kterému je v poloze v leže použita instrumentální hudba a má zavřené oči. V této situaci se očekává zvýšený výkon na pásmu alfa vln 8-12 Hz, jelikož je subjekt uvolněný [15]. Z použitého signálu je odstraněno úzkopásmové rušení na kmitočtu 50 Hz a byl zfiltrován Butterworthovým filtrem s pásmem propustnosti 1 až 40 Hz. Měřené hodnoty jsou v jednotkách μV .



Obrázek 5.12 Odhady PSD signálu *EEGrestFiltered.mat* pomocí Welchovy metody a) $N = 24000$, $M = 1000$, překryv 75 %, Nuttall b) $N = 16000:24000$, $M = 1000$, překryv 75 %, Nuttall; $f_s = 200$ Hz; Červeně vyznačeno je pásmo alfa vln, na kterém se odečítá výkon

Na obrázku 5.12 vidno odhad z plné délky a) a z poslední třetiny b) záznamu EEG signálu. O odhadu Welchovy metody zde lze opravdu uvažovat pouze jako o průměru spektrální výkonové hustoty v čase. Krom toho, že se mění celkové rozložení spektra se samozřejmě mění i výkon na příslušných pásmech. Na červeně vyznačeném pásmu alfa vln byl průměrný relativní výkon vztažen ke zbytku vzorkovaného pásma 32,8%. V poslední třetině záznamu je relativní výkon 26,9 %. Konkrétním příkladem ztracené časové informace je tedy v tomto případě pokles výkonu na pásmu alfa vln a nárůst výkonu na pásmu 1 až 4 Hz v poslední třetině záznamu.

6. APLIKACE PRO GENEROVÁNÍ SPEKTRÁLNÍCH ODHADŮ

Součástí zadání práce bylo vytvoření sady funkcí pro generování odhadů PSD a jejich využití v aplikaci s grafickým uživatelským rozhraním (GUI) využívajícím MATLAB. Aplikace byla vytvořena pomocí prostředí App Designeru, ve verzi MATLABu 2022a. Při spouštění aplikace přes soubor *.mlapp, tedy přes prostředí MATLABu je třeba mít nainstalované rozšíření Communications Toolbox a jím vyžadovaná rozšíření DSP System Toolbox a Signal Processing Toolbox. V případě spouštění samostatného *.exe instalačního balíčku není vyžadována instalace MATLABu ani uvedených rozšíření, ale pro její správné fungování aplikace nainstaluje MATLAB Runtime 9.12.

Aplikace nese název SpecAn (Spectral Analysis) a skládá se ze tří záložek, potažmo režimů. K dispozici jsou pro účely této práce vytvořené algoritmy pro výpočet jednostranných odhadů PSD pomocí (modifikovaného) periodogramu a metod Welch, Blackman-Tukey, Multitaper, Yule-Walker a Burg.

Správnost vlastních funkcí pro odhad slabě stacionárních signálů byla ověřována na funkcích poskytovaných prostředím MATLABu (v případě že byla daná metoda k dispozici, což Blackman-Tukey není) a obdržené odhady jsou shodné. Výjimka nastává v případě metody Multitaper při aplikaci na signál, jehož průběh nesplňuje na celé délce záznamu podmínky slabé stacionarity. Pro práci vytvořená funkce *custom_mtm.m* je založena na použití FFT (Fast Fourier Transform, rychlá Fourierova transformace) dle rovnice (2.28), což při použití na takovýto signál vychyluje odhad. Dle stejného vztahu jsou dílčí odhady normovány dělením vlastní hodnotou vektoru použité Slepianovy sekvence. Naproti tomu MATLABem poskytnutá funkce *pmtm.m* využívá namísto FFT transformaci Chirp Z-transform použitím funkce *czt.m* a odhad se pak tvoří nevychýlený. Odhady jsou normovány násobením vlastní hodnotou. V práci je tedy ponechána verze metody založená na literární rešerši, avšak ve zdrojovém kódu aplikace je v komentáři obsažen i zápis využívající druhou transformaci a normování.

Prvním režimem aplikace je *Parallel methods*, jehož účelem je zobrazit odhady pomocí vícero metod najednou a tím umožnit jejich vzájemné porovnání. Tento režim pracuje s časovými záznamy reálných signálů vzorkovaných v základním pásmu, které je třeba do aplikace importovat ve formátu *.mat. Aplikace dovolí výběr pouze jednoho souboru. Pro správné fungování by *.mat soubor měl obsahovat dvě proměnné: „A“, což je vektor délky N vzorků, nesoucí informaci o okamžité výchylce signálu a „fs“, což je vzorkovací frekvence. Po načtení souboru aplikace zobrazí časový průběh signálu a vypíše údaje o počtu vzorků a vzorkovací frekvenci. Uživatel má také možnost z načtených vzorků vybrat pro zpracování jen část, zvolit počet bodů, na které se odhady vykreslí a přepnout jednotky na vertikální ose (mezi Units^2/Hz a dB/Hz). Následně lze v panelu příslušné metody navolit pro ni relevantní parametry (aplikace uživatelské

vstupy omezuje na povolený formát a hodnoty, uživatele při nevhodném formátu dat nebo proměnných v souboru upozorní). Režim obsahuje i možnost výpočtu kritérií AIC a FPE pro usnadnění volby řádu AR modelu u použitých parametrických metod. Parametry ostatních metod se v závislosti na počtu vzorků analyzovaného signálu přenastaví automaticky, dle doporučení pro vyhlazený odhad z podkapitoly 4.4. Uživatel samozřejmě může do parametrů metod zasahovat.

Druhým režimem je *Single method*, který taktéž pracuje s importovaným záznamem signálu. V tomto režimu je možno zobrazit pomocí jedné metody tři separátní odhady, s možností navolit pro každý jiné vzorky importovaného signálu, ze kterých se odhad PSD vypočítá. Jinak je princip fungování obdobný režimu *Parallel methods*.

V posledním režimu, *Overlay analysis*, se místo záznamu pracuje s generátorem signálů. Dostupné jsou dva typy signálu, buďto směs dvou sinusoid s bílým šumem s volbou všech parametrů signálu nebo AR proces prvního až čtvrtého řádu. V případě AR procesu se signál generuje na základě uživatelem zadaných koeficientů přenosové funkce IIR filtru a a výkonu bílého šumu na jeho vstupu. Pokud není model stabilní, aplikace uživatele upozorní a signál nevygeneruje. Po vytvoření signálu se zobrazí jeho časový průběh, uživatel dále zvolí metodu použitou při odhadu a nastaví její parametry.

U odhadů lze nastavit počet bodů na které se odhad vykreslí a přepnout jednotky vertikální osy, obdobně jako u předchozích režimů. Pro odhady PSD AR procesu jsou oproti sinusoidám k dispozici další možnosti ovládání. První z nich je možnost nastavit generátor náhodných čísel MATLABu do režimu *default*, a tím zajistit, že se odhady generují s uplatněním jedné realizace šumu. Dále má uživatel možnost promítnout do grafu průběh teoretického PSD právě vygenerovaného procesu. Důležitým ovládacím prvkem, podle kterého je režim pojmenován, je volba počtu generovaných realizací procesu, společně s možností vykreslit jejich odhady a průměr. Po stisku tlačítka pro vygenerování odhadů se odhady PSD všech realizací vykreslí do grafu (pravé PSD je možno v libovolný okamžik skrýt/zobrazit).

Návod k obsluze je uveden v sekci Příloha A - Návod k aplikaci SpecAn. Ta obsahuje pro lepší představu i snímky z vytvořené aplikace.

7. DATABÁZE SIGNÁLŮ

Vytvořená databáze je kombinací simulovaných a reálných signálů vzorkovaných v základním pásmu. Signály se liší v práci uvažovanými vlastnostmi, kdy většinu lze považovat za realizace slabě stacionárních náhodných procesů (u měřených signálů jde jen o předpoklad, jak bylo diskutováno v kapitole 5). Níže je seznam těchto signálů společně s jejich vlastnostmi a popisem. Parametry signálů jsou voleny tak, aby se dobře projevíly odlišné vlastnosti metod. Všechny uvedené položky jsou obsaženy v příloze práce ve formátu *.mat jako řádkové vektory, společně s jejich vzorkovacím kmitočtem. Převzaté záznamy, které byly příliš datově objemné byly z důvodu omezení velikosti přílohy práce ořezány.

7.1 Simulované signály

Tyto signály byly generovány pomocí prostředí MATLAB, jde o signály použité v kapitole 4.

Směs dvou sinusoid na blízkých kmitočtech s aditivním bílým šumem

Tyto signály sloužily pro posuzování vlivu parametrů signálu na frekvenční rozlišení odhadu. Jsou vzorkovány kmitočtem $f_s = 1 \text{ kHz}$ a mají délku $N = 20000$ vzorků. Sinusoidy mají kmitočty $f_1 = 150 \text{ Hz}$, $f_2 = 152 \text{ Hz}$, a stejnou amplitudu $A = 2 \text{ V}$. Jsou smísены s bílým šumem o čtyřech různých výkonech, aby byly k dispozici záznamy s odlišnými hodnotami SNR . Ty jsou uvedeny v názvech souborů.

- a) *DveSinusoidySumSNR-12dB.mat*
- b) *DveSinusoidySumSNR-6dB.mat*
- c) *DveSinusoidySumSNR0dB.mat*
- d) *DveSinusoidySumSNR3dB.mat*
- e) *DveSinusoidySumSNR10dB.mat*

Autoregresní proces 4. řádu

Jedná se o část jedné realizace signálu, který byl použit při posuzování rozptylu a vychýlení odhadů PSD. Je vzorkován kmitočtem $f_s = 1 \text{ kHz}$ a má délku $N = 20000$ vzorků. Pro jeho vygenerování byla použita funkce *generate_AR4.m*, která je součástí vytvořené aplikace. Použitý proces byl vytvořen jako výstup filtru s nekonečnou impulsní odezvou, na jehož vstupu je bílý šum o výkonu $1,25 \text{ mW}$. Parametry přenosové funkce jsou $a_1 = -3.492$; $a_2 = 4.769$; $a_3 = -3.007$; $a_4 = 0.7374$.

- *AR4proces.mat*

Linkový kód Manchester

Signály byly použity při pozorování vlivu míry zašumění na odhad PSD. Generovaný kódovaný průběh je tvořen 200 pseudonáhodnými bity, každý bit je potom reprezentován 100 vzorky. Pro jednoduchost je $f_s = 100 \text{ Hz}$ a $N = 20000$. Průběh nabývá hodnot od

–1 do 1 V a je smísen s bílým šumem o čtyřech různých výkonech, pro získ záznamů s odlišným SNR.

- a) *LinkovyKodManchesterSNR-12dB.mat*
- b) *LinkovyKodManchesterSNR-6dB.mat*
- c) *LinkovyKodManchesterSNR0dB.mat*
- d) *LinkovyKodManchesterSNR10dB.mat*

7.2 Záznamy reálných signálů

Záznamy signálů pořízeny či převzaty za reálných podmínek, použity v kapitole 5. U převzatých signálů je uveden zdroj.

Tři tóny

Signál tvoří zvuková nahrávka tónů $A_5(880\text{ Hz})$, $H_5(987,8\text{ Hz})$, $C_6(1046,5\text{ Hz})$ z elektrických kláves Yamaha PSR-E343, pořízená pomocí jednoho ze dvou mikrofonů zabudovaných v telefonu Redmi Note 10S na vzdálenost 2 m v uzavřené místnosti, původně ve formátu *.wav. Nastavení hlasitosti kláves bylo konstantní na nejnižší možné hlasitosti. Vzorkovací kmitočet je $f_s = 48\text{ kHz}$. Počet vzorků záznamu je $N = 190000$. Náhodný proces zde představuje šum okolí, který pro celou délku signálu nelze považovat za slabě stacionární. Tento signál je určen k ověření doporučení pro dosažení vysokého rozlišení odhadu pro případy dlouhého a krátkého, velmi zašuměného signálu.

- *TriTonyA5B5C6.mat*

AM modulace

Signál byl vytvořen pomocí generátoru Agilent 33120A a záznam pořízen pomocí USB osciloskopu PicoScope 3206 a přidruženého softwaru PicoScope 6, v laboratoři SE6.129. Jelikož byl signál přenesen po kabelu, vykazuje vysoký odstup signálu a šumu. Jedná se o amplitudově modulovanou sinusoidu, s kmitočtem nosné $f_c = 10\text{ kHz}$, amplitudou 100 mV_{pp} a kmitočtem modulačního signálu $f_m = 1\text{ kHz}$. Signál byl vzorkován na kmitočtu $f_s = 1,56\text{ MHz}$ a je tvořen $N = 78125$ vzorky. Takto vysoký kmitočet byl zvolen z důvodu pořízení záznamu většího kmitočtového pásma. Náhodné jevy zde představují šum z generátoru a rušení z okolí měřícího pracoviště.

- *AMmodulace.mat*

FM modulace

Signál byl zaznamenán na stejném pracovišti jako předchozí za co nejshodnějších podmínek. Jedná se o frekvenčně modulovanou sinusoidu, s kmitočtem nosné $f_c = 10\text{ kHz}$, amplitudou 100 mV_{pp} a kmitočtem modulačního signálu $f_m = 1\text{ kHz}$, kmitočtový zdvih je $\Delta f = 5\text{ kHz}$. Signál byl vzorkován na kmitočtu $f_s = 1,56\text{ MHz}$ a je tvořen $N = 78125$ vzorky. Vysoký vzorkovací kmitočet byl volen ze stejného důvodu jako výše. Dá se očekávat obdobná úroveň šumu a podobné zdroje rušení.

