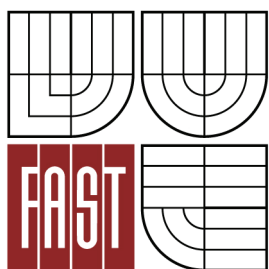




VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STAVEBNÍ
ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING
INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

NÁVRH A VÝPOČET MEMBRÁNOVÉ KONSTRUKCE ZASTŘEŠENÍ STADIONU

DESIGN AND ANALYSIS OF MEMBRANE ROOF OF A STADIUM.

DIPLOMOVÁ PRÁCE
MASTER'S THESIS

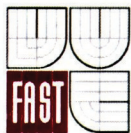
AUTOR PRÁCE
AUTHOR

Bc. ROSTISLAV LANG

VEDOUcí PRÁCE
SUPERVISOR

doc. Ing. IVAN NĚMEC, CSc.

BRNO 2013



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ FAKULTA STAVEBNÍ

Studijní program	N3607 Stavební inženýrství
Typ studijního programu	Navazující magisterský studijní program s prezenční formou studia
Studijní obor	3607T009 Konstrukce a dopravní stavby
Pracoviště	Ústav stavební mechaniky

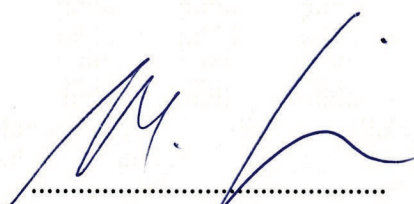
ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Diplomant	Bc. Rostislav Lang
Název	Návrh a výpočet membránové konstrukce zastřešení stadionu
Vedoucí diplomové práce	doc. Ing. Ivan Němec, CSc.
Datum zadání diplomové práce	31. 3. 2012
Datum odevzdání diplomové práce	11. 1. 2013

V Brně dne 31. 3. 2012


.....
prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.
Vedoucí ústavu




.....
prof. Ing. Rostislav Drochytka, CSc.
Děkan Fakulty stavební VUT

Podklady a literatura

Ivan Němec et al.: Finite Element Analysis of Structures.

J. S. Brew and W. J. Lewis: Computational Form-finding of Tension Membrane Structures.

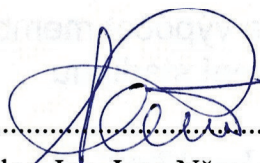
Zásady pro vypracování (zadání, cíle práce, požadované výstupy)

Cílem práce je studium možností programového systému RFEM pro navrhování a řešení membránových konstrukcí, jakož i studie membránového zastřešení fotbalového stadionu.

Struktura bakalářské/diplomové práce

VŠKP vypracujte a rozčleňte podle dále uvedené struktury:

1. Textová část VŠKP zpracovaná podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (povinná součást VŠKP).
2. Přílohy textové části VŠKP zpracované podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (nepovinná součást VŠKP v případě, že přílohy nejsou součástí textové části VŠKP, ale textovou část doplňují).



doc. Ing. Ivan Němec, CSc.
Vedoucí diplomové práce



Abstrakt

Tato práce se zabývá problematikou návrhu a výpočtu membránové konstrukce zastřešení stadionu. Jedná se o komplexní inženýrský problém, který v sobě zahrnuje mnoho dílčích složek: hledání počátečního tvaru membrány, staticky i architektonicky vhodné uspořádání systému nosných lan, hospodárné řešení okrajových podmínek (uložení) konstrukce. Všechny složky návrhu se ovlivňují a nelze je řešit bez vzájemné koordinace. Vždy velice záleží na zkušenostech a citu inženýra, jenž takovouto konstrukci navrhuje.

Úlohu již není možné řešit dle teorie I.řádu. Rovnováha sil na nedeformované konstrukci, jenž u mnoha projektovaných konstrukcí dává uspokojivé výsledky, by neodpovídala realitě. Je proto nutné uvažovat rovnováhu sil na deformované konstrukci dle teorie velkých deformací. Práce byla zadána s ohledem na záměr firem Ing. Software Dlubal s.r.o. a FEM consulting s.r.o., které spolupracují na vývoji software RFEM, doplnit tento programový systém o modul MEMBRÁNA pro hledání výchozích tvarů membránových konstrukcí. Tato práce má být příspěvkem k vytvoření tohoto modulu.

Klíčová slova

Membránové konstrukce, membránový stav napjatosti skořepin, geometrická nelinearita, modelování, MKP, numerické metody, form-finding, minimální plocha, katenoid, variační úloha, virtuální práce, diskretizace, izotropní pole napětí, anizotropní pole napětí, analogie mýdlových bublin

Abstract

This diploma thesis deals with problem of design and calculation of membrane structure of stadium roof. This is a complex engineering problem, which includes many partial problems: finding of initial form of membrane, statically and architecturally suitable arrangement of catenaries, economical solution of boundary conditions (foundations). All components affect each other and cannot be dealt without mutual coordination. It always greatly depends on the experience and intuition of engineer who design such structure.

Task which cannot be resolved according to the theory of the first order. Equilibrium forces on the deformed structure, which in many projected structures gives satisfactory results, did not correspond to reality. It is therefore necessary to consider equilibrium of forces on the deformed structure according to the theory of large deformations.

Diploma thesis was entered with regard to the intention of the companies Ing. Software Dlubal s.r.o. and FEM consulting s.r.o., working together to develop software RFEM. These companies plan to complement this program system with a module MEMBRANE for searching of initial shapes of membrane structures. This work is a contribution to the creation of this module.

Keywords

Membrane structures, membrane stress state of shells, geometric nonlinearity, modeling, FEM, numerical methods, form-finding, the minimum area, catenoid, variation methods, virtual work, discretization, isotropic stress field, anisotropic stress field, analogy soap bubbles

Bibliografická citace VŠKP

LANG, Rostislav. *Návrh a výpočet membránové konstrukce zastřešení stadionu*. Brno, 2013. 88 s. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky. Vedoucí práce doc. Ing. Ivan Němec, CSc.

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval(a) samostatně a že jsem uvedl(a) všechny použité informační zdroje.

V Brně dne 9.1.2013



.....
podpis autora
Rostislav Lang

Poděkování:

Rád bych poděkoval především doc. Ing. Ivanu Němcovi, CSc., který po celou dobu odborně vedl tuto práci. Děkuji mu, že kromě velmi cenných odborných rad a připomínek, motivoval mou snahu svým zájmem. Konečně děkuji i za podporu kreativního přístupu k této práci.

Dále bych rád poděkoval Ing. Radoslavu Rusinovi, Ph.D. a Ing. Ivanu Ševčíkovi, Ph.D., kteří vynaložili své úsilí na řešení jednotlivých softwarových problémů a vytváření modulů potřebných pro tuto práci.

OBSAH

1	ÚVOD	4
1.1	Historie	4
1.2	Základní tvary	6
2	MEMBRÁNOVÝ STAV SKOŘEPIN	8
2.1	Skořepiny	8
2.2	Membránový stav napjatosti skořepin	9
3	MODELOVÁNÍ MEMBRÁNOVÝCH KONSTRUKCÍ	10
3.1	Základní pojmy	10
3.1.1	Klasifikace nelinearit	10
3.1.2	Geometrická nelinearita	11
3.1.3	Souřadné systémy	12
3.1.4	Deformační gradient F	13
3.2	Prvky sítě a formulace geometrické nelinearity v MKP	13
3.3	Velké deformace, míry deformace	14
3.4	Míry napjatosti	17
3.5	Energeticky konjugentní míry deformace a napjatosti	18
3.6	Tečná matice tuhosti a ztužení konstrukce napětím	18
4	NUMERICKÉ METODY ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ALGEBRAICKÝCH ROVNIC	21
4.1	Iterační proces	21
4.2	Numerické metody	22
4.2.1	Newton-Raphsonova iterační metoda	23
5	FORM-FINDING	25
5.1	Variační přístup minima plochy	27
5.2	Řídící rovnice hledání tvarů	29
5.2.1	Přímý geometrický přístup minimální plochy	29
5.2.2	Přístup mechaniky – virtuální práce pole povrchového napětí	29
5.2.3	Analogie mýdlových bublin – ekvivalence geometrického a mechanického přístupu	31
5.3	Diskretizace řídící rovnice	32
5.4	Linearizace	32
5.5	Dostupné form-findery	32

6	NÁVRH MEMBRÁNOVÉ KONSTRUKCE ZASTŘEŠENÍ STADIONU	36
6.1	Dispozice stadionu	36
6.2	Oblast zastřešení	37
6.3	Návrh statického systému	38
6.3.1	Systém centrálních předpínacích lan	39
6.3.2	Statický systém řezu A-A	41
6.4	Hledání tvaru membrány	44
6.4.1	Katenoid	45
6.4.2	Kuželový (trychtýřový) tvar	47
6.4.3	Základní element plochy	50
6.5	Materiály a konstrukční detaily	56
6.5.1	Membránové materiály	56
6.5.2	Materiály lan	59
6.5.3	Konstrukční detaily	61
7	VÝPOČET MEMBRÁNOVÉ KONSTRUKCE ZASTŘEŠENÍ STADIONU .	63
7.1	Vytvoření globálního modelu zastřešení stadionu	63
7.2	Analýza účinků jednotlivých kombinací zatížení	69
7.2.1	Mezní stav únosnosti:	69
7.2.2	Mezní stav použitelnosti	73
8	POHLEDY	76
9	ZÁVĚR	83
10	SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY	85
11	SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ	87

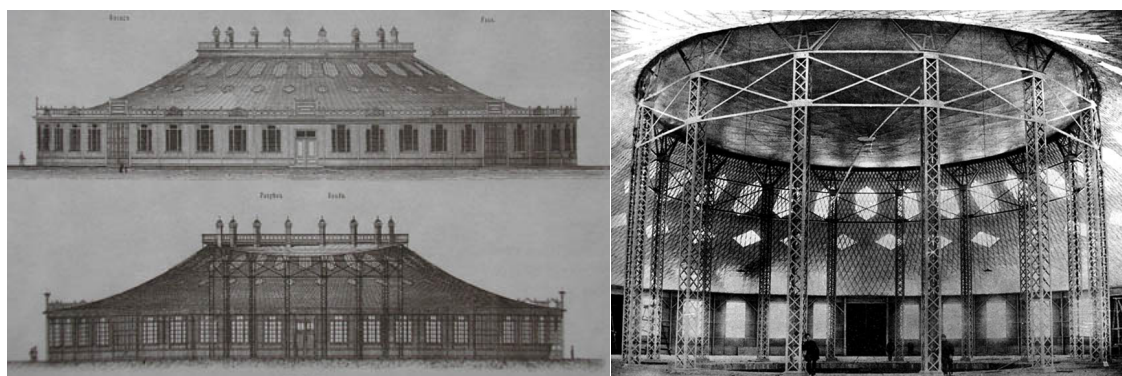
TEORETICKÁ ČÁST

1 ÚVOD

Membránové konstrukce se v moderní architektuře uplatňují stále více. Jejich vzrůstající obliba je podpořena charakteristickými přednostmi, kterými jsou vzdušnost, lehkost a ladnost tvarů. Právě díky své lehkosti nevyžadují těžké podpůrné prvky, což může významně zlevnit investorem zamýšlené zastřešení objektu.

1.1 Historie

Textilní membránové konstrukce byly známy a používány již před několika tisíci lety v podobě obydlí kočovných národů a přístřešků pro vojáky. Za průkopníka novodobého pojetí membránových konstrukcí velkého rozponu však můžeme považovat až ruského vědce, inženýra a architekta Vladimira Grigorjeviče Šuchova (28. srpna 1853 – 2. února 1939). Ten roku 1896 na Všeruské výstavě v Nižném Novgorodu představil osm pavilonů, které na svou dobu dosahovaly odvážných rozponů. Nejpozoruhodnějším pavilonem je Šuchovova rotunda, jejíž zastřešení bylo vytvořeno za použití husté provazové konstrukce překryté tenkou membránou.



Obrázek 1: Rusko, Nižný Novgorod – Šuchovova rotunda 1896

Až do roku 1969 se navrhování membránových konstrukcí opíralo především o fyzické modely. Nový pohled přinesl slavný německý inženýr a architekt Otto Frei (narozen dne 31. května 1925), jenž se podílel na návrhu zastřešení mnichovského stadionu pro letní olympijské hry roku 1972. Ve své často citované práci „*Zugbeanspruchte Konstruktionen*“ (volně přeloženo „*Konstrukce namáhané tahem*“) mluví o užití různých materiálů pro hledání vhodného tvaru membrány (například mýdlových bublin). Publikace je doplněna řadou fyzikálních souvislostí a posouvá tak navrhování směrem k matematickému modelování.



Obrázek 2: Olympijský stadion v Mnichově

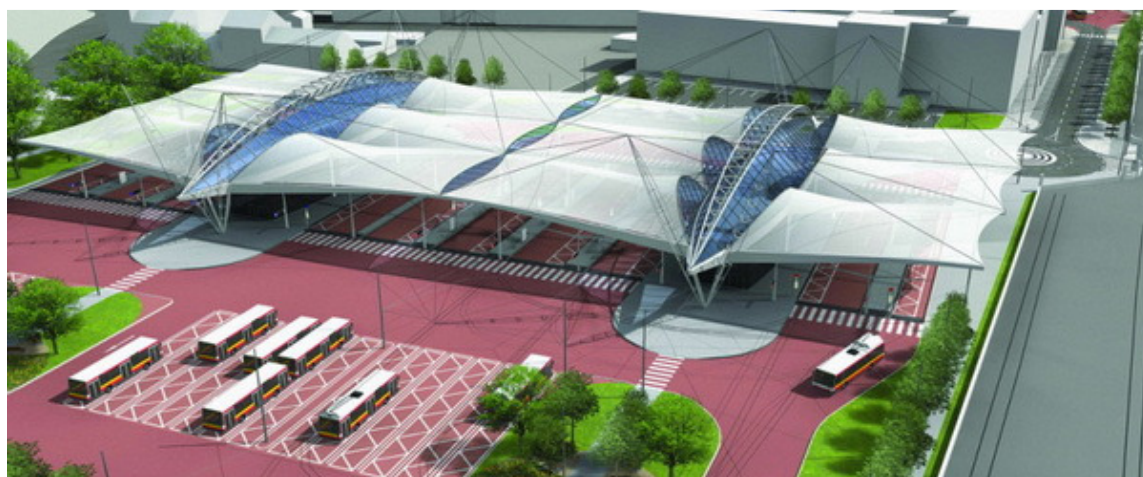
Díky značnému pokroku v technologii materiálů a možnostech výpočetní techniky bylo možné stavět konstrukce stále smělejších rozpětí. V současné době je největší samostatně zastřešenou stavbou světa Millennium Dome.



Obrázek 3: Millennium Dome, Londýn

Jak napovídá již název, byl dokončen před příchodem nového milénia a slavnostně otevřen právě při vstupu do roku 2000. Úctyhodné rozpětí 365 metrů je součástí symboliky této stavby. Střecha je zavěšena na dvanácti 95 metrů vysokých podpěrách. Kopule Millennium Dome se vypíná do výšky 50m. Pro realizaci membránové části byla použita tkanina ze skelných vláken potažená teflonem. Jistě stojí za zmínku, že hmotnost vlastní střechy je menší než hmotnost vzduchu uzavřeného její konstrukcí.

V České republice je zcela jistě pozoruhodnou membránovou konstrukcí zastřešení autobusového nádraží v Hradci Králové (2008).



Obrázek 4: Autobusové nádraží v Hradci Králové

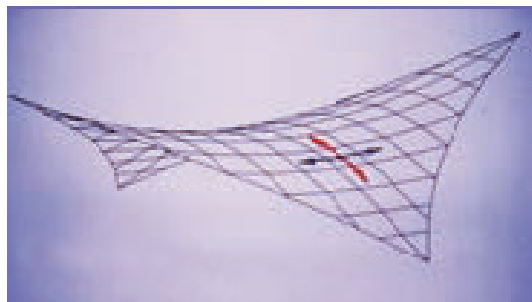
1.2 Základní tvary

Membránové konstrukce mají oproti tradičním materiálům řadu výhod, které byly zmíněny již v úvodu. Mají však také řadu svých specifických problémů, které je nutno brát při projektování v úvahu. Jedním z nich je skutečnost, že tíha konstrukcí tvoří jen nepatrnou část celkového zatížení, jež musí být přeneseno. Proto nelze spoléhat na stabilizaci tvaru vlastní tíhou, jak to můžeme vidět u mnoha betonových či zděných konstrukcí, ale je potřeba aplikovat předpětí (u přetlakových membránových konstrukcí přetlak), zajišťující dostatečnou tvarovou stálost. Prostorové působení předpětí je dáno zakřivením, které proto musí být vhodně navrženo a je nutno jej provést ve dvou rovinách (opačně orientované zakřivení). Přetlakové membrány jsou napínány a stabilizovány dostatečným přetlakem vzduchu a protisměrná zakřivení zde nejsou potřeba.

Prakticky rozeznáváme čtyři základní tvary.

a) Bodová plachta

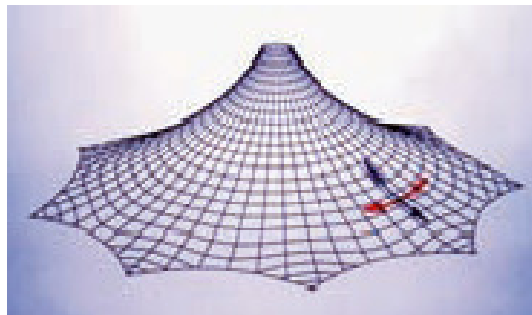
Tvaru je dosaženo střídáním horních a spodních kotevních bodů (minimálně čtyř). Tvar hyperbolického paraboloidu pak přenáší jak sání – červeně, tak tlak větru a zatížení sněhem – modře. Viz. Obr.5 [V]



Obrázek 5: Bodová plachta

b) Kuželová (trychtýřová) membrána

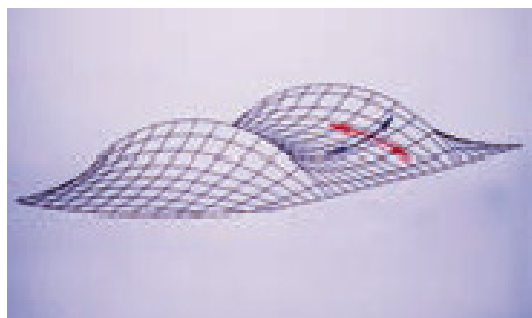
Tvaru je dosažen převýšením (eventuálně snížením) bodu v ploše plachty. Zakřivený tvar přenáší jak sání větru – červeně, tak tlak větru a zatížení sněhem – modře. Viz. Obr.6 [V]



Obrázek 6: Kuželová membrána

c) Membrána na obloucích

Tvar je definován geometrií podkonstrukce. Zakřivený tvar přenáší jak sání větru – červeně, tak tlak větru a zatížení sněhem – modře. Viz. Obr.7 [V]



Obrázek 7: Membrána na obloucích

d) Přetlakové membrány

Velikost předpětí je úměrná vnitřnímu přetlaku. Prostorové působení závisí na zvolené geometrii konstrukce. Sání větru odolává zakřivení membrány, tlaku větru a tíze sněhu vzdoruje vhodně navržená hodnota přetlaku. Viz Obr. 8 [V]



Obrázek 8: Přetlaková membrána

Tvar a předpětí musí zajistit existenci pouze tahových napětí. Při vzniku tlaku dochází k vrásnění a to může mít za následek estetické, v krajním případě i funkční znehodnocení celé stavby. Z dříve uvedeného je tedy zřejmé, že u těchto konstrukcí, více než u jiných, záleží na počátečním tvaru a počáteční napjatosti.

2 MEMBRÁNOVÝ STAV SKOŘEPIN

2.1 Skořepiny

Skořepiny jsou plošné konstrukce, jejichž geometrie je určena střednicovou plochou (tj. plocha půlí tloušťku) a tloušťkou (definovanou v každém bodě). Skořepiny mohou být zakřivena v jednom, nebo ve dvou směrech (výjimečnými případy jsou stěny a desky).

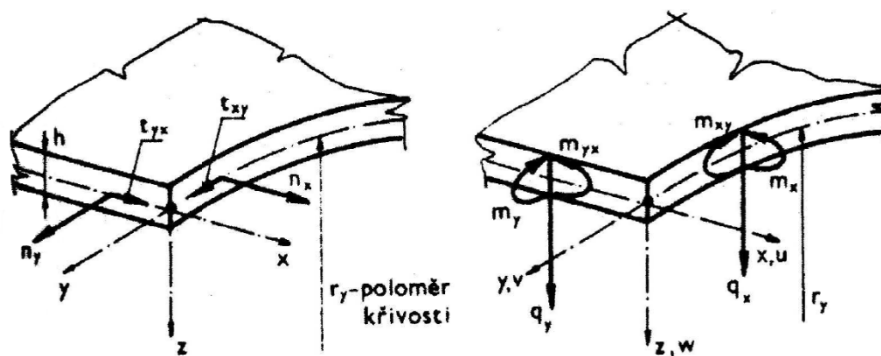
Se skořepinami se ve stavebnictví můžeme setkat například při zastřešování stadionů a průmyslových hal, u nádrží či chladících věží. Vhodně navrženým tvarem dochází k optimálnímu přerozdělení vnitřních sil, což umožňuje překlenout velké rozpory.

Předpokládáme-li, že tloušťka skořepiny je velmi malá, nejen ve srovnání s obrysovými rozměry, ale také s (hlavními) poloměry křivosti střednicové plochy, mluvíme o tzv. *Technické teorii tenkých skořepin*. Uplatňujeme zde předpoklad *Kirchhoffovy teorie o zachování ortogonalit normál a neměnnosti délek ve směru normály při deformaci*. Dále předpokládáme, že je možné zanedbat napětí ve směru normálovém ke střednicové ploše [4].

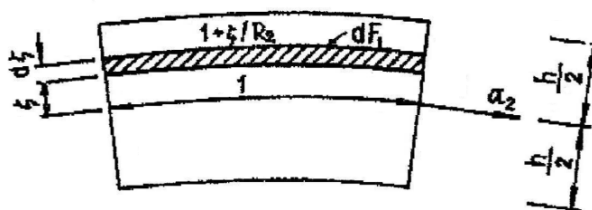
$$h \ll r_x, r_y \quad (2.1)$$

r_x, r_y ...hlavní poloměry křivosti střednicové plochy

h ...tloušťka skořepiny



Obrázek 9: Vnitřní síly ve skořepině [4]



Obrázek 10: Diferenciál plochy pro integrace vnitřních sil

Na Obrázku 10 jsou znázorněny složky vnitřních sil, získané integrací napětí přes řez skořepinou. V tečné rovině působí normálové síly n_x , n_y a smykové síly $t_{xy}=t_{yx}$. Dále ve skořepině působí ohybové momenty m_x , m_y , kroutící momenty $m_{xy}=m_{yx}$ a posouvající síly q_x a q_y .

$$n_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dF1 \quad (2.2)$$

$$n_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dF2 \quad (2.3)$$

$$t_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dF1 \quad (2.4)$$

$$t_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} dF2 \quad (2.5)$$

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x * \xi dF1 \quad (2.6)$$

$$m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y * \xi dF2 \quad (2.7)$$

$$m_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} * \xi dF1 \quad (2.8)$$

$$m_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} * \xi dF2 \quad (2.9)$$

$$q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dF1 \quad (2.10)$$

$$q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dF2 \quad (2.11)$$

2.2 Membránový stav napjatosti skořepin

Významnou skupinu ve stavebnictví tvoří úlohy, kdy se na přenášení zatížení podílejí především vnitřní síly, které působí v tečných rovinách (tedy normálové síly n_x , n_y a smykové síly $t_{xy}=t_{yx}$), zatímco vnitřní síly působící ve směru normál ke střednici (q_x, q_y), ohybové a kroutící účinky (m_x , m_y , m_{xy}) hrají podružnou roli. V takovémto případě mluvíme o bezmomentovém, častěji však membránovém stavu napjatosti skořepin.

$$q_x = q_y = 0 \quad (2.12)$$

$$m_x = m_y = m_{xy} = m_{yx} = 0 \quad (2.13)$$

Význam této skupiny spočívá především v účinném působení, jak ve vztahu k tuhosti, tak i únosnosti konstrukce. Z toho plyne i značná hospodárnost.

Membránový stav napjatosti můžeme sledovat v případech, kdy:

1. Dokonale ohebná membrána, která účinkům zatížení vzdoruje jen silami, které působí v rovině tečné k její střednici. S tímto se můžeme často setkávat u textilních materiálů. Obecně lze napsat, že osová tuhost Eh je konečná, zatímco Eh^3 se limitně blíží k nule.
2. Ohybově tuhé skořepiny, jež jsou uloženy a zatíženy tak, aby v nich vznikaly síly v rovině tečné k její střednici.

V lokálních oblastech – okraje skořepiny, místa nespojitosti v tuhosti či nespojitosti zatížení, nebo oblast se zlomem ve střednicové ploše – může docházet k poruše membránového stavu napjatosti. Tyto poruchy mají, v důsledku Saint-Venantova principu lokálnosti, pouze lokální charakter a v dostatečné vzdálenosti od oblasti poruchy vymizí.

3 MODELOVÁNÍ MEMBRÁNOVÝCH KONSTRUKCÍ

Navrhování membránových konstrukcí se v posledních padesáti letech posunulo od vytváření fyzikálních modelů směrem k matematickému modelování. K analýze konstrukcí se dnes nejčastěji užívá metoda konečných prvků (MKP). Díky rozvoji počítačové techniky se tato numerická metoda stala silným a univerzálním nástrojem.

Vzhledem k povaze úlohy je při výpočtu nutno zohlednit geometrickou nelinearitu. Při analýze membránových konstrukcí totiž dochází k značným deformacím. Průhyby jsou mnohonásobkem tloušťek používaných materiálů. *Teorii prvního řádu*, která u mnoha inženýrských úloh dává uspokojivě přesné výsledky, v tomto případě není možno použít. Při hledání rovnováhy na nedeformované konstrukci by nedošlo k zohlednění přerozdělení vnitřních sil a konstrukce by nebyla správně analyzována (mohlo by dojít jak k nadhodnocení, tak k podhodnocení reality; v případě membrán bez ohybové tuhosti lineární výpočet vůbec nelze provést).

Pro dosažení potřebné přesnosti těchto úloh je nutno hledat rovnováhu sil na deformované konstrukci a při modelování uvažovat *Teorie velkých deformací*. Při použití nelineární mechaniky přestávají platit některé, s výhodou používané, principy. Jedním z nich je princip superpozice, který nelze uplatnit a proto je nutno na konstrukci aplikovat zatížení v celém rozsahu a není možné řešit je odděleně v jednotlivých zatěžovacích stavech.

Geometrické rovnice obsahují vyšší mocniny a přestávají být lineární. Geometricky nelineární rovnice vystihují vliv velkých průhybů a rotací prvku jako celku, přičemž poměrné deformace jsou považovány za malé.

3.1 Základní pojmy

Nyní budou uvedeny některé základní pojmy, jenž budou v dalších částech práce používány.

3.1.1 Klasifikace nelinearit

a) Geometrická nelinearita

Zdrojem nelinearit jsou takzvané geometrické rovnice, což jsou vztahy mezi posunutím a přetvořením.

b) Materiálová (fyzikální) nelinearita

Zdrojem nelinearit jsou nelineární konstitutivní vztahy (fyzikální rovnice). Tedy vztahy mezi napětím a přetvořením. Patří sem úlohy zohlednění skutečného diagramu zatěžovací zkoušky, vyloučení tahu nebo tlaku v počítaných elementech atp.

3.1.2 Geometrická nelinearita

Základní princip zohlednění geometrické nelinearity ve výpočtu spočívá v zavedení vztahu mezi maticí tuhosti a vektorem deformací, tedy v zohlednění vlastností deformovaného tělesa. Základní rovnici

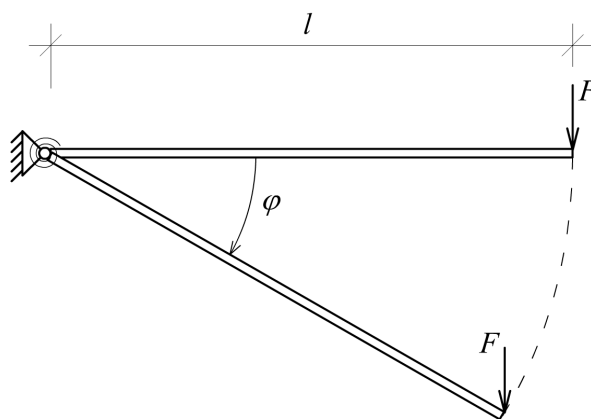
$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (3.1)$$

nahradíme rovnicí

$$\mathbf{K}(\mathbf{d}) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (3.2)$$

kde **K** počáteční matice tuhosti konstrukce
 d vektor neznámých, obvykle uzlových parametrů deformace
 f vektor pravých stran, obvykle uzlových sil
 K(d) matice tuhosti jako funkce deformace

Zdroj geometrické nelinearity můžeme demonstrovat na případě pružně vetknuté konzoly:



Obrázek 11: Pružně vetknutá konzola

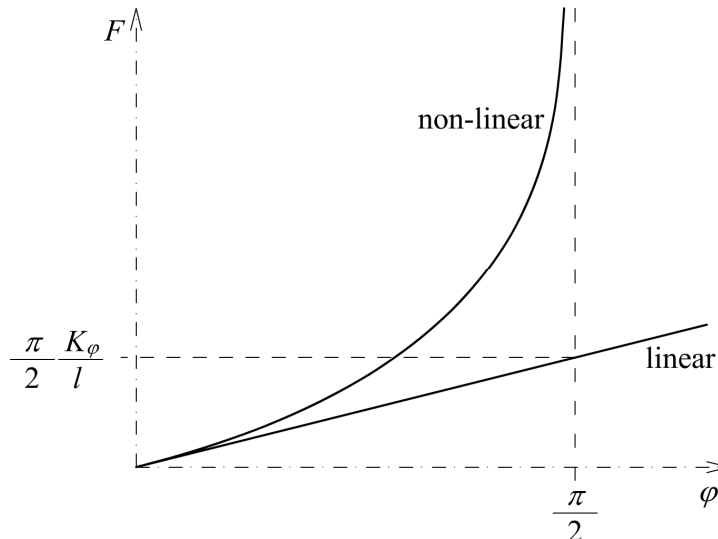
Lineárním řešením získáme ve vetknutí vztah pro ohybový moment jako:

$$M = Fl \quad (3.3)$$

Nelineárním řešením získáme ve vetknutí vztah pro ohybový moment jak:

$$M = Fl \cos \varphi \quad (3.4)$$

Z Obrázku 12 je zřejmé, že při daném zatížení nebude velikost ohybového momentu ve vetknutí růst lineárně se zatížením F . Vlivem deformace dochází ke zkracování vodorovného průmětu konzoly, což způsobuje nelineární chování této konstrukce. Rozdíl bude tím znatelnější, čím větší bude pootočení φ ve vetknutí. To lze dobře pozorovat na Obrázku 12



Obrázek 12: Lineární a nelineární vztah mezi silou a pootočením u pružně vetknuté konzoly

3.1.3 Souřadné systémy

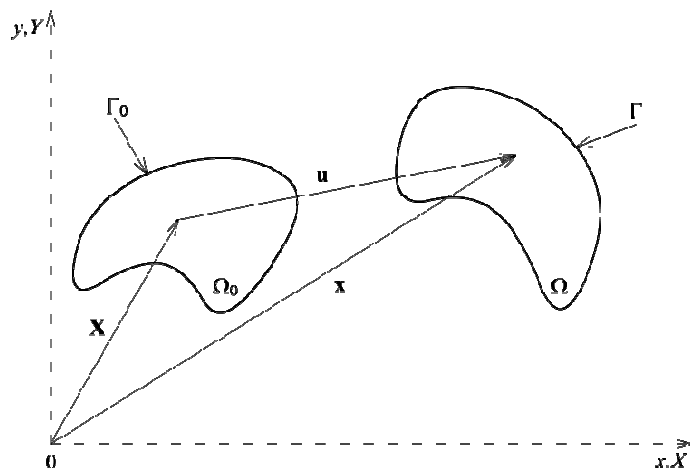
V geometrické nelinearitě rozlišujeme dva souřadné systémy:

Prostorové souřadnice, které určují polohu bodu v prostoru a někdy je nazýváme též globální (nebo Eulerovské). Jsou značeny malými písmeny.

