



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**POSOUZENÍ VLIVU MONTÁŽNÍCH NEPŘESNOSTÍ NA
ŽIVOTNOST VINUTÉ PRUŽINY**

ASSESSMENT OF ASSEMBLING INACCURACY ON THE COIL SPRING LIFETIME

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Václav Stavárek

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Petr Lošák, Ph.D.

BRNO 2016

Abstrakt

Bakalářská práce je zaměřena na šroubovitě tlačné pružiny s obdélníkovým průřezem drátu. Ve spolupráci s jednou nejmenovanou firmou je zde vyšetřeno několik možných příčin poruchovosti těchto pružin. Součástí práce je také experimentální zjišťování změny tuhosti pružin po jejich zatížení vysokým počtem cyklů

Klíčová slova

pružiny, obdélníkový drát, únava, montážní nepřesnosti, vlastní frekvence

Abstract

This bachelors thesis is focused on helical compression springs with rectangular wire cross-section. In cooperation with an unnamed company it examines few possible causes of their failure rate. This thesis also includes experimental measurement of change of the spring stiffness after it underwent a high number of cycles.

Keywords

springs, rectangular wire, fatigue, assembling inaccuracy, natural frequencies

Bibliografická citace

STAVÁREK, V. Posouzení vlivu montážních nepřesností na životnost vinuté pružiny. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2016. 28 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Petr Lošák, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma *Posouzení vlivu montážních nepřesností na životnost vinuté pružiny* vypracoval samostatně pod vedením Ing. Petra Lošáka, Ph.D. s použitím odborné literatury a zdrojů uvedených v seznamu v této práci.

V Brně dne 27.5.2016

.....

Václav Stavárek

Poděkování

Rád bych poděkoval svému vedoucímu práce Ing. Petru Lošákovi, Ph.D. za odborné konzultace a připomínky při psaní této bakalářské práce. Dále bych chtěl poděkovat všem kolegům z firmy, za jejich cenné rady založené na zkušenostech z praxe. Nakonec bych chtěl poděkovat své rodině a blízkým, kteří mě při psaní práce a celém studiu podporovali.

Obsah

Seznam použitých zkratk, symbolů a veličin	1
Úvod	2
1 Formulace problému	3
2 Mechanické pružiny	4
2.1 Šroubovitě tlačné pružiny s obdélníkovým průřezem drátu	5
2.2 Nástrojářská pružina DME	5
2.2.1 Základní parametry	6
2.2.2 Funkce pružiny a možné nepřesnosti při zatěžování	6
3 Metody stanovení maximálního smykového napětí v pružině	8
3.1 Analytická metoda	8
3.1.1 Volný krut přímých prizmatických tyčí	8
3.1.2 Vztah pro maximální smykové napětí v pružině s obdélníkovým průřezem	10
3.2 Metoda konečných prvků	10
3.2.1 Princip MKP	11
3.2.2 Popis prostředí ANSYS Workbench	12
3.2.3 Simulace ideálního stlačení	13
3.2.4 Simulace neideálního stlačení	15
3.3 Vyhodnocení výsledků obou postupů	17
4 Stanovení životnosti pružiny	17
4.1 Stanovení ekvivalentního průměru drátu	18
4.2 Weyrauchův diagram	19
4.2.1 Životnost při ideálním stlačení	19
4.2.2 Životnost při neideálním stlačení	20
4.3 Vyhodnocení výsledků	20
5 Modální analýza	20
5.1 Vlastní frekvence pružin	21
5.2 Stanovení vlastní frekvence pružiny pomocí ANSYS workbench	21
5.3 Vlastní frekvence stěrače	22
6 Měření změny tuhosti	23
6.1 Měřicí přístroj	24
6.2 Postup měření	24
6.3 Vyhodnocení výsledků	25
7 Závěr	26

8	Seznam použitých zdrojů	27
9	Seznam příloh	28

Seznam použitých zkratk, symbolů a veličin

K_W	[-]	Wahlův součinitel
K_B	[-]	Bergsträsserův součinitel
TPM		total productive maintenance, soubor aktivit vedoucích k provádění výroby v optimálních podmínkách, zahrnuje preventivní a prediktivní údržbu za účelem eliminace prostojů
MKP		metoda konečných prvků
CAD		Computer Aided Design
CAE		Computer Aided Engineering
STP		standartní formát pro přenos 3D modelů mezi jednotlivými CAD programy, data jsou uložena v ASCII formátu
ČSN ISO 2768		norma, popisující všeobecné délkové a geometrické tolerance (ty, které nejsou předepsány na výkrese)
PPAP		production part approval process, proces používaný v automobilovém průmyslu, slouží k získání důvěry zákazníka, kterému firma hodlá dodávat komponenty, obsahuje například náměry kritických rozměrů součástí

Úvod

Šroubovitě tlačné pružiny s obdélníkovým průřezem drátu se hojně využívají jako nástrojářské pružiny například při stříhání, nebo ohýbání součástí v automobilovém průmyslu. Protože v dnešní době rapidně rostou nároky na produktivitu výroby při současném zachování kvality, jsou tyto pružiny v lise namáhány vysokofrekvenčním zatěžováním a zpravidla musí vydržet velké počty cyklů, než jsou vyměněny za nové.

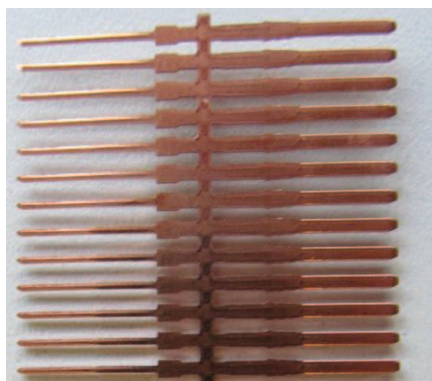
Je proto žádoucí stanovit předem jejich životnost a podle ní přizpůsobit jejich pravidelné výměny tak, aby se předešlo zbytečným haváriím a prostojům výroby. Rovněž by se měly určit ideální podmínky jejich namáhání. Podle nich by se pak mělo přizpůsobit jejich uložení v lise i nastavení lisu, aby byla jejich životnost prodloužena na maximální možnou hodnotu. Příkladem je předpětí pružiny, nebo pracovní frekvence stroje, která by se neměla blížit vlastní frekvenci pružin.

Často se také může stát, že pružina není v nástroji uložena přesně tak, jak konstruktér zamýšlel a vzniklé nepřesnosti při jejím namáhání mohou ovlivnit její životnost. Proto je vhodné stanovit dopad nejčastěji vzniklých nepřesností na životnost pružiny a podle toho přizpůsobit například rozměrové kontroly uložení pružin.

V poslední řadě může také dojít ke změnám vlastností pružin během jejich života v nástroji. To by mohlo negativně ovlivnit kvalitu výroby, a proto je třeba brát v potaz i tento jev a zjistit míru jeho výskytu.

1 Formulace problému

Během roku 2014 se v jedné firmě, zabývající se výrobou kabelové a konektorové techniky pro automobilový průmysl objevil problém v lisovně, kde se z měděné pásovinu stříhají a ohýbají konektory (obrázek 1.1). Při pravidelných kontrolách v rámci TPM bylo v upínacím rámu jednoho z lisů vždy nalezeno velké množství zničených pružin. Stroje na tomto oddělení z důvodu velké produktivity výroby běží na velmi vysokých frekvencích (desítky Hz). Pro takovou zátěž výrobce negarantuje dlouhodobou životnost, pružiny však přesto ve stroji prodělají $3 \cdot 10^7$ až $4 \cdot 10^7$ cyklů, než jsou vyměněny za nové.

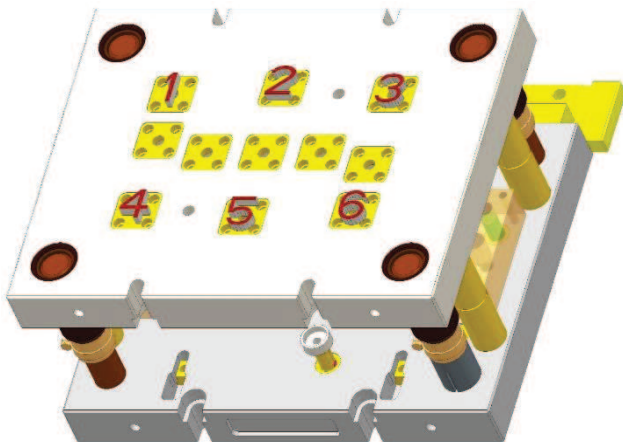


Obrázek 1.1: Kontakty vystřížené z měděné pásovinu

Zpočátku byla frekvence nastavena na 800 min^{-1} a při každé kontrole bylo nalezeno zhruba 50% porušených kusů. Stroj byl poté přenastaven na frekvenci 1600 min^{-1} , začaly se zkoušet pružiny od jiných výrobců a všechny porušené kusy se začaly zaznamenávat (tabulka 1.1). Z tabulky vyplývá, že zvýšení frekvence vedlo k výraznému poklesu poruchovosti pružin z 50% na 5,56%.

Tím se vyřešila hlavní část problému, vedení lisovny by však rádo vědělo příčinu poruch, vhodnost nyní nejčastěji používané nástrojářské pružiny od výrobce DME a zároveň, zda se v průběhu prodlouženého života pružiny nějak nemění její vlastnosti, což by mohlo mít negativní dopad na kvalitu výroby.