- *FMmodulace.mat*

Kompresorová lednice

Signál je zvukovou nahrávkou běžné kompresorové lednice za chodu. Záznam byl pořízen pomocí mikrofonu zabudovaného v telefonu Xiaomi Redmi Note 7 na vzdálenost 1 m v uzavřené místnosti, původně ve formátu *.wav. Vzorkovací kmitočet je $f_s = 22,05 \text{ kHz}$. Počet vzorků záznamu je $N = 5000$. Hlavním předmětem zájmu je zde výrazný pokles PSD v okolí 7,6 kHz, ke kterému dochází filtrací signálu v nahrávacím zařízení. PSD má pak velký dynamický rozsah, což je vhodné pro ukázkou vychýlení odhadů.

- *Lednice.mat*

Modem V.29

Zdroj: Applied Signal Technology. (2006). [ITU-T V.29 Modem data over a PBX line].

Nepublikovaná hrubá data. Sunnyvale, California, USA. Dostupné z:

<http://bard.ece.cornell.edu/downloads/data/modem/modem.html>,

Poznámka: Kvůli přesunutí archivu jsou samotná data dostupná z:

<http://spib.linse.ufsc.br/modem.html>

Původní záznam tvořilo $t = 4,75 \text{ s}$ přijatých dat z modemu pracujícím podle standardu ITU-T V.29, při bitové rychlosti 9600 bit/s, využívající digitální modulaci 16-QAM. Data byla přijata přes linku pobočkové telefonní ústředny (PBX). Z průběhu je odstraněna nosná složka na $f_c = 1,7 \text{ kHz}$, data, která jsou autorem označena jako prakticky náhodná prošla pásmovou propustí s pásmem od cca 1100 do 2300 Hz. Původní posloupnost byla pásmově vzorkována kmitočtem $f_s = 4800 \text{ Hz}$ a je v komplexním formátu. Z důvodu kompatibility s vytvořenou aplikací byla převzorkována do základního pásma, hodnoty jsou nyní reálné, správnost převodu byla ověřena srovnáním PSD s výsledky uvedenými zdrojem. Nový vzorkovací kmitočet je $f_s = 6800$ a počet vzorků je $N = 45600$. Signál je použit pro ověření doporučení v případě analýzy krátkého záznamu signálu za účelem získání vyhlazeného odhadu PSD.

- *ModemV29.mat*

Underwater BPSK

Zdroj: ZHENG, Guo a Aijun SONG. (2021). *In-Band Full-Duplex Underwater Acoustic Communication Measurements: Self-interference*. IEEE Dataport. Dostupné z:

<https://dx.doi.org/10.21227/ecjt-ze13>

Původní záznam tvoří $t = 15 \text{ s}$ pseudonáhodných symbolů (symbolová perioda $T_{sym} = 0,2 \text{ ms}$), přenášených pomocí vodního prostředí modulací BPSK a zaznamenaných hydrofonem OceanSonics icListen ve formátu *.wav s vzorkovacím kmitočtem $f_s = 512 \text{ kHz}$. Nosná složka se nachází na $f_c = 30 \text{ kHz}$, signál byl před vysíláním zfiltrován SRC (square root raised cosine) filtrem s roll-off faktorem $\beta = 0,125$. Šířka pásma by tedy měla být přibližně $B = 5,625 \text{ kHz}$. Data jsou měřena v μPa . V práci použité záznamy představují výňatky ze scénářů, kdy jsou od sebe přijímač s vysílačem vzdáleny 1 a 5 metrů. Počet vzorků je $N = 200000$. Signály jsou použity

pro ověření doporučení pro vyhlazený odhad PSD v případě jeho velkého dynamického rozsahu.

a) *UnderwaterBPSK1m.mat*

b) *UnderwaterBPSK5m.mat*

EEG

Zdroj: ABO ALZAHAB, N., DI IORIO, A., APOLLONIO, L., ALSHALAK, M., GRAVINA, A., ANTOGNOLI, L., BALDI, M., SCALISE, L., ALCHALABI, B. (2021). *Auditory evoked potential EEG-Biometric dataset* (version 1.0.0).

PhysioNet. Dostupné z: <https://doi.org/10.13026/ps31-fc50>.

Záznam je tvořen 2 minutami EEG signálu, zaznamenaného pomocí desky OpenCBI Ganglion z elektrody na nejvyšším bodě temene subjektu. Subjekt je během měření v leže, má zavřené oči a je mu pouštěna instrumentální hudba. Lze tedy předpokládat vlivem relaxace zvýšení výkonové hustoty na pásmu alfa vln (8-12 Hz)[15]. Ze signálu bylo odstraněno úzkopásmové rušení na kmitočtu 50 Hz a byl na něj aplikován Butterworthův filtr prvního řádu s pásmem propustnosti 1 až 40 Hz. Vzorkovací kmitočet je $f_s = 200$ Hz, počet vzorků $N = 24000$. Signál je použit pro ověření doporučení analýzy krátkého záznamu signálu za účelem získání vyhlazeného odhadu PSD.

- *EEGrestFiltered.mat*

8. ZÁVĚR

V práci byla na základě rešerše popsána problematika odhadu spektrální výkonové hustoty náhodných signálů. Byly stanoveny pro odhad důležité vlastnosti signálu, tj. jeho délka, míra zašumění a počet dostupných realizací procesu. Jako kritéria pro posouzení výsledného odhadu bylo stanoveno frekvenční rozlišení, rozptyl, vychýlení a případně střední kvadratická chyba. Z existujících metod odhadu byly zvoleny z řad neparametrických metody periodogram (a jeho modifikace), Welchova a Multitaper. Z parametrických metod byly zvoleny metody odhadu autoregresním modelováním PSD, konkrétně Yule-Walkerova a Burgova. Byla vytvořena sbírka záznamů simulovaných a reálných signálů, které byly voleny tak, aby reprezentovaly rozdílné kombinace sledovaných vlastností.

Odhady simulované části sbírky signálů byly analyzovány a následně stanoveny vlastnosti metod v závislosti na vlastnostech signálu, které byly rozšířeny kvůli zohlednění vychýlení některých metod o dynamický rozsah PSD. Poznatky o metodách byly sumarizovány a na základě výsledků analýzy vytvořena sada doporučení pro volbu vhodné metody a jejích parametrů pro několik scénářů vlastností signálu.

Doporučení byla ověřována na záznamech reálných signálů, případně došlo k jejich konkretizaci či rozšíření. Například je uvažována situace, kdy jinak stacionární záznam vykazuje v krátkých úsecích nestacionární charakter a jaký to má dopad na odhady jednotlivých metod. Během ověřování vyplynuly jako nejuniversálnější ze zvolených metod Welchova a Burgova metoda.

V rámci zadání byla také vytvořena sada funkcí pro generování odhadů zvolenými metodami a tyto byly zakomponovány do aplikace vyvinuté v prostředí MATLAB App Designeru, k níž byl vytvořen návod k obsluze. Byl sestaven návod pro počítačové cvičení obsahující dvě úlohy, zaměřené na dosažení vysokého frekvenčního rozlišení a vyhlazeného odhadu PSD. Návod využívá zmíněnou aplikaci a signály z databáze.

LITERATURA

- [1] STOICA, Petre a Randolph L. MOSES. *Spectral analysis of signals*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 2005. ISBN 0-13-113956-8.
- [2] MADISETTI, V. a Douglas B. WILLIAMS. *The digital signal processing handbook*. New York: IEEE Press, 1998. ISBN 0849385725.
- [3] JAN, Jiří. *Číslicová filtrace, analýza a restaurace signálů*. 2. upr. a rozš. vyd. Brno: VUTUM, 2002. ISBN 80-214-1558-4.
- [4] MARPLE JR., S. LAWRENCE. *Digital spectral analysis with applications*. Second edition. New York: Dover Publications, 2019. ISBN 9780486780528.
- [5] SOVKA, Pavel a Petr POLLÁK. *Vybrané metody číslicového zpracování signálů*. Vyd. 2. přeprac. Praha: Vydavatelství ČVUT, 2003. ISBN 80-01-02821-6.
- [6] PROAKIS, J. G., RADER, Ch. M., LING, F., MOONEN, M., PROUDLER, I. K., NIKIAS, Ch. L. *Algorithms for Statistical Signal Processing*. 1st Edition,. New Jersey: Prentice Hall, 2002. ISBN 0-13-062219-2
- [7] UHLÍŘ, Jan a Pavel SOVKA. *Číslicové zpracování signálů*. Praha: České vysoké učení technické, 1995. ISBN 80-01-01303-0.
- [8] KAVEH, M. High resolution spectral estimation for noisy signals. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* [online]. 1979, 27(3), 286-287 [cit. 2021-11-06]. ISSN 0096-3518. Dostupné z: doi:10.1109/TASSP.1979.1163243
- [9] SO, H.C., Y.T. CHAN, Q. MA a P.C. CHING. Comparison of various periodograms for sinusoid detection and frequency estimation. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* [online]. 35(3), 945-952 [cit. 2021-11-17]. ISSN 00189251. Dostupné z: doi:10.1109/7.784064
- [10] NUTTALL, A. Some windows with very good sidelobe behavior. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing* [online]. 1981, 29(1), 84-91 [cit. 2021-11-17]. ISSN 0096-3518. Dostupné z: doi:10.1109/TASSP.1981.1163506
- [11] HARRIS, F.J. On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform. *Proceedings of the IEEE* [online]. 1978, 66(1), 51-83 [cit. 2021-11-18]. ISSN 0018-9219. Dostupné z: doi:10.1109/PROC.1978.10837
- [12] BABADI, Behtash a Emery N. BROWN. A Review of Multitaper Spectral Analysis. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* [online]. 2014, 61(5), 1555-1564 [cit. 2021-11-25]. ISSN 0018-9294. Dostupné z: doi:10.1109/TBME.2014.2311996
- [13] KINNUNEN, Tomi, Rahim SAEIDI, Johan SANDBERG a Maria HANSSON-SANDSTEN. What else is new than the hamming window? Robust MFCCs for speaker recognition via multitapering. *Interspeech 2010* [online]. 2010, 2010-9-26, s. 2734-2737 [cit. 2021-12-06]. Dostupné z: doi:10.21437/Interspeech.2010-724

- [14] PROKEŠ, A. *Rádiové komunikační systémy*. RÁDIOVÉ KOMUNIKAČNÍ SYSTÉMY. 1. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2013.
- [15] ZHANG, Ce a Azim ESKANDARIAN. A Survey and Tutorial of EEG-Based Brain Monitoring for Driver State Analysis. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica* [online]. 2021, 8(7), 1222-1242 [cit. 2022-05-21]. ISSN 2329-9266.
Dostupné z: doi:10.1109/JAS.2020.1003450

SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK

Zkratky:

EEG	Elektroencefalografie
PSD	Spektrální výkonová hustota
DTFT	Fourierova transformace v diskrétním čase
SNR	Poměr signálu a šumu
DFT	Diskrétní Fourierova transformace
MSE	Střední kvadratická chyba
ENBW	Ekvivalentní šumová šířka
MTM	Metoda Multitaper
LTl	Lineární časově invariantní (filtr)
AR	Autoregresní (model)
MA	Klouzavých součtů (model)
ARMA	Autoregresní klouzavých součtů (model)
FPE	Výsledná chyba predikce (kritérium)
AIC	Akaikovo informační kritérium
FFT	Rychlá Fourierova transformace
AM	Amplitudová modulace
FM	Kmitočtová modulace
ITU	Mezinárodní telekomunikační unie
ITU-T	ITU – sektor pro standardizaci telekomunikací

SEZNAM PŘÍLOH

PŘÍLOHA A - NÁVOD K APLIKACI SPECAN	107
PŘÍLOHA B - NÁVOD PRO POČÍTAČOVÉ CVIČENÍ.....	113

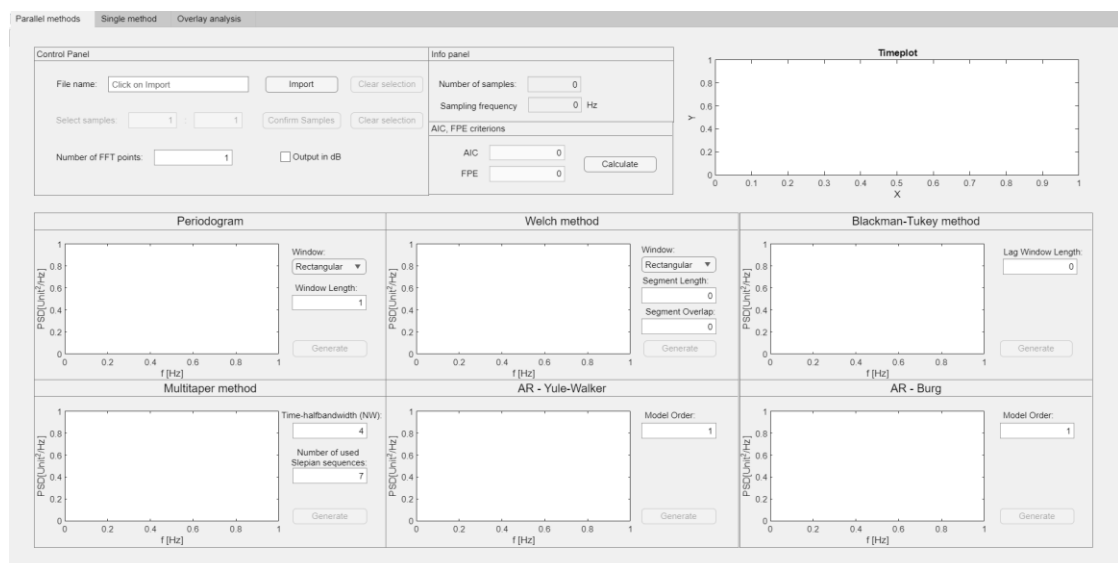
Příloha A - Návod k aplikaci SpecAn

Instalace a spuštění:

Aplikace je k práci přiložená ve dvou verzích, s příponou *.mlapp a *.exe. Pro spuštění je třeba počítač s operačním systémem Windows 10 a nainstalovaným MATLAB Runtime 9.12. Pro korektní spuštění verze *.mlapp je třeba mít v počítači MATLAB verzi 2022a. Tato verze se otevře v okně App Designeru a uživatel má tak přístup ke zdrojovému kódu. Během toho, co je aplikace spuštěná, lze využívat možností, které MATLAB nabízí, například vyznačení bodů na grafu v aplikaci a jejich uložení jako proměnné v základním prostředí MATLABu. Zároveň je ale třeba mít nainstalovaná rozšíření Communications Toolbox, DSP System Toolbox a Signal Processing Toolbox, jelikož program využívá některé jimi poskytnuté funkce. Verze *.exe je instalačním souborem, určeným pro počítače, na nichž není MATLAB nainstalován, krom toho je výhodou, že není třeba separátně instalovat výše zmíněná rozšíření. Bohužel však tato verze ztrácí část rozšířené funkčnosti, spojené s prostředím MATLABu. Uživatel také nemá v této verzi přístup ke zdrojovému kódu. Během instalace se musí stáhnout zmiňovaný Runtime o velikosti 1,3 GB.