Materiálové souřadnice, které označují bod tělesa. Každý bod má jedny materiálové souřadnice (ty obvykle odpovídají počátečním prostorovým souřadnicím). Materiálové souřadnice někdy nazýváme též lokální (nebo Lagrangeovské). Jsou značeny velkými písmeny.

Posun bodu v prostoru je definován jako:

$$u(X) = x - X \quad (3.5)$$



Obrázek 13: Nedeformovaná (počáteční) a deformovaná (běžná) konfigurace tělesa

3.1.4 Deformační gradient $\mathbf{F}$

je definován vztahem

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \nabla_0 \mathbf{x} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \nabla_0 \mathbf{u} \quad (3.6)$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice, vyjadřující počáteční polohu tělesa. Ostatní veličiny jsou patrné z Obrázek 13. Deformační gradient $\mathbf{F}$ zahrnuje objemovou i tvarovou změnu deformovaného tělesa.

Deformační gradient, který definuje vztah mezi původní a výslednou konfigurací, lze rozložit na rotaci danou tenzorem rotace $\mathbf{R}$ a deformaci $\mathbf{U}$, nebo $\mathbf{V}$ (kde $\mathbf{U}$ je pravý stretch tenzor a $\mathbf{V}$ je levý stretch tenzor). Deformační gradient $\mathbf{F}$ můžeme tedy zapsat následovně:

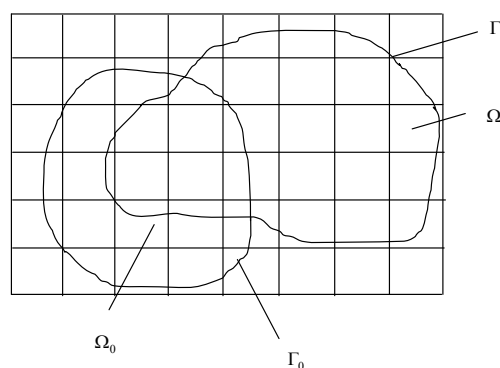
$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (3.7)$$

Rozdíl mezi tenzory $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ spočívá v pořadí provedení jednotlivých složek deformačního gradientu.

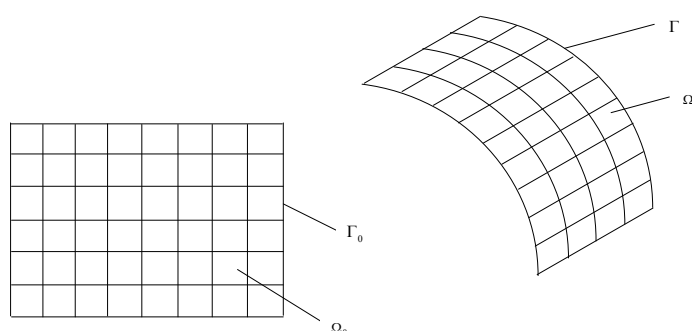
Tenzory deformací $\mathbf{U}$ a $\mathbf{V}$ jsou symetrické ($\mathbf{U}^T = \mathbf{U}$ a $\mathbf{V}^T = \mathbf{V}$).

3.2 Prvky sítě a formulace geometrické nelinearity v MKP

Obecně rozlišujeme dva typy sítě. Prvním typem je Eulerovská síť. Tato síť nemění svoji geometrii a hmota přechází mezi jednotlivými prvky. Tento typ sítě je používám u mechaniky plynů a kapalin, kde může docházet k turbulencím. V mechanice těles jsou užívány především Lagrangeovské prvky sítě. U těchto prvků je hmota pevně spojena se sítí, která se deformuje společně s tělesem.



Obrázek 14: Eulerovská síť konečných prvků



Obrázek 15: Lagrangeovská síť konečných prvků

Jak bylo uvedeno, v mechanice těles používáme převážně Lagrangeovské prvky sítě. Ve vztahu s těmito prvky rozeznáváme při diskretizaci dvě základní formulace úlohy.

a) „Updated Lagrangian“

Úloha je popsána v běžné konfiguraci (v prostorových souřadnicích). V tomto případě provádíme derivace v prostorových souřadnicích a integrály jsou počítány na deformovaném tělese.

b) „Total Lagrangian“

Úloha je popsána v počáteční konfiguraci (na nedeformovaném tělese). Derivace jsou potom prováděny v materiálových souřadnicích a integrály na počátečním stavu tělesa.

Program RFEM, v němž byla provedena praktická část této práce, využívá formulaci „updated Lagrangian“.

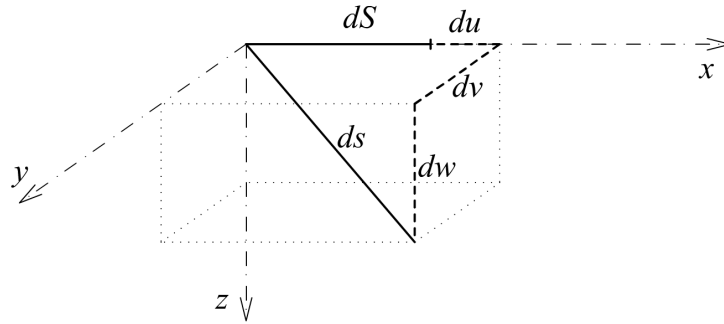
3.3 Velké deformace, míry deformace

U membránových konstrukcí je nutné uvažovat s velkými deformacemi. U velkých deformací se předpokládá, že jsou konečné, průhyby i rotace však mohou být libovolně

velké. Deformace vyjadřujeme logaritmickým měřítkem deformace, které vyhovuje jak pro $\varepsilon_n = \infty$, tak i $\varepsilon_n = -\infty$. Lineární, Green-Lagrangeova ani Euler-Almansiho míra deformace tomuto rozsahu deformací nevyhovuje.

Nyní dokážeme, že lineární míra deformace je vhodná pro takové aplikace, kde jsou deformace malé. Pokud počítáme s velkými deformacemi, může docházet k znehodnocování výsledků.

Přibližnost lineárního vztahu mezi deformacemi a posunutím demonstrujeme na elementárním vláknu, jehož počáteční délka je dS .



Obrázek 16: Protážení vlákna počáteční délky dS

Počátek vlákna se posune o vektor $\mathbf{u}$, konec vlákna se posune o vektor $\mathbf{u} + d\mathbf{u}$. S užitím souřadného systému, jenž je znázorněn na Obrázku 16, definujeme jednotlivé parametry deformace.

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dS \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial x} dS \\ dw &= \frac{\partial w}{\partial x} dS \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ze vztahu pro tělesovou úhlopříčku plyne délka deformovaného vlákna jako:

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dS + du)^2 + dv^2 + dw^2} \\ &= \sqrt{\left(dS + \frac{\partial u}{\partial x} dS\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dS\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dS\right)^2} \\ &= \sqrt{dS^2 + 2\frac{\partial u}{\partial x} dS^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dS^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dS^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dS^2} \\ &= dS \sqrt{1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Pro poměr délky deformovaného a nedeformovaného vlákna zavedeme označení λ . Poté můžeme psát:

$$\lambda = \frac{ds}{dS} = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} = \sqrt{1 + A} \quad (3.10)$$

kde

$$A = 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \quad (3.11)$$

s využitím binomické věty

$$\sqrt{1 + A} = 1 + \frac{A}{2} - \frac{A^2}{8} + \frac{A^3}{16} + \dots \quad \text{pro } A^2 < 1 \quad (3.12)$$

A uvážením pouze prvních dvou členů rozvoje můžeme psát:

$$\lambda = 1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right) \quad (3.13)$$

Nyní zavedeme výraz pro poměrné přetvoření vlákna:

$$\varepsilon_x = \lambda - 1 = \frac{ds - dS}{dS} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right) \quad (3.14)$$

Z rovnice (3.14) je zřejmé, že výraz z lineární pružnosti

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.15)$$

zohledňuje pouze první člen zpřesněného výrazu. Dosazením tří členů binomického rozvoje bychom mohli získat opět přesnější výraz pro ε_x .

Z výše uvedeného je obecná problematika měř deformací zřejmá. Při výpočtu je potřebné využívat vždy adekvátní míru deformace. Je nezbytné, aby větším deformacím odpovídala větší míra deformace a aby dokonalé tuhé těleso mělo nulovou deformaci.

Dále je uvedena tabulka, kde je poskytnuto srovnání jednotlivých měř deformací a oborů jejich platnosti:

Tabulka 1: Míry deformací a oblast jejich platnosti

Míra deformace	Výraz pro 1D	$l = \infty$	$l = 0$
Lineární	$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}$	$\varepsilon = \infty$	$\varepsilon = -1$
Green-Lagrange	$E = \frac{1}{2} \frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2}$	$E = \infty$	$E = -\frac{1}{2}$
Euler-Almansi	$e = \frac{1}{2} \frac{l^2 - l_0^2}{l^2}$	$e = \frac{1}{2}$	$e = -\infty$
logaritmická	$\varepsilon_n = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right)$	$\varepsilon_n = \infty$	$\varepsilon_n = -\infty$

Z Tabulky 1 plyne, že lineární a Green-Lagrangeova míra deformace vyhovuje nekonečnému protažení. Euler-Almansiho míra deformace vyhovuje nekonečnému zkrácení. Logaritmická míra deformace vyhovuje jak nekonečnému zkrácení, tak nekonečnému prodloužení.

3.4 Míry napjatosti

Při deformaci plošky dA se mění její směr i velikost a vzhledem k tomu, že pomocí této elementární plošky definujeme napětí, je možno představit několik tenzorů napjatosti v závislosti na tom, co je definováno na původní konfiguraci (tedy materiálových souřadnicích) a co na výsledné konfiguraci (tedy v prostorových souřadnicích).

Nejdůležitější tenzory napjatosti:

1. **Cauchyho napětí σ** je definováno na výsledné konfiguraci tělesa. Představuje skutečné napětí měřené v daném okamžiku na deformovaném tělese. Proto je někdy nazýváno „skutečné napětí“
2. **První napětí Piola-Kirchhoff $\mathbf{P}$** toto napětí je vztaženo k nedeformovanému tělesu
3. **Druhé napětí Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}$** toto napětí je vztaženo k nedeformovanému tělesu
4. **Korotační napětí $\hat{\sigma}$** je definováno na výsledné konfiguraci. Lze získat transformací prvního napětí Piola-Kirchhoff

5. **Kirchhoffovo napětí** τ je definováno na výsledné konfiguraci.
6. **Biotovo napětí** $\mathbf{T}$ toto napětí je vztaženo k nedeformovanému tělesu

3.5 Energeticky konjugentní míry deformace a napjatosti

Energie a práce jsou skalární veličiny, které jsou nezávislé na zvoleném souřadném systému. Samotný princip virtuální práce, jenž je dán vztahem

$$\delta W = \delta W^{\text{int}} + \delta W^{\text{ext}} = 0 \quad (3.16)$$

musí platit pro jakoukoliv volbu míry deformace. Toto platí pouze v případě, je-li splněno, že k příslušné míře deformace je přiřazena příslušná, energeticky konjugentní, míra napjatosti. Virtuální práce vnitřních sil je dána součinem tenzoru napjatosti a přírůstkem deformace. Lze dokázat, že platí

$$\delta W^{\text{int}} = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} d\Omega_0 = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \hat{\mathbf{e}} d\Omega = \int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \nabla_0 \mathbf{u} d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \mathbf{T} : \delta \mathbf{U} d\Omega_0 \quad (3.17)$$

Energeticky konjugentní dvojice napětí a deformace tedy tvoří v prvním případě Green – Lagrangeův tenzor deformace $\mathbf{E}$ a druhé napětí Piola – Kirchhoff $\mathbf{S}$ (oba tenzory jsou definovány na původní konfiguraci). Ve druhém případě tvoří energeticky konjugentní dvojici dvojice tenzorů definovaných v běžné (výsledné) konfiguraci. Jde o lineární část Euler – Almansiho tenzoru deformace tedy tzv. infinitezimální tenzor deformace definovaný v prostorových souřadnicích $\hat{\mathbf{e}}$ a Cauchyho tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$.

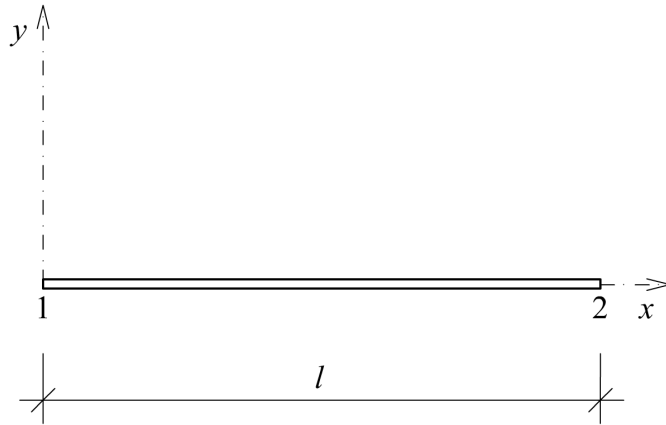
Tyto první dvě energeticky konjugentní dvojice zapsané v rovnici (3.17) mají fundamentální význam, jsou totiž základem dvou nejdůležitějších formulací úloh v geometrické nelinearitě, tj. formulace „total Lagrangian“, která je plně definována v materiálových souřadnicích a deformace i napjatost je vztahována k původní, tj. nedeformované konfiguraci a formulaci „updated Lagrangian“, jenž je definována v prostorových souřadnicích a deformace i napjatost je vztažena k poslední známé konfiguraci (tj. deformované konfiguraci). U principu „total Lagrangian“ je tedy užíván Green – Lagrangeův tenzor deformace $\mathbf{E}$ a druhé napětí Piola – Kirchhoff $\mathbf{S}$ a u principu „updated Lagrangian“ je užíván Euler – Almansiho tenzor deformace $\mathbf{e}$, resp. jeho lineární část $\hat{\mathbf{e}}$ a Cauchyho tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}$.

3.6 Tečná matice tuhosti a ztužení konstrukce napětím

Tečná matice tuhosti charakterizuje tuhost tělesa v každém okamžiku. Zohledňuje přitom tečnou tuhost materiálu i tečnou geometrickou tuhost.

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_\sigma \quad (3.18)$$

Při analýze membránových a lanových konstrukcí dochází ke značným změnám počáteční geometrické matice tuhosti a tím i ke změně celkové matice tuhosti v každém okamžiku. V těchto případech se uplatňuje ztužení konstrukce napětím, které je dále ukázáno na příkladu příhradového prutu.



Obrázek 17: Příhradový prut

Zavedeme vektor parametrů deformace

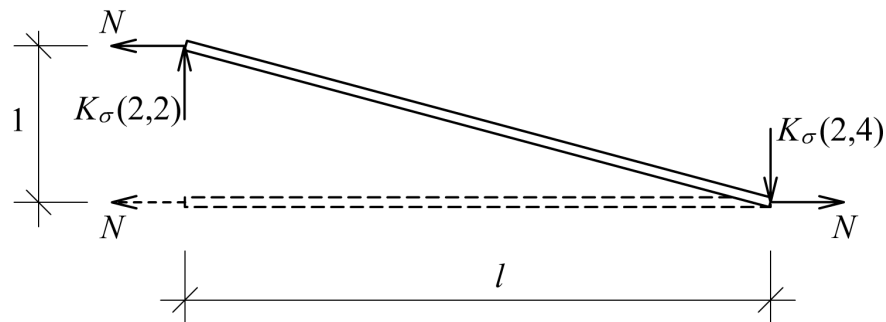
$$\mathbf{d} = [u_1, v_1, u_2, v_2]^T \quad (3.19)$$

kde u a v jsou složky posunutí ve směru os x a y , potom je materiálová, (resp. počáteční) matice tuhosti příhradového prutu dána vztahem:

$$\mathbf{K}_M = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Lze si povšimnout, že příhradový prut nemá žádnou tuhost v příčném směru. Uplatní se pouze osová tuhost. Tuhostí rozumíme sílu, kterou je nutno vyvinout v daném místě a směru, abychom v tomto místě dosáhli jednotkového posunutí. Takto jsou určeny diagonální členy matice tuhosti, mimodiagonální členy matice jsou reakce, které při tomto zatížení vzniknou.

Nyní můžeme odvodit geometrickou matici tuhosti příhradového prutu. Prut je tažen horizontální silou N . K odvození nám postačí pouze momentová podmínka rovnováhy na prutu se zohledněním příslušného jednotkového posunu v daném uzlu:



Obrázek 18: Příhradový prut

$$N \cdot 1 - K_{\sigma}(2,2) \cdot l = 0 \Rightarrow K_{\sigma}(2,2) = \frac{N}{l} \quad (3.21)$$

Geometrická matice tuhosti bude mít následující tvar:

$$\mathbf{K}_{\sigma} = \frac{N}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Celková matice tuhosti $\mathbf{K}_T$ je dána součtem materiálové a geometrické matice tuhosti.

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_{\sigma} \quad (3.23)$$

Vliv ztužení napětím roste s rostoucími deformacemi a napjatostmi v konstrukci. Je důležité, aby bylo inženýrem vždy správně rozpoznáno, u kterých konstrukcí se tento vliv uplatňuje v podstatné míře a kde je možno jej zanedbat.

4 NUMERICKÉ METODY ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

Řešení nelineárních diferenciálních rovnic ve formulaci MKP vede na řešení nelineárních algebraických rovnic v podobě:

$$\mathbf{K}(\mathbf{d}) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (4.1)$$

Matice tuhosti $\mathbf{K}$ se stává funkcí deformace $\mathbf{d}$ a již ji není možno vyhodnotit bez znalosti samotného vektoru deformace. Jelikož tuto úlohu nelze řešit přímo, je převáděna na řešení iteračního procesu, kde jsou jednotlivé kroky linearizovány.

4.1 Iterační proces

Iterační proces spočívá v postupném zpřesňování řešení a je ukončen v okamžiku, kdy je dosaženo zadané podmínky přesnosti $\Delta d = d^{(i+1)} - d^{(i)}$. Přepsání rovnice do iteračního tvaru:

$$\mathbf{K}(\mathbf{d}^{(i)}) \cdot \mathbf{d}^{(i+1)} = \mathbf{f} \quad (4.2)$$

rovnice pro hledanou deformaci má tedy tvar:

$$\mathbf{d}^{(i+1)} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{d}^{(i)}) \cdot \mathbf{f} \quad (4.3)$$

iterační výpočet vektoru deformací

$$d^{(i+1)} = d^{(i)} + \Delta d^{(i)} \quad (4.4)$$

Hledáme takový stav deformace konstrukce, že platí:

$$r(d) = 0 \quad (4.5)$$

přičemž

$$r(d) = K(d)d - f \quad (4.6)$$

kde d je neznámé řešení. $K(d)$ je známá funkce tuhosti soustavy na proměnné d , f je známá pravá strana a r je residuum (nevyvážené zatížení).

Postup výpočtu:

1. Ze známé počáteční matice tuhosti $\mathbf{K}_i$ (kde $i=0$) a známého vektoru vnějších sil $\mathbf{f}$ je vypočtena první iteraci vektoru neznámých deformací $\mathbf{d}_{i+1}$
2. Proběhne opravný výpočet aktuální matice tuhosti $\mathbf{K}_{i+1}$ a vektoru nevyvážených sil $\mathbf{r} = \mathbf{f}^{\text{int}} - \mathbf{f}^{\text{ext}}$

3. Vektorem nevyvážených sil je konstrukce zatížena a následně proběhne výpočet vektoru Δd_{i+1}
4. Druhá aproximace vektoru deformací je $d^{(i+2)} = d^{(i+1)} + \Delta d^{(i+1)}$
5. Proces se opakuje do splnění konvergenčního kritéria

4.2 Numerické metody

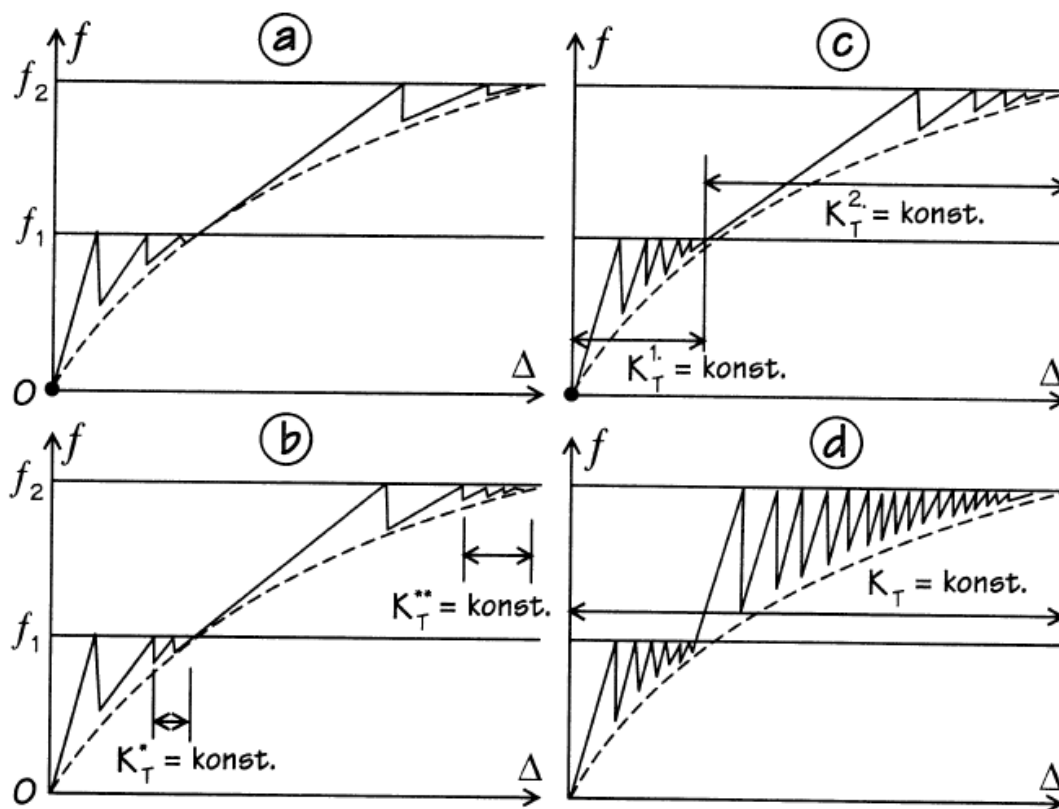
Pro nalezení rovnovážného stavu levé a pravé strany rovnice $\mathbf{K}(\mathbf{d}) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{f}$ existuje mnoho metod. Většinou je pro řešení úlohu vhodné rozdělit vektor $\mathbf{f}$ do několika přírůstků, v rámci nichž probíhají jednotlivé iterace. Při dosažení konvergenčního kritéria přírůstku je na konstrukci aplikován přírůstek další, v jehož rámci opět probíhají jednotlivé iterace.

Nejčastěji jsou pro hledání řešení používány tyto metody:

1. Newton-Raphsonova iterační metoda (a její modifikace)
2. Picardova iterační metoda
3. Riksova metoda (zvaná též arc length)
4. Dynamická relaxace (explicitní metoda)

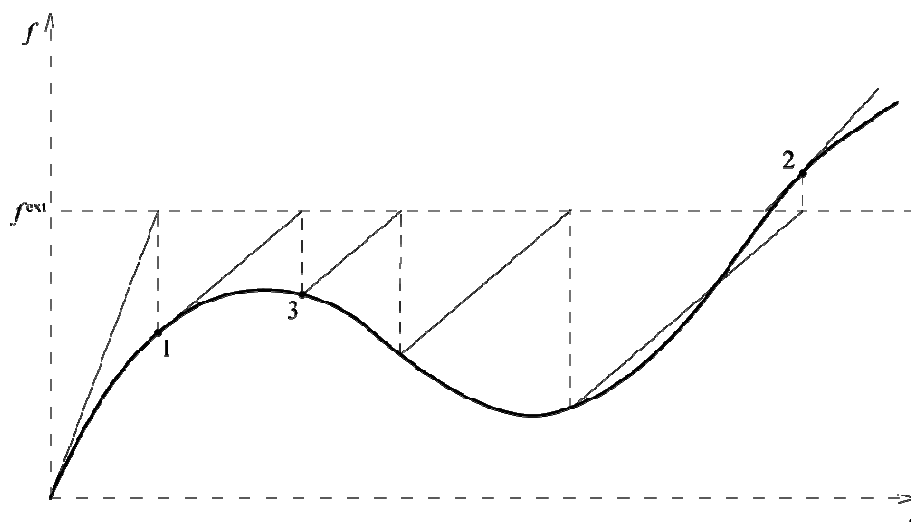
Jednotlivé metody je možno s výhodou vzájemně kombinovat. Pro řešení této práce byla využívána především Newton-Raphsonova iterační metoda, proto bude naznačen její princip.

4.2.1 Newton-Raphsonova iterační metoda



Obrázek 19: Newton-Raphsonova iterační metoda a její modifikace

- Původní nemodifikovaná Newton-Raphsonova iterační metoda mění tečnou matici K_T v každém kroku. Tím se v každém kroku mění i levá strana řešených soustav lineárních rovnic, což zaručuje dobrou konvergenci 2.řádu.
- Pro úsporu strojového času je možné několik posledních iterací každého přírůstku provést beze změny K_T , což vede k slabší konvergenci 1.řádu. Výhodou je podstatně kratší doba pro výpočet jednoho iteračního kroku.
- Ke změně tečné matice tuhosti K_T dochází pouze při přechodu na další přírůstek (incremental stiffness procedure).
- Používá se jen počáteční matice tuhosti K_T (initial stiffness procedure).



Obrázek 20: Kombinace Newton–Raphsonovy a modifikované Newton–Raphsonovy metody

Velice výhodná může být kombinace klasické Newton–Raphsonovy a modifikované Newton–Raphsonovy metody. Využití je možné najít u postkritické analýzy konstrukcí, kdy sice dojde k dosažení kritické síly, konstrukce však nalezne nový rovnovážný stav a díky této modifikaci nedojde ke zhroucení výpočtu. Klasická Newton–Raphsonova metoda po dosažení kritického zatížení selže (matice soustavy rovnic se stane negativně definitní, nebo indefinitní). Proto se úloha, jenž je zpočátku řešena klasickou Newton–Raphsonovou metodou, při dosažení bodu 3 (Obrázek 20) vrátí o krok zpět (do bodu 1) a zde dojde k přepnutí na modifikovanou Newton–Raphsonovu metodu. Jednotlivé iterace jsou počítány s maticí tuhosti odpovídající bodu 1 až do stavu, kdy je nalezena vzestupná větev pracovního diagramu. Poté dojde k přepnutí zpět ke klasické Newton–Raphsonově metodě.

Pokud je účelné sledovat rovnovážnou cestu křivky i po dosažení kritického zatížení, lze použít Riksovu metodu, která je založena na sledování pracovního diagramu po určitých krocích. Dále je možné využít metodu Dynamické relaxace (explicitní metodu).

O nelineární mechanice a principech modelování se podrobně pojednává v [1,2].

5 FORM-FINDING

Jak bylo řečeno již v první kapitole, membránové konstrukce se staly atraktivní alternativou při překlenování velkých rozpětí. Jsou velmi lehké, elegantní a efektivní [6,7,8]. Jejich materiál je optimálně využit, je-li podroben pouze tahovému namáhání.

Form-finding spočívá v hledání optimálního tvaru vzhledem k danému rozložení napětí, které působí v deformované membráně. Je důležité uvědomit si tuto skutečnost, neboť se liší od konvenční optimalizace tvarů. Hledáme totiž optimální tvar v návaznosti k předem specifikovanému poli napětí. V tomto případě tedy, více než kdy jindy, jde o aktivní přístup k navrhování [X].

Samotný problém form-finding je velice úzce svázán s problémem určování minimálních ploch. Existuje velké množství poznatků o tom, jak tyto minimální plochy popsat a generovat [9]. Z pohledu mechaniky je minimální povrch určen izotropním polem napětí, které může být experimentálně simulováno na analogii mýdlových bublin. Pro inženýrské aplikace je výhodnější technický přístup hledání tvarů, neboť tvar je formulován s ohledem na anizotropní rozdělení namáhání, které vzniká v důsledku anizotropie chování v osnově a útku, což pochopitelně ovlivňuje generovaný tvar [10]. Předepisováním anizotropních rozložení napětí vznikají neomezené variace tvarů.

Průkopnická práce Otta Freie [11] inspirovala vznik mnoha technických postupů a algoritmů. Některé z nich jsou založeny na metodě dynamické relaxace. Další, jako metoda „Force density“ jsou založeny na speciální diskretizaci a následné linearizaci. Metoda „Force density“ byla původně vyvinuta pro hledání tvaru lanových konstrukcí a později rozšířena o hledání tvaru plošných konstrukcí.

Existence tolika různých metod je zapříčiněna některými matematickými problémy. Ty vznikají při řešení inverzního mechanického problému, jenž je definován předepsáním rozdělení napětí, jako vstupního parametru procesu navrhování. Tento postup je opačný oproti standardní mechanice, kdy se napětí odvozuje od deformací materiálu. Důsledkem je skutečnost, že některé numerické metody řešení čelí matematické singularitě, která je překonávána několika technikami, například modifikovanou Newton-Raphsonovou iterační metodou [12,13,14].

„The updated reference strategy“, o níž bude dále psáno, je další z možných alternativ. Je důsledně odvozena od mechaniky pružných těles s ohledem na velké průhyby a malá přetvoření.

Numerické řešení vyplývá z diskretizace standardními konečnými prvky (trojúhelníky, čtyřúhelníky). Výše zmíněné singularity jsou upraveny homotopním mapováním (homotopie umožňuje postihnout některé topologické vlastnosti topologických prostorů a zachycuje v rámci matematiky představu spojitě deformace prostorů a zobrazení), které je založeno na aproximacích pro Cauchyho napětí a napětí Piola-Kirchhoff. Lze

prokázat, že při aplikaci na jakékoli struktury jde o konzistentní zobecnění metody „Force density“. Tuto metodu je možno využít jako aproximační techniku při optimalizaci tvarů [15].

Problematika je popisována v následujících bodech:

- Variační přístup k problematice minima plochy
- Diferenciální geometrie povrchu
- Řídící rovnice při hledání tvaru
 - Přímý geometrický přístup minimální plochy
 - Přístup mechaniky – virtuální práce povrchového pole napětí
 - Analogie mýdlových bublin – ekvivalence geometrického a mechanického přístupu
- Diskretizace řídící rovnice
- Linearizace
 - Membránové elementy
 - Lanové elementy
- Linearizace
 - Numerické metody
 - „The updated reference strategy“ (URS)
 - Metoda „Force density“ jako speciální případ URS
- Povrchové zatížení
- Rozšíření problému na minimalizaci hmotnosti konstrukce

Z uvedeného schématu problematiky budou podrobně rozepsány ty body, které jsou pro tuto práci obzvláště důležité. Podrobnější informace je možné dohledat v citované literatuře.

5.1 Variační přístup minima plochy

Minimální plocha je definována jako minimum všech ploch, které jsou uzavřeny danými fixními hranicemi. Plocha je určena integrálem (1) na Obrázku 22. Můžeme zde vidět analytické vyjádření katenoidu, jenž vystihuje minimum plochy určené dvěma kružnicemi.

Pro obecný případ libovolné funkce hranic nemůže být Eulerova diferenciální rovnice řešena analyticky jako v příkladě na Obrázku 22. Musíme tedy použít numerické metody (např. MKP) ke generování aproximačního řešení. Tyto metody jsou založeny na diskretizaci počáteční rovnice (1) na Obrázku 22, nebo slabé formulace Eulerovy rovnice (4) na Obrázku 22. Dále budeme sledovat oba směry. První nazveme „přímý geometrický přístup“, další jako „mechanický přístup“. V každém případě bude formulace založena na pochopení diferenciální geometrie povrchu.

Pozn. k variačnímu přístupu:

Variační přístup je založen na zjištění, že procesy v přírodě probíhají běžně tak, že ze všech možností se realizují procesy minimalizované: např. vozidlo jede samovolně z kopce a ne do kopce, prut se při určitém zatížení raději ohýbá, než stlačuje (minimální energie). Je tedy zřejmé, že mezi všemi funkcemi posuvů, které zachovávají spojitost tělesa a splňují geometrické okrajové podmínky, se realizují ty, které udělají celkové potenciální energii Π stacionární hodnotu.