Tabulka 1.1: Sledování porušování pružin na upínacím rámu

Sledování porušování pružin na upínacím rámu										
Záznam pro upínací rámy (všechny).			Každý upínací rám má své pořadové číslo.							
Při každém TPM je nutné zjistit, které pružiny selhaly a tyto informace zapsat do tabulky.										
Pozice pružiny je označená na obrázku, porušená pružina se označí křížkem k dané pozici.										
Po kontrole je nutné vyměnit všechny pružiny za nové (i pokud nejsou poškozené).										
										
Číslo Rámu	Datum	Počet cyklů do další kontroly	Pozice pružiny						Poznámka	
			1	2	3	4	5	6		
1	10.11.14	3,00E+07	ok	ok	ok	ok	ok	ok	Pružiny vyměněny	
1	13.12.14	3,00E+07	ok	ok	ok	ok	ok	ok	Pružiny vyměněny	
1	6.1.15	3,00E+07	ok	ok	ok	ok	ok	ok	Výměna za červené pružiny	
1	20.1.15	3,00E+07	ok	ok	ok	ok	ok	ok		
3	16.1.15	3,00E+07	ok	ok	ok	ok	ok	ok	Vloženy červené pružiny	
1	25.3.15	3,00E+07	ok	ok	ok	ok	ok	ok	Test pružiny Eichler	
2	25.4.15	3,00E+07	ok	ok	ok	ok	ok	ok	Pružiny standard (žluté)	
1	18.5.15	3,00E+07	ok	ok	ok	ok	ok	ok	Pružiny standard	
2	15.6.15	3,00E+07	X	ok	ok	ok	ok	ok	Pružiny USA - Konturatools	
1	01.09.15	3,00E+07	ok	ok	ok	ok	ok	ok	DME pružiny	
2	11.09.15	3,00E+07	ok	ok	X	X	ok	ok	DME pružiny	
1	05.01.16	4,00E+07	ok	X	ok	ok	ok	ok	Test pružiny Eichler	

2 Mechanické pružiny

Pružiny jsou strojní součásti, které mají schopnost kumulovat mechanickou energii na základě pružné deformace materiálu, ze kterého jsou vyrobeny. V závislosti na užitém materiálu a geometrii je možné získat pružiny s různým průběhem závislosti zatížení na deformaci (tuhostí). Tuhost je konstantní pouze u pružin s lineární charakteristikou nebo v lineární oblasti nelineární charakteristiky. U nelineárních pružin je proměnlivá v průběhu stlačování. Kromě akumulace mechanické energie mohou pružiny sloužit také k vyvození předepsané síly nebo momentu, k tlumení otřesů, rázů a

kmitání nebo k pružnému spojení dvou a více součástí. Pružiny lze dělit podle několika kritérií:

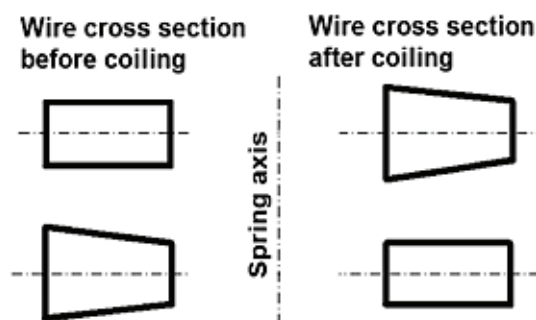
- podle fyzikálního principu činnosti (mechanické, pneumatické, hydropneumatické)
- podle použitého materiálu (kovové, nekovové)
- podle druhu zatěžení (tah, tlak, krut)
- podle konstrukce (vinuté, tyčové, talířové, listové)

Tato práce se bude zabývat pouze vinutými šroubovitými tlačnými pružinami s obdélníkovým průřezem drátu [1].

2.1 Šroubovité tlačné pružiny s obdélníkovým průřezem drátu

Vinuté pružiny vyrobené z drátu s obdélníkovým, nebo čtvercovým průřezem se používají pro vysoké zátěže (tvářecí stroje), zátěže za zvýšených teplot, nebo když je potřeba ušetřit prostor při zachování dané tuhosti. Tyto pružiny jsou totiž tužší, než pružiny s kruhovým průřezem o stejném průměru a délce. Jejich použití má však i své nevýhody [2]:

- Průřez není rovnoměrný po celé délce drátu
- Kvalita materiálu není zpravidla tak dobrá jako u kruhových drátů
- Rozložení napětí není tak výhodné, jako u kruhových drátů (rohy fungují jako koncentrátoři napětí)
- Nákladnější výroba – polotovár je lichoběžníkový drát, který až po vinutí dostane obdélníkový průřez [3]



Obrázek 2.1: Vliv vinutí na tvar průřezu drátu [3]

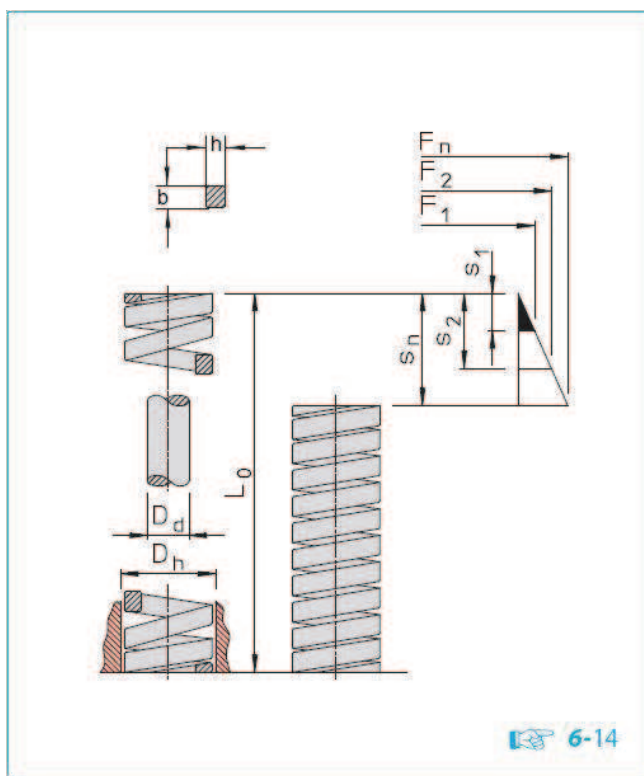
2.2 Nástrojářská pružina DME

V této práci byla detailně analyzována pružina od firmy DME, která mimo střížných nástrojů vyrábí hlavně formy pro vstřikování plastů. Níže (tabulka 2.1) jsou uvedeny některé její vlastnosti z katalogu výrobce. Materiál a jeho další zpracování zde bohužel není uveden a informace o něm nebyly dodány ani po komunikaci s Belgickou pobočkou firmy, kde se tyto pružiny vyrábí.

2.2.1 Základní parametry

Tabulka 2.1: Vlastnosti uvedené v katalogu výrobce [9]

Model	WZ 8031 G 32 038
Materiál	(speciální slitina)
b [mm]	7,3
h [mm]	5,9
D _H [mm]	32
D _d [mm]	16
L ₀ [mm]	38
k [N.mm ⁻¹]	528,2
S ₁ [mm]	6,5
F ₁ [N]	3433
S ₂ [mm]	7,6
F ₂ [N]	4014
S _n [mm]	9,5
F _n [N]	5018
S _D [mm]	11,4
F _D [N]	6021