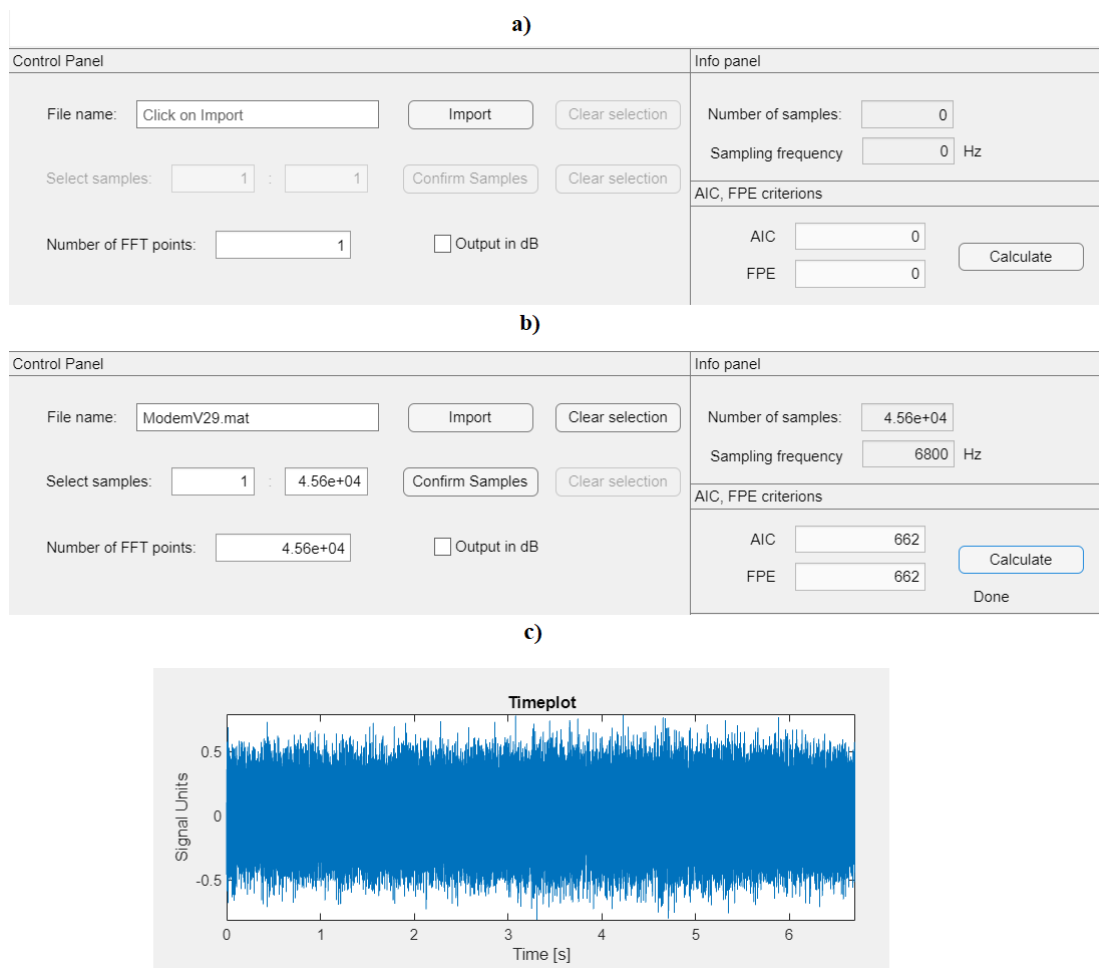
A.1 Režim *Parallel methods*

Tato záložka, viz obrázek A.1, se po spuštění aplikace zobrazí jako první. Pomocí ní lze na záznamu signálu provádět spektrální odhady pomocí několika metod najednou. Pracuje s importovanými soubory formátu *.mat, které musí obsahovat vektor reálných čísel s názvem „A“ a skalární hodnotu „fs“. Aplikace zkontroluje formát souboru a formát proměnných. V případě že některý bod kontroly není splněn, vypíše aplikace do kolonky *File name* uživateli oznámení, např. *'Incompatible file, use *.mat'*.



Obrázek A.1 Záložka *Parallel methods* aplikace SpecAn

Hlavní ovládací prvky jsou ohraničeny v *Control Panelu* v levé horní části okna aplikace. Nachází se zde tlačítko *Import*. Jeho stiskem se otevře okno prohlížeče souborů. Jsou prohlíženy pouze soubory *.mat, aplikace povolí výběr pouze jednoho souboru. Po potvrzení aplikace vykreslí časový průběh signálu a vypíše v informačním panelu hodnoty počtu vzorků a vzorkovací kmitočet.

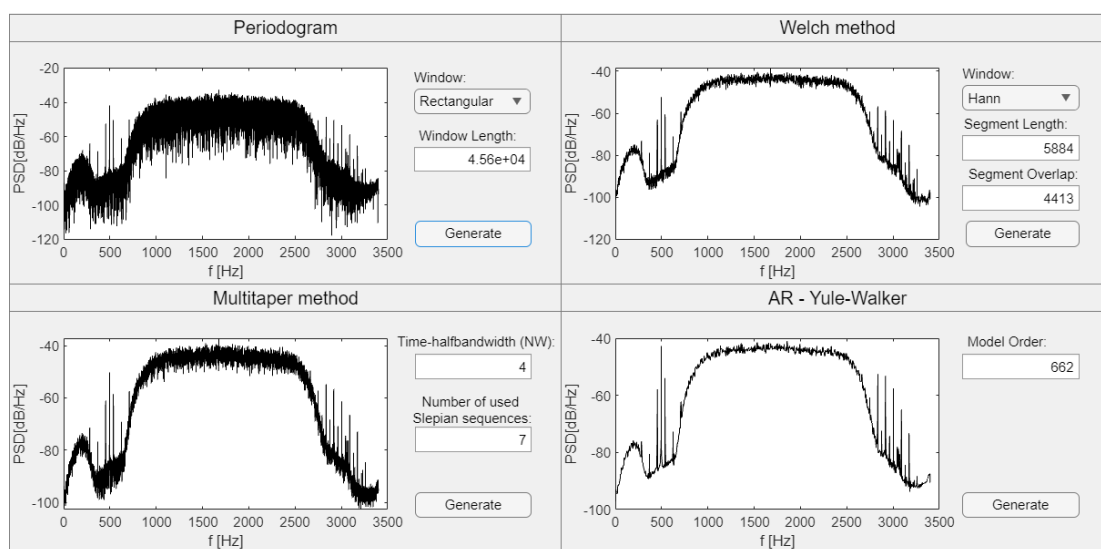


Obrázek A.2 Ovládací panel záložky *Parallel methods* aplikace SpecAn a) před importem souboru, b) po importu, c) časový průběh signálu

Na obrázku A.2 je detail ovládacího panelu. Pod editovatelným polem pro zobrazení názvu souboru, potažmo chybové hlášky, se nachází rozhraní pro výběr vzorků. Aplikace dynamicky mění limity numerických polí, aby nemohla být zvolena nepovolená kombinace, např. výběr vzorků od indexu 851 do indexu 502. Tlačítkem *Confirm Samples* se výběr potvrdí, přepíše se počet vzorků v informačním panelu a vykreslí se časový průběh zvolených vzorků. Vzorky lze zvolit opakovaně, volba je však omezena na vzorky z předchozí volby (např. jsou vybrány a potvrzeny vzorky 1 až 1000, lze volit dále ale jen z těchto 1000 vzorků). Proto stiskem tlačítka *Clear Selection* se zpátky načtou všechny vzorky signálu, bez nutnosti provádět od znova import signálu.

Ovládací panel dále obsahuje volbu počtu bodů výstupu Fourierovy transformace, resp. počet bodů, na které se vykreslí odhad (jelikož ne všechny metody využívají FFT). Dalším prvkem je zaškrtačací pole pro volbu mezi vykreslením odhadu v $(\text{Signal Units})^2/\text{Hz}$ nebo dB/Hz.

Samostatný panel tvoří kritéria AIC a FPE pro asistenci s volbou řádu autoregresního modelu parametrických metod. Po stisku tlačítka *Calculate* se začne provádět výpočet, aplikace oznámí jeho ukončení.



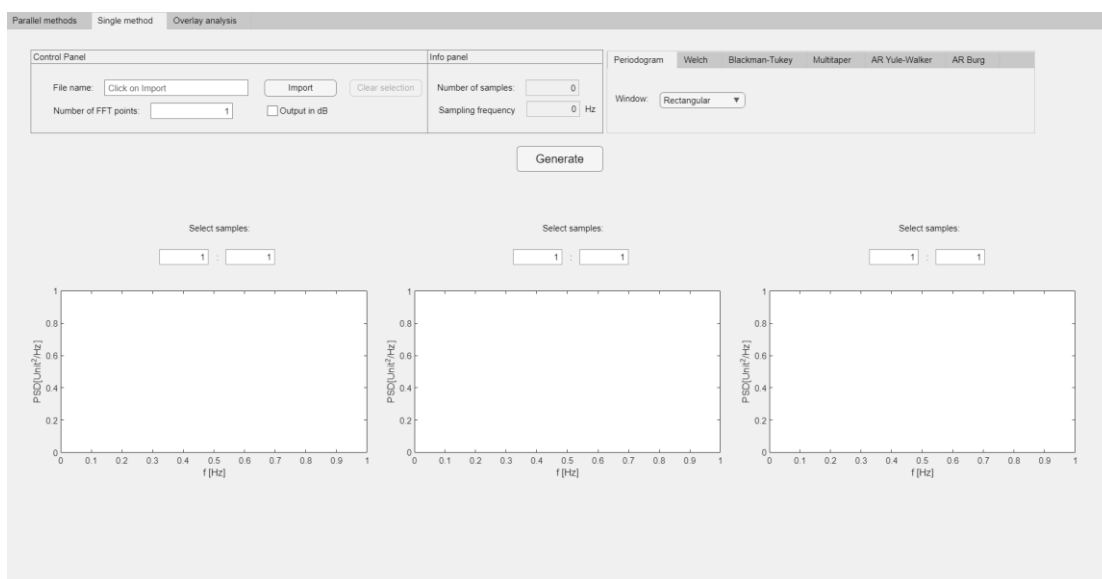
Obrázek A.3 Příklad panelů metod v režimu *Parallel methods*

Na obrázku A.3 vidno ukázkou panelů jednotlivých metod. U každé metody je rozhraní pro volbu parametrů. Bez uživatelského zásahu se hodnoty, např. u Welchovy metody mění na nastavení dle doporučení z práce. Rozsahy vstupních hodnot jsou omezeny, např. nelze zadat překryv segmentů vyšší nebo roven délce segmentu. Stiskem tlačítka *Generate* se odhady zobrazí.