Diferenciální a variační formulace problému

Př. Průhyb nosníku:

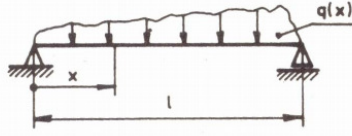
$w(x) = ?$

1. Diferenciální formulace:

Ize formulovat DR:

s okrajovými podmínkami (OP):

2. Variační formulace:



$EJw'''' = q$
 $w(0) = 0 \quad w''(l) = 0$
 $w(l) = 0 \quad w''(0) = 0 \quad (tj. M_o = 0)$

Hledání průhybu w znamená řešení DR

Po úpravách, dvojité integraci per partes a aplikaci OP lze problému přiřadit funkcionál (číslo):

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l EJ(w'')^2 dx - \int_0^l q w dx$$

Hledání průhybu w znamená hledání takové funkce w pro kterou nabývá funkcionál Π stacionární hodnoty (extrém)

Oba přístupy (variační i diferenciální) jsou ekvivalentní, liší se výrazně z hlediska algoritmů numerického řešení – variační přístup je výhodnější.

Obrázek 21: Variační přístup

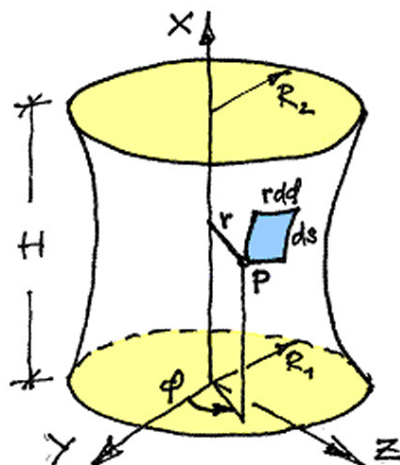


Fig. 1. Surface of rotational symmetry.

Minimal surfaces are defined as surfaces of minimal area which are enclosed by a given fixed boundary. To give an example, the surface area of a surface of rotational symmetry is determined by integration of

$$a = \int da = \int \int r dr d\varphi = \int_0^H \int_0^{2\pi} r \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2} dx d\varphi \quad (1)$$

where the differential area da is the product of the differential arc

lengths $r d\varphi$ in circumferential and $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dx}\right)^2} dx$ in

longitudinal direction, respectively. x is the coordinate in direction of the axis of rotation. The boundary is prescribed by circles of given radius R_1 and R_2 at either end of the surface (Fig. 1). The catenoid - the only known minimal surface of rotational symmetry - is determined by the radius r^* as a function of x such that the total area a of the surface is minimal:

$$a = 2\pi \int_0^H r^*(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dr^*}{dx}\right)^2} dx = 2\pi \int_0^H r^* \sqrt{1 + r^{*2}} dx \rightarrow \min \quad (2)$$

The optimal radius distribution r^* is characterized by the fact that a further infinitesimal variation δr will not alter the surface area, i.e. the area variation δa with respect to the variation of r vanishes:

$$\delta a = \frac{da}{dr} \bigg|_{r=r^*} = \frac{d}{dx} \left(2\pi \int_0^H (r^* + \delta r) \sqrt{1 + (r^{*2} + 2r^* \delta r + \delta r^2)^{1/2}} dx \right) \bigg|_{r=r^*} = 0 \quad (3)$$

Differentiation and integration by parts yields:

$$\begin{aligned} \delta a &= 2\pi \int_0^H \left(\delta r \sqrt{1 + r^{*2}} + r^* \frac{r^{*2} (\delta r)'}{\sqrt{1 + r^{*2}}} \right) dx \\ &= 2\pi \int_0^H \delta r \left(\sqrt{1 + r^{*2}} - \left(\frac{r^* r^{*2}}{\sqrt{1 + r^{*2}}} \right)' \right) dx + \frac{r^* r^{*2}}{\sqrt{1 + r^{*2}}} \delta r \bigg|_0^H = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Since by definition the variation δr has to vanish at the boundaries (i.e. $x = 0$ and $x = H$) the governing differential equation - the Eulerian differential equation - remains to determine the optimal distribution of r :

$$\sqrt{1 + r^{*2}} = \left(\frac{r^* r^{*2}}{\sqrt{1 + r^{*2}}} \right)' \quad (5)$$

The solution is well known:

$$r^* = C_1 \cosh \left(\frac{x + C_2}{C_1} \right) \quad (6)$$

The boundary conditions $r(0) = R_1$ and $r(H) = R_2$ are adjusted by proper choice of the integration constants C_1 and C_2 .

Obrázek 22: Minimální plocha (převzato z [X])

5.2 Řídící rovnice hledání tvarů

5.2.1 Přímý geometrický přístup minimální plochy

$$\delta a = \int_A \delta(\det F) dA = \int_A \det F F^{-1} : \delta F dA = 0 \quad (5.1)$$

Odvození tohoto vztahu je patrné z [X]

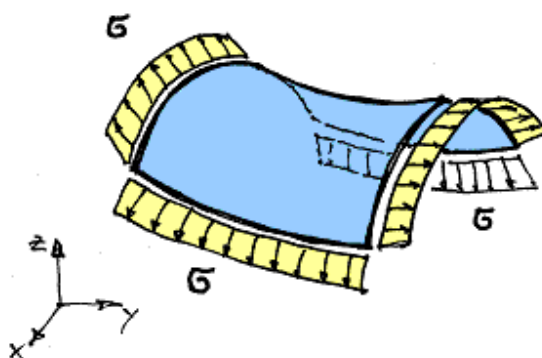
5.2.2 Přístup mechaniky – virtuální práce pole povrchového napětí

Uvažujeme pole napětí působící v tečné rovině k povrchu, které je v rovnováze (Obrázek 23). Pole napětí je možná si představit například jako výsledné napětí způsobené počátečním předepnutím a napětím v důsledku deformací textilní membrány bez pevných hranic.

V tomto okamžiku však není nutné specifikovat konkrétní materiál, jelikož pole napětí uvažujeme jako dané, bez ohledu na to, jak vzniklo. Problémem je najít geometrii náležitého povrchu, který umožní, aby bylo toto pole napětí v rovnováze. Řídící rovnicí je princip virtuální práce

$$\delta w = t \int_a \sigma : \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} da = t \int_a \sigma : \delta u_{,x} da = 0 \quad (5.2)$$

která stanovuje, že virtuální práce daného pole napětí v rovnováze vymizí. σ je předepsaný *tenzor Cauchyho napětí*, které působí na povrch v rovnováze. $\delta u_{,x}$ je derivace virtuálního posunutí ve vztahu ke geometrii aktuálního povrchu. t označuje tloušťku membrány, která je poměrně tenká a předpokládáme ji konstantní během deformace, tj. vliv Poissonova součinitele na směr tloušťky je zanedbán. Tato skutečnost je v souladu s chováním dostupných materiálů membrán.



Obrázek 23: Pole povrchových tečných napětí

Pro další studium problematiky mechaniky tažených konstrukcí doporučuji např. Leonard [15].

4.2 THE MECHANICAL APPROACH - VIRTUAL WORK OF A SURFACE STRESS FIELD

Consider a stress field which acts tangential to a surface and which is assumed to be in self-equilibrium (Fig 6). E.g., one can imagine the stress field as the resulting stresses caused by initial pre-stress and stresses due to deformation of a textile membrane within a rigid boundary. However, at this point it is not necessary to specify any special material since we consider the stress field as given, no matter how it was generated. The problem is to find the geometry of the related surface which allows the stress field to be in equilibrium. The governing equation is the principle of virtual work

$$\delta w = t \int_A \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} d\mathbf{a} = t \int_A \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{u}_{,x} d\mathbf{a} = 0 \quad (33)$$

which states that the virtual work of a stress field in equilibrium vanishes. $\boldsymbol{\sigma}$ is the prescribed *Cauchy stress tensor* which acts on the surface in equilibrium, $\delta \mathbf{u}_{,x}$ is the derivative of the virtual displacement with respect to the geometry of the actual surface. The thickness of the membrane is denoted by t . It is comparatively thin and assumed to be constant during deformation, i.e. the Poisson effect in thickness direction is neglected. This is in accordance with the behavior of available membrane material.

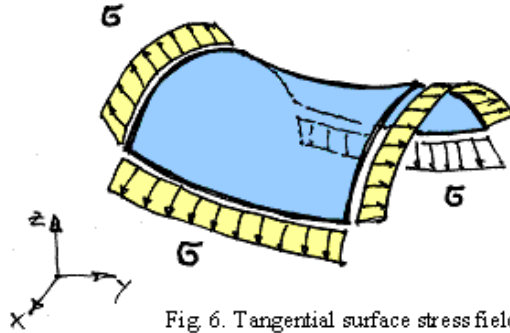


Fig 6. Tangential surface stress field.

$\delta \mathbf{u}_{,x}$ can be expressed in terms of the deformation gradient. From (22) it follows that $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{x}$ and:

$$\delta \mathbf{u}_{,x} = \frac{\partial(\delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial(\delta \mathbf{x})}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \delta \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right) \cdot \mathbf{F}^{-1} = \delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (34)$$

(34) inserted into (33) and integration over the reference area A :

$$\delta w = t \int_A \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{u}_{,x} d\mathbf{a} = t \int_A \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{u}_{,x} \det \mathbf{F} dA = t \int_A \boldsymbol{\sigma} : (\delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \det \mathbf{F} dA = 0 \quad (35)$$

Rearrangement of tensors gives the alternative equivalent formulation:

$$\delta w = t \int_A \boldsymbol{\sigma} : (\delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \det \mathbf{F} dA = t \int_A \det \mathbf{F} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \delta \mathbf{F} dA = 0 \quad (36)$$

A further rearrangement of (36) leads to

$$\delta w = t \int_A \det \mathbf{F} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \delta \mathbf{F} dA = t \int_A (\mathbf{F} \cdot (\det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T})) : \delta \mathbf{F} dA = t \int_A (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) : \delta \mathbf{F} dA = 0 \quad (37)$$

where $\mathbf{S}$ is the 2nd Piola-Kirchhoff stress tensor. $\mathbf{S}$ is related to $\boldsymbol{\sigma}$ by:

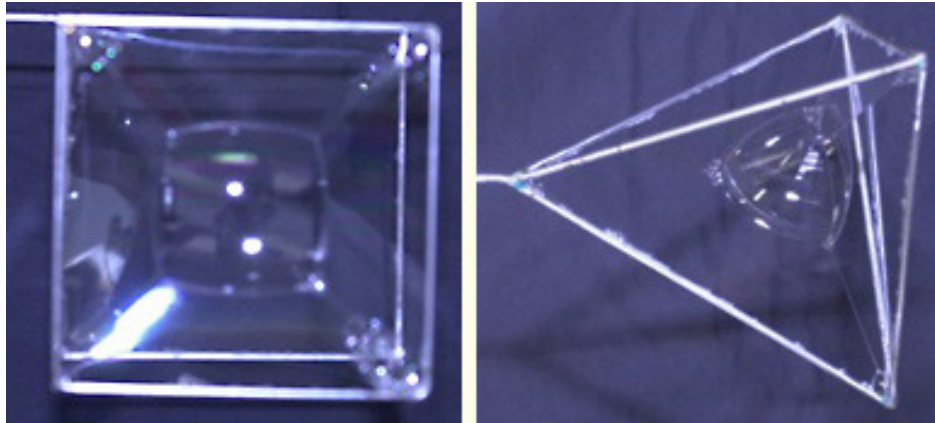
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \sigma^{e\beta} \mathbf{g}_e \otimes \mathbf{g}_\beta \\ \mathbf{S} &= \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} = \det \mathbf{F} \sigma^{e\beta} \mathbf{G}_e \otimes \mathbf{G}_\beta = S^{e\beta} \mathbf{G}_e \otimes \mathbf{G}_\beta \end{aligned} \quad (38)$$

The components $S^{e\beta}$ of the 2nd Piola-Kirchhoff stress tensor are identical to the components $\sigma^{e\beta}$ of the Cauchy stress tensor multiplied by $\det \mathbf{F}$. However, they are related to the base vectors of the reference configuration whereas the Cauchy stress components are related to the actual configuration. In general, if $\boldsymbol{\sigma}$ is homogeneous, then $\mathbf{S}$ is not and vice versa. $\mathbf{S}$ and $\boldsymbol{\sigma}$ are identical, if actual and reference configuration are identical. Note that all stress components normal to the surface are zero, i.e.:

$$\sigma^{i3} = \sigma^{3j} = S^{i3} = S^{3j} = 0 \quad (39)$$

Obrázek 24: Virtuální práce pole povrchového napětí (převzato z [X])

5.2.3 Analogie mýdlových bublin – ekvivalence geometrického a mechanického přístupu



Obrázek 25: Mýdlové bubliny vytvořené mezi drátěnými hranicemi

V předchozím textu byly uvedeny dvě variační rovnice:

Rovnice (5.1) minimálního povrchu

$$\delta a = \int_A \delta(\det F) dA = \int_A \det F F^{-1} : \delta F dA = 0 \quad (5.1)$$

rovnice rovnováhy při daném poli napětí na Obrázku 24

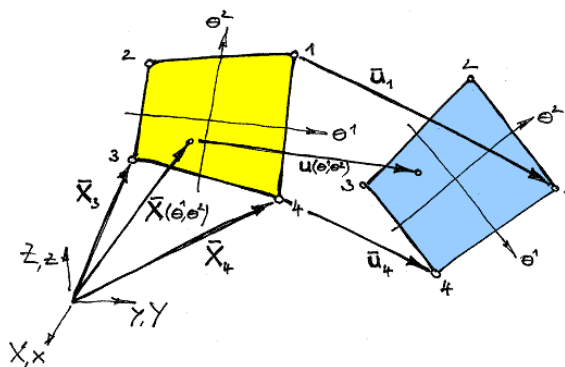
$$\delta w = t \int_A \det F (\sigma \cdot F^{-T}) \delta F dA = 0 \quad (5.3)$$

Je-li předepsáno izotropní pole napětí, tj. $\sigma = s \cdot I$ je skalární násobek jednotkového tensoru I , redukuje se rovnice (5.3) na rovnici (5.1) a rovnovážný tvar je totožný s tvarem minimálního povrchu. Tato skutečnost je známa jako „analogie mýdlových bublin“, která reflektuje experimenty vytváření minimálního povrchu tenkého mýdlového filmu mezi hranicemi z tuhého drátu.

Rovnice (5.3) je teoretický základ pro numerické hledání tvaru membránových konstrukcí. Manipulací napětí σ je možno dosáhnout široké škály vhodných tvarů, jiných než je minimální plocha. Napětí je tedy řídicím parametrem v procesu hledání tvaru. To navazuje na skutečnost, že tvary s izotropním rozložením napjatosti často nemohou být postaveny. To jak z výrobně technických důvodů, tak především z důvodu, že minimální povrch může být špatnou volbou při provádění sčítání s dalšími zatíženími jako je vítr a sníh.

5.3 Diskretizace řídící rovnice

Rovnice (5.1) nebo (5.3) jsou řešeny numericky metodou konečných prvků. Geometrie a posuny jsou diskretizovány standardními deformačními prvky, tzn. že geometrie povrchu a pole posunutí jsou po částech aproximovány interpolací uzlových souřadnic nebo deformací (Obrázek 26).



Obrázek 26: Diskretizace povrchu konečnými prvky

5.4 Linearizace

Diskretizovaný systém vede na soustavu nelineárních rovnic, které jsou řešeny iteračně užitím linearizace (např. metoda Newton-Raphson).

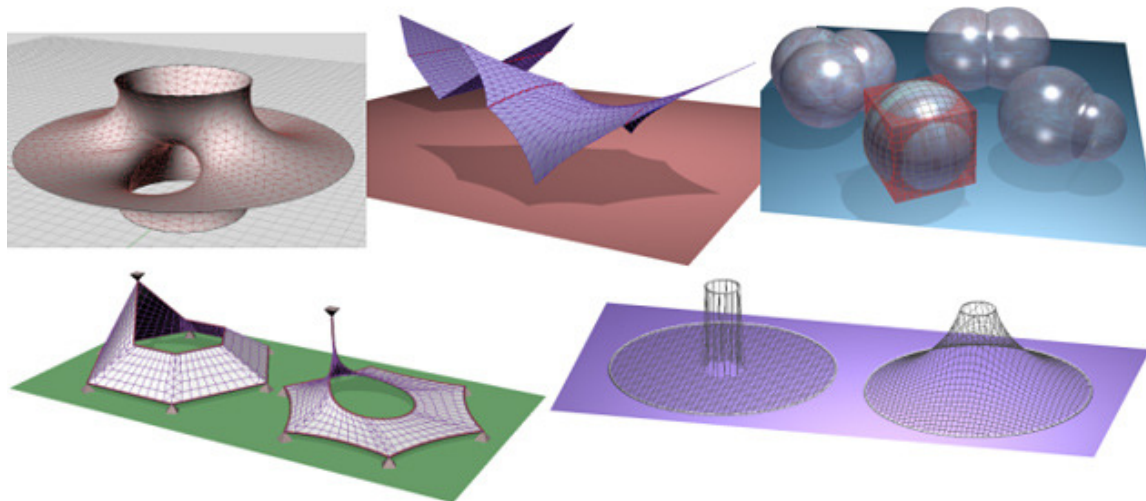
5.5 Dostupné form-findery

Na trhu je možné najít několik programů, které se specializují na form-finding. Jedním z nich je například form-finder Rhino Membrane, jenž je moderní zásuvný modul, který je určen pro 3D modelovací program Rhinoceros. Rhino Membrane je modul pro hledání forem prostřednictvím relaxace napjaté plochy.

Rhino Membrane nabízí:

- Hledání tvarů membrán, založené na „updated reference strategy“ využívající posledních vymožeností konečných prvků
- Prvky membrány pro hledání formy (čtyřúhelníky a trojúhelníky)
- Definice izotropického a anizotropického předpětí (prvky membrány)
- Generování přesné minimální plochy
- Volba tlaku pro hledání formy "mýdlových bublin" a nahuštěných "polštářů" (prvky membrány)
- Lana při hledání forem (skutečné fyzikální předpětí i hustota síly)

- Elastická lana (např. podpůrné konstrukce, prostorové nosníky atd.)
- Zobrazení napětí v aktuální membráně po nalezení formy
- Zobrazení reakčních sil
- Snadná kombinace různých konstrukčních prvků (např. pro vytvoření hřebenových a sedlových lan, nafouklých polštářů s podpůrnou sítí nebo hybridních konstrukcí)



Obrázek 27: Form-finding (obrázky z webových stránek modulu Rhino Membrane[IX])

PRAKTICKÁ ČÁST

Předmětem diplomové práce byl „*Návrh a výpočet membránové konstrukce zastřešení stadionu*“. Praktická část je tedy členěna do dvou základních bloků:

6. NÁVRH MEMBRÁNOVÉ KONSTRUKCE ZASTŘEŠENÍ STADIONU

- 6.1.** Definování dispozice stadionu (v návaznosti na rozměry sportovních ploch)
- 6.2.** Definování oblasti zastřešení a stanovení vhodného konstrukčního systému
- 6.3.** Definování statického systému
- 6.4.** Hledání tvaru membrány
- 6.5.** Materiály a konstrukční prvky

7. VÝPOČET MEMBRÁNOVÉ KONSTRUKCE ZASTŘEŠENÍ STADIONU

- 7.1.** Vytvoření globálního modelu zastřešení stadionu
- 7.2.** Analýza účinků jednotlivých kombinací zatížení

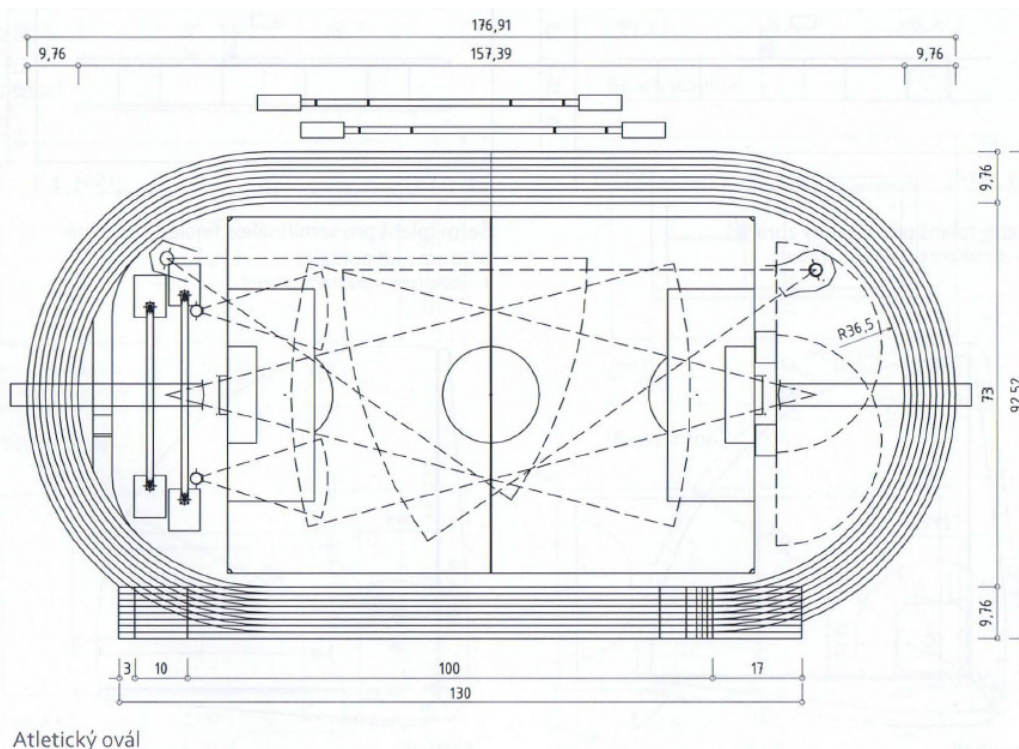
6 NÁVRH MEMBRÁNOVÉ KONSTRUKCE ZASTŘEŠENÍ STADIONU

6.1 Dispozice stadionu

Zastřešení je přirozenou součástí mnoha objektů, budov, hal a také stadionů. Je ovšem nutno počítat se skutečností, že samotná konstrukce střechy je podmnožinou celého objektu. Proto musí odpovídat provozním, bezpečnostním a ekonomickým požadavkům tohoto celku. U velkých konstrukcí však mnohdy bývá kladen důraz na nevšednost a estetické působení celé stavby, již se často dané město snaží prezentovat světu. Tento trend můžeme pozorovat například u olympijských stadionů. Nevšední vzhled takovýchto stavebních objektů pak bývá do značné míry určen právě estetickým působením zastřešení.

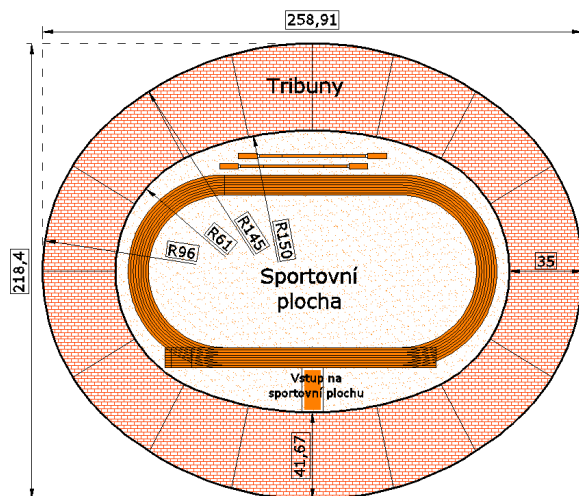
Je na investorovi, jak zváží výhody a nevýhody jednotlivých konstrukčních systémů a estetické požadavky. Je ovšem chybou, pokud je architektonický tvar samoúčelný, odtržený od statického systému. Stejně tak nelze oslnit funkční, avšak nevzhlednou konstrukcí. Vždy by mělo dojít k průniku těchto dvou záměrů. Estetické působení vycházející z dobře zvoleného statického systému, jenž tento systém ještě zdůrazňuje a podtrhuje jeho přednosti, je zárukou dobré inženýrské konstrukce. Dokonalá symbióza těchto záměrů se prokáže svou elegancí a účelností.

Dispozice stadionu je dána v první řadě dispozicí sportovní plochy

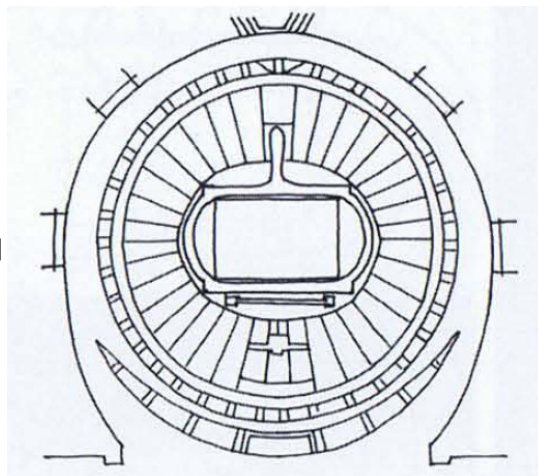


Obrázek 28: Rozměry sportovních ploch (údaje v metrech) [5]

Dispozice tribun byla inspirována stavbou Stadion Desetiletí ve Varšavě:



Obrázek 29: Dispozice řešeného stadionu



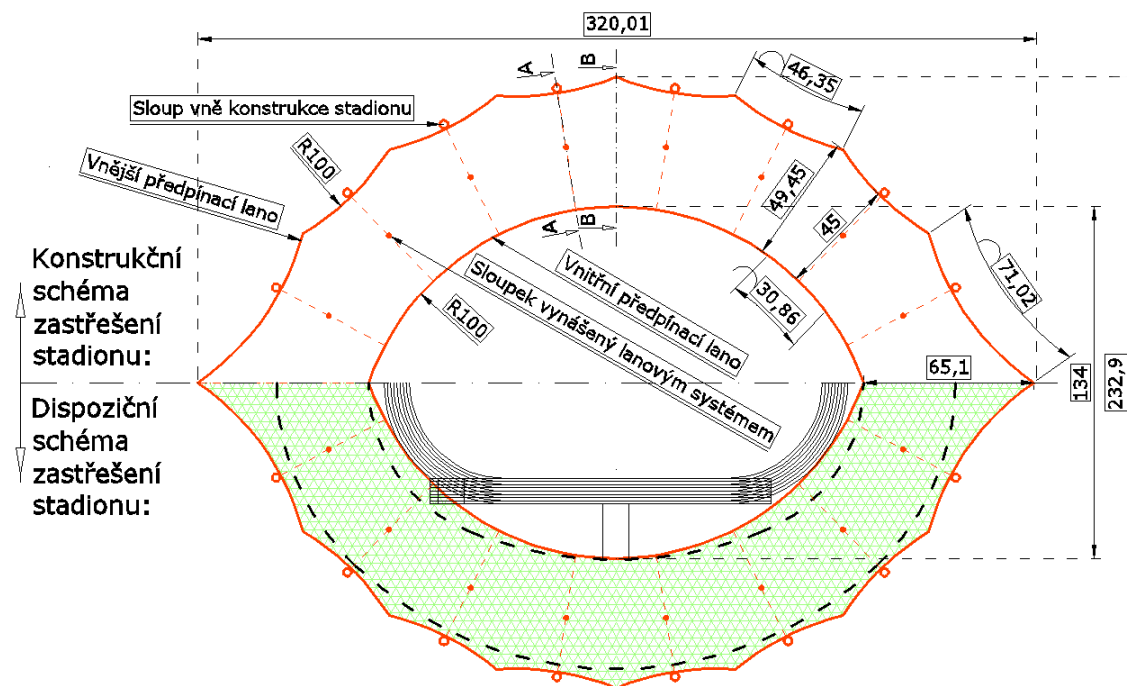
Obrázek 30: Stadion Desetiletí ve Varšavě [5]

6.2 Oblast zastřešení

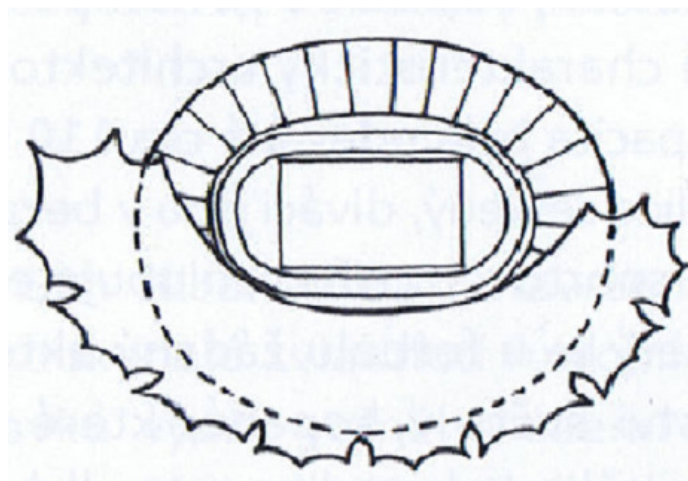
V předchozí kapitole *Dispozice stadionu* byla z rozměrů sportovní plochy a požadavků na parametry tribun určena geometrii stadionu. Zastřešení je požadováno nad prostorem hledišť. Z takto definovaných požadavků vyplynulo dispoziční schéma zastřešení, které můžeme vidět ve spodní polovině Obrázku 31. Tučné černé čárkované linie znázorňují betonovou konstrukci stadionu, tučné oranžové oblouky vyznačují dva systémy horizontálních předpínacích lan (a zároveň okrajové linie membrány), zelené šrafování znázorňuje samotnou membránu.

Membrána je nesena a napínána ocelovým lanovým systémem, jenž je vynášen ocelovými sloupy, stojícími vně stadionu (oranžové kružnice vně stadionu). Dále na obrázku můžeme vidět polohu ocelových sloupků, které jsou vynášeny složitým lanovým systémem. Je totiž nepřipustné, aby vycházely ze spodní stavby a tak zasahovaly do volného prostoru tribun. Tyto sloupky vynášejí vrcholy membrán přes vějíř lan.

Pro úplnost je vhodné dodat, že konstrukční a dispoziční systém byl, na doporučení vedoucího diplomové práce, částečně inspirován stavbou Mnichovského stadionu (OH 1972).



Obrázek 31: Konstrukční a dispoziční schéma zastřešení tribun stadionu



Obrázek 32: Dispoziční schéma zastřešení tribun Mnichovského stadionu (OH 1972)

6.3 Návrh statického systému

Systém vzpěr (sloupků vynášených lanovou konstrukcí) a táhel (předepjatých lan), je základní nosnou soustavou, která tvoří okrajové podmínky pro samotnou membránu.

Vzhledem ke skutečnosti, že předmětem práce bylo nejen konstrukci analyzovat (za využití MKP), ale také navrhnout, bylo nutno se nejprve věnovat definování nosného systému. Ten bude později předmětem matematického modelování.

Bude tedy představena přípravná fáze projektu, kdy dochází k definování rozměrů a základních tvarů s ohledem na dispozici a statické působení. Současné možnosti MKP sice umožňují výrazně detailnější analýzy, nelze však opomenout stále nutnou schopnost každého inženýra navrhnout skutečně rozumný systém. Špatný systém by se pochopitelně i v MKP prokázal špatným a to v podobě extrémních namáhání, nutnosti mnoha stabilizačních prvků, či tvarové nestálosti,...