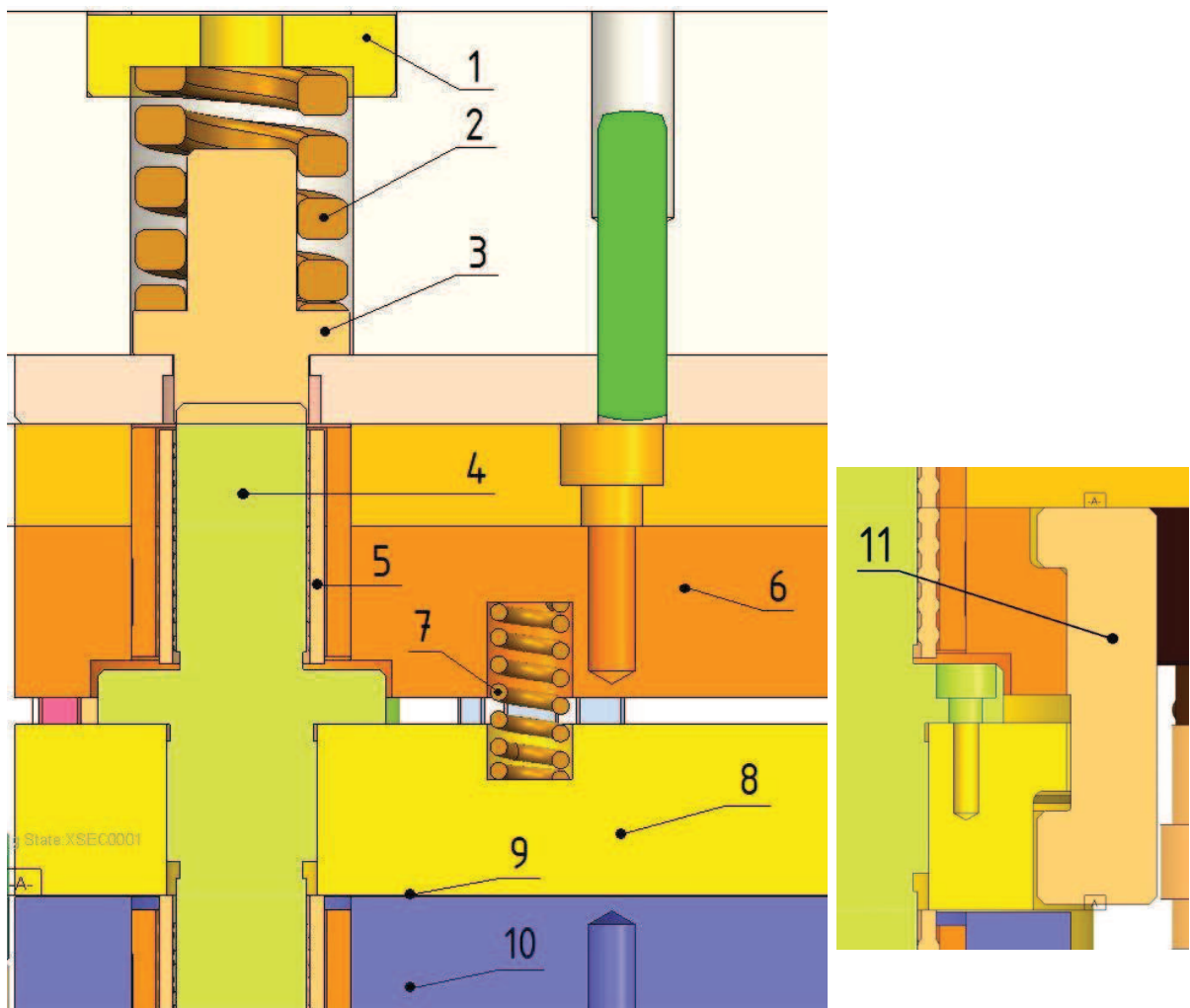


Obrázek 2.2: Rozměry uvedené v katalogu výrobce [9]

2.2.2 Funkce pružiny a možné nepřesnosti při zatěžování

Pružiny jsou uloženy po 6 kusech v upínacím rámu pro samotný střižný nástroj (viz tabulka 1.1). Přes další součásti (lifter, vodící sloupek, stěrač) zde přitlačují materiál k matrici, pro zpřesnění jeho stříhu. Obrázek 2.3 ukazuje řezy uložením pružiny v dolní úvrati lisu.

- 1... víčko pružiny – předpíná pružinu
- 2... pružina 1 – řešená v této práci
- 3... lifter – stlačuje pružinu
- 4... vodící sloupek – pevně spojený se stěračem
- 5... kuličková klec – zajišťuje hladký posuv vodícího sloupku
- 6... rám pro upnutí střížníků
- 7... pružina 2 – má menší tuhost, než pružina 1
- 8... stěrač – přitlačuje materiál k matici ve fázi stříhu
- 9... mezera pro materiál
- 10... rám pro upnutí matic
- 11... západka – vymezuje maximální vzdálenost stěrače a rámu střížníků



Obrázek 2.3: Řezy uložením pružiny

Pokud je lifter vyroben nepřesně, může dojít k vyosení směru namáhání pružiny. Z obrázku je také vidět, že pružiny 1 a 2 přímo ovlivňují vlastní frekvenci stěrače a jejich nedostatečná tuhost může způsobit přiblížení této frekvence pracovní frekvenci stroje.

3 Metody stanovení maximálního smykového napětí v pružině

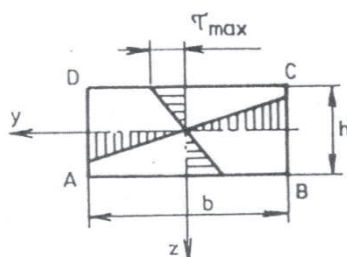
Z geometrie šroubovitě tlačné pružiny vyplývá, že její drát je při stlačování namáhán především na krut. Hodnoty smykových napětí jsou proto podstatným faktorem při posuzování mezního stavu únavy. V této kapitole bude různými způsoby stanovena maximální hodnota smykového napětí v pružině.

3.1 Analytická metoda

Nejprve bylo napětí stanoveno pomocí analytických vztahů, které vznikly buď diferenciálním přístupem z obecné pružnosti, nebo empiricky z metody konečných prvků.

3.1.1 Volný krut přímých prizmatických tyčí

Ve zdroji [4] je popsán případ namáhání tyče s obdélníkovým průřezem krutem. Vyvolané smykové napětí na povrchu má na hranách A, B, C, D nulovou hodnotu a maxima dosahuje v prostředcích stran (obrázek 3.1). Jeho maximální hodnota je potom popsána vztahem (3.1).



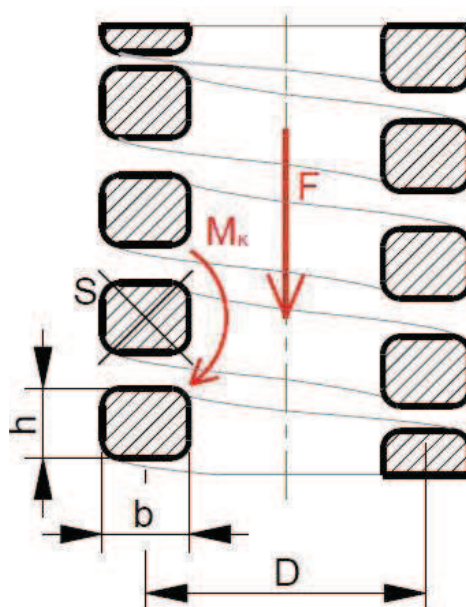
Obrázek 3.1: Napjatost v průřezu tyče namáhané na krut [4]

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K} \quad (3.1)$$
$$W_K = \alpha \cdot b h^2$$

kde α je koeficient závislý na poměru b/h . Pro několik poměrů b/h jsou numericky řešené hodnoty uvedené níže (tabulka 3.1).

Tabulka 3.1: Hodnoty koeficientu alfa v závislosti na poměru b/h [4]

b/h	1	1,5	2	3	4	6	8	10
α	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,299	0,307	0,333



Obrázek 3.2: Zatížení pružiny silou v ose

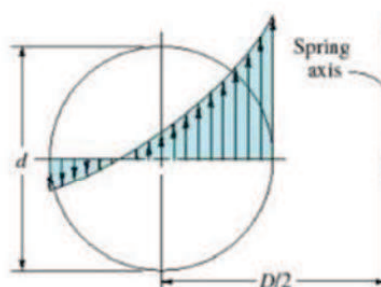
Z obrázku 2.2 vyplývá, že kroutící moment působící na těžiště průřezu drátu je roven

$$M_K = \frac{FD}{2} \quad (3.2)$$

Maximální napětí na povrchu pružiny je potom

$$\tau_{\max} = \frac{FD}{2 \cdot \alpha \cdot b h^2} \quad (3.3)$$

Musíme však brát v potaz, že rovnice (3.3) nezohledňuje zakřivení závitů pružiny a platí proto pouze pro přímý, nebo slabě zakřivený drát. Zakřivení drátu zvyšuje velikost napětí na vnitřním obvodu závitů pružiny, zatímco na vnějším obvodu dochází naopak k jeho snížení. Napětí vznikající v důsledku zakřivení závitů pružiny jsou při posuzování mezního stavu únavy důležitá. [1]



Obrázek 3.3: Průběh smykového napětí po zahrnutí vlivu zakřivení drátu [5]

Wahlův součinitel a Bergsträsserův součinitel vyjadřují jak vliv zakřivení drátu, tak vliv posouvající síly. Hodnoty těchto součinitelů se liší o méně, než 1%.

$$K_W = \frac{4C-1}{4C-4} + \frac{0,615}{C} \quad (3.4)$$

$$K_B = \frac{4C+2}{4C-3} \quad (3.5)$$

$$C = \frac{D}{b} \quad (3.6)$$

Jedná se o korekční součinitel, kterým je nutné při výpočtu vynásobit napětí stanovené pro rovný drát. Nejedná se však o součinitel tvaru vyjadřující vliv koncentrace napětí. [1]

3.1.2 Vztah pro maximální smykové napětí v pružině s obdélníkovým průřezem

Ve zdroji [2] je uveden vztah (3.7) pro stanovení přibližné maximální hodnoty smykového napětí v drátu pružiny s průřezem $b \times h$ ($b > h$). Pro zahrnutí vlivu zakřivení drátu je opět nutno výsledné napětí vynásobit Wahlovým, nebo Bergsträsserovým koeficientem.

$$\tau_{\max} = \frac{FD(1,5b + 0,9h)}{b^2 h^2} \quad (3.7)$$

3.2 Metoda konečných prvků

MKP je mocný výpočetní nástroj pro získání dostatečně přesného výsledku u mnoha úloh z inženýrské praxe, charakterizovaných komplexními systémy proměnných závislých na okrajových podmínkách. MKP se stalo nezbytným krokem při navrhování či modelování fyzikálních jevů ve většině technických oborů. Ty se většinou odehrávají v kontinuu hmoty (tuhé těleso, kapalina, plyn), které je popsáno několika vektorovými nebo maticovými proměnnými.

Podstata MKP spočívá v rozložení tohoto kontinua na konečný počet prvků, pro které je možno získat výsledky pomocí aproximačních funkcí. V MKP se aproximační funkce vyjadřují přibližně jako součet předem daných, známých funkcí, označovaných jako báze funkce. Ty jsou násobeny neznámými koeficienty, které fyzikálně představují složky posuvů v uzlech (uzly leží na hranicích jednotlivých prvků a zajišťují jejich návaznost). [6]

Mezi nejvýznamnější publikace o této výpočetní metodě patří například kniha od O. C. Zienkewicze: *The finite element method in structural and continuum mechanics*. Z českých publikací potom *Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků* od autorů Koláře, Kratochvíla, Leitnera a Ženíška.