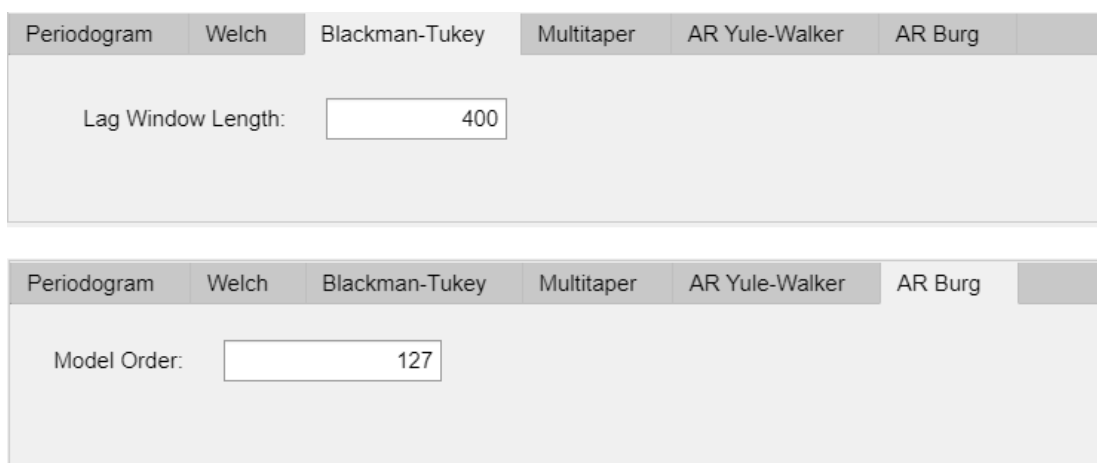
A.2 Režim *Single method*

Režim pracuje podobně jako *Parallel methods*, ovládací panel má stejné rozložení a prvky rozhraní. Výjimkou je volba počtu vzorků, viz obrázek A.4. Ta je v tomto režimu pro každý ze tří odhadů individuální. Použitá metoda se volí pomocí panelu metod v pravém horním rohu okna aplikace. Volba parametrů probíhá obdobně jako v předchozím režimu, viz obrázek A.5, s jedním omezením. Hodnoty parametrů metod jsou omezeny odhadem využívajícím nejmenší počet vzorků. Aplikace kontroluje a přenastavuje dle uživatelského výběru vzorků limitní hodnoty parametrů metod.

Výběr vzorků zde pracuje odlišně oproti *Parallel methods*. Uživatel zde není při výběru omezen na vzorky z předchozího výběru, volí je libovolně pokaždé když se generují odhady.



Obrázek A.4 Záložka *Single method* aplikace SpecAn



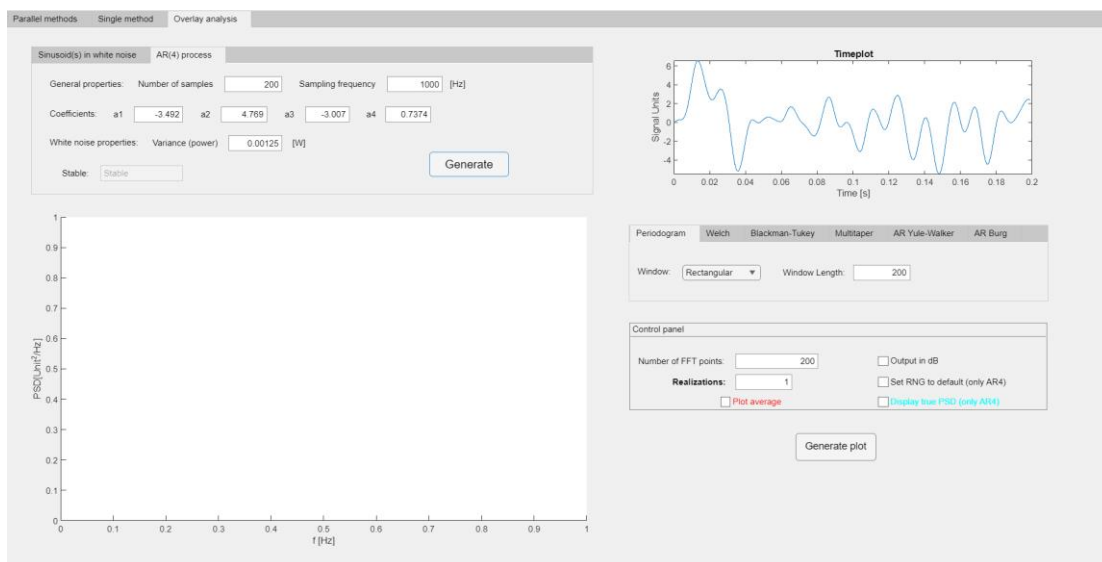
Obrázek A.5 Detail panelu metod režimu *Single method* aplikace SpecAn

A.3 Režim *Overlay analysis*

Místo se záznamy pracuje tento režim, viz obrázek A.6, s generátorem signálů. Prvním typem generovaného signálu je směs jedné nebo dvou sinusoid a bílého šumu. Druhým jsou AR procesy prvního až čtvrtého řádu. Detail rozhraní generátorů je na obrázku A.7, v obou případech lze navolit počet vzorků a vzorkovací kmitočty. U sinusoid je možno měnit amplitudu, frekvenci a fázi. Případně lze vykreslit pouze jednu sinusoidu nastavením amplitudy druhé na 0 V. Lze také nastavit jaký bude výkon použitého šumu.

Generátor AR procesů se nastavuje pomocí koeficientů přenosové funkce IIR filtru, který z bílého šumu o uživatelem zadaném výkonu vymodeluje časový průběh procesu s odpovídající frekvenční charakteristikou. Podmínkou vygenerování průběhu je, že filtr

musí být stabilní, tj. póly přenosové funkce v z-rovině musí ležet uvnitř jednotkové kružnice. V případě, že filtr pro danou kombinaci koeficientů stabilní není, aplikace to uživateli oznámí. Procesy nižších řádů je možno generovat vložení nul do numerických polí koeficientů s nejvyššími pořadovými čísly.



Obrázek A.6 Záložka *Overlay analysis* aplikace SpecAn

a)

Sinusoid(s) in white noise		AR(4) process	
Generator panel			
General properties:		Number of samples	1000
		Sampling frequency	1000 [Hz]
1. Sinusoid properties:	Amplitude	4.5 [V]	Frequency 270 [Hz] Phase 0 [deg]
2. Sinusoid properties:	Amplitude	1 [V]	Frequency 275.3 [Hz] Phase 90 [deg]
White noise properties:		Variance (power)	7 [W]
			Generate

b)

Sinusoid(s) in white noise		AR(4) process	
General properties:		Number of samples	200
		Sampling frequency	1000 [Hz]
Coefficients:	a1	-3.492	a2 4.769 a3 -3.007 a4 0.7374
White noise properties:		Variance (power)	0.00125 [W]
Stable:		Click on Generate	
			Generate

Obrázek A.7 Detail na varianty generátoru signálu režimu *Overlay analysis* a) Sinusoidy smíšené s bílým šumem, b) AR(1-4) proces

Ovládací panel a panel metod režimu se nachází v pravém dolním rohu okna aplikace. Základní ovládání je shodné s ostatními režimy aplikace, přibývají oproti nim ale nové prvky, viz obrázek A.8.

Prvním je možnost nastavit generátor náhodných čísel MATLABu do stavu default, čímž se při generování průběhů bude tvořit pouze jedna realizace náhodného signálu, lze tak srovnat pro různé délky záznamu jedné realizace. Jinak by se totiž při změně délky signálu vytvořila realizace nová. Tento ovládací prvek by neměl ze samozřejmých důvodů kombinován s prvky níže uvedenými, jelikož ty pak postrádají smysl.

Druhým prvkem je nastavení počtu generovaných realizací procesu. Uživatel je zde omezen na 200 realizací, v případě výpočetně náročnější metody Multitaper pak na 20. Odhady zvoleného počtu realizací se po stisknutí tlačítka vykreslí najednou do grafu. Uživatel má možnost nechat vykreslit i průměr z těchto odhadů.

Třetím prvkem je vykreslení teoretického PSD. To lze kdykoliv zobrazit/skrýt. Jeho průběh je v aplikaci z implementačních důvodů vypočítán jako odhad Burgovy metody pro milion vzorků generovaného procesu.

The image shows a software interface for spectral analysis. At the top, there is a row of tabs: 'Periodogram', 'Welch', 'Blackman-Tukey', 'Multitaper', 'AR Yule-Walker', and 'AR Burg'. The 'Blackman-Tukey' tab is currently selected. Below the tabs, there are three input fields: 'Window' with a dropdown menu showing 'Hann', 'Segment Length' with a text box containing '259', and 'Segment Overlap' with a text box containing '194'. Below these is a 'Control panel' section. It contains four settings: 'Number of FFT points' with a text box containing '2000', 'Realizations' with a text box containing '100', 'Output in dB' with a checked checkbox, and 'Set RNG to default (only AR4)' with an unchecked checkbox. There are also two checkboxes at the bottom of the control panel: 'Plot average' (checked) and 'Display true PSD (only AR4)' (unchecked). At the bottom of the interface is a large button labeled 'Generate plot'.

Obrázek A.8 Panel metod a ovládací panel v režimu *Parallel methods*

Příloha B - Návod pro počítačové cvičení

B.1 Úloha 1

Zadání: Mějme náhodný signál tvořený směsí dvou sinusoid o amplitudě $A = 2$ V, kmitočtech $f_1 = 150$ Hz a $f_2 = 152$ Hz s aditivním bílým šumem, $SNR = -6$ dB. Tento signál, *DveSinusoidySumSNR-6dB.mat*, importujte do aplikace SpecAn v režimu *Single method*. Používejte ve všech úkolech měřítko vertikální osy v dB/Hz. Vygenerované odhady si v průběhu vypracování ukládejte, pro pozdější srovnání. Využijte při práci v případě potíží s ovládáním **návod k aplikaci**.

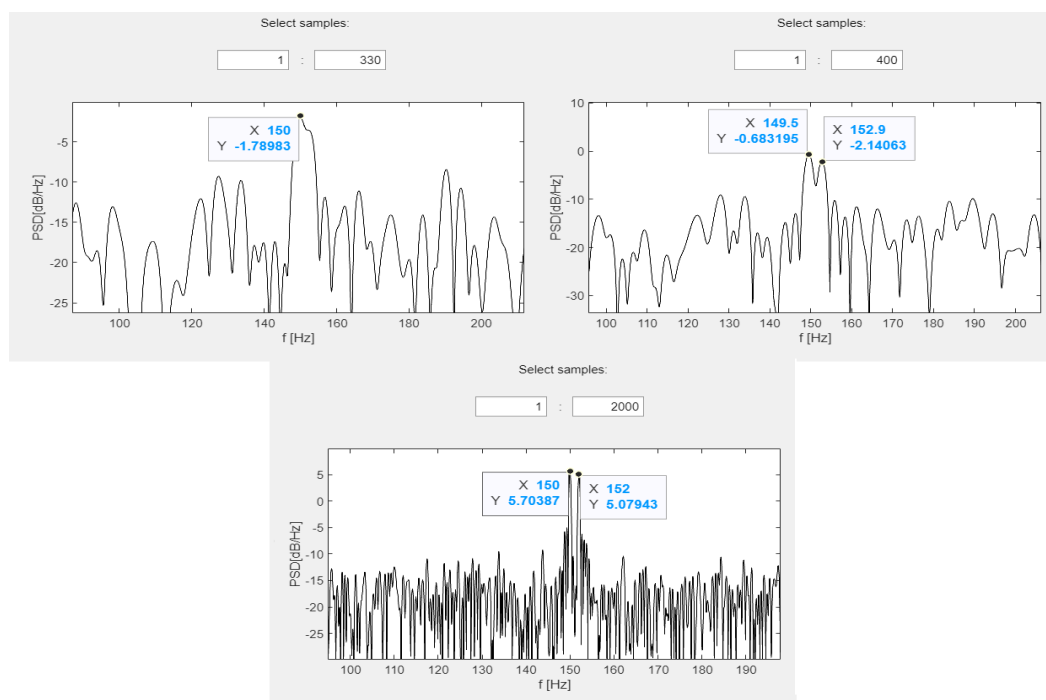
- Zvolte pro odhady metodu periodogramu bez použití okénkové funkce (obdélníkové okno). Nastavte výběrem počtu vzorků N tři různé délky záznamu tak, aby v jednom případě byly složky nerozlišeny, v druhém byly na hranici rozlišení a ve třetím došlo k jednoznačné separaci. Odhady případně přibližte do oblasti spektra, kde se nachází sinusoidy. Popište, jaký vliv má počet vzorků, resp. délka záznamu, na kmitočty sinusoid v odhadu. Co se děje s úrovní spektrální výkonové hustoty sinusoid a co s úrovní šumu, když se mění počet vzorků? Pokuste se o vysvětlení.
- Ponechte výběr použitých vzorků pro odhady stejný jako v předchozím bodě. Použijte pro odhady opět metodu periodogramu, ale využijte modifikace Hammingovým oknem. Jak se odhady změní a proč? Zaměřte se především na sinusoidy a jejich blízké okolí. Použijte i jinou, libovolnou, okénkovou funkci a odhady srovnajte.
- Importujte signál *DveSinusoidySumSNR3dB.mat*, opět proveďte odhady pomocí periodogramu s Hammingovým oknem pro stejná nastavení jako v předchozím bodě. Srovnajte odhady s předchozím bodem, posuďte, jaký vliv má úroveň výkonové hustoty šumu na odhad neparametrickou metodou. Změní se schopnost odhadu rozlišit složky na frekvenční ose?
- Přepněte aplikaci do režimu *Parallel methods*, importujte signál *DveSinusoidySumSNR3dB.mat*, vyberte vzorky 1 až 300 a potvrďte. Nastavte měřítko vertikální osy na dB/Hz. Zobrazte odhad pomocí periodogramu, podle poznatků z předchozích bodů zadání zvolte okénkovou funkci, která poskytne nejvyšší rozlišení odhadu. Zároveň proveďte odhad parametrickou Burgovou metodou. Řád autoregresního modelu zvolte $p = 110$. Srovnajte rozlišení obou odhadů. Z odhadu Burgovou metodou odečtěte kmitočty sinusoid.
- Zůstaňte v režimu *Parallel methods*, importujte signál *DveSinusoidySumSNR-6dB.mat*. Vzorky volte stejně jako v předchozím bodě, řád modelu také. K jaké změně došlo v odhadu pomocí Burgovy metody? Srovnajte s vlivem změny úrovně výkonové hustoty šumu u neparametrických metod z bodu c).