Trvalo značnou dobu, než se podařilo navrhnout systém, který vypadal, že bude optimální. Pro inspiraci bylo shlédnuto velké množství nejrozličnějších statických systémů stávajících konstrukcí. Nyní bude navržený statický systém podrobně představen a to ve dvou rovinách (horizontální a vertikální):

6.3.1 Systém centrálních předpínacích lan

1. *Horizontální systém:*

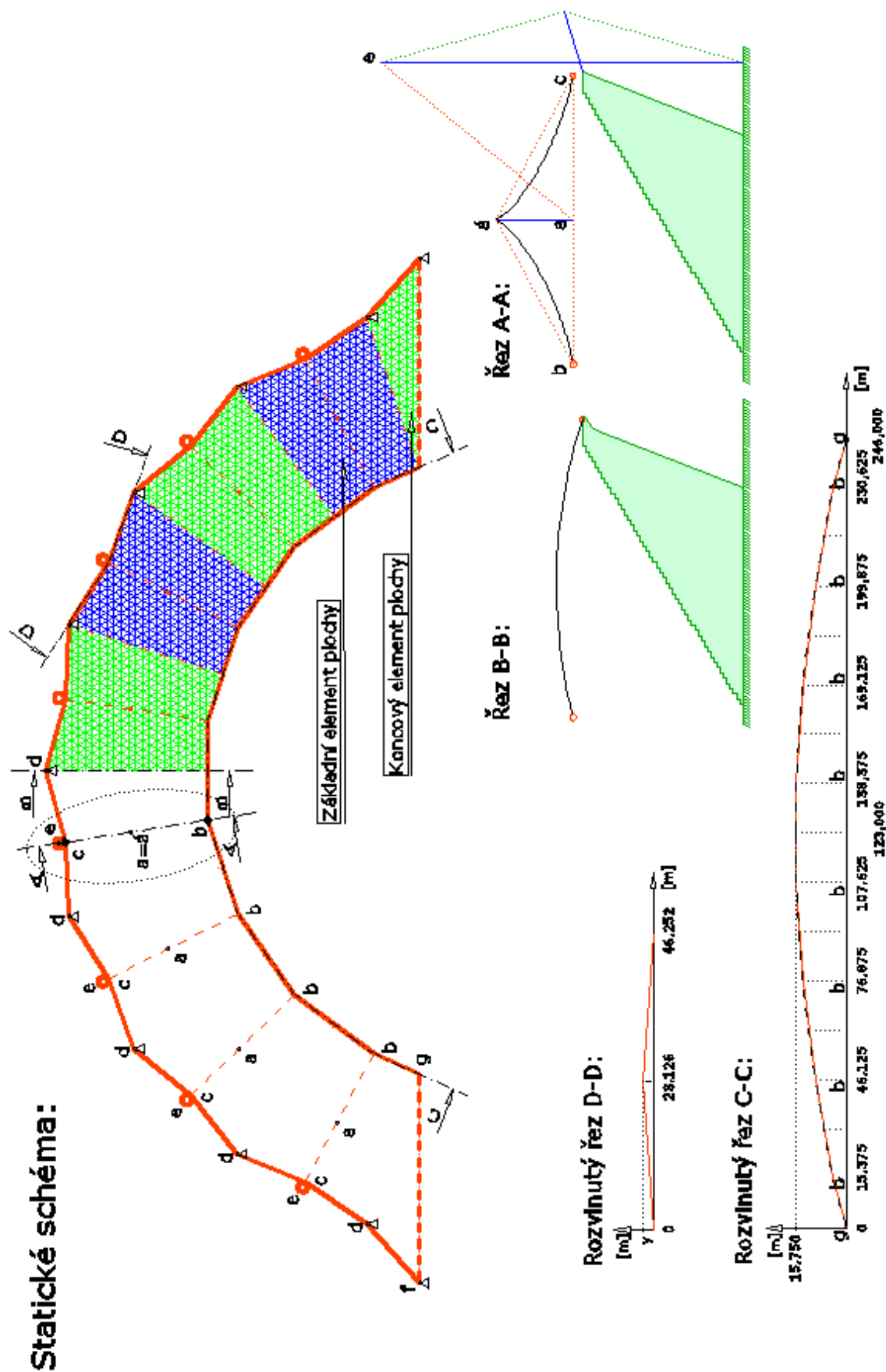
Fungování konstrukce v horizontální rovině je zajištěno zejména dvěma centrálními systémy lan, jež mají půdorysně opačnou křivost.

Centrální předepjaté lano, silově působící do vnitřní části stadionu (řez C-C na Obrázku 33), je v horizontální rovině řešeno jako polygon, vepsaný do kružnicového oblouku o poloměr $R=100\text{m}$. Tato geometrie byla zvolena s ohledem na stejně velké, dostředně orientované síly ve vrcholech polygonu.

Jelikož je konstrukce zastřešení symetrická, je na Obrázku 33 uvedena pouze jedna její polovina. Vnitřní centrální předepjaté lano je v bodech *b* táhly spojeno s vnějším centrálním předepjatým lanem. V bodě *g* se setkávají obě vnitřní centrální lana (z obou polovin konstrukce zastřešení) a jsou ukotvena předpjatým táhlem do bodu *f*.

Vnější centrální předepjaté lano má opačnou křivost. V bodech *d* je kotveno do betonové konstrukce stadionu. V bodech *c*, tzn. uprostřed rozpětí lana, je táhlem vzájemně spojeno s vnitřním centrálním předepjatým lanem.

Postupným vnášením předpětí do obou centrálních předpínacích lan dochází ke geometrickému ztužování systému v horizontální rovině. Tento systém bude tvořit okrajové linie membrány. Na Obrázku 33 můžeme vidět vyšrafovanou oblast nazvanou „základní element plochy“, jenž je opakujícím se motivem této stavby. Tato zvolená symetrie má mnoho výhod, jak ze statického, technologického, tak i estetického hlediska.



Obrázek 33: Statické schéma

2. Vertikální systém:

Působení zvoleného systému je patrné především z řezů $A-A$, $C-C$ a $D-D$, jenž můžeme vidět na Obrázku 33.

$C-C$ představuje do roviny rozvinutý, vertikální řez osou vnitřního centrálního předpínacího lana. Kromě horizontální funkce má toto lano rovněž funkci přítlačnou (stabilizační) ve vertikálním směru. V každém vrcholu b polygonu (b je vrcholem polygonu v horizontálním i vertikálním směru) je požadována stejně velká míra přítlaču. I když zatím není známa vlastní tíha tohoto lana, je jisté, že tvar polygonu (s vrcholy v bodech b dle Obrázku 33) bude velice blízký parabole druhého stupně. Proto bylo při návrhu počítáno právě s touto geometrií. (U mohutných betonových oblouků je nutno vlastní tíhu zohlednit, což vede k počáteční geometrii těchto objektů, známé jako řetězovka. U vysokopevnostních ocelových lan je poměr tíhy k únosnosti mnohem nižší, proto není očekáváno velké odchýlení od zvoleného parabolického tvaru.)

$D-D$ představuje do roviny rozvinutý vertikální řez osou vnějšího centrálního předpínacího lana. Mimo horizontální působení je od tohoto lana rovněž požadována přítlačná (stabilizační) funkce. Proto je lano v bodech c vertikálně zalomeno.

6.3.2 Statický systém řezu A-A

Nyní bude v pěti krocích podrobně rozebrán statický systém řezu $A-A$ (Obrázek 33, detailněji na Obrázku 34), z něhož je statické působení ve vertikálním směru nejlépe patrné.

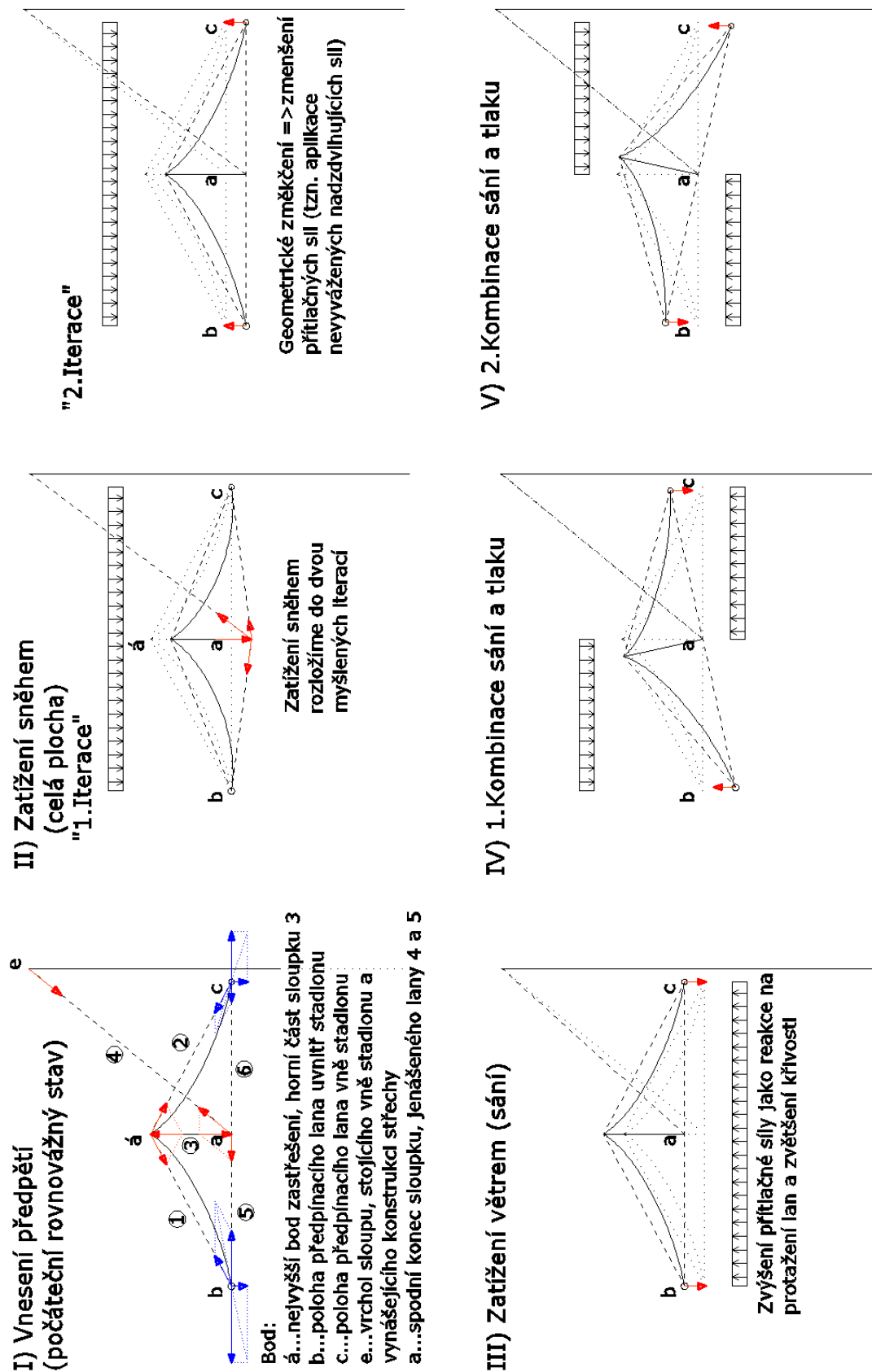
1. Vnesení předpětí (počáteční rovnovážný stav)

Na Obrázku 34 v bodě I) můžeme vidět počáteční rovnovážný stav v řezu $A-A$. Celý systém je vynášen lanem č. 4 do sloupu, stojícího vně stadionu. Účinek tohoto lana se ve styčníku a rozkládá na svislou složku (jdoucí do sloupku mezi body a a a' , který do značné míry určuje tvar membrány) a vodorovnou složku (jdoucí přes táhlo č. 5 do uzlu b).

S vrcholkem sloupku jsou lany č. 1 a č. 2 spojeny uzly c a b , které mají přítlačný (stabilizační) charakter, což bylo detailně popsáno v části „Vertikální systém“. Sloupek (v bodě a') i centrální předpínací lana (b , c) působí ve vertikálním řezu opačným směrem, čímž je dána geometrická tuhost vertikálního systému.

Geometrická tuhost řezu $A-A$ v horizontálním směru je zajištěna opět systémem vzájemně opačně působících sil a to především pomocí centrálních předpínacích lan (popsáno v části „Horizontální systém“). Spojení jejich účinků s ostatními prvky je patrné z obrázku 34.

Míra geometrické tuhosti je dána velikostí předpětí. To určuje míru tuhosti poddajných okrajových podmínek membrány (která bude s tímto systémem spojena).



Obrázek 34: Řez A-A

2. Zatížení sněhem (tlakem větru)

V přípravné fázi navrhování systému byla věnována pozornost odhadu předpokládané tvarové stálosti konstrukce (jež bude později podrobně analyzována MKP).

Prvním zatížením, jehož účinky byly uvažovány, byl sníh. Při rovnoměrném zatížení přes celou plochu membrány byla změna geometrie rozložena do dvou myšlených „iterací“. Deformace, nyní rozděleny do dvou částí, probíhají ve skutečnosti ve vzájemné návaznosti. Rozdělení slouží pouze demonstrativnímu účelu. Při podklesnutí uzlu a dojde k příznivějšímu rozkladu sil jdoucích z lana č.4 a zároveň ke snížení napětí v lanech č. 1 a č. 2 („1.iterace“). V návaznosti na tuto skutečnost dojde k nerovnováze sil v uzlech b a c , které následně poklesnou, a tím se sníží míra předpětí v centrálních předpínacích lanech. Konstrukce tak při svém nepatrném snížení najde novou rovnováhu sil.

Lze předpokládat tvarovou stálost a nelineární stabilitu zvoleného systému.

3. Zatížení větrem (sání)

Při zatížení sáním větru dojde k vertikálnímu posunu uzlů a – a , b , c . To má za následek snížení nadzdvihující síly v uzlu a a zvýšení předpětí v centrálních předpínacích lanech, tedy zvýšení přitlačné síly v uzlech b , c . Konstrukce tak při nepatrném nadvýšení nalezne novou rovnováhu sil.

Lze předpokládat tvarovou stálost a nelineární stabilitu zvoleného systému.

4. 1.Kombinace sání a tlaku (rotace):

Při zatížení dle Obrázku 34 bodu IV dochází k rotaci příčného řezu. Tomu je však bráněno dvojicí sil, vznikajících při dopínání a povolování centrálního lanového systému, plynoucích ze vzniklých deformací. Konstrukce tak při nepatrné rotaci nalezne novou rovnováhu sil.

Lze předpokládat tvarovou stálost a nelineární stabilitu zvoleného systému.

5. 2.Kombinace sání a tlaku (rotace):

Rotaci je bráněno analogicky jako při 1.kombinaci sání a tlaku.

Lze předpokládat tvarovou stálost a nelineární stabilitu zvoleného systému.

Z výsledků přípravné analýzy můžeme očekávat, že zvolený konstrukční a statický systém lze použít pro podrobné matematické modelování v MKP.

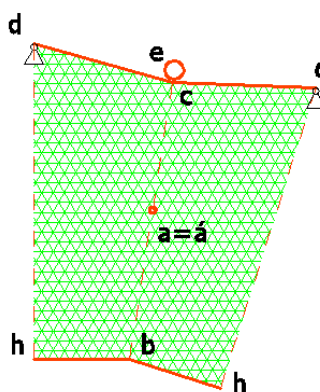
Pozn.:

S ohledem na odvodnění bude v oblasti uzlů b a c (polohy centrálních přepínacích lan) umístěno, kromě přepínacích lan, i odvodňovací zařízení. Voda, tekoucí z membrány, bude tímto zařízením (kruhové geometrie s vhodně řešenými otvory ze strany nátoky)

odváděna do kanalizačního zařízení. Při návrhu konstrukce bylo s touto skutečností počítáno a byl zvolen dostatečně velký sklon. Při vhodné volbě materiálu a barvy tohoto zařízení je zvolený způsob odvádění vody zcela bez újmy na estetické hodnotě konstrukce.

6.4 Hledání tvaru membrány

Předmětem této kapitoly je naznačit zvolený postup pro nalezení optimálního tvaru „základního elementu plochy“, použitého pro zamýšlenou membránovou konstrukci zastřešení stadionu.



Obrázek 35: Základní element plochy

Obecně lze říci, že pro každý typ zatížení existuje jemu odpovídající ideální tvar konstrukce, který tomuto zatížení nejlépe vzdoruje. Jiný tvar je vhodný pro rovnoměrné zatížení, jiný pro zatížení lokální a svůj ideální tvar má i předpětí.

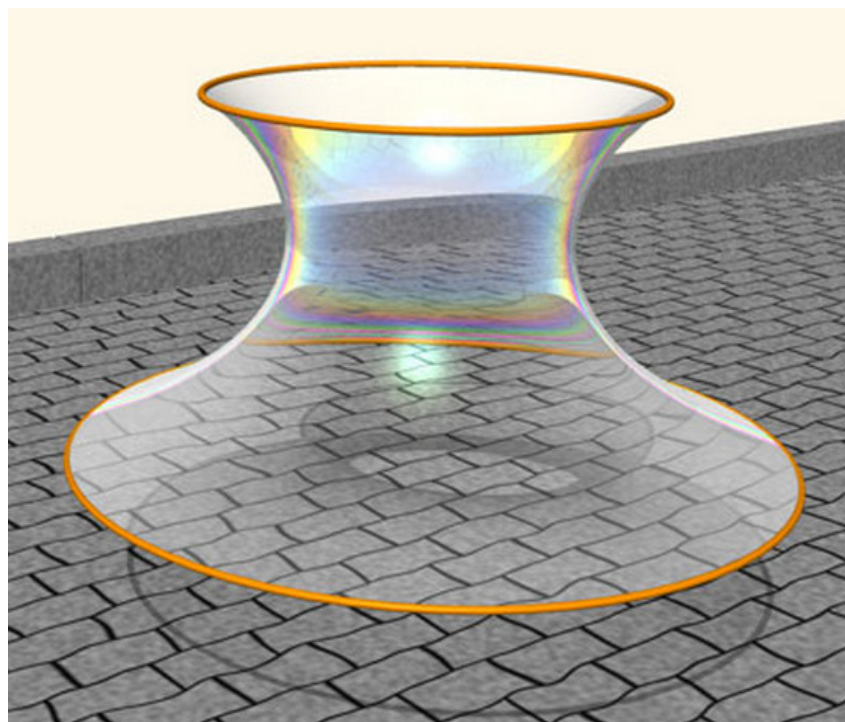
U membránových konstrukcí obvykle nemůžeme předem znát směr převažujícího zatížení, nebo dochází k zatěžování z tolika směrů, že nelze jednoznačně definovat tvar, který by byl ideální pro všechny účinky. Z tohoto důvodu se obvykle ideální tvar určuje právě s přihlédnutím k předpětí. Do konstrukce tak vneseme geometrickou tuhost, která bude omezovat budoucí deformace, dále pak dostatečným předpětím eliminujeme vliv vrásnění.

Dříve než bude uveden ideální tvar základního elementu plochy, bylo by dobré nastínit jednotlivá úskalí jeho určení. Častou snahou je navrhnout tvar tak, aby vycházel z předpokladu rovnoměrného rozložení napětí v celé membráně (izotropní pole napětí), tedy z teorie mýdlových bublin. To odpovídá jedné ze základních myšlenek teorie Form-finding.

Následující příklady si kladou za cíl prozkoumat, do jaké míry lze tento předpoklad použít.

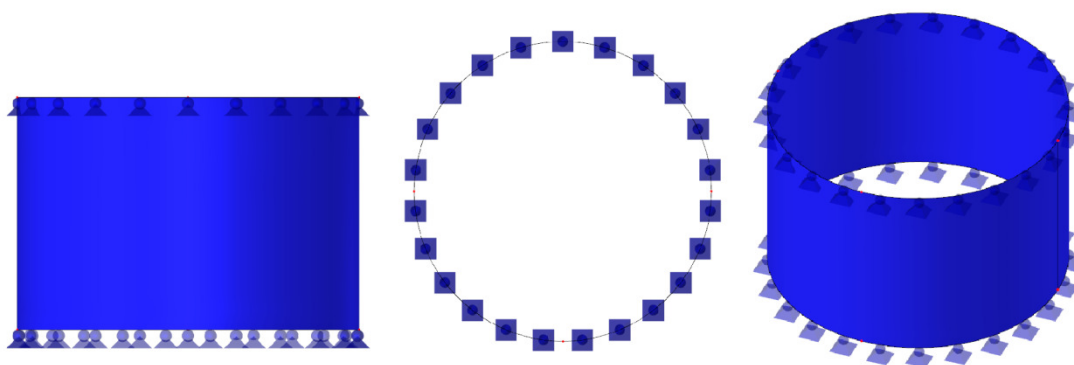
6.4.1 Katenoid

Katenoid je název pro minimální ze všech možných ploch, které je možné vytvořit mezi dvěma kruhovými hranicemi.



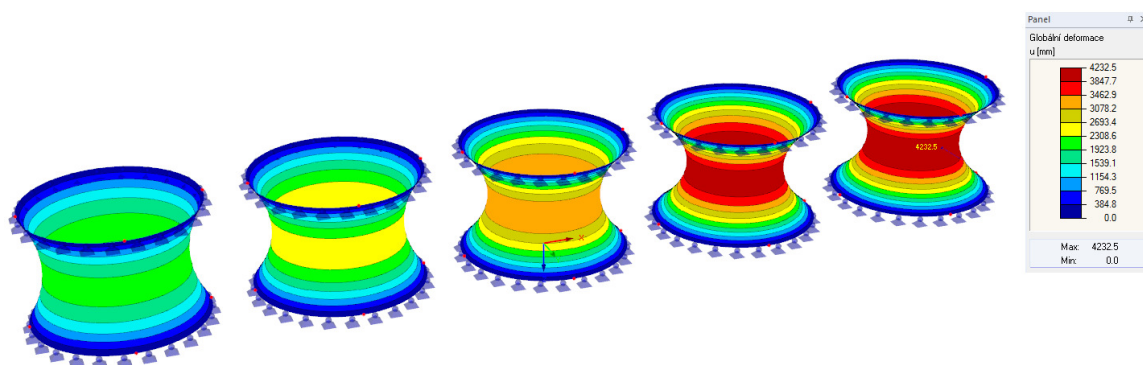
Obrázek 36: Katenoid

S užitím nelineární analýzy byl tento tvar hledán v software RFEM:



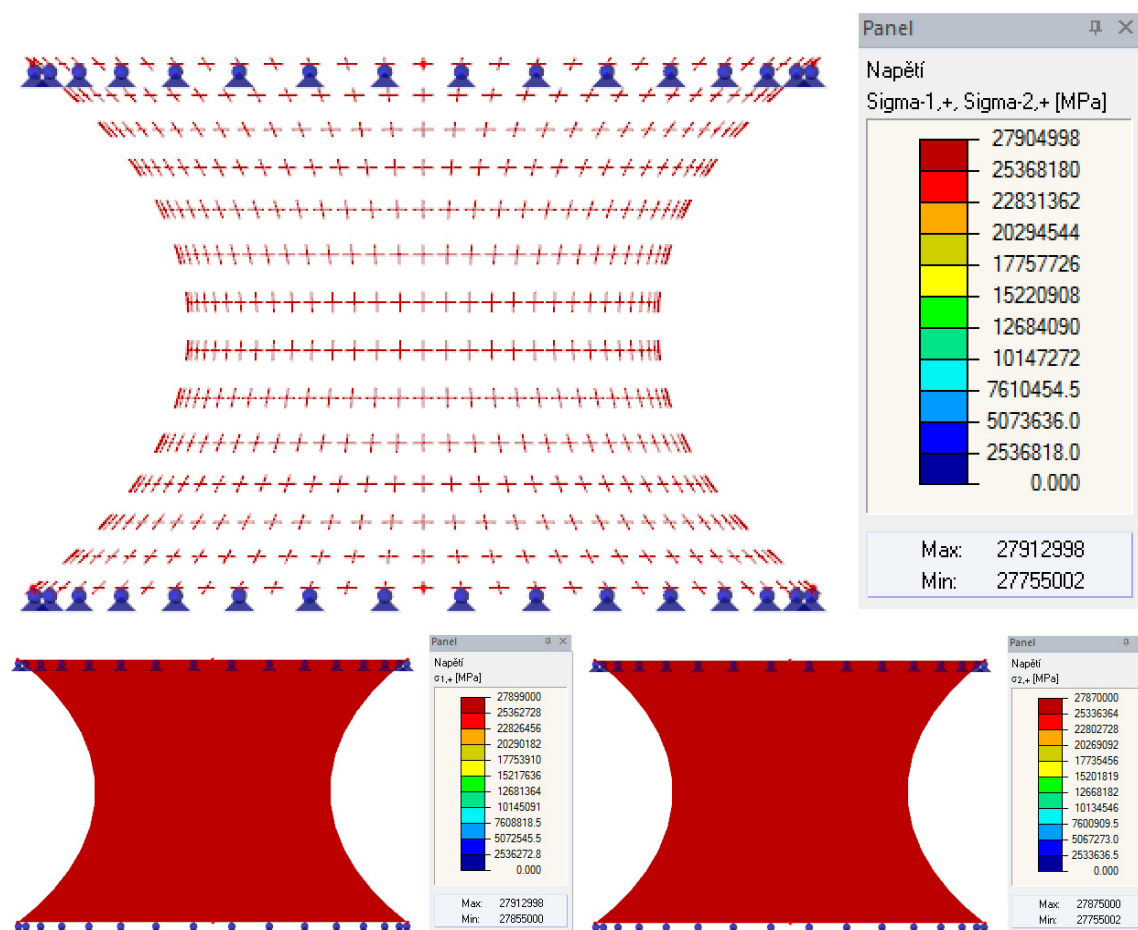
Obrázek 37: Válcová plocha spojující dvě kruhové hranice.

Nejprve byla vymodelována jednoduchá konstrukce válcové plochy. Na tuto plochu byly aplikovány různé míry smrštění.



Obrázek 38: Deformace při aplikaci různých velikostí smrštění

Na Obrázku 38 je možné vidět, že deformace posledních dvou válcových ploch si jsou velice blízké. To je způsobeno skutečností, že se tyto tvary přiblížily tvaru minimální plochy – katenoidu.

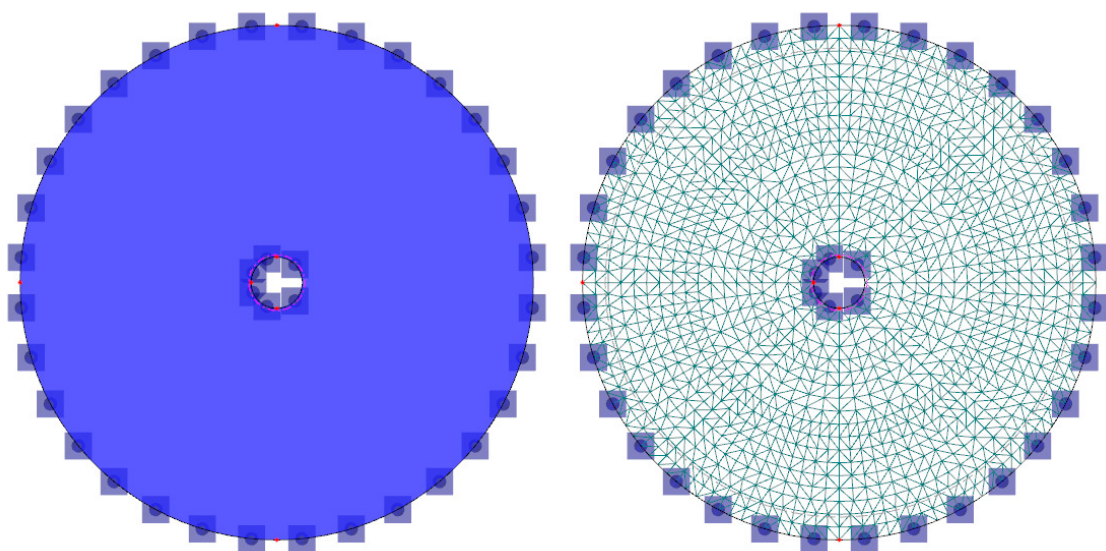


Obrázek 39: Hlavní napětí σ_1 a σ_2 (postupně: vektorové zobrazení, izolinie σ_1 , izolinie σ_2)

Z Obrázku 39 je patrné, že pole napětí na povrchu vytvořené plochy je izotropní. Jedná se tedy o minimální povrch – katenoid.

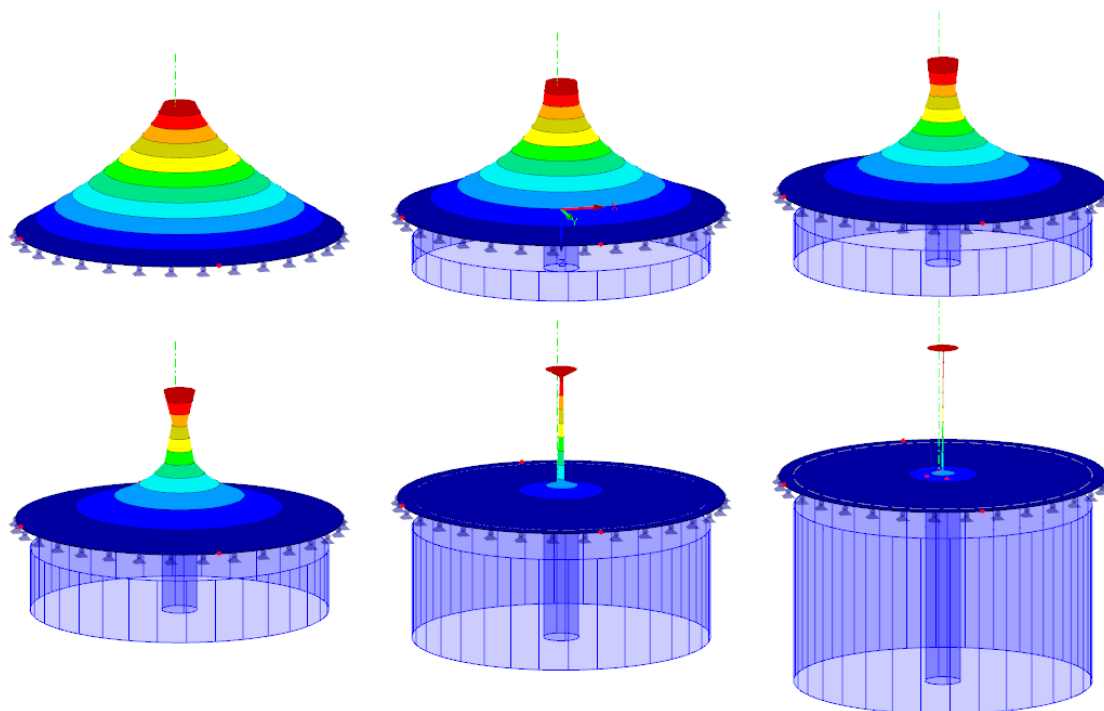
6.4.2 Kuželový (trychtýřový) tvar

Velice často používanou geometrií, při navrhování membránových konstrukcí, je kuželový (trychtýřový) tvar. Ten bude vytvořen vnuceným posunem vnitřní kružnice (z daného mezikruží) o hodnotu dz . Aby však byla nalezena minimální plocha, budou postupně aplikovány různé míry smrštění. To až do okamžiku, kdy při aplikaci většího smrštění již nedojde ke změně tvaru.



Obrázek 40: Mezikruží, trojúhelníková síť

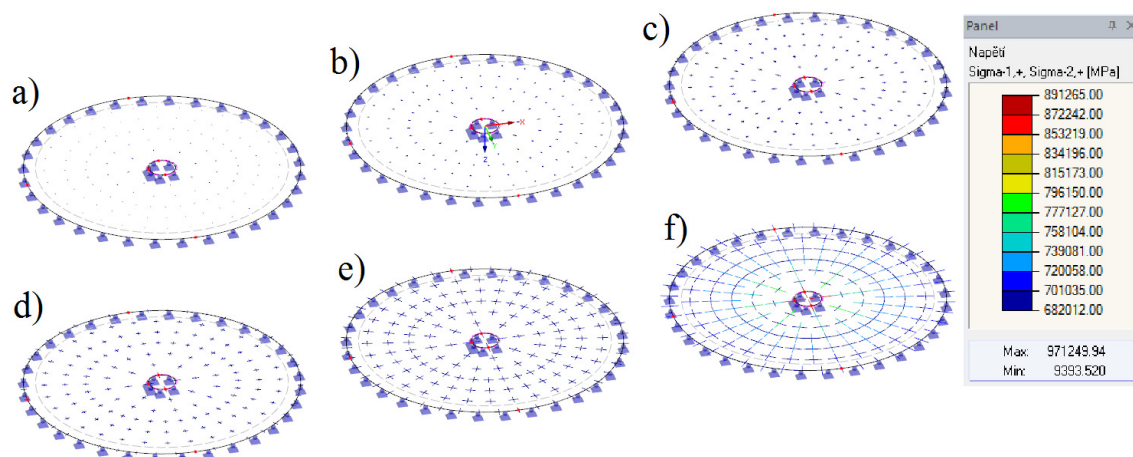
Tato studie bude provedena na šesti mezikruzích. První povrch je vytvořen pouhým vytažením vnitřní kružnice o hodnotu 8 m. Na další jsou postupně aplikovány stále větší míry předpětí. Při rostoucím předpětí se začne vytvářet, a postupně zužovat, hrdlo mezi horní a dolní kružnicí. Minimálnímu povrchu se nejvíce blíží šestý povrch, který má své hrdlo nejužší (jak je patrné z Obrázku 41).