3.2.1 Princip MKP

Obecná prostorová úloha pružnosti je popsána 15 neznámými funkcemi proměnných x, y, z .

- tři posuvy: u, v, w
- šest přetvoření: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$
- šest napětí: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$

Tyto funkce jsou propojeny systémem obecných rovnic pružnosti.

Rovnice rovnováhy popisují rovnováhu elementárního prvku tělesa, na který působí kromě složek napětí i objemová síla o složkách o_x, o_y, o_z [N.m^{-3}]. Tyto rovnice musí být splněny vždy bez ohledu na vlastnosti materiálu či velikost deformací.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + o_x &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + o_y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + o_z &= 0\end{aligned}\quad (3.8)$$

Geometrické rovnice jsou vazbou mezi posuvy a přetvořeními, v tomto tvaru však platí jen za předpokladu malých přetvoření (menších než 10^{-2}).

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\end{aligned}\quad (3.9)$$

Konstitutivní vztahy vycházejí ze zobecněného Hookova zákona a platí tedy jen pro lineárně pružný, izotropní Hookovský materiál, jehož vlastnosti jsou určeny dvěma nezávislými materiálovými konstantami – modulem pružnosti v tahu E a Poissonovým číslem μ . Modul pružnosti ve smyku G je závislý na těchto dvou veličinách.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] & \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G}\end{aligned}\quad (3.10)$$

Okrajové podmínky platí na povrchu tělesa a jsou dvojího typu – geometrické (hodnoty posuvů) a silové (hodnoty napětí).

Celková potenciální energie Π tělesa se rovná součtu energie napjatosti tělesa W a potenciálu vnějšího zatížení P .

$$\begin{aligned}\Pi &= W + P \\ W &= \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon \cdot dV \\ P &= - \int_V U^T O \cdot dV - \int_S U^T P \cdot dS\end{aligned}\tag{3.11}$$

- U ... sloupcová matice posuvů
- ε ... sloupcová matice přetvoření
- σ ... sloupcová matice napětí
- O ... sloupcová matice objemového zatížení
- P ... sloupcová matice plošného zatížení

Složky matice posuvů $\mathbf{U}$ (u , v , w) se dají vyjádřit jako sumy vhodné zvolených báзовých funkcí N_i , N_j , N_z (na jejich volbě rovněž záleží přesnost výsledků) násobených koeficienty a_i , a_j , a_k :

$$\begin{aligned}u &= \sum_{i=1}^l N_i(x, y, z) \cdot a_i \\ v &= \sum_{j=1}^m N_j(x, y, z) \cdot a_j \\ w &= \sum_{k=1}^n N_k(x, y, z) \cdot a_k\end{aligned}\tag{3.12}$$

Podle Lagrangeova principu platí pro klidný stav tělesa pravidlo minimální hodnoty celkové potenciální energie tělesa, jenž se dá vyjádřit vztahy (3.13)

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_j} = 0 \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_k} = 0\tag{3.13}$$

Dále musí být v prostoru nadefinována síť prvků a uzlů, jejíž vhodná volba ovlivňuje přesnost řešení, například v místech, kde očekáváme velké změny napjatosti, bychom měli volit hustější síť.

Využitím vztahů (3.8) až (3.13) jsme schopni celou problematiku zjednodušit na soustavu lineárních rovnic. Takovýto problém výpočetní technika dnešní doby bez problémů vyřeší a my tak získáme hodnoty posuvů pro dané zatížení (deformační přístup), nebo naopak napjatost při předepsané deformaci (silový přístup) pro všechny uzly v tělese. [6] [7]

3.2.2 Popis prostředí ANSYS Workbench

Pro stanovení napjatosti pružiny byla použita platforma Workbench programu ANSYS. Na webu společnosti je volně stažitelná studentská verze 16.2, která má počet uzlů analýzy omezen na 32000, což pro tuto

úlohu stačí. Na této platformě jsou analýzy už naprogramované jako systémy, které se dají kombinovat do projektů. Schéma každého systému se skládá z jednotlivých workspaces (engineering data, geometry, model, setup, solution). Tato koncepce dělá program uživatelsky daleko přívětivější a postup analýzy intuitivnější. Na druhou stranu při tomto dochází k defaultní volbě spousty proměnných a lze proto snadno dosáhnout řešení, které je vzdálené od reality. [8]

3.2.3 Simulace ideálního stlačení

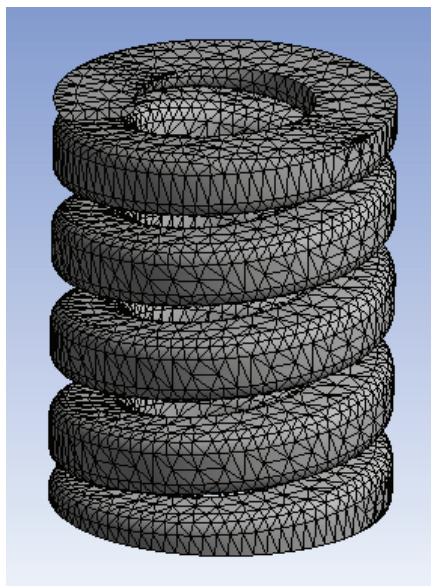
Nejprve byl simulován případ, kdy je pružina stlačována ideálně, tzn. ve směru své osy, bez zahrnutí možných úchylek okolních součástí. Řešení bylo provedeno v systému Static Structural. V Engineering Data byl nastaven Youngův modul 206 GPa (hodnota byla zjištěna postupnými iteracemi tak, aby reakční síla vycházela podle katalogu výrobce) a Poissonovo číslo 0,3.

CAD model byl vytvořen v programu PTC Creo Parametric 2.0 příkazem Helical Sweep (tažení profilu po šroubovici) s proměnným stoupáním pro uzavření konců pružiny, které byly následně uříznuty pomocí extrude (vysunutí). Rozměry byly použity z katalogu výrobce, nebo byly dodatečně naměřeny posuvným měřidlem na skutečné pružině (obrázek 3.4).



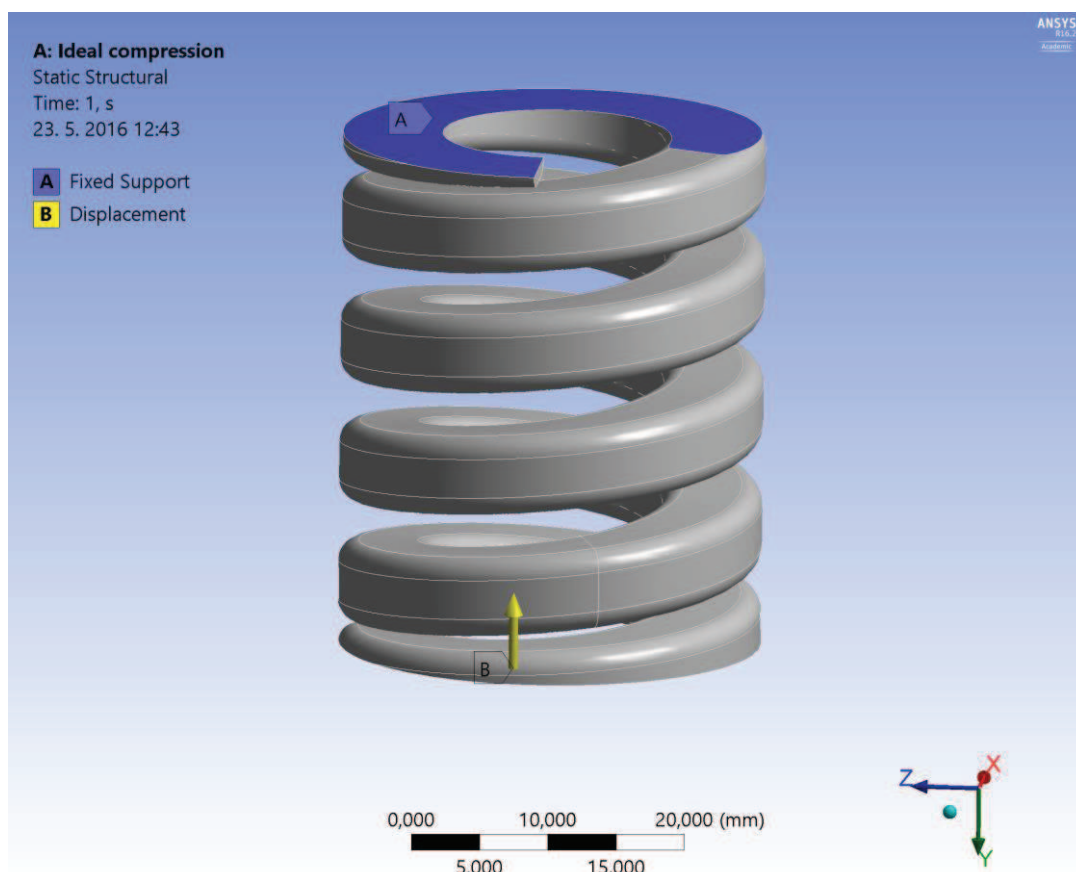
Obrázek 3.4: Nástrojářská pružina, vpravo CAD model

CAD model byl ve formátu STP naimportován a použit ke generování sítě prvků. Velikost prvku byla nastavena na 1,2 mm, aby počet uzlů splňoval požadavky studentské licence (obrázek 3.5).