Experimentujte s volbou řádu modelu a posuďte, jak volený řád ovlivňuje schopnost rozeznat v odhadu úzkopásmové složky.

Řešení:

- a) Přepněte aplikaci do režimu *Single method*. Stiskem tlačítka *Import* se otevře prohlížeč souborů. Označíme kliknutím soubor *DveSinusoidySumSNR-6dB.mat*, stiskem *Open* se načte do aplikace. V ovládacím panelu navolíme počet bodů pro vykreslení (*Number of FFT points*), např. 20000. Pozor, jde opravdu o počet bodů pro vykreslení, ne o počet vzorků! Volbou takto vysokého množství bodů je posloupnost hodnot doplněna nulami a odhady jsou pak detailnější. Měřitko os přepněte na dB/Hz (*Output in dB*). Dále navolte počty vzorků u každého z grafů k dispozici v tomto režimu, v souladu se zadáním úlohy (pole *Select samples* u každého grafu). V panelu metody ponechte výchozí možnost, periodogram. Okénko nechte výchozí obdélníkové (*Rectangular*). Stiskněte tlačítko *Generate*, tím se vygenerují všechny tři odhady najednou. Případně si je pomocí tlačítek s lupou (při přejetí kurzoru přes graf se zobrazí v pravém horním rohu) přiblížíte do oblasti, kde se nachází úzkopásmové složky.

Frekvenční rozlišení periodogramu je převrácenou hodnotou délky záznamu. Proto na rozlišení dvou složek s rozstupem 2 Hz bude třeba $N = \frac{f_s}{\Delta f} = \frac{1000}{2} = 500$ vzorků.

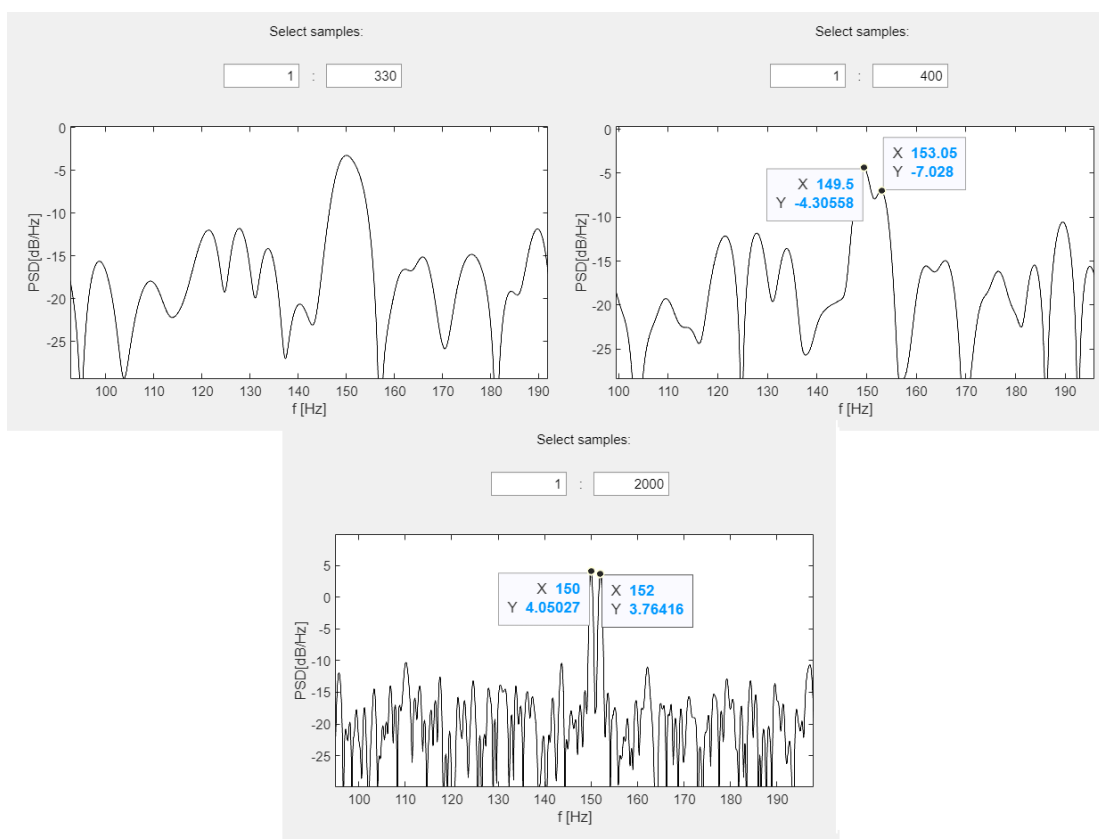


Obrázek B.1 Odhady základního periodogramu v režimu *Single method* pro bod zadání a) s počty vzorků a vyznačenými špičkami úzkopásmových složek; $SNR = -6$ dB. Odhady jsou přiblíženy do oblasti úzkopásmových složek

Ve skutečnosti ale budou složky zdánlivě na hranici rozlišitelnosti i pro nižší počet vzorků. Například pro $N = 400$, obrázek B.1 je vidět dvě separátní složky, ale jejich kmitočty jsou vychýlené. Při navýšení počtu vzorků toto vychýlení vymizí. Z odečtených hodnot plyne, že s délkou narůstá i úroveň výkonové hustoty sinusoid, zatímco výkonová hustota bílého šumu se stále pohybuje v okolí -20 dB/Hz .

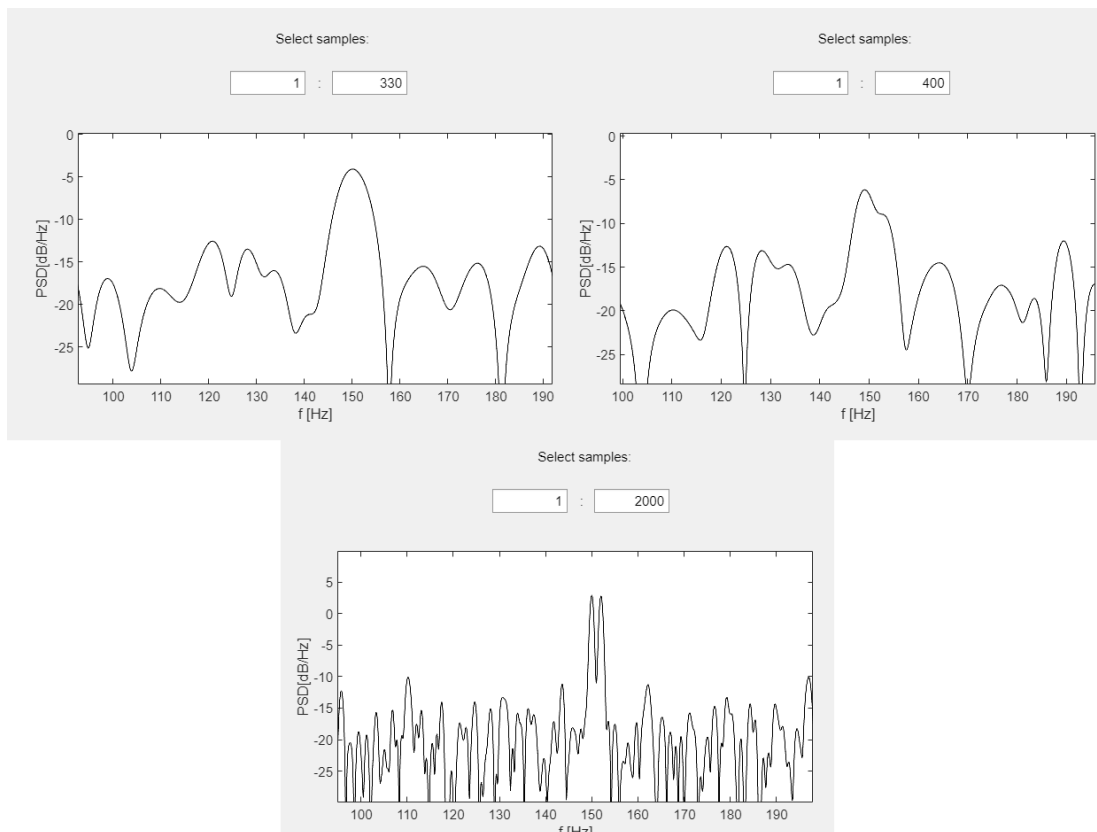
K tomuto dochází, jelikož výkonová spektrální hustota konečného záznamu sinusoidy je reprezentována funkcí sinc^2 se středem na jejím kmitočtu. Hlavní lalok této reprezentace má šířku převrácené délky záznamu. Právě šířka hlavního laloku udává frekvenční rozlišení odhadu. Jak délka záznamu roste, lalok se zužuje, ale výkon v něm zůstává stejný, tím pádem roste jeho hustota. Naproti tomu šum je širokopásmový. V tomto případě se jedná o bílý šum, jehož výkon (rozptyl) se rovnoměrně rozkládá na všech kmitočtech vzorkovaného pásma. Jeho výkonová hustota by se při stejném výkonu změnila jen změnou vzorkovacího kmitočtu, jelikož by se nyní stejným výkonem pokrývalo větší či menší pásmo.

- b) Vybereme v panelu metody (pořád periodogram) z rolovacího menu Hammingovo okno a stiskneme tlačítko *Generate*. Obdržíme odhady na obrázku B.2 níže.



Obrázek B.2 Odhady periodogramu s Hammingovým oknem pro bod zadání b) s počty vzorků a vyznačenými špičkami úzkopásmových složek; $SNR = -6 \text{ dB}$

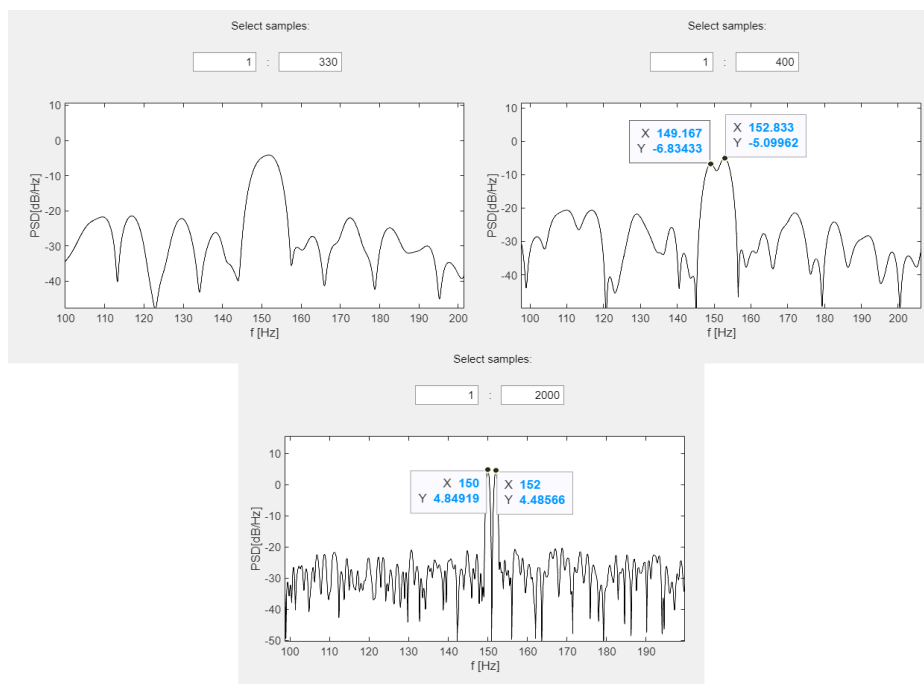
Vlivy použití okénkové funkce jsou dva. Na odhadu pro $N = 2000$ je ve srovnání s prvním bodem zadání vidět, že došlo k potlačení postranních laloků spektrálních reprezentací sinusoid. Zároveň se však snížilo frekvenční rozlišení, jelikož se výkon přesunul do laloku hlavního, což způsobí jeho rozšíření. Odhady za použití Blackmanova okna na obrázku B.3 dosahují lepšího potlačení postranních laloků než Hammingovo okno, ale zároveň je frekvenční rozlišení odhadu nižší.



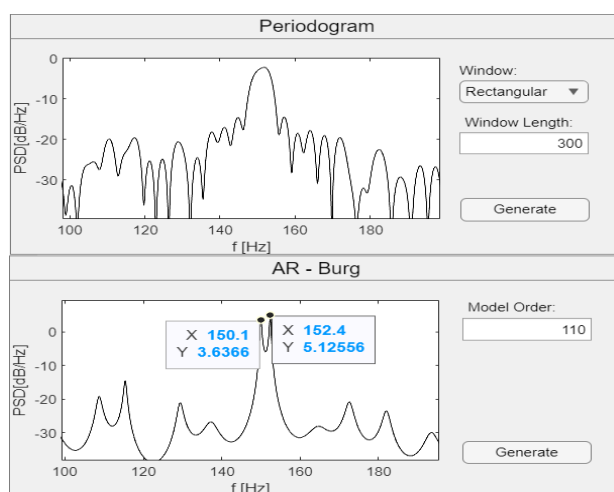
Obrázek B.3 Odhady periodogramu s Blackmanovým oknem pro bod zadání b); $SNR = -6$ dB

- c) Proved'te import nového souboru, *DveSinusoidySumSNR3dB.mat*, stejným způsobem jako v bodě a). Po nastavení vzorků pro odhady (metoda periodogram, Hammingovo okno) obdržíme výsledek jako na obrázku B.4. Vidíme, že došlo k poklesu výkonové hustoty bílého šumu. Frekvenční rozlišení odhadu je stejné jako bylo v bodě b), ale sinusoidy nyní oproti šumu více vyniknou. Opačný případ může také nastat. Pokud bude hodnota SNR příliš nízká, budou úzkopásmové složky se šumem v odhadu splývat.
- d) Na vrchní liště přepněte záložku na *Parallel methods*. Proved'te import souboru *DveSinusoidySumSNR3dB.mat*. V ovládacím panelu navolte vzorky 1:300 a stiskněte tlačítko *Confirm Samples*. Nechte odhady vykreslit na 20000 bodů a přepněte jednotky na vertikální ose na dB/Hz.