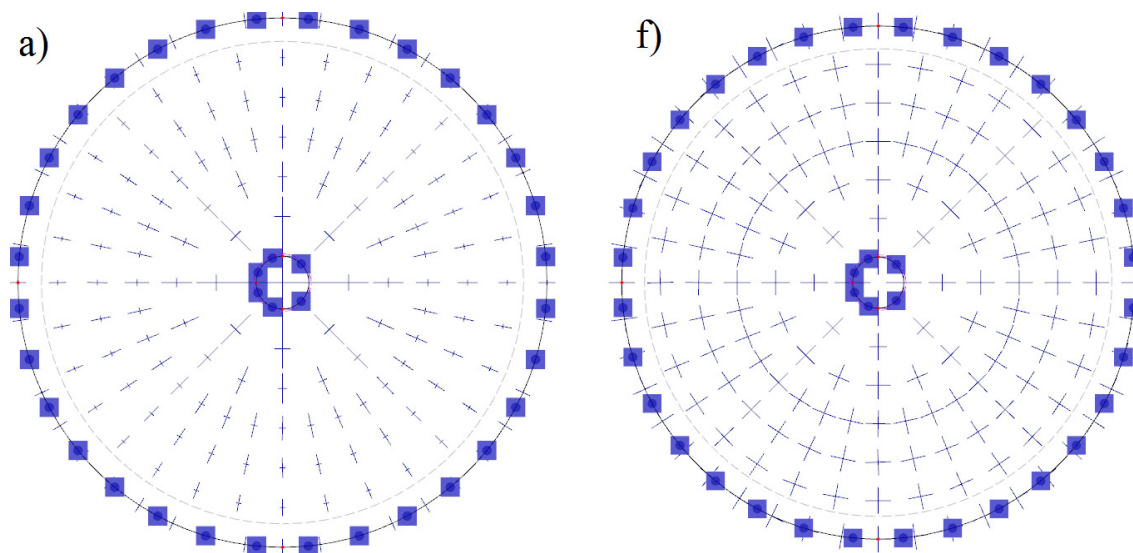
Obrázek 41: Hledání minimálního povrchu – tvary po deformaci

Na Obrázku 42 je možno vidět hlavní napětí na všech vzniklých plochách (ve stejném měřítku zobrazovaných napětí). Dále pak na Obrázku 43 srovnání prvního a posledního trychtýřového povrchu (pro lepší názornost v různých měřítkách zobrazovaného napětí).

Z levé části Obrázku 43 je patrné, že je-li aplikována pouze vnucená deformace vnitřní kružnice, je velikost napětí σ_1 výrazně větší než velikost napětí σ_2 . Je zde zřejmý směr převažujícího namáhání. Jinak je tomu, podíváme-li se na pravou část tohoto obrázku. Vidíme zde, že velikost napětí σ_1 je velice blízká velikosti napětí σ_2 . Uvážíme-li tvrzení, která jsou uvedena v teoretické části form-finding, je tato plocha zcela jistě podobnější minimálnímu povrchu, než plocha první (i než všechny mezilehlé plochy). Při takto vypočítané deformaci se vytvořený povrch minimální ploše limitně blíží.



Obrázek 42: Vektorové zobrazení hlavních napětí (ve stejném měřítku)



Obrázek 43: Vektorové zobrazení hlavních napětí: a) na prvním, f) na posledním vytvořeném kuželovém (trychtýřovém) povrchu. Trajektorie a) jsou násobeny *10, f) jsou násobeny *1

I když jsme takto našli tvar limitně se blížící minimálnímu povrchu, nelze říci, že je z inženýrského hlediska totožný s ideálním povrchem projektované konstrukce. Při samotném předpětí má tento tvar z teoretického hlediska opodstatnění, z inženýrského hlediska je však nepoužitelný. Bylo-li by na takovýto tvar aplikováno jiné zatížení, prokázaly by se jeho nevýhody.

Nejen že tedy tvar neodpovídá požadavkům na odtok vody, rovněž je příliš plochý na to, aby dobře vzdoroval zatížení sněhem či větrem, které by působilo kolmo k jeho povrchu. Z inženýrského hlediska by se optimálnímu tvaru nejvíce blížil druhý tvar na Obrázku 41.

Je tedy zřejmé, že se při hledání tvaru musíme ohlížet i na jiné předpoklady, než jen předpoklad minimální plochy. Předpoklad minimální plochy je výchozím

předpokladem, o který se můžeme v některých případech opírat. Mnohdy je však nutno nahradit izotropní pole napětím jiným, z praktického hlediska optimálnějším rozložením. Rád bych zde proto připomněl jednu z nejpodstatnějších částí textu této diplomové práce (z kapitoly Form-finding):

Je-li předepsáno izotropní pole napětí, tj. $\sigma = s \cdot I$ je skalární násobek jednotkového tensoru I , redukuje se rovnice (5.3) na rovnici (5.1) a rovnovážný tvar je totožný s tvarem minimálního povrchu. Tato skutečnost je známa jako „analogie mýdlových bublin“, která reflektuje experimenty vytváření minimálního povrchu tenkého mýdlového filmu mezi hranicemi z tuhého drátu.

Rovnice (5.3) je teoretický základ pro numerické hledání tvaru membránových konstrukcí. Manipulací napětí σ je možno dosáhnout široké škály vhodných tvarů, jiných než je minimální plocha. Napětí je tedy řídicím parametrem v procesu hledání tvaru. To navazuje na skutečnost, že tvary s izotropním rozložením napjatosti často nemohou být postaveny. To jak z výrobně technických důvodů, tak především z důvodu, že minimální povrch může být špatnou volbou při provádění sčítání s dalšími zatíženími jako je vítr a sníh.

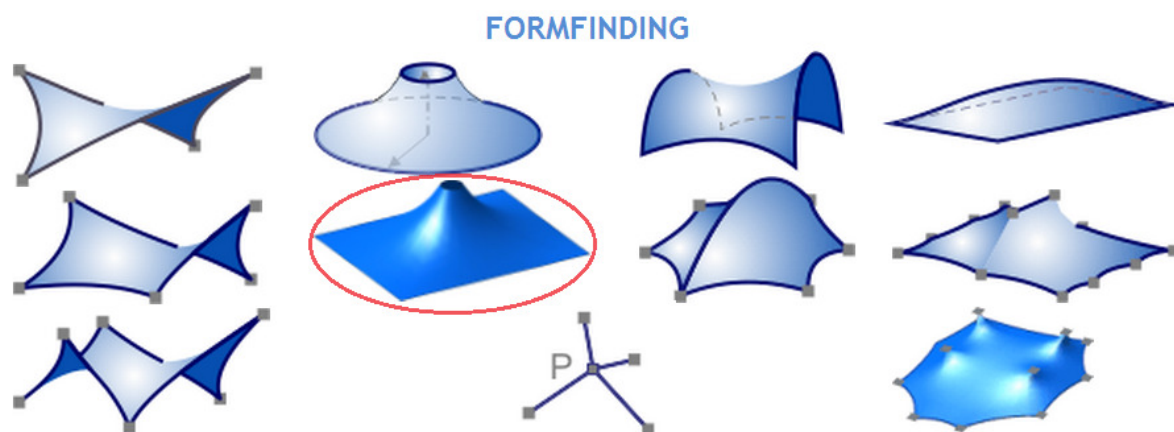
6.4.3 Základní element plochy

Nyní, když byla popsána problematika hledání tvaru z praktického hlediska, bude popsán postup při hledání optimálního tvaru pro „základní element plochy“ konstrukce zastřešení stadionu.



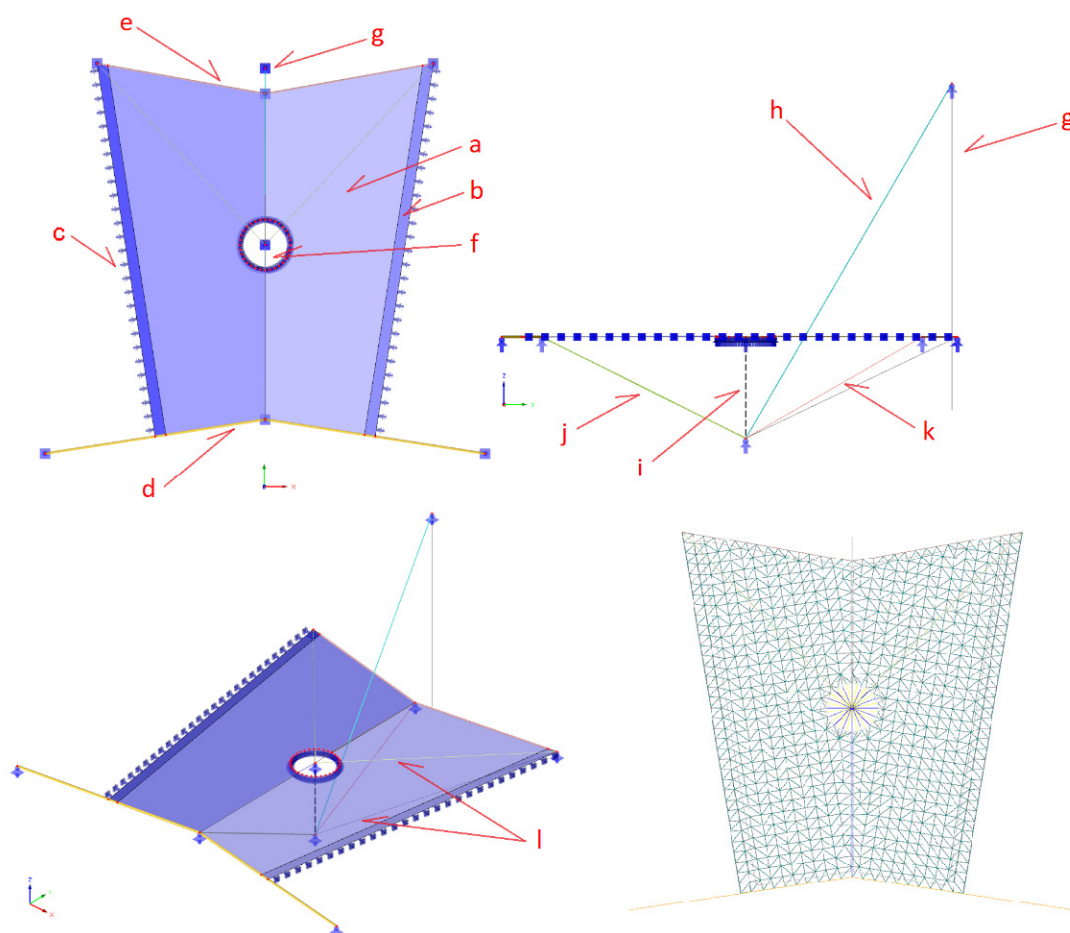
Obrázek 44: Postup vytváření projektu

Z uvedeného schématu (viz Obrázek 44), které naznačuje postup vytváření projektu, již byla navržena základní idea i vstupní data (což bylo předmětem výše zmíněných částí, především části „6.3 Návrh statického systému“). Dále bude popsán postup hledání tvaru.



Obrázek 45: Form-finding: Obvykle používané tvary membrán; hledání rovnovážné polohy soustavy předepjatých lan [XIII]

Na Obrázku 45 jsou uvedeny tvary, které jsou často používány u membránových konstrukcí. Tvar „základního elementu plochy“ se nejvíce blíží tvaru vyznačenému červenou hranicí.



Obrázek 46: Základní element plochy (postupně: půdorys, řez A-A, izometrický pohled, dělení sítě)

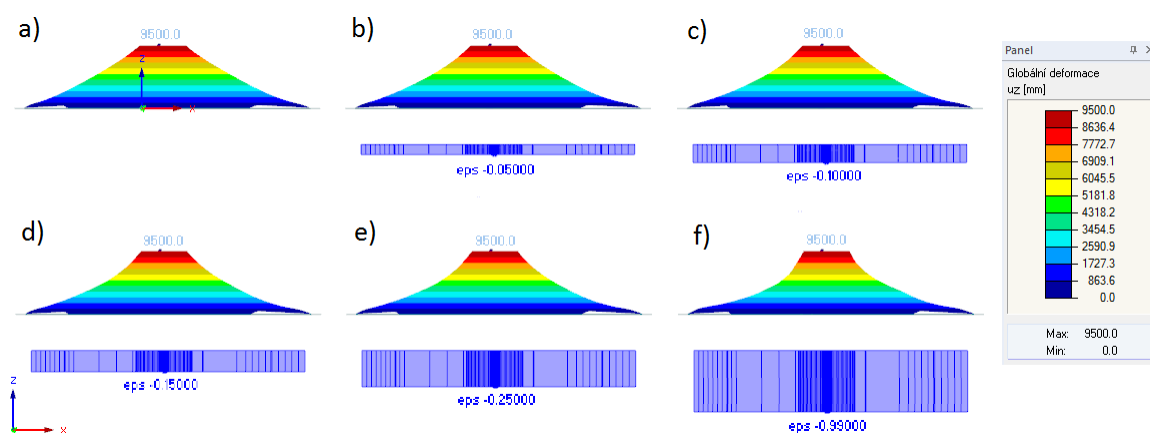
Na Obrázku 46 je znázorněn řešený „základní element plochy“, jenž je nejprve modelován v rovině, ze které bude následně kombinací vypichování a smršťování deformován do optimálního tvaru. Lana, jež jsou nyní pod rovinu membrány, budou při hledání tvaru membrány posunuta do polohy, navržené dle Obrázku 33 a Obrázku 34. Na plošném modelu „základního elementu plochy“ je možno vidět:

- a) Samotný materiál membrány – bledě modrý
- b) Okrajové plochy – tmavě modré. Představují „pás“ (který je možno vidět v části práce „6.5.3 Materiály a konstrukční detaily“). Tento pás (tvořící výrazně tužší element, než je samotný materiál membrány) je vložen z důvodu omezení nadzdvihování sedlové části mezi dvěma sousedními „základními elementy membrány“.
- c) Liniové podpory pro vytvoření rovinné symetrie. Tzn. zabránění horizontálnímu posunu kolmo na směr linie (se „základním elementem plochy“ bude sousedit další zleva i zprava => při hledání tvaru je nutno toto zohlednit)
- d) Vnitřní centrální přepínací lano. Na tomto laně je možno vidět tři „podpory“ – ty jsou umístěny vždy v oblasti řezu A-A. Tyto „podpory“ jsou využívány pouze při hledání tvaru, při vytváření globálního modelu je posuvům zabráněno geometrickou tuhostí lanové soustavy. Prostřední „podpora“ tedy náleží tomuto „základnímu elementu plochy“. „Podpory“ zleva a zprava náleží sousedícím „základním elementům plochy“. Sousedící „podpory“ jsou zde vymodelovány proto, aby bylo možné při hledání tvaru napnout vnitřní centrální přepínací lano v pravdivé poloze.
- e) Vnější centrální přepínací lano. Toto lano je podepřeno na obou koncích (podpory *d* na obrázku 33). Uprostřed můžeme vidět „podporu“, jejíž funkci v globálním modelu převezme rovněž lanový systém. Tato „podpora“ je součástí řezu A-A.
- f) Vějíř lan, který je vynášen vzpěrou (bodem *a*) a navazuje na prstenec, jenž vynáší membránu. (Při hledání tvaru je na konci prstence možno vidět „liniové podpory“. Opět se jedná o nástroj k hledání tvaru. V globálním modelu bude jejich funkce převzata prstencem, vynášeným vějířem lan.)
- g) Sloup. Je zde pouze znázorněn linií, jelikož není předmětem práce. Pokud by se práce zabývala i spodní stavbou, tedy i uložením sloupu, volil bych takový kotvící systém, jenž by v počáteční rovnovážné poloze vyloučil ohybové namáhání. Ze statického, ale i ekonomického hlediska se jako vhodné řešení jeví použití samokotvícího systému (Obrázek 33, Obrázek 58).
- h) Lano vynášející vzpěru dle řezu A-A (Obrázek 33, Obrázek 34)
- i) Vzpěra dle řezu A-A (Obrázek 33, Obrázek 34)
- j) Táhlo dle řezu A-A (Obrázek 33, Obrázek 34)

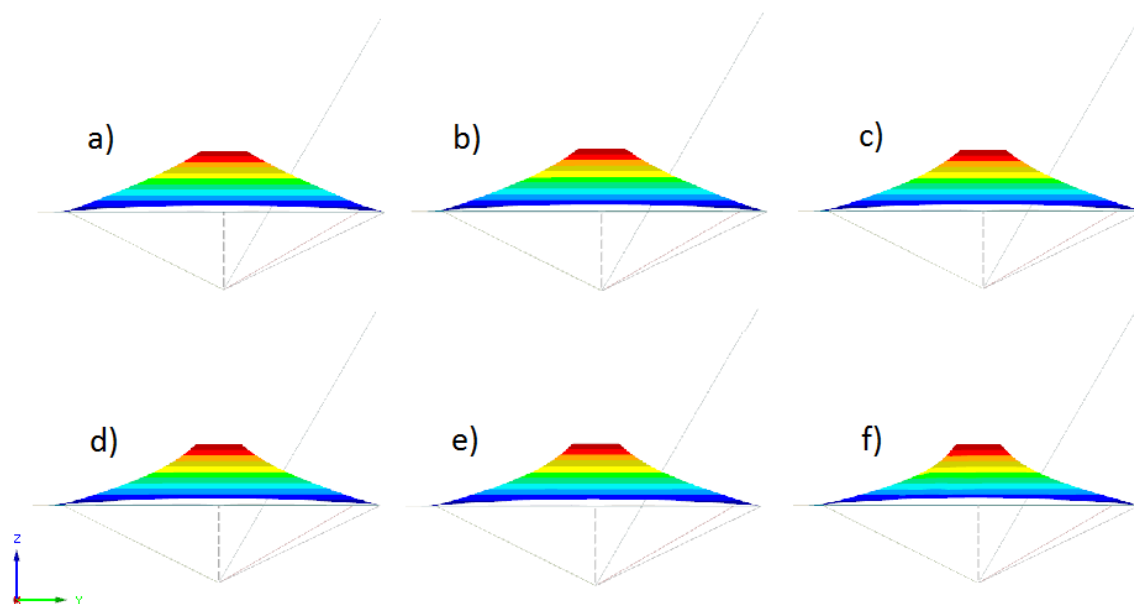
k) Táhlo dle řezu A-A (Obrázek 33, Obrázek 34)

l) Stabilizační lana zajišťující prostorovou geometrickou stálost

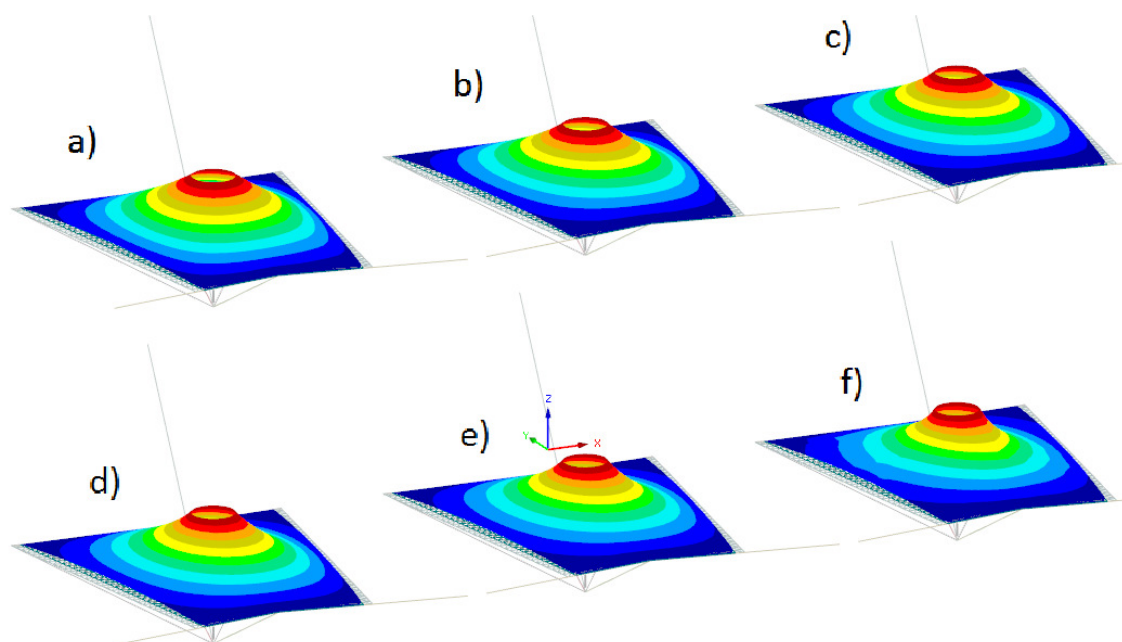
Na popsany „základní element plochy“ byla aplikována vnucená deformace a různé velké míry smrštění.



Obrázek 47: Hledání tvaru, čelní pohled (rovina x-z)



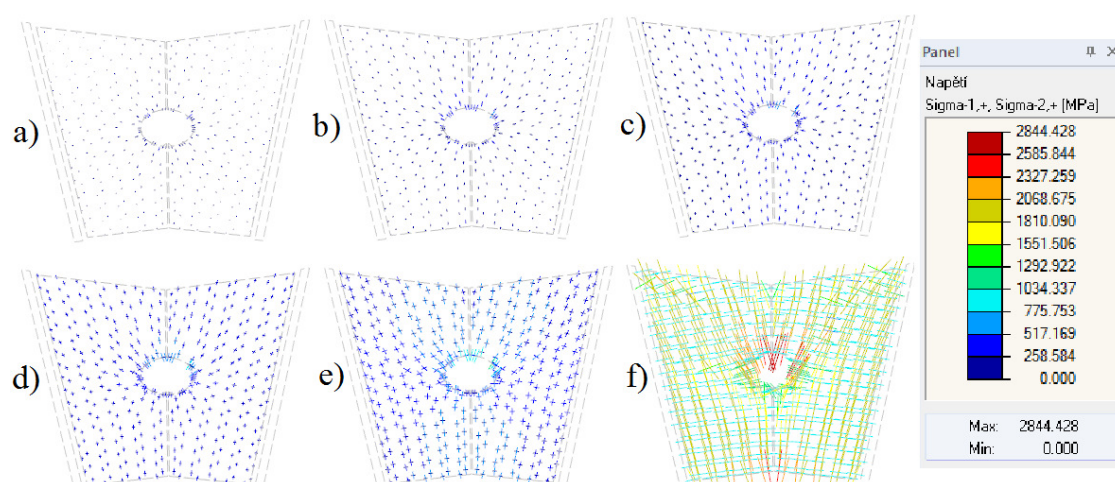
Obrázek 48: Hledání tvaru, boční pohled (rovina y-z)



Obrázek 49: Hledání tvaru, izometrický pohled

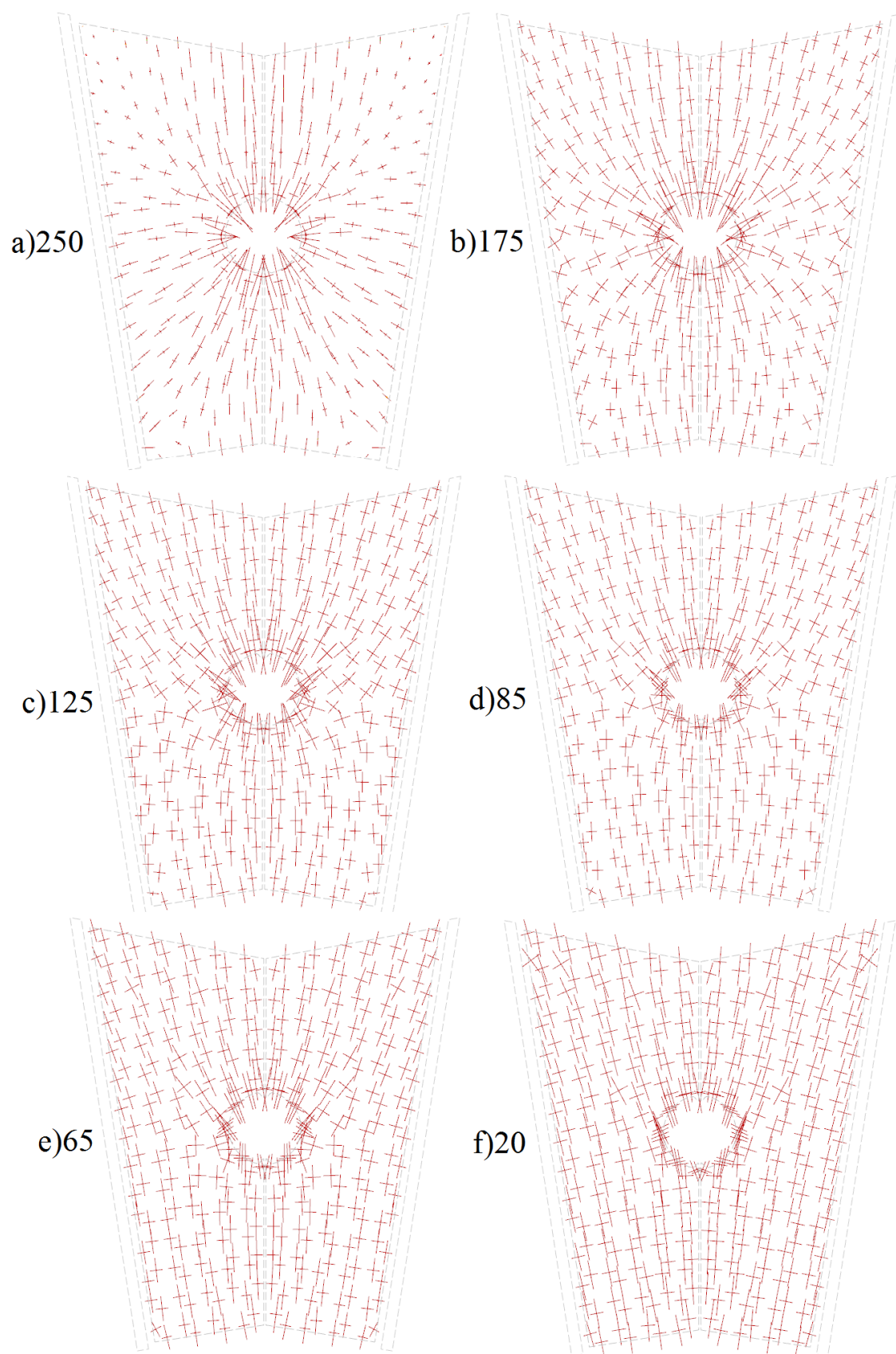
Na uvedených obrázcích (Obrázek 47 – 49) můžeme vidět, že v tomto případě ani při vysoké hodnotě zatížení smrštěním nedojde k degradaci plochy, jak tomu bylo v případě vysokého kuželového (trychtýřového) tvaru. Dokonce již při smrštění na Obrázku 49d) $\varepsilon = -0,15$ je tvar velice podobný tvaru f) na stejném obrázku. Vzhledem k příznivým sklonům, dochází k dobrému odvodnění ve všech případech. Rovněž lze předpokládat dobrou tuhost při zatížení sněhem nebo větrem.

Dále budou popsány hlavní napětí při všech tvarech deformace.



Obrázek 50: Vektorové zobrazení hlavních napětí (ve společném měřítku)

Aby byly patrné rozdíly v poměrech hlavních napětí σ_1 a σ_2 a také rozdíly v jejich orientacích, jsou na Obrázku 51 měřítka přizpůsobena.



Obrázek 51: Vektory hlavních napětí (číslo za závorkou je násobek původní velikosti trajektorií)

Z uvedeného Obrázku 51 je patrné, že při nulovém předpětí jsou síly v důsledku vnucené deformace silně orientované. Při následné aplikaci předpětí dochází ke zmenšování rozdílů mezi napětím σ_1 a σ_2 . Při velkých hodnotách předpětí vliv vnucené deformace slábne a pole napětí se postupně blíží poli izotropnímu. Povrch membrány se při větším předpětí zmenšuje.

Výše byl popsán způsob hledání tvaru membránové konstrukce. Šlo o simulaci form-finderů, jejichž cílem je najít ideální tvar. Aby bylo možné použít zdeformovanou geometrii jakožto vstupní ideální tvar pro další část této práce (aplikovat skutečné předpětí, zatížení sněhem, zatížení větrem), bylo nezbytné převzít pouze konečněprvkovou síť a odstranit veškeré napětí. K tomuto účelu byl vedoucím této diplomové práce vyvinut speciální modul, jenž umožnil převzít z programu RFEM pouze geometrii konečněprvkové sítě.

V případě geometrie „základního elementu plochy“ při aplikaci značného smrštění tedy nedošlo k degradaci jeho tvaru. Předpoklady teorie minimální plochy zde lze použít. Předpětí aplikované na konečněprvkovou síť deformované membrány vytváří pole napětí, které se blíží poli izotropnímu. V tomto případě je vytvořený tvar vhodný a optimální i z inženýrského hlediska. Proto tvar takto zdeformované geometrie konečněprvkové sítě bude použit pro globální model konstrukce zastřešení stadionu.

6.5 Materiály a konstrukční detaily

V této kapitole budou popsány některé v současnosti používané materiály pro realizaci membránových konstrukcí. Budou zde uvedeny také konstrukční detaily, s nimiž se u takovýchto staveb můžeme setkat.

6.5.1 Membránové materiály

Membrány se uplatňují zejména tam, kde jsou požadovány velké rozpony. Díky nízké hmotnosti (175-3000kg/m²) mají nižší nároky na podpůrné konstrukce a tím i na jejich cenu. Jejich pevnost (před přetržením) je přitom velmi vysoká – až 20kN/5cm, tzn. že na jeden metr široký proužek tohoto materiálu by bylo možno zavěsit závaží o hmotnosti 40 tun. Je proto zřejmé, že použití membránového materiálu pouze jako krycí vrstvy je při dnešních technologických možnostech zcela zbytečné.

I přes tuto pevnost se jedná o velmi světlopropustné až průhledné materiály. V současné době se používají tkané textilie, nebo netkané (fóliové) materiály. Tkaniny mohou mít povrchovou úpravu.

Tkaniny mají většinou jinou pevnost v osnově a útku, avšak u některých výrobců (např. Ferarri) ji mohou mít v obou směrech i shodnou. [V]

Tabulka 2: Membránové materiály a některé jejich vlastnosti [VI]

	materiál	plošná hmotnost (g/m ²)	pevnost v tahu (N/5cm)	průsvitnost
bez povrchové úpravy	bavlněné tkaniny	350 - 520	1700/1000 – 2500/2000	různá - dle barvy
	tkaniny z PTFE	300 – 700	2390/2210 – 4470/4510	až 37%
s povrchovou úpravou	PES/PVC typ I	800	3000/3000	do 20%
	typ II	900	4400/3950	do 17,5%
	typ III	1050	5750/5100	do 15%
	typ IV	1300	7450/6400	do 12,5%
	typ V	1450	9800/8300	do 10%
	typ VI	2000	13000/13000	do 7,5%
	skelná vlákna/PTFE	800-1550	3500/3500 – 7500/6500	8-15%
	skelná vlákna/silikon	800-1270	3500/3000 – 6600/6000	až 25%



Obrázek 52: Příklad složení tkané membrány se zátěrem a lakem (Valmex, HAKU Mehler) [V]



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE
FAKULTA STAVEBNÍ
Experimentální centrum

166 29 Praha 6, Tháková 7

tel. 224353843, fax. 224353843

ZÁZNAM O ZKOUŠCE

Zkoušky lepeného spoje plachtoviny

Datum zkoušky: 27.10.2005

Zkušební zařízení: Zkušební stroj FP 100 Teplota: 19°C

Zkoušku provedl: Ing. Jiří Litoš, Ing. Karel Hořejší

Popis konstrukce: Dodané vzorky: šířka - 100 mm, délka - 375 mm

č. vzorku	Max. síla [kN]	Deformace (protažení) [mm]	Poznámka
1.1	9.00	38	
1.2	9.00	38	
1.3	9.10	37	
1.4	9.05	37	
2.1	8.35	39	
2.2	10.90	49	
2.3	10.50	47	
3.1	10.70	41	šířka 10.5
3.2	12.10	51	šířka 10.5
3.3	12.00	50	šířka 10.5
3.4	10.70	45	šířka 10.5
3.5	11.75	47	šířka 10.5
3.6	11.10	44	šířka 10.5

Obrázek 53: Záznam tahové zkoušky lepeného spoje plachtoviny, provedené experimentálním centrem na ČVUT

6.5.2 Materiály lan

V současné době existují lana ocelová i lana syntetická. Mezi hlavní výhody syntetických lan, v porovnání s lany ocelovými, patří vysoký poměr pevnosti k vlastní tíze, lepší únavové a tlumící vlastnosti a vlastnosti nerezavějící oceli. Jejich nevýhodou je však nižší modul pružnosti a vysoké reologické vlivy dotvarování, respektive relaxace. Z tohoto důvodu jsou pro konstrukce podobných rozměrů dosud používána převážně lana ocelová [VIII].