Obrázek 3.5: Konečněprvková síť vytvořená automaticky z CAD modelu

V Setup workspace bylo jednomu konci pružiny přiřazeno vetknutí (fixed support) a druhému posuv (displacement) ve směru osy pružiny nejprve o hodnotě 2,5 mm (předpětí) a pak 5,5 mm (maximální stlačení v cyklu).



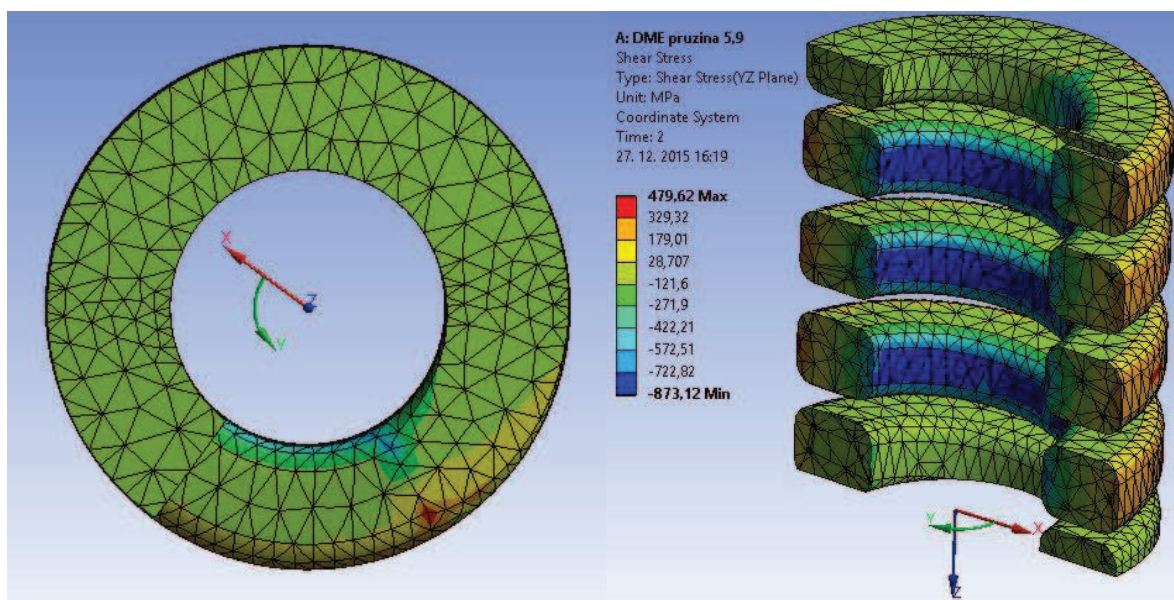
Obrázek 3.6: Okrajové podmínky pro ideální stlačení

Pro ověření přesnosti simulace byla příkazem force reaction zjištěna styková síla pružiny, která byla porovnána s hodnotou spočítanou z katalogu výrobce (tabulka 3.2).

Tabulka 3.2: Porovnání hodnot tuhostí a reakčních sil

	Katalog výrobce	ANSYS
Tuhost k [N.mm ⁻¹]	528,2	527,4
Reakční síla pro posuv 2,5 mm [N]	1320,5	1318,5
Reakční síla pro posuv 5,5 mm [N]	2905,1	2900,7

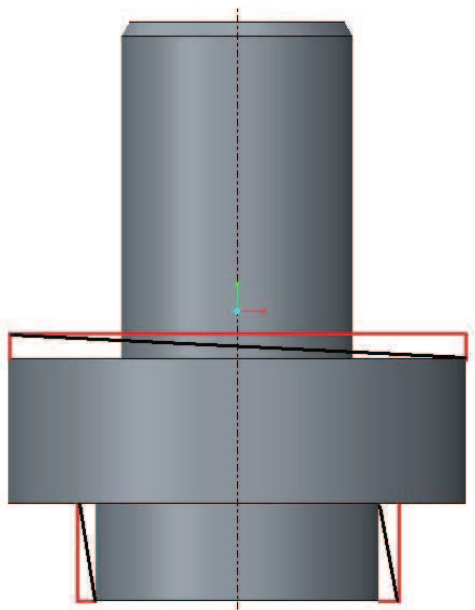
Pro odečtení maximálního smykového napětí byl pak použit příkaz shear stress, protože nás ale zajímalo konkrétně to v průřezu drátu, bylo třeba ještě zvolit odečítání v polárním souřadnicovém systému a rovině YZ (obrázek 3.7). Z obrázku je také názorně vidět, že absolutní hodnota napětí je skutečně největší na vnitřním obvodu vinutého drátu.



Obrázek 3.7: Smykové napětí graficky

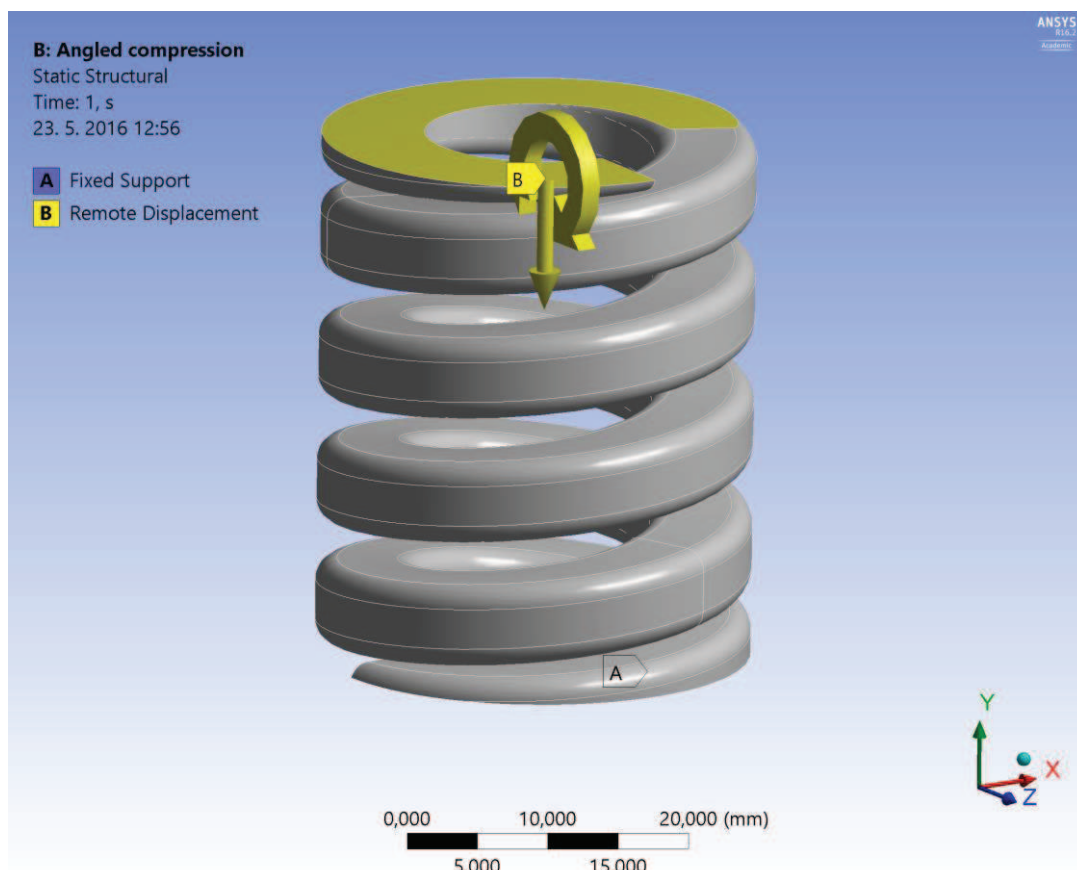
3.2.4 Simulace neideálního stlačení

Jako další byl simulován případ, kdy je lifter vyroben s geometrickými nepřesnostmi. Hodnoty tolerance házení a rovinnosti ploch lifteru (Obrázek 3.8), jsou dle ČSN ISO 2768 rovny 0,2 mm. Pokud sečteme úhly vypočítané z těchto tolerancí, zjistíme, že opěrná plocha pro pružinu může být vůči směru pohybu lifteru nakloněna o 1,5°.



Obrázek 3.8: Možné geometrické nepresnosti lifteru a z nich vyplývající náklon opěrné plochy pro pružinu

Postup analýzy byl podobný tomu v kapitole 3.2.3, s tím rozdílem, že druhému konci pružiny byl tentokrát posuv přiřazen pomocí remote displacement. Tato funkce umožňuje svázat všechny body zvolené plochy k jednomu řídicímu bodu a předepsat pak i natočení této plochy okolo řídicího bodu ve směru jakékoliv osy. Byla zadána hodnota posuvu plochy ve směru pružiny nejprve 2,5 mm a potom 5,5 mm a zároveň natočení této plochy o $1,5^\circ$ okolo osy x.



Obrázek 3.9: Okrajové podmínky pro neideální stlačení

K odečtení maximálního smykového napětí byl rovněž použit příkaz shear stress v polárním souřadnicovém systému a rovině YZ.