V panelu metody periodogramu zvolte okénkování, které dosáhne nejvyššího rozlišení. Z výsledků v bodech a) a b) vyplývá, že nejvyššího rozlišení dosáhne periodogram nemodifikovaný, resp. okénkováný obdélníkovým oknem (*Rectangular*). Zároveň nastavte v panelu Burgovy metody (*AR-Burg*) řád $p = 110$. Oba odhady vykreslete pomocí tlačítek *Generate*. Srovnáním odhadů na obrázku B.5 vidíme, že zvolená délka záznamu je pro periodogram na rozlišení složek nedostatečná, maximální dosažitelné rozlišení je $\Delta f = 3,33$ Hz.



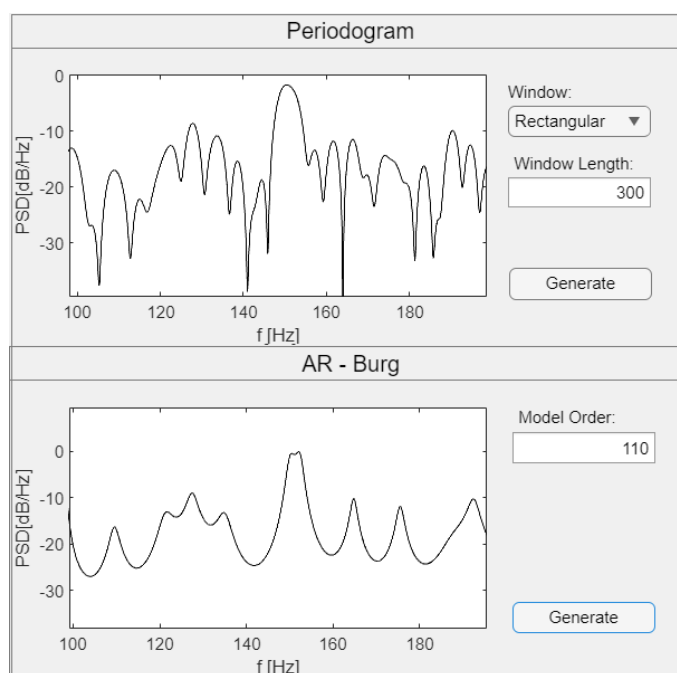
Obrázek B.4 Odhady periodogramu s Hammingovým oknem pro bod zadání c); $SNR = 3$ dB



Obrázek B.5 Odhady periodogramu a Burgovy metody pro bod zadání d); $SNR = 3$ dB

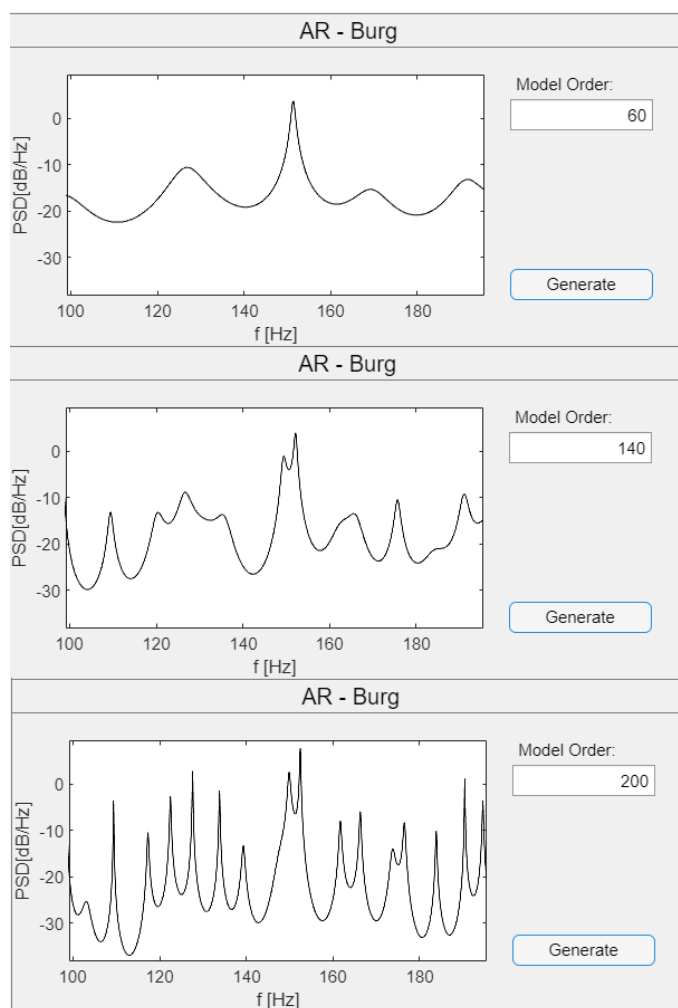
Parametrická Burgova metoda je ale schopna složky rozlišit i při tomto malém počtu vzorků, jelikož oproti neparametrickému periodogramu funguje na odlišném principu. Místo aplikace Fourierovy transformace přímo na data Burgova metoda odhad modeluje jako výstup IIR filtru, na jehož vstupu je bílý šum. Metoda vypočítává parametry přenosové funkce tohoto filtru. Pokud se vhodně (ověříte v příštím bodě) zvolí řád modelu, je schopna dosáhnout vyšších rozlišení i pro délky signálu, kde neparametrické metody selhávají. Jednou z nevýhod metody je ale, že může úzkopásmové složky reprezentovat na vychýlených kmitočtech, jak ukazuje obrázek B.5.

- e) Zůstaňte v režimu *Parallel methods*. Importujte soubor *DveSinusoidySumSNR-6dB.mat* a proveďte stejné odhady (tj. ponechte stejné parametry metod) jako v předchozím bodě. Na obrázku B.6 se projevuje důležitá vlastnost Burgovy metody, a to sice, že frekvenční rozlišení závisí mimo jiné na hodnotě SNR. Snížením SNR došlo k poklesu rozlišení a spektrální reprezentace sinusoid je na hranici rozlišitelnosti. Oproti neparametrickým metodám, jejichž rozlišení na SNR nezávisí, jak jsme ověřili v bodě c), jde o značnou nevýhodu.



Obrázek B.6 Odhad periodogramu a Burgovy metody pro bod zadání e); $SNR = -6$ dB

Při manipulaci s řádem modelu, viz obrázek B.7, vyplývá pro vlastnosti metody, že rozlišení se zlepšuje s rostoucím řádem modelu. Zároveň se ale v odhadu modelují nadbytečné špičky, které zkreslují představu o podobě spektrální hustoty signálu. Pro velmi vysoké řády (orientačně větší než $N/2$) dosahují špičky úrovní srovnatelných se skutečnými sinusoidami a bez předchozí znalosti signálu je prakticky nelze odlišit.



Obrázek B.7 Odhady Burgovy metody pro různé hodnoty řádu modelu p pro bod zadání e); $SNR = -6$ dB

B.2 Úloha 2

Zadání: Spusťte aplikaci SpecAn, přesuňte se do záložky *Overlay analysis* a přepněte generátor signálu do režimu generování AR procesu. Aplikace obsahuje jako příklad přednastavené koeficienty a a přenosové funkce. Pro volbu vlastních můžete využít volně dostupný online generátor IIR filtrů, např. <http://jaggedplanet.com/iir/iir-explorer.asp> (pozor, stránka koeficienty vypisuje v pořadí od nejvyššího). Snažte se, aby byla jeho frekvenční charakteristika co nejstrmější. V ukázkovém řešení jsou pro demonstraci použity jiné než výchozí parametry, a to $a_1 = 0,681$; $a_2 = 2,047$; $a_3 = 0,659$; $a_4 = 0,936$. Používejte ve všech podúkolech měřítko vertikální osy v dB/Hz. Využijte při práci v případě potíží s ovládáním **návod k aplikaci**.

- a) Pro začátek nastavte počet generovaných vzorků $N = 2000$ a vzorkovací kmitočet $f_s = 1$ kHz, výkon šumu na vstupu filtru můžete ponechat výchozí. Stiskem *Generate* se zobrazí ovládací panel, panel metod a časový průběh. V ovládacím panelu navolte: zobrazit odhad v dB/Hz; vykreslit teoretickou hodnotu PSD; vykreslit průměr odhadů; volte generování odhadu ze 100 realizací procesu. Vykreslete odhady pomocí periodogramu. Proveďte odhady pro $N = 2000$ a dva menší, Vámi zvolené počty vzorků. Popište chování rozptylu a vychýlení odhadů této metody v závislosti na délce signálu. Jak lze vychýlení metody omezit?
- b) Počet realizací nechte stejný jako v přechodím případě, použijte $N = 2000$ vzorků signálu. Přepněte záložku metody na Welchovu metodu, okénkovou funkci volte dle vlastního uvážení. V jednom případě zvolte délku segmentu $M = 2000$ a porovnejte odhady s dvěma délkami segmentu stejnými jako byly Vámi volené počty vzorků v úkolu a). Pozorujte, jaký vliv má na rozptyl a vychýlení odhadů volená délka segmentu, zdůvodněte. Vyzkoušejte varianty překryvu segmentů 0 (Bartlettova metoda), 25, 50, 75 % a rozhodněte, která nejvíce redukuje rozptyl odhadů. Jaká je příčina?
- c) Opět volte stejné počty vzorků a realizací jako v předchozích bodech zadání. Vyberte metodu Blackman-Tukey, jak se mění rozptyl a vychýlení odhadu pro různé počty vzorků? Jaký vliv má na odhad délka okénka autokorelační funkce? Vyzkoušejte případ, kdy použijete plnou délku autokorelační funkce a alespoň dva další.
- d) Jako další proveďte odhady pomocí parametrické Burgovy metody. Řád modelu volte $p = 4$, proveďte odhady pro $N = 2000$ a dvě další délky, stejné jako v předchozích bodech zadání, počet realizací volte opět 100. Opět popište, jak se s počtem vzorků mění vychýlení a rozptyl odhadů. Vyzkoušejte, jak pro $N = 2000$ vypadají odhady pro nižší a vyšší řád modelu, obě varianty srovnajte s případem, kdy byl řád modelu $p = 4$.
- e) Přepněte aplikaci do režimu *Parallel methods*. Importujte záznam signálu *UnderwaterBPSK5m.mat* a vyberte z něj prvních 50000 vzorků. Proveďte odhady pomocí metod z předchozích bodů zadání. Snažte se docílit vyhlazení odhadu,

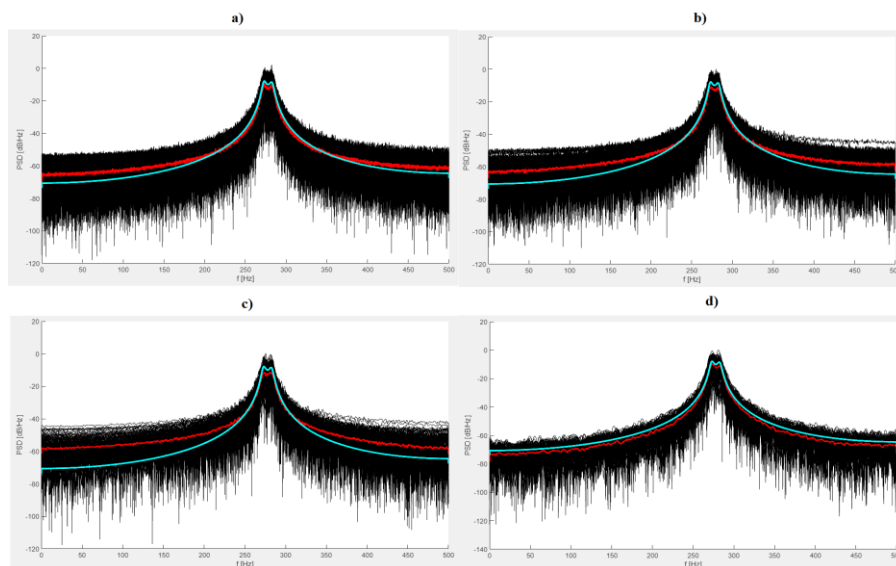
nastavení parametrů metod volte na základě poznatků z předchozích bodů zadání a požadavku na minimální frekvenční rozlišení $\Delta f = 300$ Hz. U Burgovy metody volte řád dle kritéria AIC. Využijte poznatky o metodách z předchozích bodů zadání k posouzení, které poskytují věrný vyhlazený odhad. To si ověřte na signálu *UnderwaterBPSK1m.mat*

Řešení:

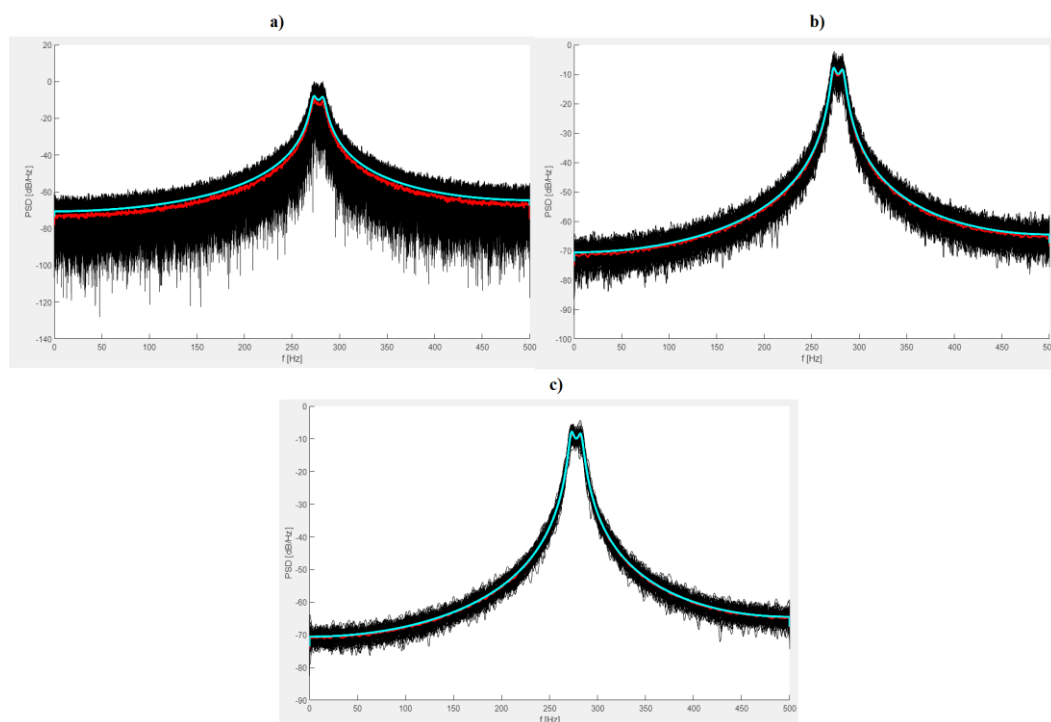
a) Přepneme režim na *Overlay analysis* a generátor přepneme do režimu *AR(4) process*. V řešení jsou voleny parametry přenosové funkce jiné než výchozí, $a_1 = 0,681$; $a_2 = 2,047$; $a_3 = 0,659$; $a_4 = 0,936$, výkon bílého šumu ponecháme na výchozí hodnotě 0,00125 W. Vygenerujeme stiskem *Generate* časový průběh procesu pro $N = 2000$ vzorků se vzorkovací frekvencí $f_s = 1000$ Hz.

V panelu metod zvolíme periodogram (délku okénkové funkce ponecháme na výchozí hodnotě, je stejná jako počet vzorků) a ponecháme výchozí obdélníkové okno (*Rectangular*), v ovládacím panelu nastavíme vykreslování odhadů 100 realizací (*Realizations*), zaklikneme vykreslování průměru (*Plot average*), pravé hodnoty PSD (*Display true PSD*) a měřítko vertikální osy v dB/Hz (*Output in dB*). Nastavíme počet bodů pro vykreslení (*Number of FFT points*) na 20000. Stiskneme tlačítko *Generate plot*. Opakujeme pro délky např. $N = 1000$ a $N = 500$.

Z výsledků, obrázek B.8, plyne, že odhady periodogramu mají pro všechny volené délky přibližně stejný rozptyl. Co se mění je jejich vychýlení, viditelné z průměru odhadů. Plyne, že vychýlení pro menší počty vzorků narůstá. Lze jej tedy omezit porovnáním větší délky záznamu signálu. Další, efektivnější způsob, jak vychýlení odhadů omezit, je použití okénkové funkce, zde např. Hannova okna.



Obrázek B.8 Odhady metodou periodogramu z bodu zadání a); počty vzorků N : a) 2000, b) 1000, c) 500, d) 500 s použitím Hannova okna

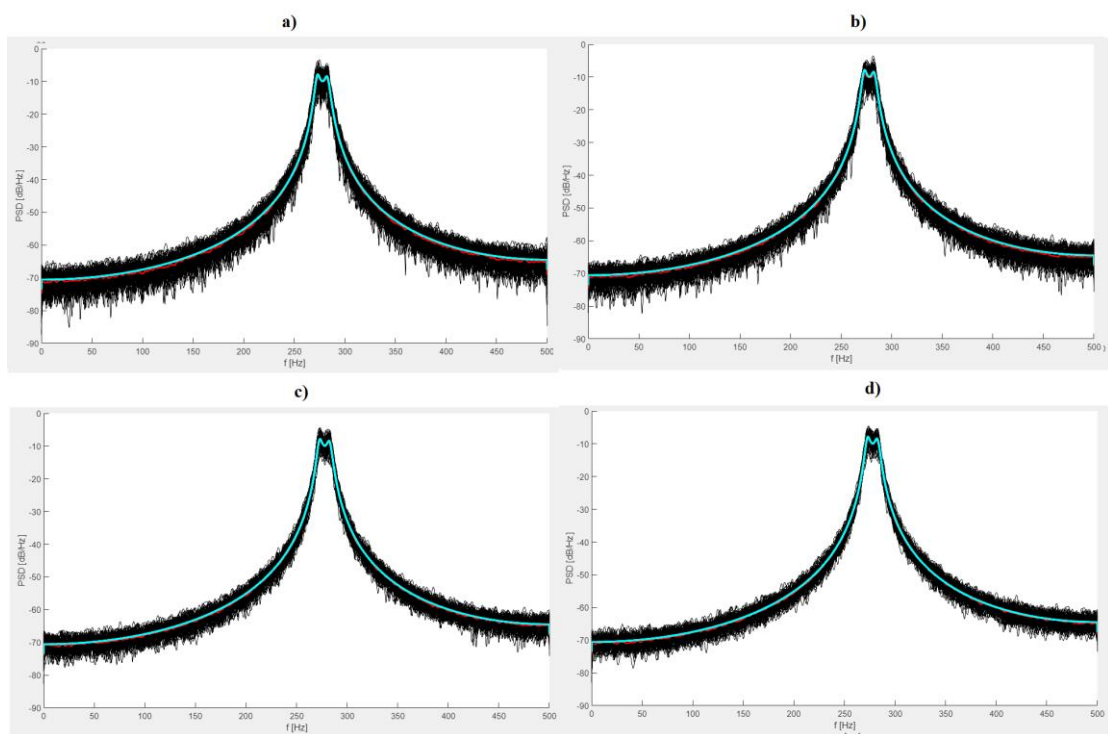


Obrázek B.9 Odhady Welchovou metodou s Hannovým oknem z bodu zadání b); počet vzorků $N = 2000$, délka segmentu M a) 2000, b) 1000, c) 500

b) Přepneme metodu na Welchovu, nastavíme délku segmentu $M = 2000$, nastavení překryvu segmentů ponecháme prozatím na aplikaci. Ponecháme pro potlačení vychýlení prosakováním Hannovo okno z předchozího bodu zadání. Provedeme odhady i pro délky segmentu $M = 1000$ a 500. Opět pro 100 realizací.

Z výsledků, obrázek B.9, plyne že odhad pomocí jednoho segmentu je jen odhad modifikovaným periodogramem, totožný odhadu z bodu zadání a) při použití Hannova okna. Jak zkracujeme délku segmentu, dochází k průměrování odhadů z většího počtu odhadů. To má za následek výrazné omezení rozptylu odhadů. Projevuje se, že čím větší počet segmentů je průměrován (čím kratší je délka segmentu), tím více je rozptyl omezen. Díky použití okénkové funkce jsou odhady nevychýleny.

Vliv použitého překryvu segmentů je vidět na obrázku B.10. V případě, kdy se segmenty nepřekrývají, je rozptyl nejvyšší. Mírně klesne při překryvu 25 %. Pro 50 % a 75 % je pak rozptyl nejnižší, srovnatelný. Stejně jako tomu bylo u délky segmentu, i zde jde o to, kolik dílčích odhadů se bude průměrovat. Pro omezení rozptylu je tedy vhodné volit vyšší hodnotu překryvu. Ne však příliš vysokou, např. použití překryvu 90 % vlastnosti odhadu prakticky nezlepší a jen zvýší výpočetní náročnost.

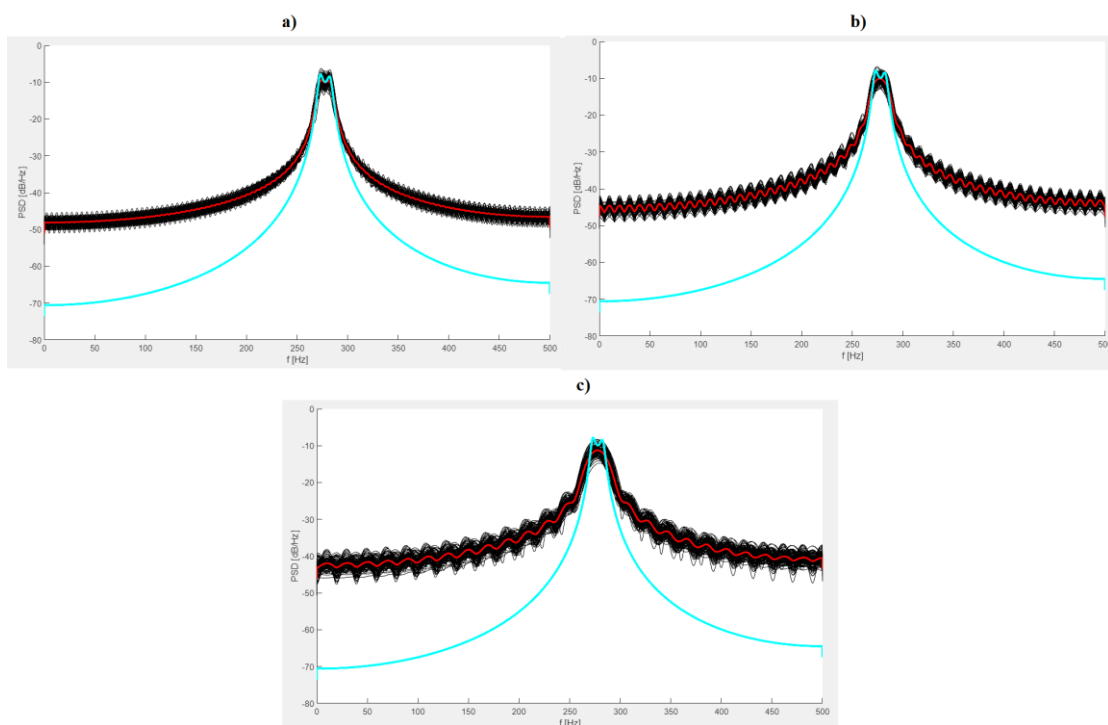


Obrázek B.10 Odhady Welchovou metodou s Hannovým oknem z bodu zadání b); počet vzorků $N = 2000$, délka segmentu $M = 500$, překryv a) 0 %, b) 25 %, c) 50 %, d) 75 %

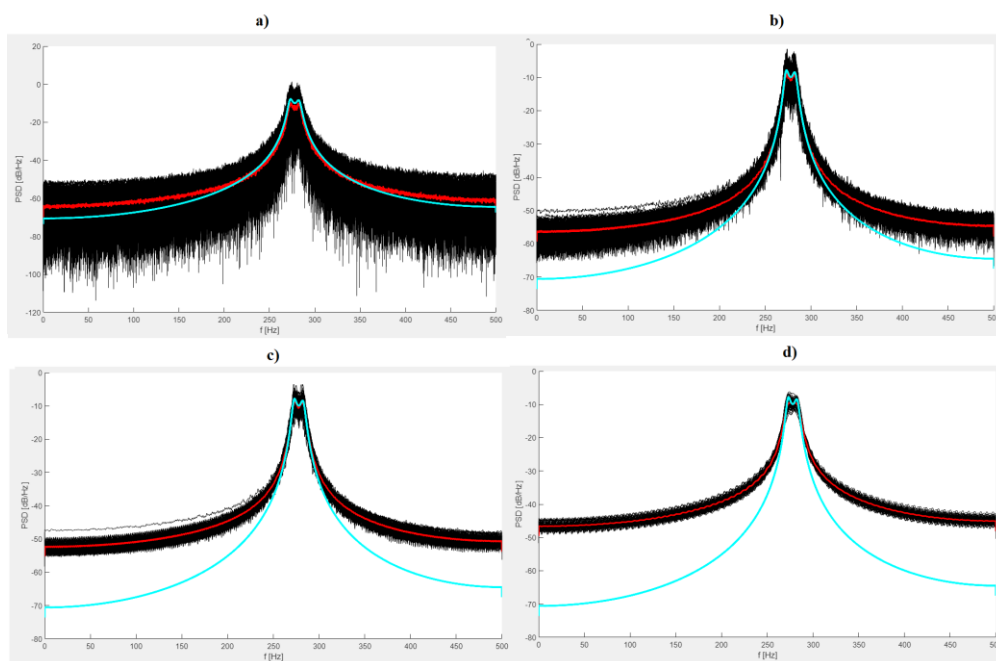
c) Přepneme se na metodu Blackman-Tukey, nejprve necháme hodnotu délky okénka autokorelační funkce na aplikaci, ta bude nastavovat hodnotu pětiny počtu vzorků a zajistí, aby hodnota použitá při výpočtu bylo liché číslo. Opět generujte odhady pro 100 realizací procesu.