1. Základní charakteristiky ocelových drátů pro výrobu lan

Lana používaná pro konstrukční účely jsou vyráběna z tahaných patentovaných drátů. Tažené dráty jsou vyráběny z válcovaných tyčí z vysoce pevné nelegované uhlíkové oceli, zušlechtnuté patentováním. Patentování je způsob izotermického kalení, při kterém jsou válcované tyče zahřívány do austenitového (austenit – pevný roztok uhlíku v železe) stavu při teplotě cca 900°C a dále rychle ochlazeny na teplotu cca 500°C v olověné koupeli. Tím je dosahováno velice jemné sorbitické struktury oceli, jenž je vhodná k tahu. Taháním dochází k redukci průřezu a to v několika stupních (např. v sedmi stupních z 6mm na průměr 2mm). S rostoucí redukcí průřezu se zvyšuje pevnost drátů, zatímco tažnost klesá. V Evropě standardizované nominální pevnosti ocelových drátů jsou 1 370, 1 570, 1 770, 1 860, 2 160 a 2 450 N/mm² (z toho poslední dvě hodnoty jsou uváděny pro menší průměr drátů). Modul pružnosti ocelových drátů se udává v rozpětí od 190 000 do 200 000 N/mm².

Převážná část lan je vyráběna z drátů kruhového průřezu. Pro některé typy lan se však vyrábějí dráty tvarované, jako jsou Z-dráty pro uzavřená lana, nebo H-dráty pro polouzavřená lana.

2. Konstrukce drátěných lan

Ve stavebnictví jsou užívána lana vinutá, vyráběna slaňováním drátů do pramenů a pramenů do lan. Paralelním uspořádáním získáme lana skládaná.

Rozlišujeme vinutá jednopramenná lana otevřená, polouzavřená a uzavřená konstrukce, lana vícepramenná s drátěnou, syntetickou nebo organickou duší. V současnosti jsou v souladu s platnou ČSN EN 1993-1-11 zaváděny tyto termíny a definice:

- *pramen (angl. strand)* – prvek lana složený z drátů daného tvaru a rozměrů, uložených šroubovitě kolem středu v jedné nebo v několika vrstvách ve stejném nebo opačném směru
- *pramenné lano (strand rope)* je spojením několika pramenů uložených šroubovitě v jedné nebo v několika vrstvách kolem duše
- *spirálové lano (spiral rope)* – vznikne spojením minimálně dvou vrstev drátů uložených šroubovitě kolem středového drátu

- *spirálové pramenné lano (spiral strand rope)* – spirálové lano, jenž obsahuje jen kruhové dráty
- *plně uzavřené spirálové lano (fully locked coil rope)* – představuje spirálové lano, jehož vnější vrstva je z plně uzavřených drátů ve tvaru Z.

Charakteristiky konstrukce jednotlivých typů vinutých lan, doporučení velikostí jejich průměrů a informace o počtech drátů v pramenech jsou uvedeny v tab. 3 [2].

Tabulka 3: Typy drátěných lan, modul pružnosti drátěných lan

Typy drátěných lan				
Spirálové pramenné lano				
				
konstrukce	1 × 19	1 × 37	1 × 61	1 × 91
průměr d_s (mm)	od 3 do 14	od 6 do 36	od 20 do 40	od 30 do 52
pramen	1	1	1	1
počet drátů v prameni	19	37	61	91
počet vnějších drátů v prameni	12	18	24	30
Plně uzavřené spirálové lano				
				
konstrukce	1 vrstva Z-drátů	2 vrstvy Z-drátů	≥ 3 vrstvy Z-drátů	
průměr d_s (mm)	od 20 do 40	od 25 do 50	od 40 do 180	
tolerance pro d_s	+5 %	+5 %	+5 %	
Pramenné lano				
				
konstrukce	6 × 19 – CF	6 × 19 – CWS	6 × 36WS – CF	6 × 36WS – CWR
průměr d_s [mm]	od 6 do 40	od 6 do 40	od 6 do 40	od 6 do 40
pramen	6	6	6	6
počet drátů v prameni	18	18	36	36
počet vnějších drátů v prameni	12	12	14	14

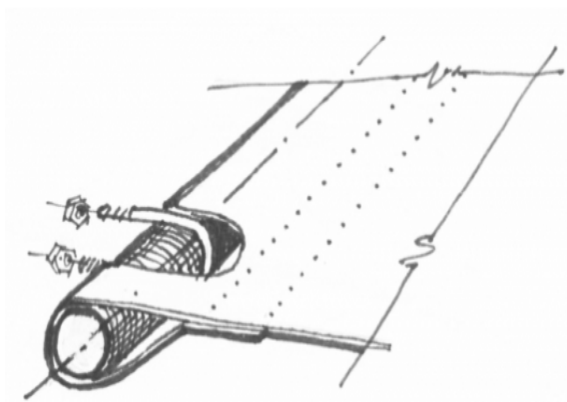
Modul pružnosti drátěných lan

P. č.	Vysoce pevný tahaný prvek	$E \cdot 10^3$ (N/mm ²)	
		Ocelové dráty	Dráty z nerezové oceli
1.	spirálová pramenná lana	150 ± 10	130 ± 10
2.	plně uzavřená spirálová lana	160 ± 10	–
3.	pramenná drátěná lana s CWR	100 ± 10	90 ± 10
4.	pramenná drátěná lana s CF	80 ± 10	–
5.	svazek rovnoběžných drátů	205 ± 5	–
6.	svazek rovnoběžných pramenů	195 ± 5	–

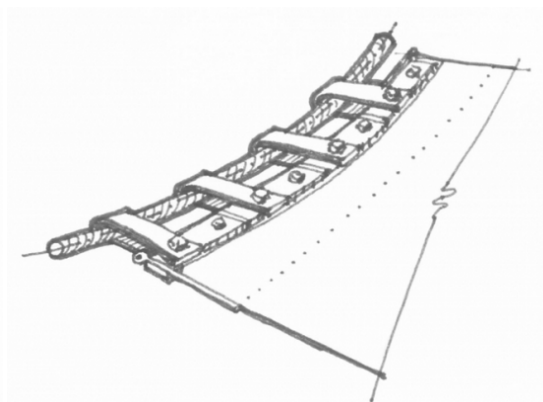
6.5.3 Konstrukční detaily

Nyní budou uvedeny některé konstrukční detaily, se kterými se můžeme u podobných konstrukcí setkávat [VII].

Na Obrázku 54 můžeme vidět kapsu s lanem. Tento systém je používán, nejsou-li síly v membráně příliš velké. V opačném případě je používán svorkový systém (viz Obrázek 55). Dále můžeme na Obrázku 54 pozorovat systém aplikace kolmých sil na nosné lano.

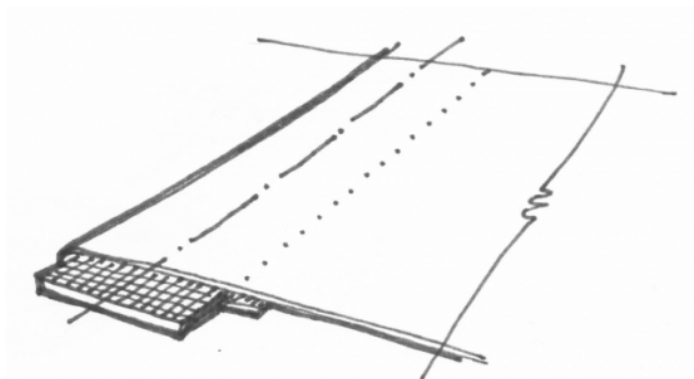


Obrázek 54: Kapsa s lanem



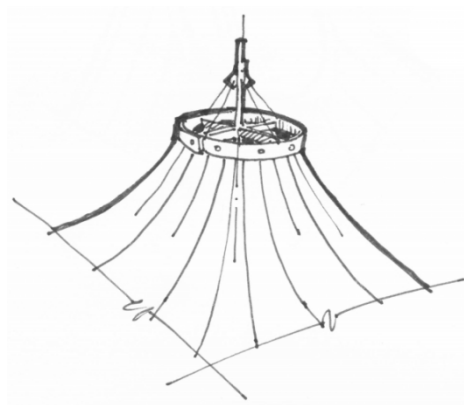
Obrázek 55: Svorkový systém

Pás je vhodné použít jak pro samotné předeptnutí membrány, tak jako jistou formu poddajné okrajové podmínky v místech, kde požadujeme omezení deformací. Tento pás může být vkládán do zvolených míst konstrukce zcela bez újmy na její estetické hodnotě a při následném zatížení bude zaručovat větší tuhost celé membrány.



Obrázek 56: Pás

Ocelový prstenec je jednou z možných variant řešení vrcholových částí membrány. Dalším způsobem může být použití vějíře lan. Obě varianty musí být zakryty, aby byla zaručena vodotěsnost konstrukce.



Obrázek 57: Ocelový prstenec

Na Obrázku 58 je možno vidět dvě varianty uložení nosného sloupu: a) sloup vetknutý do základů, b) kloubově uložený sloup (dvojose). Můžeme se setkat také s jednoosým kloubovým uložením.



Obrázek 58: Nosný sloup, kotvení lan

Na Obrázku 58 můžeme dále vidět velice výhodný způsob kotvení nosných lan. Jedná se o samokotvený systém, který přináší výraznou úsporu finančních prostředků. Lana navíc nejsou umístěna daleko od konstrukce a tím dochází k lepším dispozičním proporcím celé stavby. Část, nebo celá tahová síla, je pak redukována tíhou konstrukce a na zbývající účinky lze navrhnout adekvátní založení.

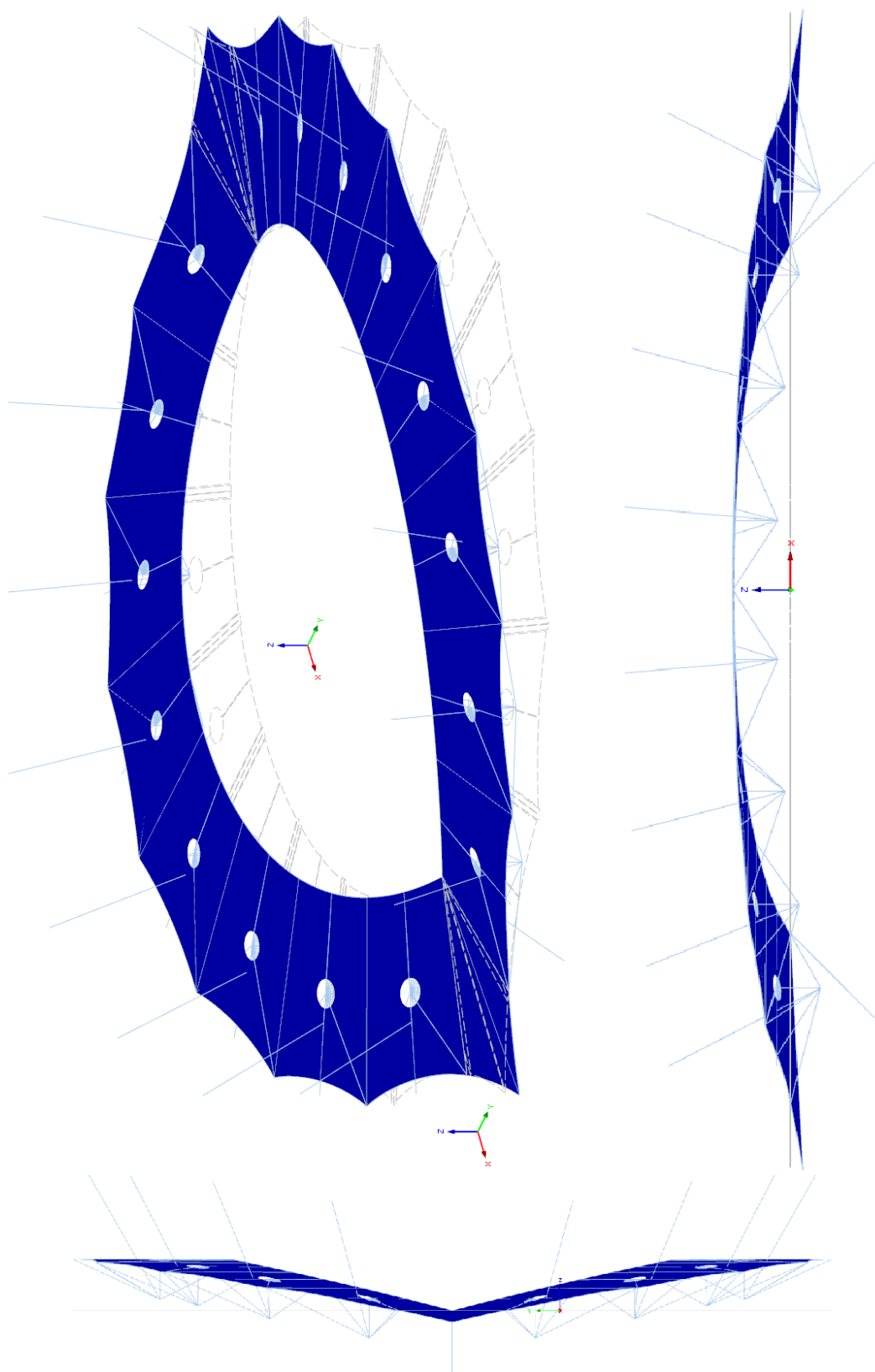
7 VÝPOČET MEMBRÁNOVÉ KONSTRUKCE ZASTŘEŠENÍ STADIONU

Díky poznatkům, získaným dřívější analýzou jednotlivých konstrukčních prvků a v souladu s navrženou dispozicí a statickým systémem, byl vytvořen globální model konstrukce zastřešení stadionu. Dále bude popsána jak jeho tvorba, tak i následné zatěžování.

7.1 Vytvoření globálního modelu zastřešení stadionu

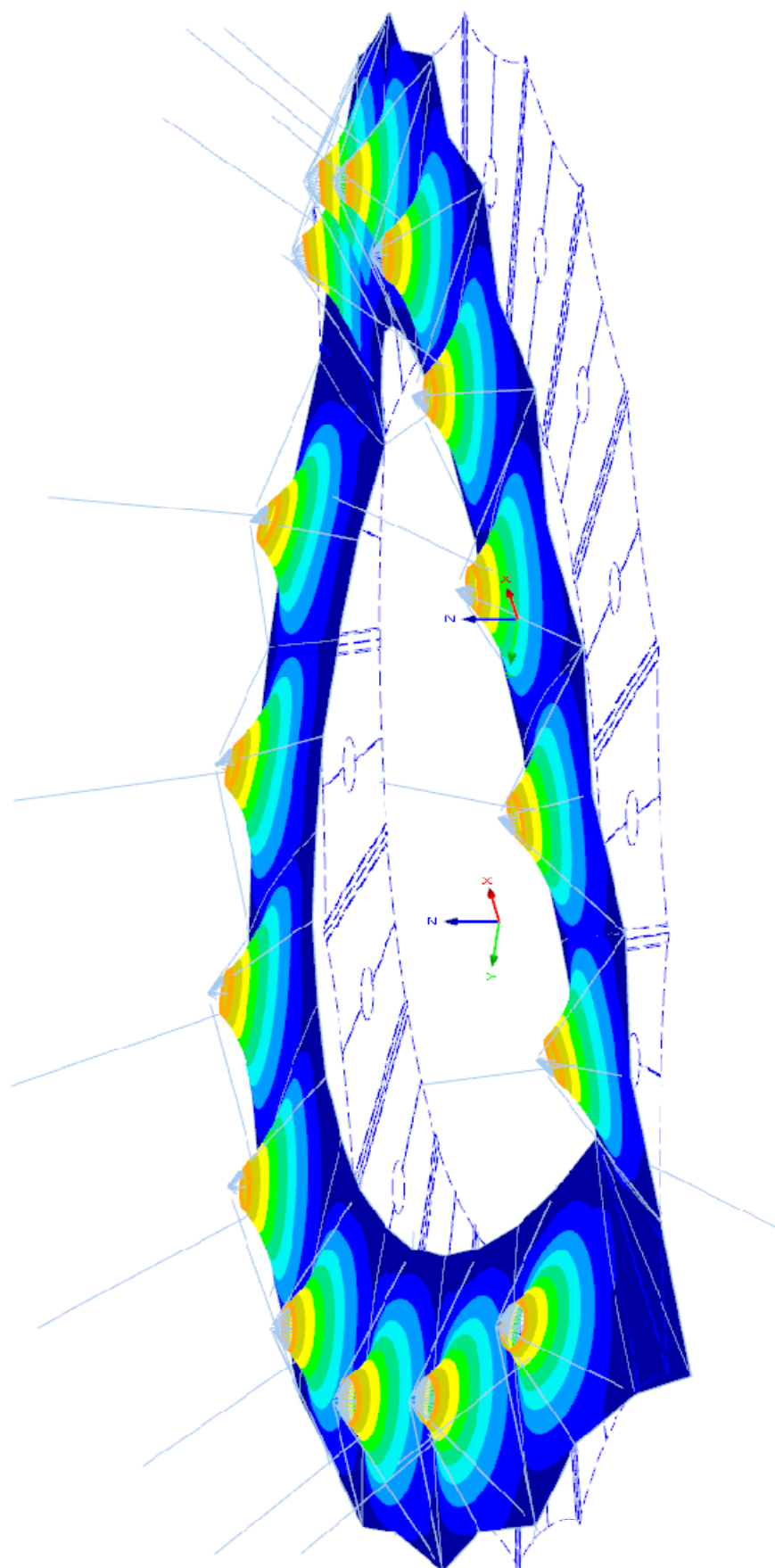
Konečněprvková síť, kterou můžeme vidět na Obrázku 62, byla vytvořena následujícím způsobem:

Geometrie globálního modelu byla vytvořena tak, že v počátečním stavu ležely veškeré plochy v rovině x-y a příčný řez A-A byl vymodelován pod touto rovinou (dle Obrázku 46). Postupně vnucenými deformacemi bylo dosaženo parabolického tvaru plochy a tím vzniklo potřebné zakřivení pro centrální nosný systém – viz Obrázek 59. Vzpěra a lanový systém řezu A-A je doposud v poloze pod plochou. Tato parabolická plocha (jedná se o poměrně plochou parabolu, jejíž vliv na podobu ideálního tvaru „*základního elementu plochy*“ je minimální) byla použita pro následný „Form-finding“.

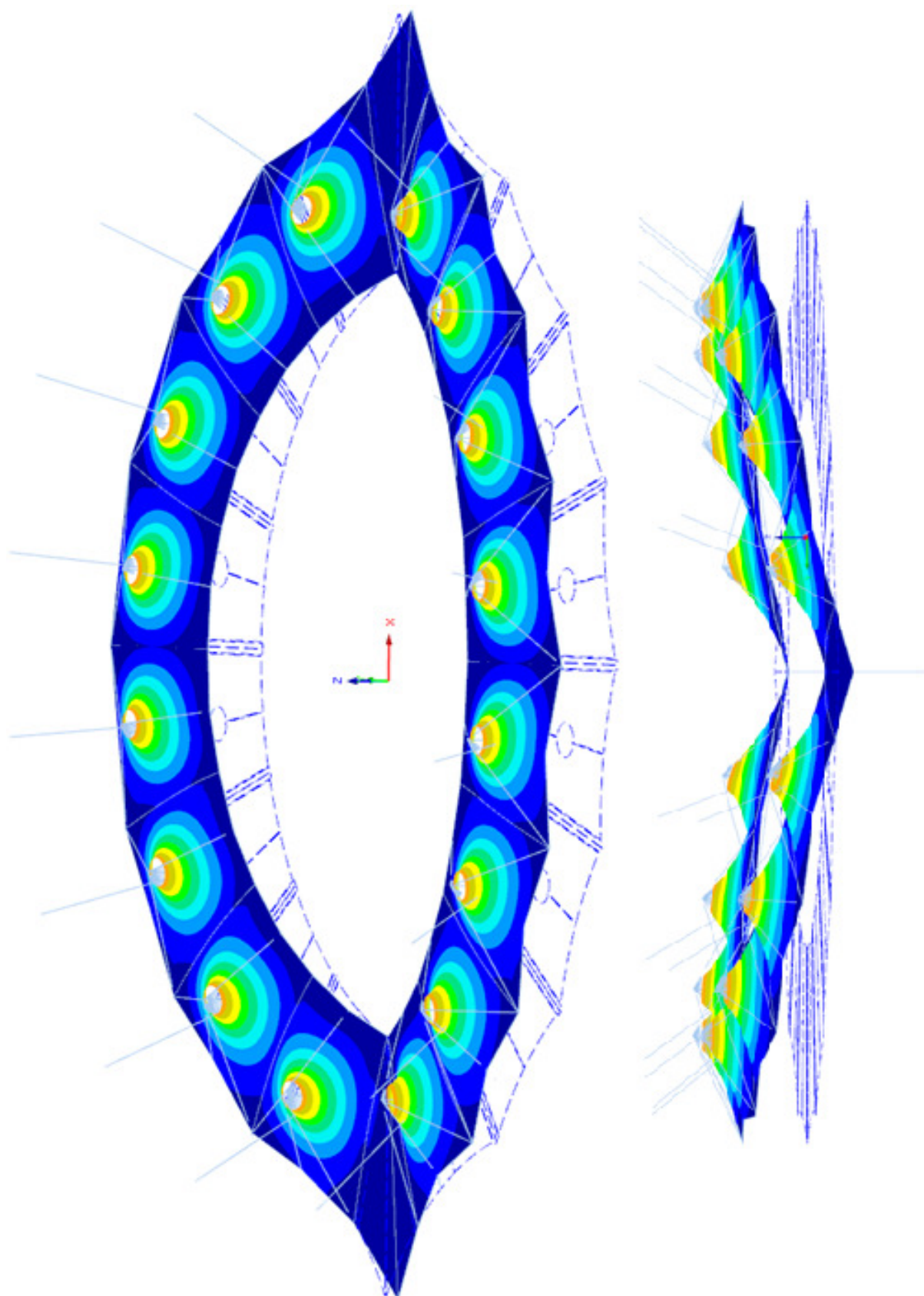


Obrázek 59: Parabolická plocha (vytvořená z plochy v rovině $x-y$)

Vnucenými deformacemi příčných řezů A-A a použitím předpětí bylo dosaženo tvaru, jenž odpovídal tvaru dříve analyzovaného „základního elementu plochy“.

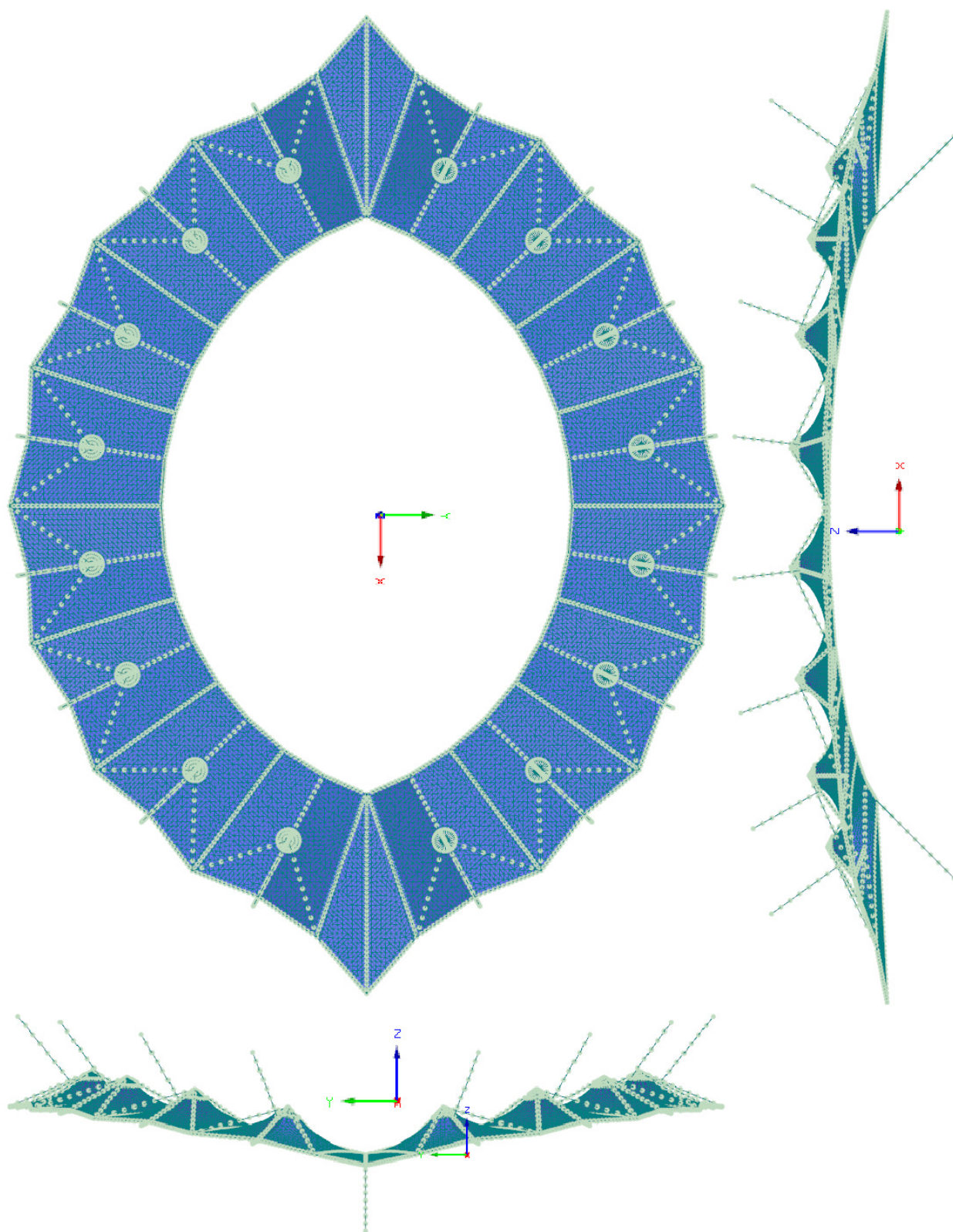


Obrázek 60: Form-finding na lanové konstrukci



Obrázek 61: Form-finding na lanové konstrukci

Výsledný tvar konečněprvkové sítě byl oproštěn od napětí a použit pro statickou analýzu konstrukce, která byla cílem této práce. Konečněprvkovou síť můžeme vidět na následujícím Obrázku 62.



Obrázek 62: Konečněprvková síť: půdorys (rovina x-y), pohled (roviny y-z, x-z)

- **Statistika sítě:**

- Počet 2D prvků: 27440 (trojúhelníkové prvky sítě)
- Počet 1D prvků: 4646
- Počet uzlů: 16362

- **Lanový systém:**

- Materiál – předpínací lano (St1660/1860): $E=195\text{GPa}$, $G=75\text{GPa}$, $\nu=0.300$, $\rho=7850\text{kg/m}^3$, materiál je izotropní lineárně elastický
- Předpětí: lana byla předeprnuta na úroveň napětí $\sigma=1200\text{MPa}$
- Průřezy:
 - Vnitřní centrální předpínací lano (obrázek 46d) $d=342\text{ mm}$
 - Vnější centrální předpínací lano (obrázek 46e), $d=220\text{ mm}$
 - Řez A-A (Obrázek 34): lano č. 5 $d=145.4\text{ mm}$; lano č. 6 $d=62\text{ mm}$; lano č. 1 $d=128\text{ mm}$; lano č. 2 $d=91.6\text{ mm}$, lano č. 4 $d=136\text{ mm}$
 - Stabilizační lana (Obrázek 46): spodní lano $d=63\text{ mm}$, horní lano $d=73.2\text{ mm}$
 - Vějíř lan (Obrázek 46) $d=31\text{ mm}$
 - Kotvicí lano v bodě g (Obrázek 33) $d=209.6\text{ mm}$

- **Membrána:**

- Jak bylo uvedeno v kapitole „6.5 Materiály a konstrukční detaily“, jsou dnes dostupné plachtoviny o pevnostech až 20kN/5cm (tzn. 400kN/m).
- Materiál: $E=2000\text{MPa}$, $G=833\text{MPa}$, $\nu=0.200$, $\rho=1500\text{kg/m}^3$, materiál Izotropní lineárně elastický. Z možných typů membrán byla zvolena taková, která vykazuje stejné (či zanedbatelně rozdílné) vlastnosti v obou směrech.
- Tloušťka membrány byla zvolena $1,2\text{mm}$ (obvyklou tloušťkou je $0,6-1,2\text{mm}$). K přetržení zvolené plachtoviny je potřeba dosáhnout napětí 333MPa .

Vzhledem ke skutečnosti, že informace o navrhování a posuzování membrán (jakožto i o jejich materiálech) nejsou příliš rozšířené, spojil jsem se s firmou Archtex s.r.o. Jeden z jejich statiků odpovídal na moje dotazy ohledně navrhování membránových konstrukcí následovně:

- „Dobrý den,

normy bohužel nejsou, plachtu navrhujeme podle dosaženého napětí a podle pevností a charakteristik od výrobce, případně experimentů. Průhyby jsou také vždy individuální záležitost, jde o provozní tolerance a o vzhled. V případě

velkého průhybu v desítkách cm je již nutné uvažovat "rybníkový efekt" - tj. přitížení např. v případě tání sněhu apod..."

- „Dobrý den,

běžně se tloušťka membrány pohybuje od 0,8 do 1,2 mm. Pracovní diagram materiálu plachty je samozřejmě nelineární, ale pro výpočet stačí uvažovat geometrické nelinearity. Modul pružnosti membrány se pohybuje okolo 1000MPa. Měl byste se v napjatosti pohybovat tam, kde je ještě uvažování lineárně elastického chování relativně bezpečné (např. max. na 1/2 max. protažení)."

7.2 Analýza účinků jednotlivých kombinací zatížení

Při nelineární analýze byly užívány fáze (postupné zatěžování). Ty zohledňovali postup výstavby (napínání lanového systému, napínání membrány) a následné zatěžování (na již geometricky tuhou konstrukci). Přehled fází:

1. Napínání lanového systému + vlastní tíha
2. Napínání membrány + vlastní tíha
3. Zatížení sněhem (větreem)

Pro lepší přehlednost budou výsledky statické analýzy lanového systému prezentovány na jedné čtvrtině symetrického globálního modelu (jenž lze rozdělit na čtyři symetrické části dle osy x a y). Výsledky z analyzované membrány budou prezentovány na jednom „základním elementu plochy“ (*membrána je nyní vynášena složitým lanovým systémem*).