3.3 Vyhodnocení výsledků obou postupů

Níže (tabulka 3.3) jsou uvedeny výsledné hodnoty smykových napětí stanovené ze vztahů (3.3) a (3.7) s užitím Wahlova (3.4) i Bergsträsserova (3.5) koeficientu a také výsledek z MKP. Při volbě koeficientu α (tabulka 3.3) byl poměr b/h zaokrouhlen z 1,237 na 1, do vztahu (3.3) bylo proto dosazeno $\alpha = 0,208$.

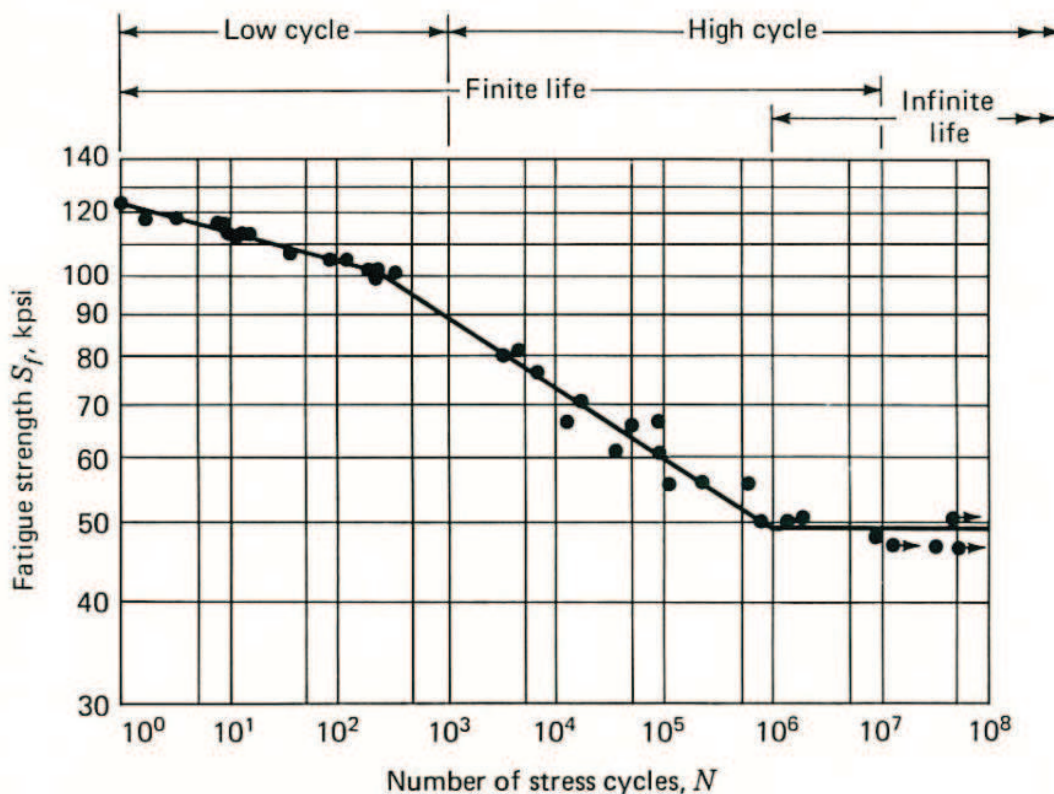
Tabulka 3.3: Hodnoty smykových napětí stanovené různými způsoby

	Analyticky ze vztahů:				MKP: rovné stlačení	MKP: stlačení pod úhlem
	(3.3) (3.4)	(3.3) (3.5)	(3.7) (2.4)	(3.7) (3.5)		
$T_{\max}$ [MPa]	992	977	919	906	871	879

Z tabulky vyplývá, že analytickým přístupem stanovené napětí se blížilo tomu stanovenému pomocí MKP, konkrétně bylo trochu vyšší, což by způsobilo naddimenzování pružiny a větší bezpečnost. Je možné, že zhuštěním sítě by bylo dosaženo vyšších hodnot napětí, to však neumožnila studentská licence programu. Nejvyššího napětí (nejkonzervativnějšího výsledku) jsme dosáhli při použití vztahu (3.3) v kombinaci s (3.4). Také je vidět, že stlačení pod úhlem $1,5^\circ$ způsobilo pouze minimální nárůst napětí.

4 Stanovení životnosti pružiny

Jednou z nejzákladnějších metod k predikci životnosti je *S-N křivka*. Symbolizuje rozptyl cyklického napětí a počet cyklů do lomu. K vytvoření takovéto křivky je zapotřebí provést testy na velkém počtu vzorků. Ty jsou zatěžovány různými amplitudami napětí a je zaznamenáván počet cyklů do lomu. Pro důkladnější testování se někdy používá pro jeden napěťový rozsah více vzorků. Vzniklé body se pak proloží vhodnou funkcí (obrázek 4.1).



Obrázek 4.1: Vznik S-N křivky [10]

Nevýhodou této metody je však, že vzniklá křivka je závislá na mnoha faktorech, například použité vzorky, materiál, kvalita jejich povrchu, kuličkování (otryskávání povrchu součásti kuličkami, vytváří na povrchu tlaková napětí, která pozitivně ovlivňují odolnost proti únavě) aj. Pokud bychom tedy chtěli získat relevantní hodnoty únavové životnosti námi vyšetřovaného modelu pružiny, bylo by nejlepší provést toto měření přímo na něm. Protože v této práci je řešen hlavně vliv velikosti smykového napětí na životnost, stačí nám stanovit pouze orientační životnosti pro každé napětí a poté porovnat jejich hodnoty [10].

4.1 Stanovení ekvivalentního průměru drátu

Protože všechny dostupné S-N křivky se vztahují k pružinám s kruhovým průřezem drátu, bylo k alespoň přibližnému stanovení životnosti nutné nejprve stanovit ekvivalentní průměr drátu, tedy takový průměr drátu, který má stejnou hodnotu modulu průřezu v krutu W_K , jako vyšetřovaný obdélníkový drát, u něž byla hodnota stanovena ze vztahu (3.1).

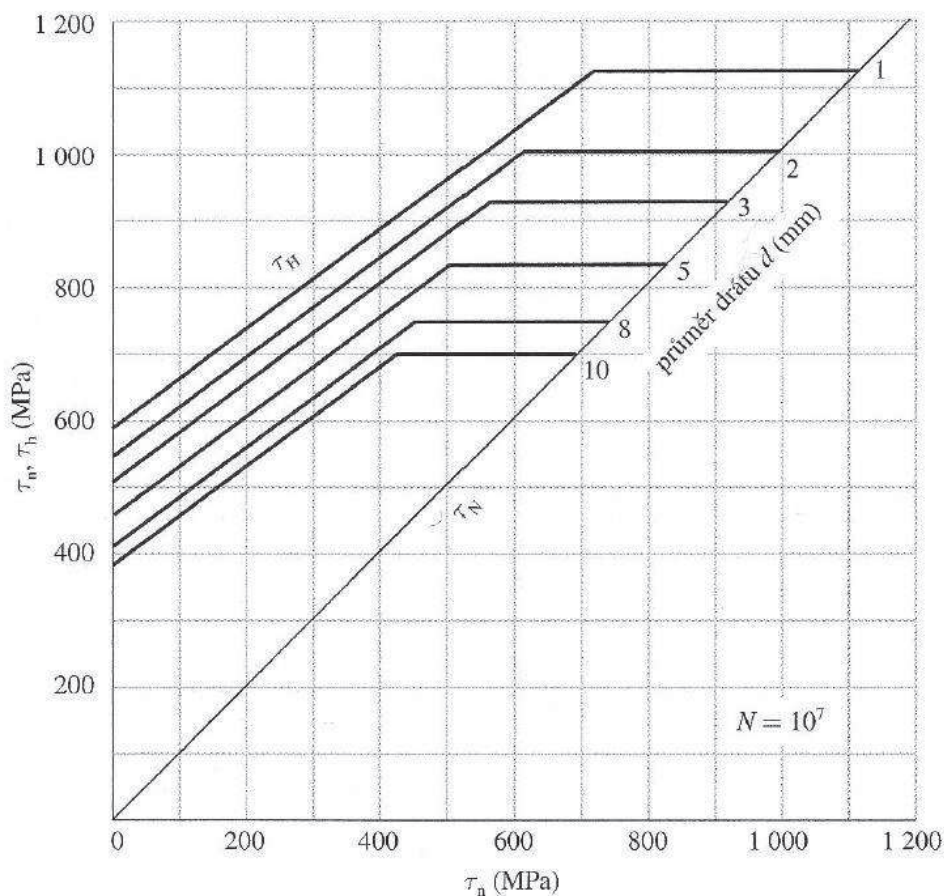
$$W_K = \alpha \cdot b h^2 = 5,286 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3$$

$$W_K = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \quad (4.1)$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot W_K}{\pi}} = 0,00646 \text{ m} = \underline{\underline{6,46 \text{ mm}}}$$

4.2 Weyrauchův diagram

V této práci byla životnost vyhodnocena na základě ČSN EN 13906-1. Tato norma vychází z Weyrauchova diagramu (obrázek 4.2), ve kterém se na vodorovnou osu vynáší dolní napětí τ_n a na svislou osu jak dolní, tak horní napětí τ_h v drátu pružiny. [1]



Obrázek 4.2: Weyrauchův diagram [1]