Z výsledků, obrázek B.11, vidíme, že chování metody Blackman-Tukey z pohledu vychýlení v závislosti na počtu vzorků je podobné chování periodogramu. S klesajícím počtem vzorků vychýlení narůstá. Rozdíl nastává v rozptylu odhadů. Je zřejmé, že ten je na rozdíl od periodogramu také závislý na počtu vzorků, s klesajícím počtem vzorků narůstá.

Na obrázku B.12 je vidět vliv délky okénka autokorelační funkce na rozptyl a vychýlení odhadů, kdy počet vzorků ponecháme např. $N = 2000$. Pokud je okénkována celá autokorelační funkce, odhad je totožný odhadu periodogramu. Jedná se totiž pouze o základní korelogram a takto dobře ukazuje platnost Wiener-Chinčinovy věty. Při zkracování okénka narůstá vychýlení odhadů, ale zároveň se snižuje jejich rozptyl.



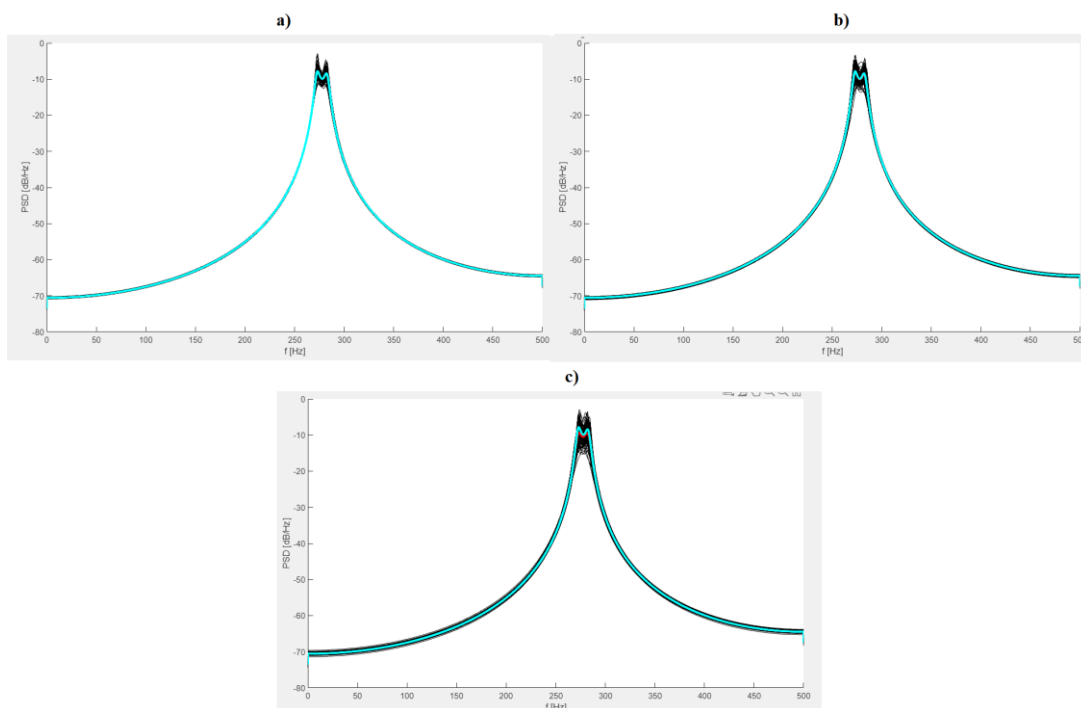
Obrázek B.11 Odhady metodou Blackman-Tukey z bodu zadání c); délka okénka autokorelační funkce $M \approx N/5$, počet vzorků a) 2000, b) 1000, c) 500



Obrázek B.12 Odhady metodou Blackman-Tukey z bodu zadání c); počet vzorků $N = 2000$, délka okénka autokorelační funkce M a) 3999, b) 2001, c) 1001, d) 301

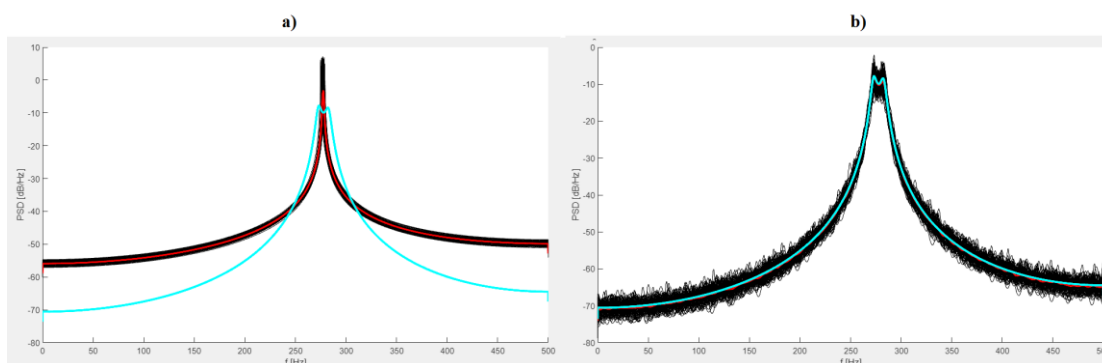
d) Přepneme se na metodu Burg, volíme nejprve řád $p = 4$, tedy pro odhad výkonové spektrální hustoty AR(4) procesu řád nejvhodnější. Generujeme opět odhady pro 100 realizací procesu.

Na obrázku B.13 je vidět, že při vhodném řádu modelu jsou odhady Burgovou metodou nevychýleny a mají velmi nízký rozptyl, přítomný pouze v okolí špiček spektra. Tento rozptyl ovšem s klesajícím počtem vzorků narůstá.



Obrázek B.13 Odhady Burgovou metodou z bodu zadání d); řád modelu $p = 4$ pro počty vzorků a) $N = 2000$, b) $N = 1000$, c) $N = 5001$

Často ale nebývá volba řádu tak přímočarou záležitostí jako v tomto případě. Na obrázku B.14 je vidět dopady nevhodně zvoleného řádu modelu. Pokud je řád příliš nízký, nedokáže metoda věrně reprezentovat tvary ve spektru a odhad je vychýlen. Na druhé straně je příliš vysoký řád, kdy zase metoda modeluje ve spektru nadbytečné množství špiček, což zvyšuje rozptyl odhadů.



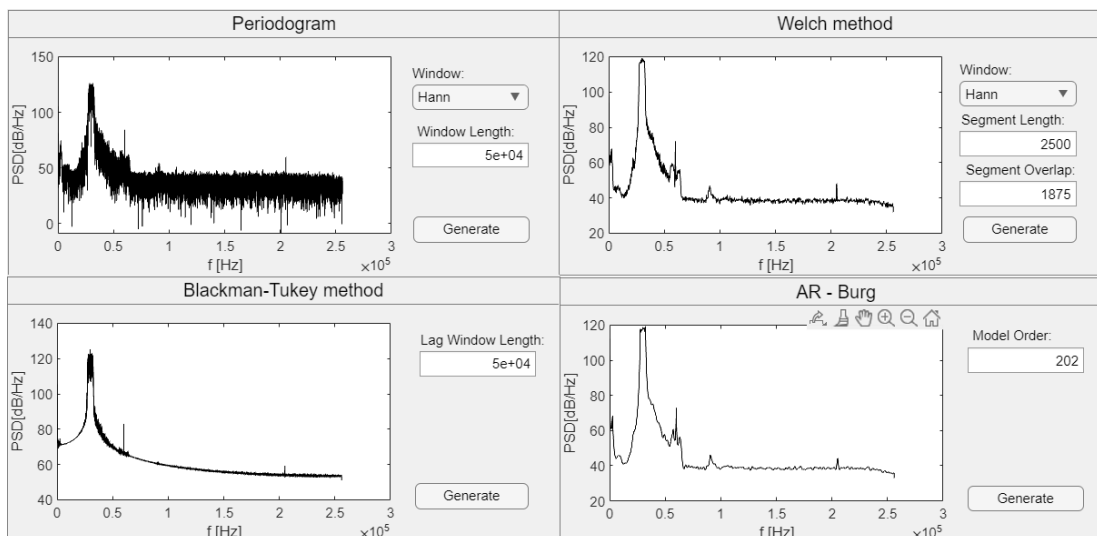
Obrázek B.14 Odhady Burgovou metodou z bodu zadání d); počet vzorků $N = 2000$ pro řády modelu a) $p = 3$, b) $p = 120$

- e) Přesuneme se do záložky *Parallel methods*, pomocí tlačítka *Import* nahrajeme do aplikace signál *UnderwaterBPSK5m.mat*. Provedeme v ovládacím panelu výběr prvních $N = 50000$ (*Select samples 1:50000*) vzorků. Co se týče nastavení metod, s uvažováním výsledků předchozích bodů zvolíme pro periodogram modifikaci Hannovým oknem, kvůli omezení vychýlení. V informačním panelu aplikace je vypsána hodnota vzorkovacího kmitočtu 512 kHz. U Welchovy metody se budeme snažit o co nejkratší segmenty, za dodržení zadaného minimálního rozlišení, tj. $M = \frac{f_s}{\Delta f} = \frac{512000}{300} = 1707$ vzorků. Jelikož je k dispozici velká délka záznamu, tak pro zachování určité rezervy v rozlišení volíme $M = 2500$ (v aplikaci *Segment Length*), použijeme překryv (*Segment Overlay*, aplikace automaticky používá překryv 75%) buďto 50 nebo 75 %. U metody Blackman-Tukey se budeme snažit o kompromis mezi vychýlením a rozptylem odhadu, zvolíme délku okna $M \approx N$ (*Lag Window Length*), tedy 50001. U Burgovy metody využijeme pro stanovení řádu modelu kritérium AIC, vypočtené aplikací.

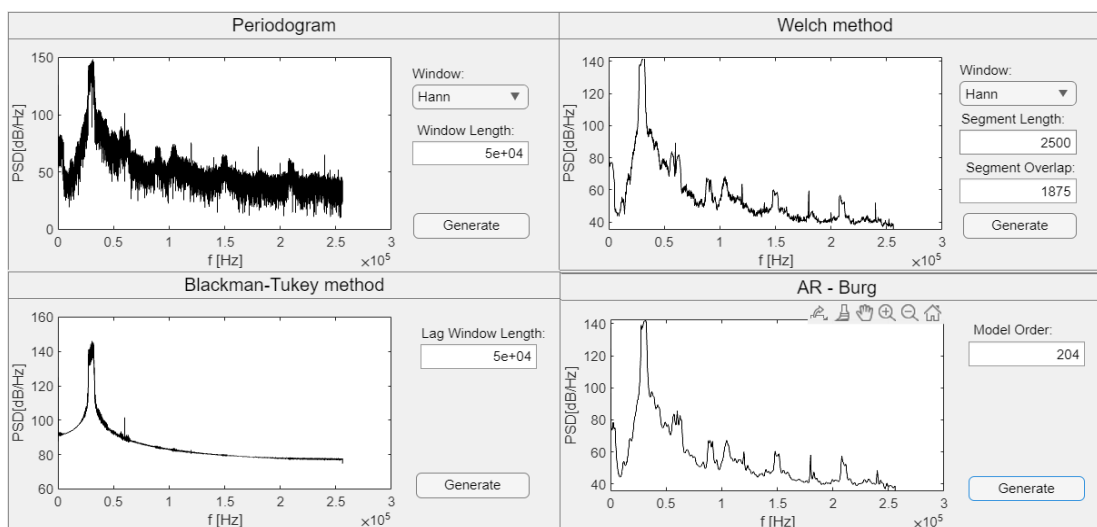
Na obrázku B.15 jsou zobrazeny odhady nastaveny dle předchozího odstavce. Vidíme, že na délce nezávislý rozptyl periodogramu je značně nevýhodný pro rozpoznávání tvarů ve spektru, byť odhad alespoň díky použitému Hannovu oknu není vychýlen. Welchova metoda poskytuje odhad, jehož rozptyl je díky průměrování omezen do té míry, že jednoznačně rozlišíme tvary ve spektru. Metoda Blackman-Tukey poskytla odhad s relativně omezeným rozptylem, bohužel je však odhad vychýlen, což je při popisu tvarů spektrální výkonové hustoty dosti zásadní nevýhoda. Burgova metoda poskytuje díky vhodně volenému řádu adekvátně vyhlazený odhad, srovnatelný s odhadem pomocí Welchovy metody. Jsou to tedy právě Welchova a Burgova metoda, které jsou schopny poskytnout věrný vyhlazený odhad.

To se potvrzuje odhady na druhém signálu, *UnderwaterBPSK1m.mat*. Vidno, že při užití periodogramu jsou tvary ve spektru maskovány rozptylem hodnot odhadu. V případě Blackman-Tukeyovy metody kvůli vychýlení není mezi signály ani patrný

rozdílu. Odhady Welchovou a Burgovou metodou jsou ale opět výstižné a tvary ve spektru jsou pomocí nich dobře rozpoznatelné.



Obrázek B.14 Spektrální odhady pro signál *UnderwaterBPSK5m.mat* všech metod z bodu zadání e); nastaveno s uvážením předchozích výsledků



Obrázek B.15 Spektrální odhady pro signál *UnderwaterBPSK1m.mat* všech metod z bodu zadání e); nastaveno s uvážením předchozích výsledků