7.2.1 Mezní stav únosnosti:

Návrhové hodnoty zatížení:

$$(6.10): \sum_{j \geq 1} \gamma_{Gj} G_{kj} + \gamma_P P_k + \gamma_{Q1} Q_{k1} + \sum_{j > 1} \gamma_{Qi} \psi_{0i} Q_{ki} \quad (7.1)$$

$$(6.10a): \sum_{j \geq 1} \gamma_{Gj} G_{kj} + \gamma_P P_k + \sum_{j \geq 1} \gamma_{Qi} \psi_{0i} Q_{ki} \quad (7.2)$$

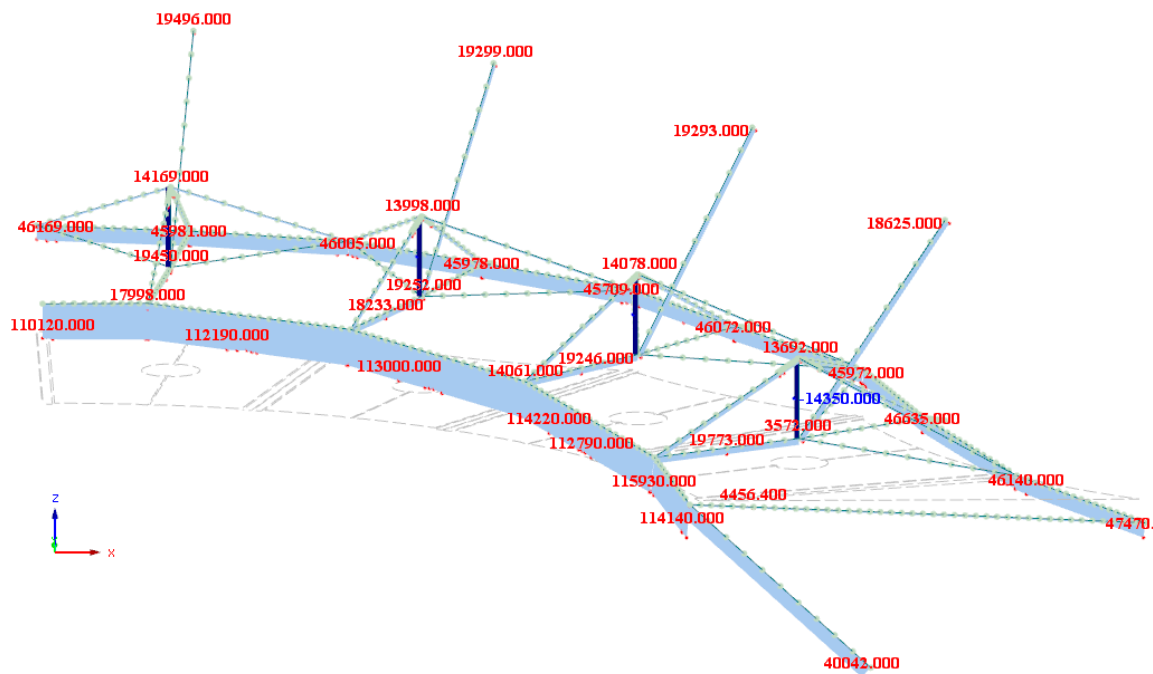
$$(6.10b): \sum_{j \geq 1} \xi_j \gamma_{Gj} G_{kj} + \gamma_P P_k + \gamma_{Q1} Q_{k1} + \sum_{j > 1} \gamma_{Qi} \psi_{0i} Q_{ki} \quad (7.3)$$

Pro účely této diplomové práce byla pro stanovení návrhové hodnoty zatížení použita rovnice (6.10)

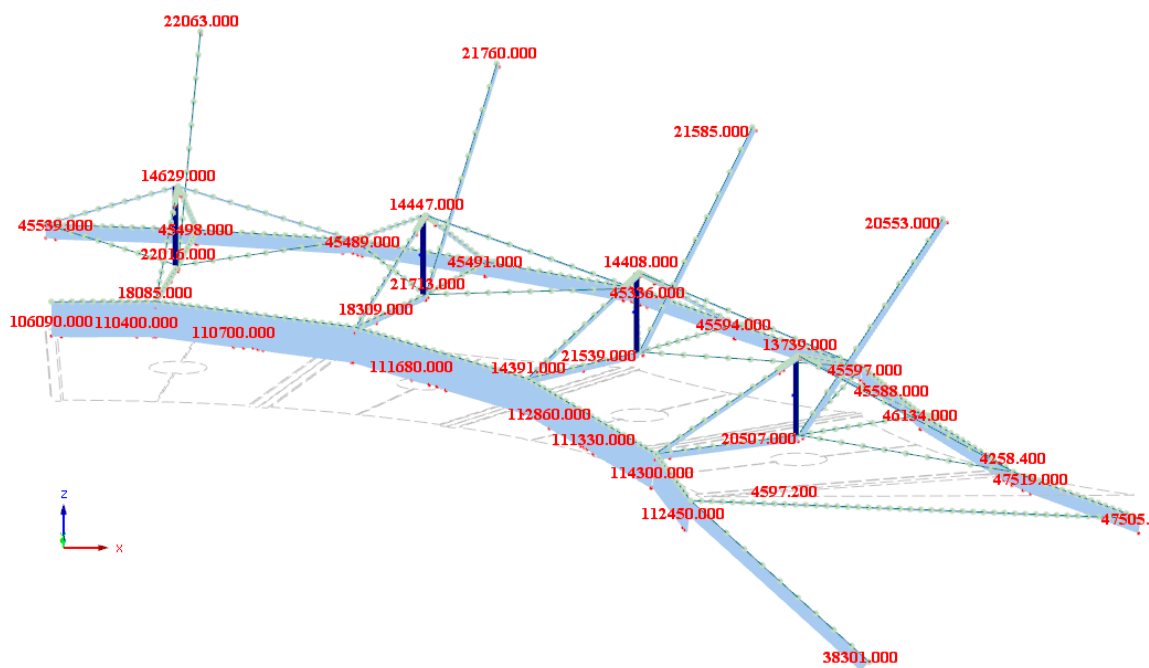
1. Lanový systém

Dále budou uvedeny hodnoty tahových a tlakových sil N_{Ed} v jednotlivých lanech a sloupcích nosného systému (Obrázek 63 – 65). Zatížení je uvažováno dle fází

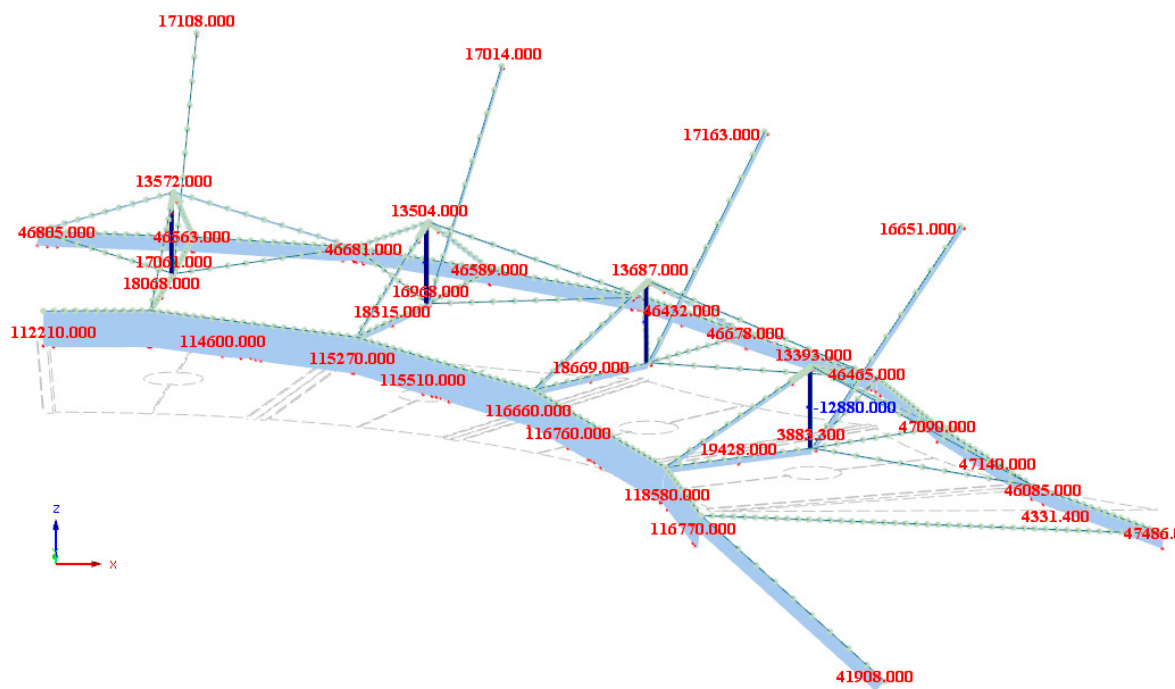
(uvedených výše): předpětí (lanového systému i membrány) a vlastní tíha, zatížení sněhem a větrem aplikováno na membránu (jež skrze tuto membránu zatěžuje lanový systém).



Obrázek 63: N_{Ed} [kN] při zatížení stálými složkami zatížení (vlastní tíha, předpětí)



Obrázek 64: N_{Ed} [kN] dle kombinace 6.10 (vl.tíha, předpětí, sníh-na celou plochu membrány)



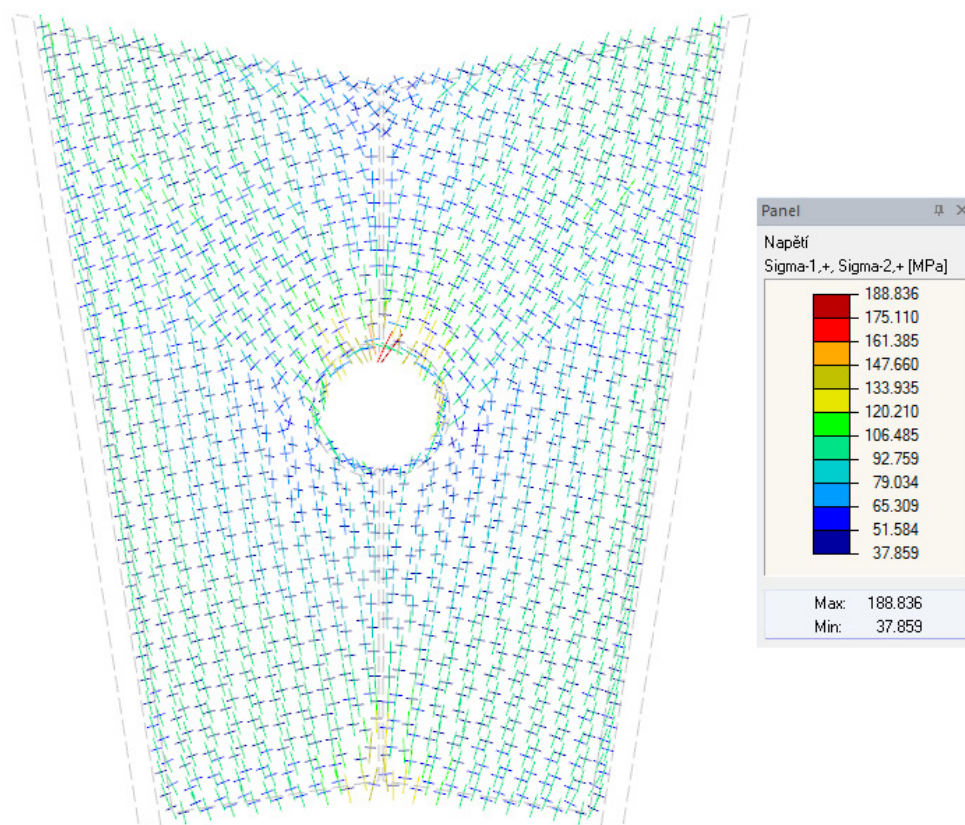
Obrázek 65: N_{Ed} [kN] dle kombinace 6.10 (vl.tíha, předpětí, vítr-na celou plochu membrány)

Zatížení sněhem a větrem pouze na části střechy nevyvodilo rozhodující hodnoty N_{Ed} , proto nebyly výsledky uvedeny.

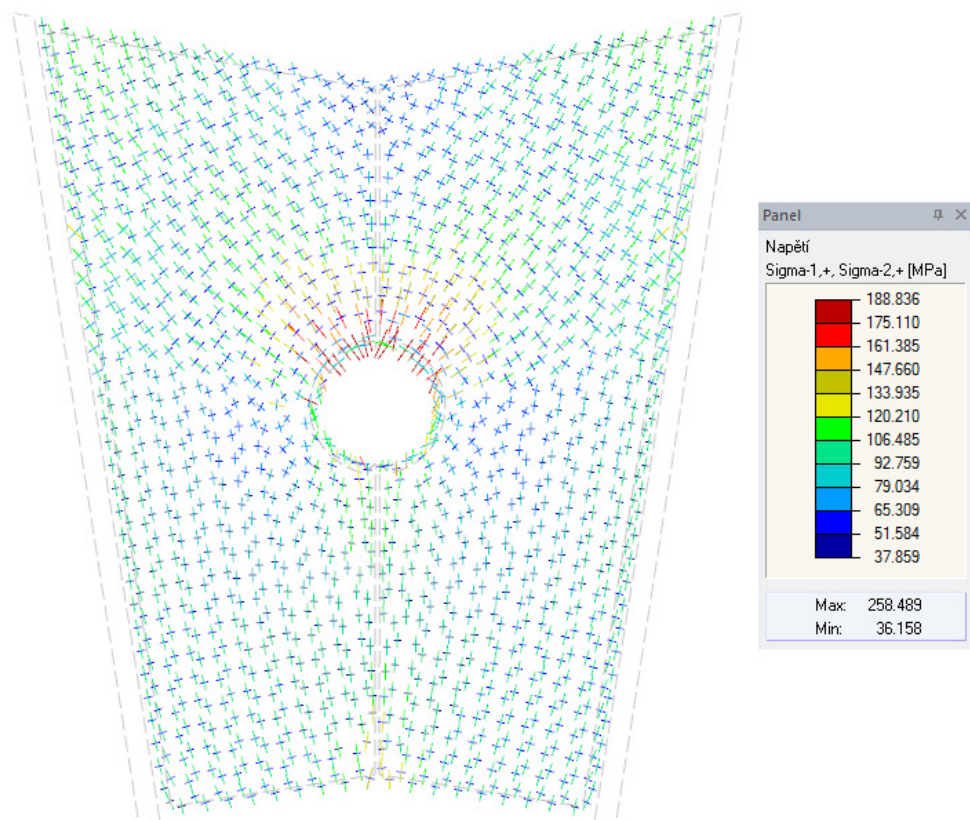
Na srovnání Obrázků 63 – 65 je možno vidět, že při návrhové kombinaci zatížení 6.10, která v sobě obsahovala zatížení sněhem, došlo ke snížení N_{Ed} ve vnitřním a vnějším centrálním přepínacím laně. Zatímco v laně, které vynášejí lanový systém na sloup vně konstrukce, síla N_{Ed} vzrostla. U návrhové kombinace zatížení 6.10, která v sobě obsahuje zatížení větrem je tomu právě naopak. Lanová soustava tak funguje dle předpokladů uvedených v předchozích částech této práce, především v části „6.3 Návrh statického systému“ a na Obrázcích 33 – 34. Konstrukce vykazuje výbornou schopnost zachovávání tvarové stálosti.

2. Membrána

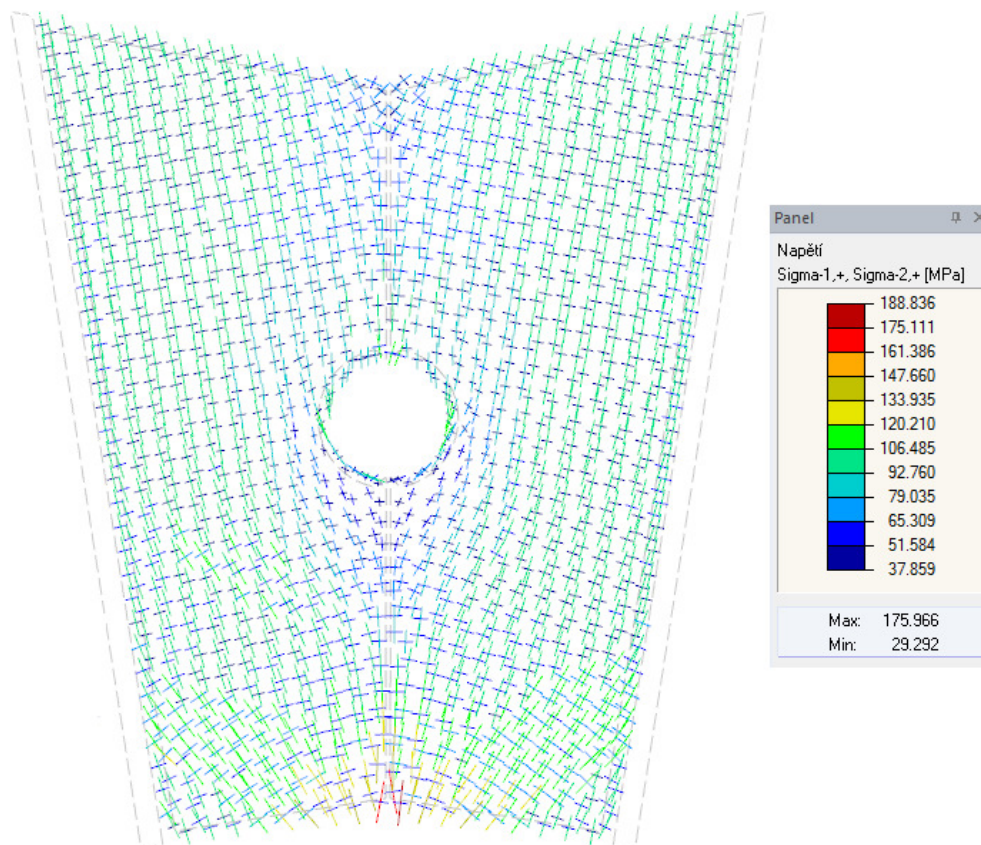
Dále budou představeny hodnoty σ_{Ed} , tj. napětí v ploše membrány. Složky zatížení byly uvažovány dle kombinace 6.10, stejně jako při zatěžování lanového systému. Tj. předpětí (lan i membrány) a vlastní tíha, zatížení membrány sněhem a větrem.



Obrázek 66: σ_{Ed} při zatížení stálými složkami zatížení (vlastní tíha, předpětí)



Obrázek 67: σ_{Ed} dle kombinace 6.10 (vl.tíha, předpětí, sníh-na celou plochu membrány)



Obrázek 68: σ_{Ed} dle kombinace 6.10 (vl.tíha, předpětí, vítr-na celou plochu membrány)

Na výsledcích (uvedených na Obrázku 66 – 68) lze vidět, že pole napětí je ve všech případech poměrně rovnoměrné. To znamená, že vliv předpětí je dominantní. Při uvažování účinků sněhu a větru dochází k částečným změnám pole napětí, tyto změny však nejsou velké.

7.2.2 Mezní stav použitelnosti

Charakteristické hodnoty zatížení:

$$\sum_{j \geq 1} G_{kj} + P_k + Q_{k1} + \sum_{j > 1} \psi_{0i} Q_{ki} \quad (7.4)$$

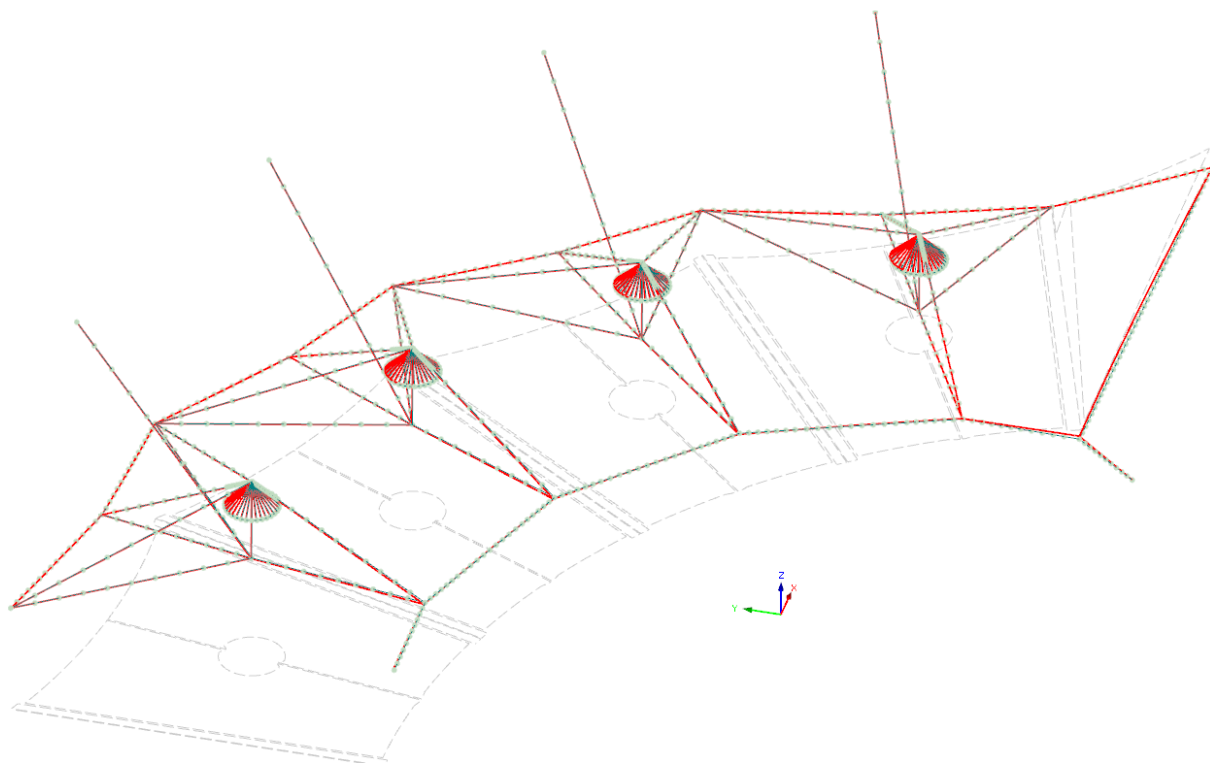
Časté hodnoty zatížení:

$$\sum_{j \geq 1} G_{kj} + P_k + \psi_{11} Q_{k1} + \sum_{j > 1} \psi_{2i} Q_{ki} \quad (7.5)$$

Kvazistálé hodnoty zatížení:

$$\sum_{j \geq 1} G_{kj} + P_k + \sum_{j \geq 1} \psi_{2i} Q_{ki} \quad (7.6)$$

1. Deformace lanového systému

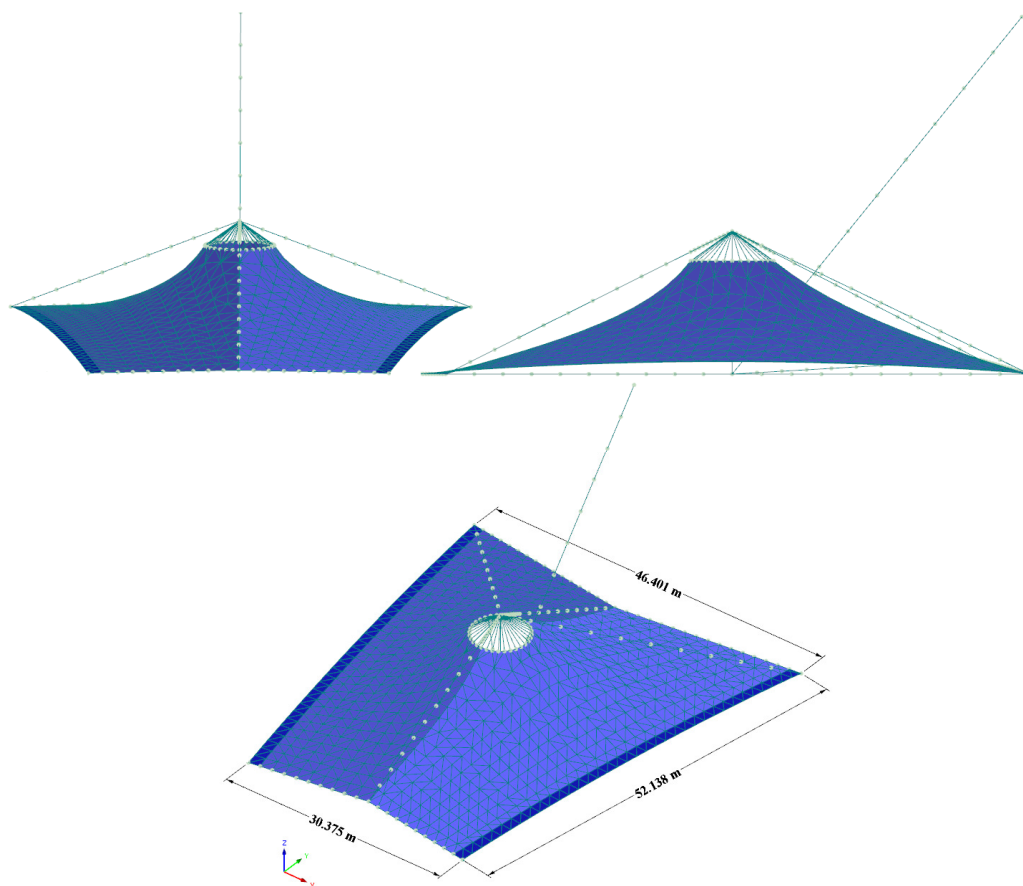


Obrázek 69: Globální deformace lanového systému (šedé tečky jsou uzly sítě, červená barva vyznačuje deformovanou polohu, čárkovaně je znázorněn průmět plochy membrány do roviny x - y)

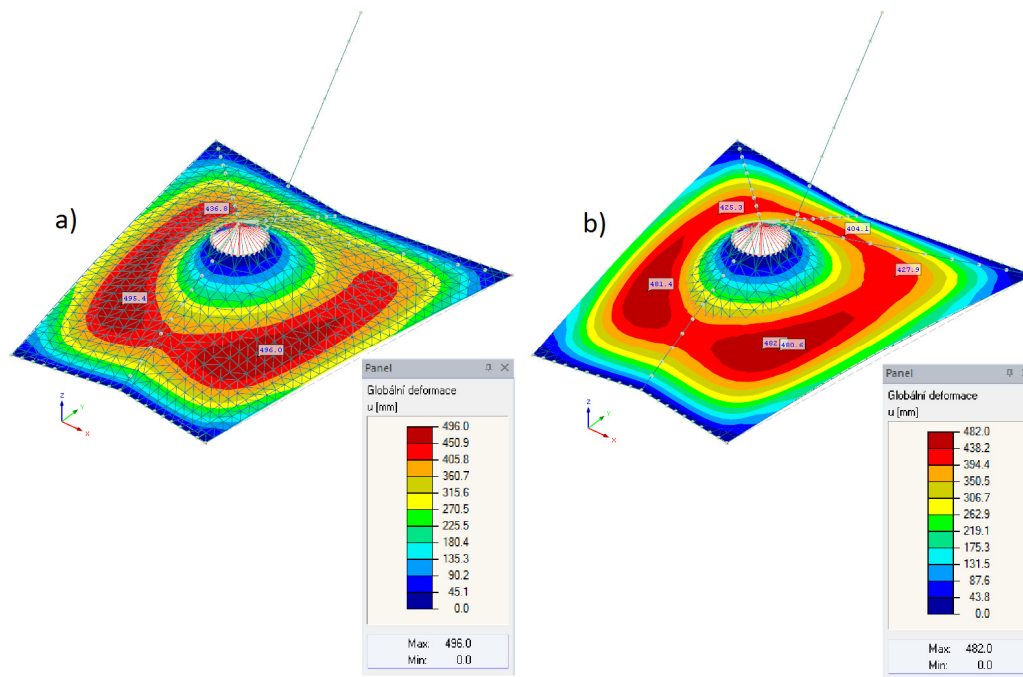
Deformace jsou uvažovány od charakteristické kombinace zatížení. Z výsledků uvedených na Obrázku 69 je patrné, že deformace lanového systému (při zatížení sněhem, či větrem) je proti počáteční rovnovážné poloze (předepnutá soustava), v porovnání s velikostí konstrukce, malá. Deformace při plném zatížení větrem (sněhem) se u vnitřního centrálního přepínacího lana pohybuje kolem hodnoty 200 mm (-200 mm). Deformace u vnějšího centrálního předpínacího lana jsou (vzhledem k poměrně krátkým vzdálenostem mezi podporami d) menší.

Z posuzování konstrukcí dle mezních stavů je zřejmé, že při návrhu nosného lanového systému nebude rozhodovat tahová únosnost, ale kritérium přiměřených deformací (tvarová stálost).

2. Deformace membrány



Obrázek 70: Základní element plochy vynášený lanovou konstrukcí globálního modelu



Obrázek 71: a) Deformace membrány od charakteristické kombinace zatížení (sníh), b) Deformace membrány od charakteristické kombinace zatížení (vítr)

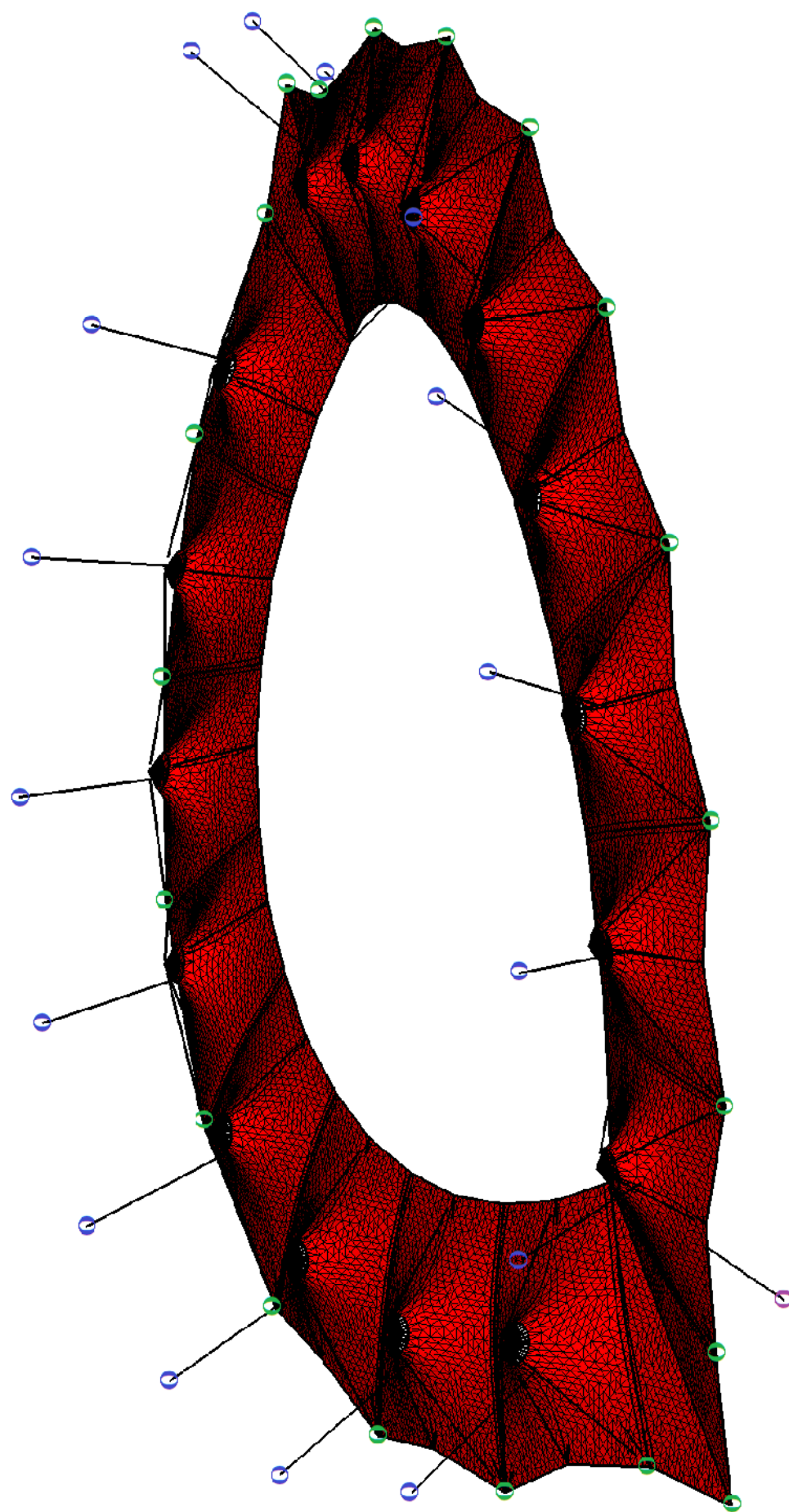
8 POHLEDY

Předmětem této kapitoly je grafické doplnění práce. Budou uvedeny některé pohledy na membránovou konstrukci zastřešení stadionu. Z těchto pohledů bude ještě více patrné jaký tvar má uvedené zastřešení a také to, kde je konstrukce kotvena.