4.2.1 Životnost při ideálním stlačení

Horní smykové napětí (odpovídající amplitudě stlačení) je z MKP rovno

$$\tau_h = 871 \text{ MPa}$$

Dolní smykové napětí (odpovídající předepnutému stavu) je rovno

$$\tau_n = 396 \text{ MPa}$$

Rozkmit smykového napětí je

$$\Delta\tau = \tau_h - \tau_n = 871 - 396 = 475 \text{ MPa}$$

Pro $\tau_n = \tau_N = 396 \text{ MPa}$ a ekvivalentní průměr pružinového drátu 6,46 mm bylo z Weyrauchova diagramu (obrázek 4.2) odečteno mezní horní smykové napětí

$$\tau_H = 730 \text{ MPa}$$

Mezní rozkmit smykového napětí je

$$2\tau_A = \tau_H - \tau_N = 730 - 396 = 334 \text{ MPa}$$

Součinitel bezpečnosti k meznímu stavu únavy pro ideální stlačení je pak [1]

$$k_1 = \frac{2\tau_A}{\Delta\tau} = \frac{334}{475} = 0,70$$

4.2.2 Životnost při neideálním stlačení

Postup byl analogický jako v 4.2.1, pouze byly použity hodnoty napětí při stlačení pružiny pod úhlem. [1]

$$\tau_h = 879 \text{ MPa}$$

$$\tau_n = 420 \text{ MPa}$$

$$\Delta\tau = \tau_h - \tau_n = 879 - 420 = 459 \text{ MPa}$$

$$\tau_H = 740 \text{ MPa}$$

$$2\tau_A = \tau_H - \tau_N = 740 - 420 = 320 \text{ MPa}$$

$$k_2 = \frac{2\tau_A}{\Delta\tau} = \frac{320}{459} = 0,70$$

4.3 Vyhodnocení výsledků

Součinitel bezpečnosti vzhledem k meznímu stavu únavy vyšel pro oba druhy stlačení velmi podobně, menší než 1. To znamená, že podle ČSN EN 13906-1 nemá pružina při současném namáhání zaručenu neomezenou životnost. Vzhledem k tomu, že vyosení směru namáhání pružiny o $1,5^\circ$ nezpůsobilo žádnou změnu v součiniteli bezpečnosti, lze vyvrátit vliv tohoto jevu na životnost pružiny.

5 Modální analýza

Za posledních pár desítek let se modální analýza stala hlavním nástrojem pro určování, vylepšování a optimalizaci dynamických vlastností konstrukcí.

Kromě strojího a leteckého inženýrství se našlo její využití rovněž ve stavebnictví, biomechanice, kosmonautice, akustice, a jaderné energetice.

Konstrukce mají v současnosti čím dál tím větší požadavky na snížení hmotnosti a zvýšení pružnosti při zachování pevnosti. Příkladem může být automobilový průmysl, kde výrobci investovali velké částky do výzkumů, aby dosáhli klidně i mikroskopických snížení hmotnosti u jednotlivých dílů. Tyto striktní požadavky však zároveň způsobily náchylnost konstrukcí vůči nežádoucím vibracím. Z tohoto důvodu je při navrhování důležité brát v potaz i dynamické vlastnosti vzniklé konstrukce. K jejich zkoumání se využívá analytických, numerických i experimentálních přístupů.

Modální analýza je proces určování dynamických charakteristik systému, jako je vlastní frekvence, poměrný útlum a vlastní tvary a jejich využití k vytvoření matematického modelu dynamického chování tohoto systému [11].

5.1 Vlastní frekvence pružin

Během kmitání pružiny přejímá její hmota energii od sousedních strojních součástí a periodicky ji přeměňuje na potenciální, kinetickou a deformační energii. Pokud pružině předáme pouze počáteční energii, jedná se o volné kmitání a pružina bude kmitat vlastní frekvencí [1]. Pro případ jednoho stupně volnosti je tento jev popsán vztahem (5.1). Pokud kmitání po celou dobu ovlivňujeme buzením, jedná se o nucené kmitání.

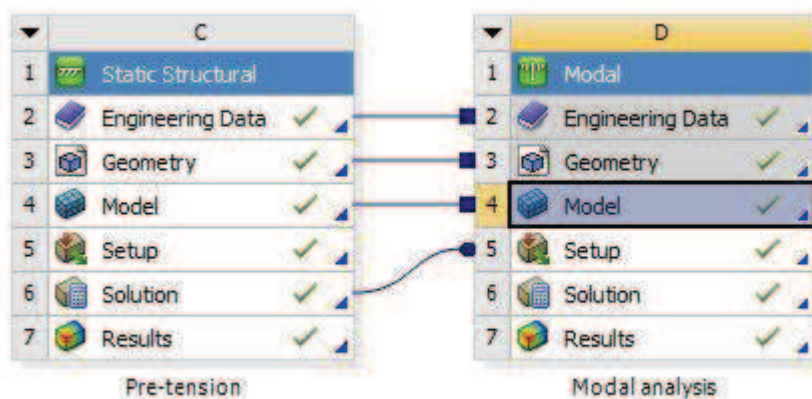
$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.1)$$

- *k... tuhost pružiny*
- *m... hmotnost činných závitů pružiny*

Při zatěžování pružiny je nutné nastavit frekvenci budící síly tak, aby se neblížila vlastní frekvenci pružiny. Jinak by mohlo dojít k rezonanci, výraznému nárůstu napjatosti v pružině a následnému porušení součásti [1]. Nejjednodušší analytický vztah (5.1) nebyl v této práci použit, protože pružina byla uložena v předepjatém stavu, měla vetknuté oba konce a byla modelována jako diskretizované kontinuum s více, než jedním stupněm volnosti. Tyto okrajové podmínky výrazně ovlivnily vlastní frekvence a v analytickém vzorci je nešlo zohlednit.

5.2 Stanovení vlastní frekvence pružiny pomocí ANSYS workbench

Vlastní frekvence pružiny byla v této práci určena využitím systému modal. Pomocí příkazu duplicate byly nakopírovány data z kapitoly 3.2.3 a následně byly propojeny workspaces engineering data, geometry, model a workspace solution byl propojen s setup (obrázek 5.1)

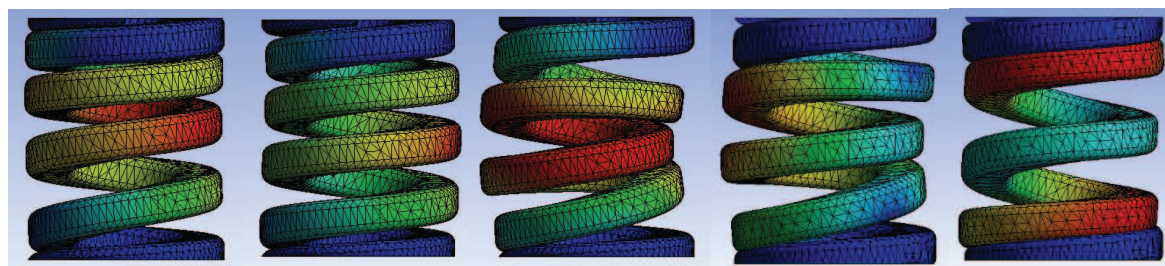


Obrázek 5.1: Provázání systému static structural se systémem modal

Byly použity stejné okrajové podmínky, jako v kapitole 3.2.3 (obrázek 3.6), s tím rozdílem že byl předepsán posuv pouze 2,5 mm ve směru osy pružiny (předpětí).

Tabulka 5.1: Vlastní frekvence pružiny

Mód	1	2	3	4	5	6
f [Hz]	1175	1441	1593	1686	2161	2404



Obrázek 5.2: Vlastní tvary (Zleva 1.-5. mód kmitání)

Hodnoty deformací u vlastních tvarů nehrají u modální analýzy roli. Vlastní tvary slouží jen pro znázornění směrů, kterými se bude součást během kmitání deformovat, čehož se dá využít například při umisťování tlumičů do složitějších konstrukcí. Žádná ze stanovených frekvencí (tabulka 5.1) se neblížila pracovním frekvencím stroje (13-27 Hz) a proto byl vyloučen vliv vlastní frekvence na poruchovost.

5.3 Vlastní frekvence stěrače

Obrázek 2.3 ukazuje, že stěrač (pozice 8) funguje jako závaží na několika paralelně spojených pružinách. Pokud by stroj běžel frekvencí podobnou vlastní frekvenci soustavy stěrač – pružiny, mohlo by dojít k silnému rozkmitání celého rámu, což by mělo negativní dopad na přesnost stříhání materiálu. Proto byla analyticky stanovena hodnota i této vlastní frekvence. Stěrač byl považován za hmotný bod, který byl vázán k základnímu tělesu pomocí nehmotných pružin.

Hmotnost stěrače včetně všech s ním pevně spojených součástí byla stanovena z CAD modelu sestavy.

$$m = 12,37 \text{ kg}$$

Tuhost soustavy paralelně spojených pružin byla určena ze vzorce (5.2).

$$k = \sum_{i=1}^n k_i \quad (5.2)$$

$$k_1 = 528,2 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} = 528200 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$k_2 = 30,1 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1} = 30100 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

- k_1 ... tuhost pružiny 1 (6 kusů v upínacím rámu)
- k_2 ... tuhost pružiny 2 (4 kusy v rámu pro upnutí střížníků)

$$k = 6 \cdot k_1 + 4 \cdot k_2 = 6 \cdot 528200 + 4 \cdot 30100 = 3289600 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

Vlastní frekvence pak byla stanovena podle (5.1).

$$f_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3289600}{12,37}} = 82 \text{ Hz}$$

Ani tato frekvence se neblížila pracovní frekvenci stroje, a proto nehrozilo rozkmitání rámu.