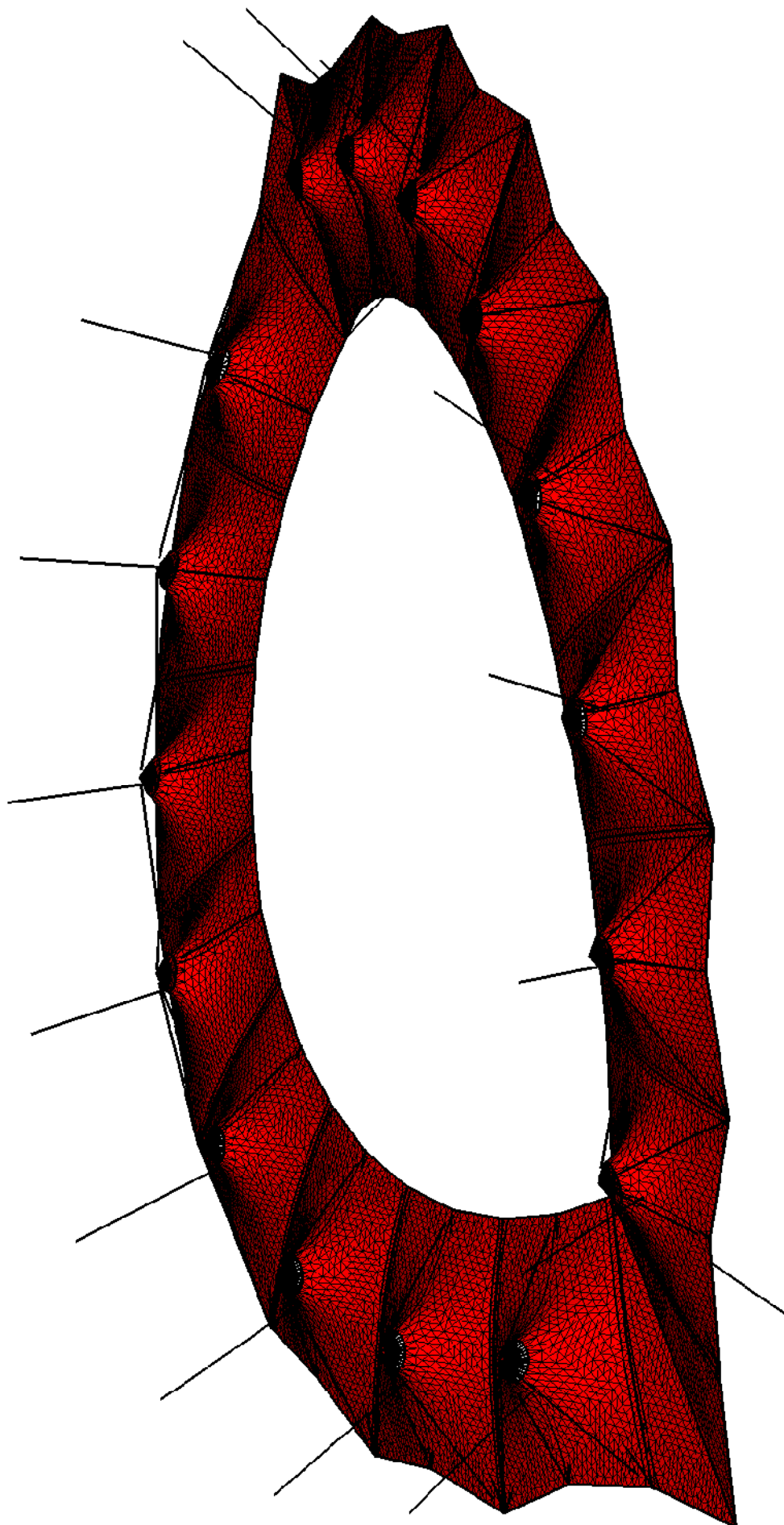
Hned na následujícím Obrázku 72 lze vidět přesné prostorové znázornění uložení řešené konstrukce:

- **Modrá barva** = polohy vrcholů sloupů, na které je konstrukce vynášena. Sloupy mohou být řešeny jako součást vnějšího pláště stadionu, či jako samostatné prvky. Sloupy mohou být kotveny mnoha způsoby, jež byly uvedeny dříve.
- **Zelená barva** = polohy kotevních bodů d (dle obrázku 33), ležících na samotné konstrukci stadionu. Tyto body tvoří jak uložení vnějšího centrálního předpínacího systému, tak uložení stabilizačních lan.
- **Fialová barva** = poloha kotvení, kam jsou upnuta lana kotvící styk obou vnitřních centrálních předpínacích lan.

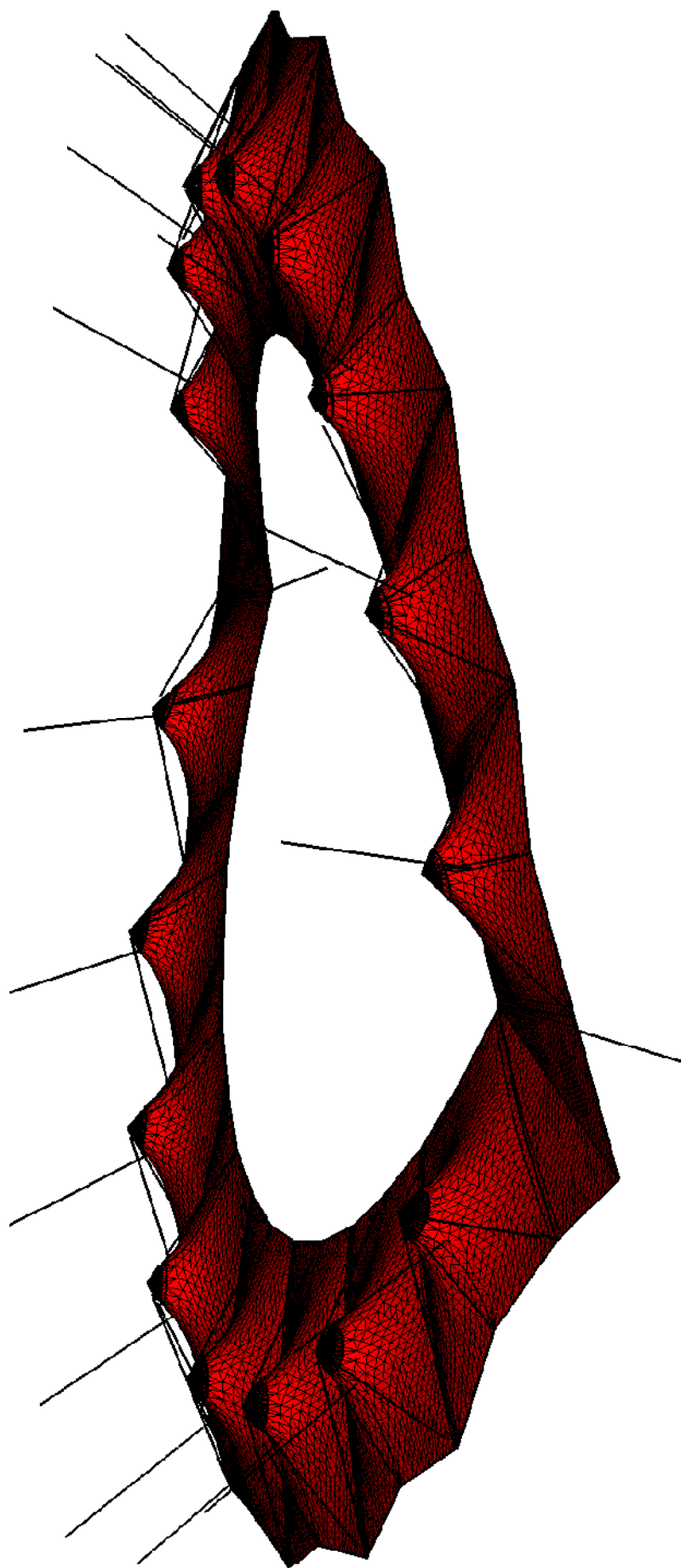
Záměrem dalších obrázků (Obrázek 73 – 79) je předvést architektonické ztvárnění zadané práce. Nejprve budou předvedeny globální pohledy, další pohledy budou zabírat část konstrukce z nejrůznějších směrů.



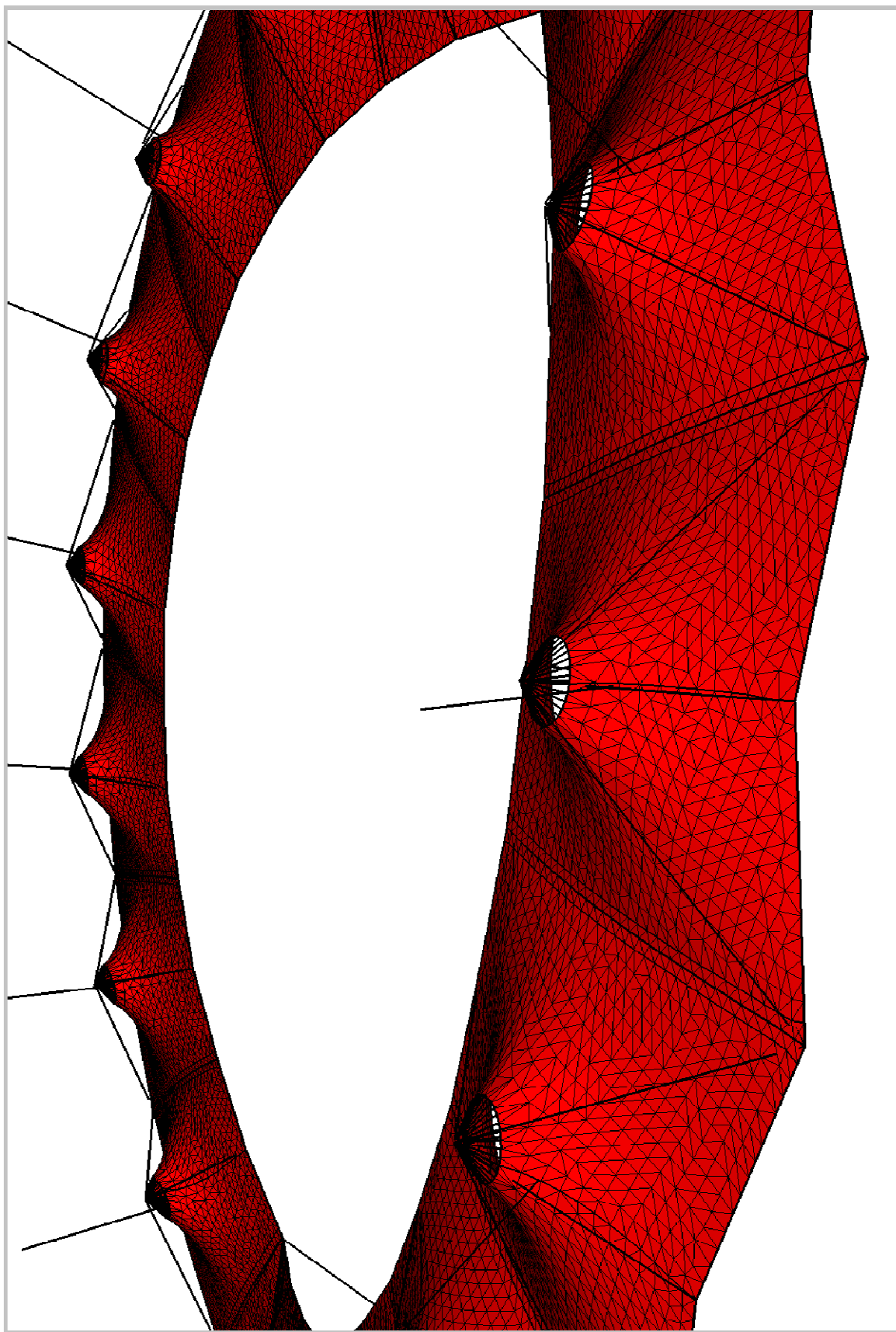
Obrázek 72: Uložení konstrukce zastřešení stadionu



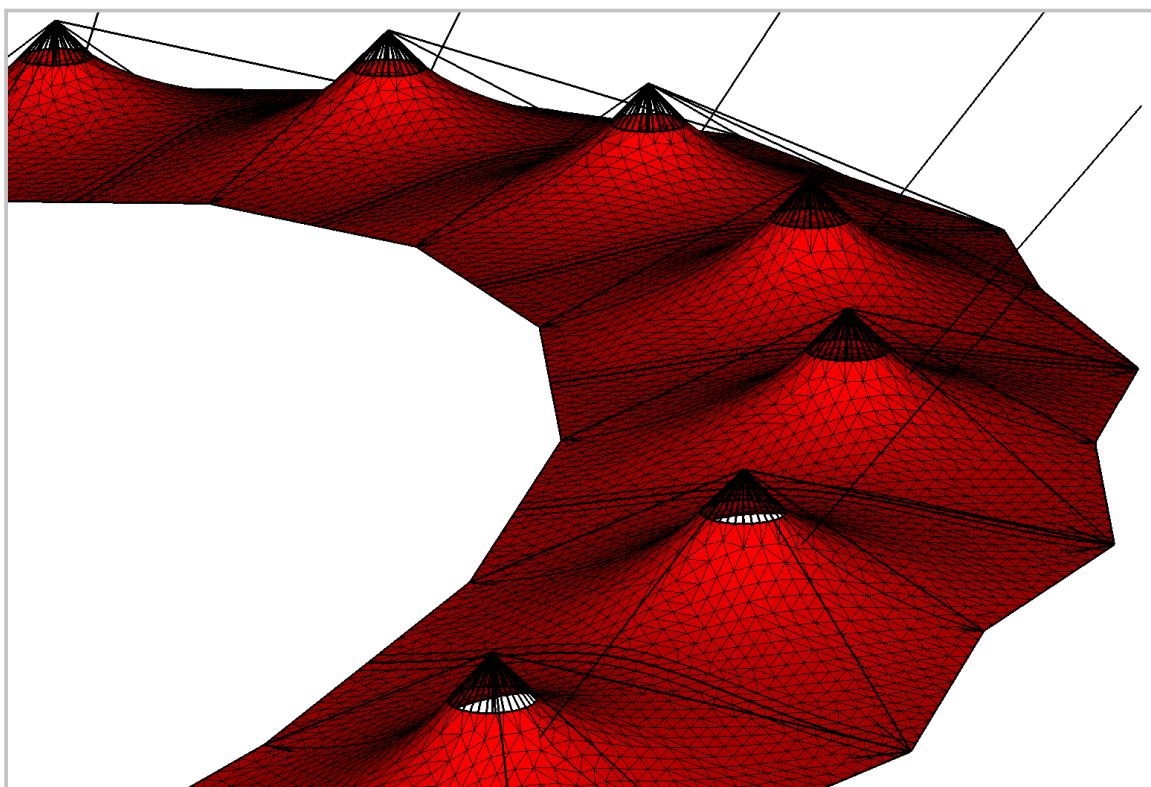
Obrázek 73: Ptačí pohled 1



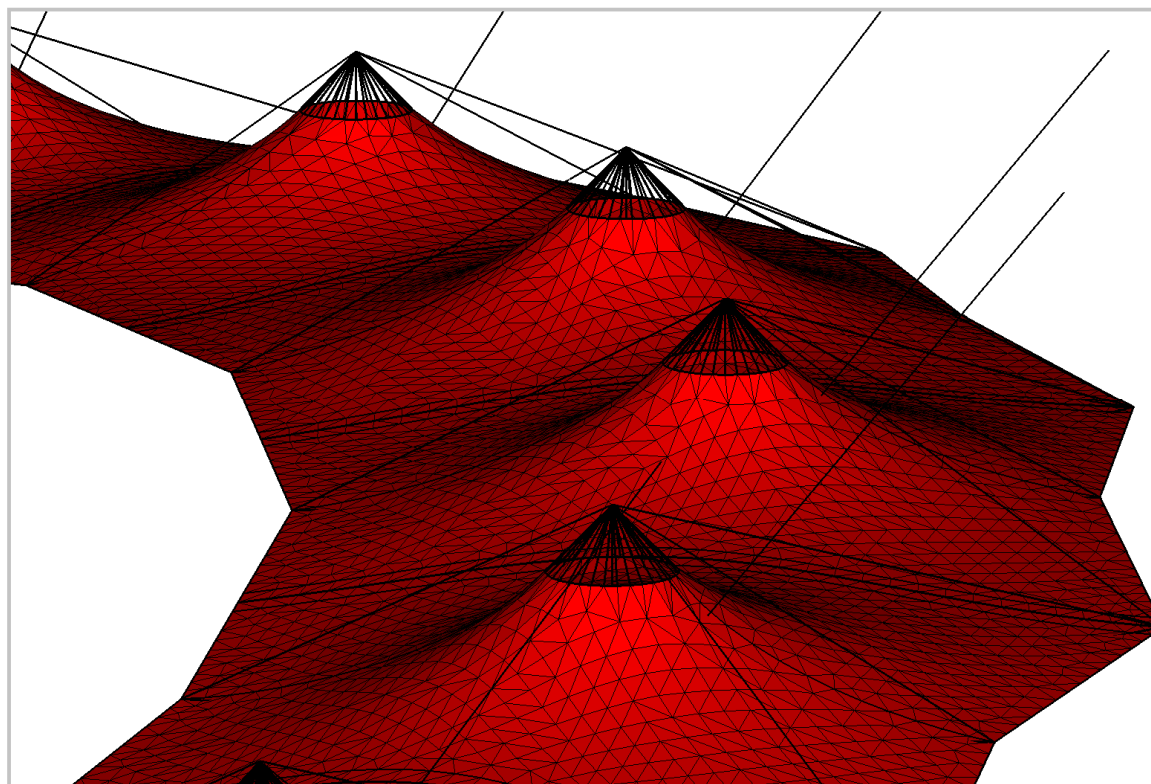
Obrázek 74: Ptačí pohled 2



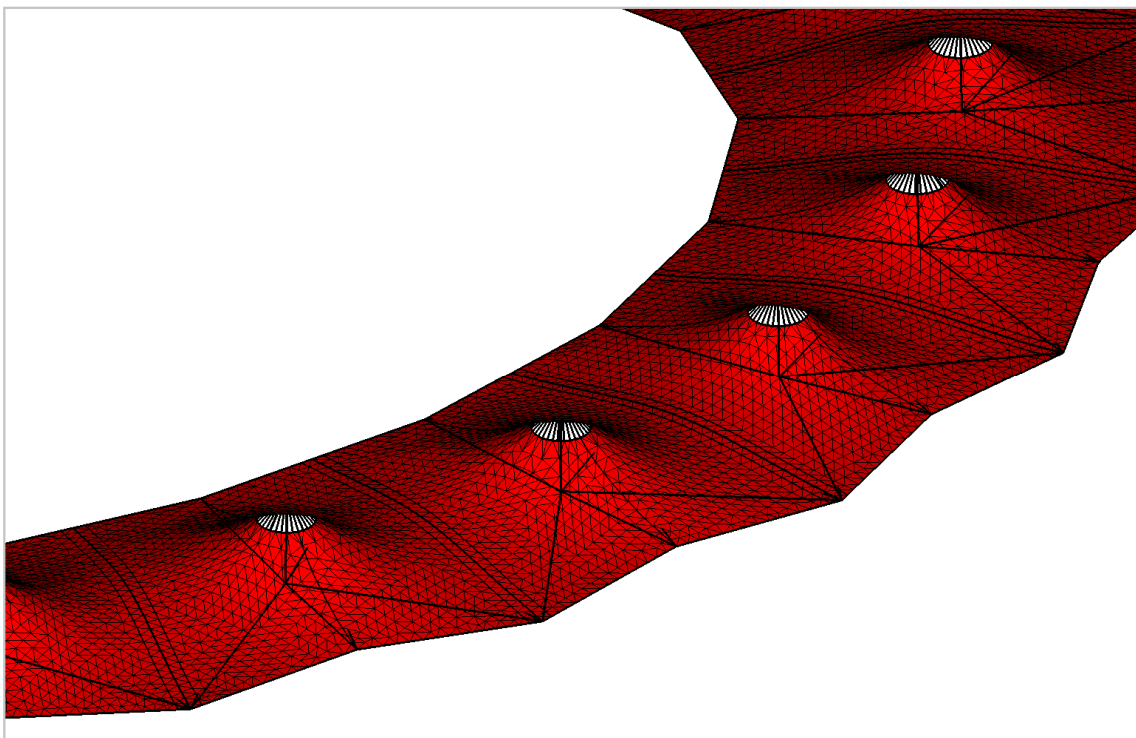
Obrázek 75: Přiblížení



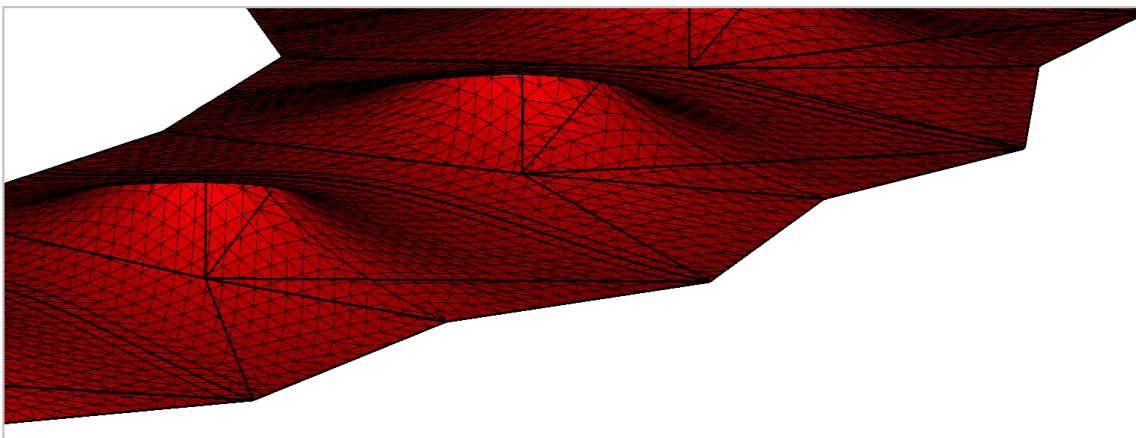
Obrázek 76: Reliéf membránové konstrukce



Obrázek 77: Detailní pohled na reliéf membránové konstrukce



Obrázek 78: Pohled na spodní povrch membránové konstrukce



Obrázek 79: Pohled okem diváka

9 ZÁVĚR

Zadání této diplomové práce bylo odvozeno od reálného záměru vytvořit nový modul pro výpočet membránových konstrukcí, jenž by byl součástí programu RFEM. V souvislosti s touto skutečností bylo nutné věnovat se nejprve teorii form-finding. Během vytváření diplomové práce jsem se snažil projít maximální množství literatury vázané k tomuto tématu, jenž je v současné době de facto výhradně cizojazyčná.

Problematikou form-finding se zabývalo a zabývá mnoho prací inženýrů i matematiků. Jednou z nejdůležitějších teorií je hledání minimálního ze všech možných povrchů, které mohou vzniknout mezi danými hranicemi. Jak bylo demonstrováno, existují geometrie hranic, které umožňují vytvoření takovéto plochy, která je dále použitelná pro inženýrské záměry. Jsou však i takové hranice, mezi nimiž vytvořená minimální plocha je z praktického hlediska nepoužitelná. Proto je snahou definovat jinou než minimální plochu, která však má maximální možné výhody. Dochází k předepisování jiných než izotropních polí napjatostí a tak vznikají nesčetné variace tvarů. Nezbytným požadavkem všech takovýchto variací je nutnost zabezpečení tahového namáhání v celé konstrukci při jakémkoli zatížení.

V této práci jsem se následně zabýval navrhováním a výpočtem membránové konstrukce zastřešení stadionu. Bylo nezbytné řešit dispoziční, následně statické a konstrukční problémy, hledat ideální tvar membrány a řešit způsob tvorby globálního modelu (především způsob, jak použít zdeformovanou síť pro další analýzu – k tomuto účelu byl vedoucím mé diplomové práce vytvořen speciální modul, jenž toto umožňoval). Postupně vytvářený nosný systém, byl průběžně podrobován nejrůznějším úvahám a to především problematice tvarové stálosti a nelineární stability.

Je zřejmé, že podobné konstrukce vykazují značně geometricky nelineární chování. Samotné výpočty tak nebylo možné řešit v oddělených zatěžovacích stavech. Analýza tak probíhala v podobě fází, které reprezentovaly reálný souběh možných zatížení, jež se v daném okamžiku na konstrukci vyskytují. Konstrukce byla zatížena kombinacemi jak pro mezní stav únosnosti, tak pro mezní stav použitelnosti. Z výsledků těchto kombinací je patrné, že u podobných konstrukcí je většinou rozhodujícím kritériem míra přijatelných deformací. Konstrukce totiž vykazují značnou únosnost i při takových deformacích, které by pro naprostou většinu investorů byly již nepřijatelné.

Na závěr bych rád uvedl, jakými problémy by se v souvislosti s touto prací bylo možné dále zabývat. Vzhledem k širokému záběru této práce by dalšími studovanými oblastmi mohlo být:

1. Dynamická analýza zvolené konstrukce
2. Analýza chování při kolapsu jednotlivých nosných prvků
3. Zohlednění reologických jevů

4. Zohlednění únavových jevů
5. Parametrická studie chování při různých velikostech předpětí lanového systému
6. Studie hledání vhodných tvarů membrán, u nichž nelze použít tvar s minimálním povrchem (aplikace anizotropních polí napětí) s následnými zatěžovacími zkouškami
7. Tvorba algoritmu pro generování stříhového vzoru

10 SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] Němec, I.: Nelineární mechanika, Brno, 2006
- [2] Němec, I.: Finite Elements Analysis of Structures
- [3] Šmirák, S.: Pružnost a plasticita I, Brno 1995
- [4] Teplý, B. – Šmirák, S.: Pružnost a plasticita II, Brno, 1992
- [5] Navrátil, M. – Mudra, V. – Malý, J.: Sportovní stavby
- [6] Otto, F. and Rasch, B., Finding Form, Deutscher Werkbund Bayern, Edition A. Menges, 1995.
- [7] Schock, H.-J., Segel, Folien und Membrane, Birkhäuser, Basel, 1997.
- [8] Berger, H., Light structures - structures of light, Birkhäuser, Basel, 1996.
- [9] Dierkes, U., Hildebrandt, S., Küster, A., Wohlrab, O., Minimal surfaces I and II. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 295-296, Springer, Berlin, Heidelberg, 1992
- [10] Suzuki, T., Hangai, Y., Shape analysis of differently stressed surfaces by the finite element method, in: Proc. IASS-CSCS International Congress on Innovative Large Span Structures (Eds. N. K. Srivastave, A. N. Sherbourne, J. Rooda), 1992, Vol 2, Toronto, Canada, pp 400-411
- [11] Otto, F. et. al., Zugbeanspruchte Konstruktionen, Vols. I and II, Ullstein Verlag, Frankfurt, Berlin, 1962, 1966.
- [12] Haug, E., and Powell, G. H., Finite element analysis of nonlinear membrane structures, Report UCSESM 72-7, University of California at Berkeley, 1972.
- [13] Haug, E. and Powell, G. H., Finite element analysis of nonlinear membrane structures, Proc. 1971 IASS Pacific Symposium Part II on Tension and space structures, Tokio and Kyoto, pp 165-175, 1972.
- [14] Haber, R. and Abel, J., Initial equilibrium solution methods for cable reinforced membranes, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 30, pp 263—284, 1982.
- [15] Leonard, J. W., Tension Structures, McGraw-Hill, New York, 1988.
- [16] Bletzinger, K.-U., Shape optimization by homotopy methods with special application to membrane structures, in: Proc. 6th AIAA/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, Bellevue, Washington, USA, 1996, pp 122-129
- [17] Čápková (roz. Vecková), J.: Modelování membránových konstrukcí, Praha, 2010

Internetové odkazy

- [I] <http://en.goldenmap.com/Gridshell>
- [II] <http://www.freiotto-architekturmuseum.de/index2.html>
- [III] http://en.wikipedia.org/wiki/Olympic_Stadium,_Munich
- [IV] http://cs.wikipedia.org/wiki/Millennium_Dome
- [V] <http://archtex.cz/clanky/fasady.pdf>
- [VI] <http://archtex.cz/cs/index-materialy.html>
- [VII] http://fabricarchitecturemag.com/articles/0110_ce_connection.html
- [VIII] <http://www.asb-portal.cz/stavebnictvi/konstrukce-a-prvky/novodobe-lanove-a-membranove-konstrukce-3200.html>
- [IX] <http://www.dimensio.cz/rhinomembrane>
- [X] <http://www.membranes24.com/theory-form-finding.html?showall=1>
- [XI] <http://www-civ.eng.cam.ac.uk/dsl/publications/tensegrity.pdf>
- [XII] http://old.uk.fme.vutbr.cz/kestazeni/MKP/prednaska2_mkp.pdf
- [XIII] <http://www.membranes24.com/>
- [XIV] <http://www.icevirtuallibrary.com/content/article/10.1680/eacm.2008.161.3.139>
- [XV] <http://www-civ.eng.cam.ac.uk/dsl/publications/tensegrity.pdf>
- [XVI] http://www.jlcoenders.nl/drupal/sites/default/files/iass_2004a.pdf
- [XVII] http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/120827/CasPestMatFys_056-1927-4_3.pdf
- [XVIII] <http://www5.in.tum.de/pub/estrada06diss.pdf>
- [XIX] <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794901000529>

Normy

- [A] ČSN EN 1990 Eurokód: *Zásady navrhování konstrukcí*, Český normalizační institut, Praha 2004
- [B] ČSN EN 1991-1-1 Eurokód 1: *Zatížení konstrukcí - Část 1-1: Obecná zatížení - Objemové tíhy, vlastní tíha a užitná zatížení pozemních staveb*, Český normalizační institut, Praha 2004
- [C] ČSN EN 1991-1-3 Eurokód 1: *Zatížení konstrukcí - Část 1-3: Obecná zatížení - Zatížení sněhem*, Český normalizační institut, Praha 2004
- [D] ČSN EN 1991-1-4 Eurokód 1: *Zatížení konstrukcí - Část 1-4: Obecná zatížení - Zatížení větrem*, Český normalizační institut, Praha 2004

11 SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ

A	plocha
E	modul pružnosti v tahu a tlaku
F	síla
G	modul pružnosti ve smyku
G_k	charakteristická hodnota stálého zatížení
h	tloušťka skořepiny
M	ohybový moment
m_x, m_y	ohybové momenty
m_{xy}, m_{yx}	kroutící momenty
n_x, n_y	normálové síly
N_{Ed}	návrhová hodnota tahové síly
P_k	charakteristická hodnota předpětí
Q_k	charakteristická hodnota nahodilého zatížení
q_x, q_y	posouvající síly
r	residuum (nevyvážené zatížení)
r_x, r_y	hlavní poloměry křivosti střednicové plochy
t_{xy}, t_{yx}	smykové síly
u, v, w	posuny
X, Y, Z	materiálové souřadnice
x, y, z	prostorové souřadnice
$\mathbf{d}$	vektor neznámých, obvykle uzlových parametrů deformace
$\hat{\mathbf{e}}$	Euler – Almansiho tenzor deformace
$\mathbf{E}$	Lagrangeův tenzor deformace
$\mathbf{f}$	vektor pravých stran, obvykle uzlových sil
$\mathbf{F}$	deformační gradient
$\mathbf{I}$	jednotková matice
$\mathbf{K}_T$	tečná matice tuhosti

$\mathbf{K}_M$	materiálová matice tuhosti
$\mathbf{K}_\sigma$	geometrická matice tuhosti
$\mathbf{K}$	počáteční matice tuhosti konstrukce
$\mathbf{K}(\mathbf{d})$	matice tuhosti jako funkce deformace
$\mathbf{P}$	první napětí Piola-Kirchhoff
$\mathbf{R}$	tenzorem rotace
$\mathbf{U}$	pravý stretch tenzor
$\mathbf{S}$	druhé napětí Piola-Kirchhoff
$\mathbf{T}$	Biotovo napětí
$\mathbf{V}$	levý stretch tenzor
ε	míra deformace
γ	dílčí součinitel zatížení
ν	Poissonův součinitel
ρ	hustota
σ_1, σ_2	složky hlavního napětí
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchyho napětí
$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$	Korotační napětí
$\boldsymbol{\tau}$	Kirchhoffovo napětí