6 Měření změny tuhosti

Součástí výrobního závodu je i testovací laboratoř, kde probíhají tyto aktivity:

- měření dat pro PPAP
- testování sériové výroby
- podpora při řešení zákaznických reklamací
- testování pro inženýrská střediska

Je možno zde provádět tyto testy:

- zkouška tahem/tlakem
- řezy
- elektrické testy

Bylo proto navrženo změřit tuhost nové pružiny a pružiny, která prodělala $4 \cdot 10^7$ cyklů, a určit tak, zda došlo během této zátěže k nějaké změně.

6.1 Měřicí zařízení

Test byl vykonán na stroji Zwick Z005 (obrázek 6.1), který měří závislost síla/stlačení a je schopen vyvinout sílu do 5 kN. Nejčastěji je používán k měření zásuvné síly konektorů.

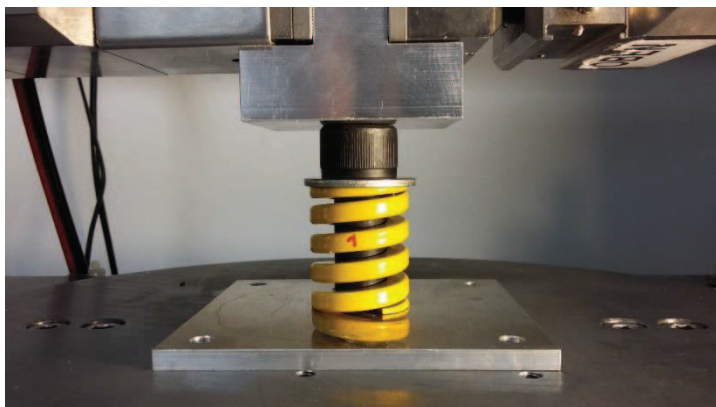


Obrázek 6.1: Měřicí zařízení Zwick Z005

6.2 Postup měření

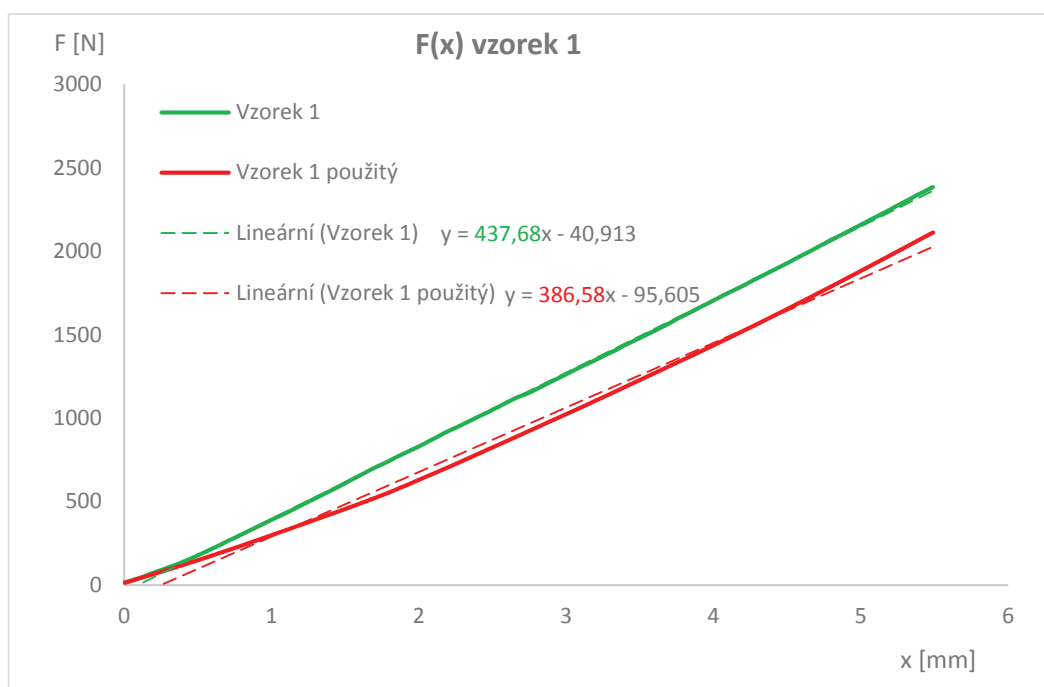
Pro měření byl sestaven přípravek ze šroubu, podložky a desky s dírou (obrázek 6.2), aby byl vzorek ve stroji naplno zajištěn a nemohlo tak dojít k nehodě.

Měření proběhlo na 6 kusech nových pružin. Měřil se průběh stykové síly pro stlačení 5,5 mm (maximální stlačení během cyklu stroje). Tyto pružiny byly vloženy do rámu stroje, kde prodělaly $4 \cdot 10^7$ cyklů a poté bylo měření opakováno.



Obrázek 6.2: Upevňovací přípravek

6.3 Vyhodnocení výsledků



Graf 6.1: Závislosti stykových sil nového a použitého vzorku č. 1 na stlačení

Vzniklá křivka závislosti síly vyvinuté pružinou na stlačení byla proložena přímkou a hodnota směrnice přímky byla poté prohlášena za naměřenou tuhost pružiny. Graf 6.1 je ukázkou pro vzorek č. 1.

Tabulka 6.1: Výsledky měření tuhosti

	Vzorek č.						Průměr	Katalog
	1	2	3	4	5	6		
k_1 [N.mm ⁻¹] (nová)	437,7	438,0	435,2	406,3	399,6	413,1	421,7	528,2
k_2 [N.mm ⁻¹] (použitá)	386,6	388,5	403,0	393,4	372,6	370,3	385,7	

Tuhost zjištěná u nových pružin byla přibližně o 100 N.mm⁻¹ menší, než ta garantovaná v katalogu výrobce (tabulka 6.1). To mohlo být způsobeno například rozdílnými podmínkami měření u výrobce.

Zatížení pružin $4 \cdot 10^7$ cykly způsobilo pokles průměrné tuhosti o 36 N.mm⁻¹, z čehož vyplývá, že během jejich života v lisu jejich vlastnosti postupně degradují a je proto vhodné je pravidelně vyměňovat.

Naměřené tuhosti nových i použitých pružin byly také dosazeny do vztahů (5.1) a (5.2). Bylo tak zjištěno, že skutečná vlastní frekvence soustavy stěrač – pružiny byla 74 Hz pro nové a 71 Hz pro použité pružiny.

7 Závěr

V této práci bylo za využití CAE analyzováno několik potenciálních příčin poruchovosti firmou využívaných nástrojářských pružin.

Byly provedeny stručné rešerše k mechanickým pružinám obecně, šroubovým tlačným pružinám s obdélníkovým průřezem drátu, metodám stanovení maximálního smykového napětí v těchto pružinách, metodám stanovení životnosti šroubových tlačných pružin a modální analýze.

Dále byl vytvořen konečněprvkový model pružiny, který vykazoval vlastnosti podobné těm uvedeným v katalogu výrobce. Pomocí tohoto modelu byla zjištěna změna napjatosti v pružině, když je stlačena pod malým úhlem.

Napětí získaná metodou konečných prvků byla posléze použita ke stanovení koeficientů bezpečnosti k meznímu stavu únavy. Vzhledem k tomu, že výrobce neposkytl stěžejní hodnoty k přesnějšímu stanovení životnosti (mez pevnosti pružinového drátu, zpracování materiálu, S-N křivka), byla životnost stanovena pouze orientačně za využití Weyrauchova diagramu a aproximace na ekvivalentní průměr drátu. Na základě vypočítaných koeficientů byl proveden závěr, že cyklické stlačování pružiny pod malým úhlem nemá výrazný vliv na její životnost.

Konečněprvkový model byl také využit k modální analýze pružiny v předepjatém stavu. Získané vlastní frekvence se neblížily skutečným pracovním frekvencím lisu, a proto byla vyloučena další možná příčina poruchovosti – vlastní frekvence.

Analyticky byla stanovena hodnota vlastní frekvence stěrače upevněného na 10 paralelně zapojených pružinách. Ta byla zhruba třikrát větší, než pracovní frekvence stroje, a proto nehrozilo nadměrné rozkmitání upínacího rámu.

Nakonec byly za využití testovací laboratoře firmy změřeny tuhosti u 6 vzorků nových pružin, které byly následně zatíženy $4 \cdot 10^7$ cykly a znovu změřeny. Už nové pružiny měly výrazně nižší tuhosti, než ty garantované výrobcem v katalogu. Jelikož byl model materiálu pružiny nastaven podle katalogu a z měření na skutečné součásti byly získány jiné hodnoty, došlo k odklonu modelu od reality, což však předem nešlo odhadnout. Zatížení pružin mnoha cykly způsobilo pokles jejich tuhosti, což znamená, že pružiny během svého života ve stroji „měknou“. S využitím naměřených tuhostí byla znovu stanovena vlastní frekvence soustavy stěrač – pružiny. Vyšla o 11 Hz nižší, což je stále dostatečně daleko od pracovní frekvence stroje. Proto je vhodné zkusit zvýšit počet cyklů mezi každou výměnou pružin a snížit tak jejich spotřebu.

8 Seznam použitých zdrojů

- [1] SHIGLEY, Joseph Edward, Charles R MISCHKE, Richard G BUDYNAS a Miloš VLK (ed.). Konstruování strojních součástí. 1. vyd. V Brně: VUTUUM, 2010 [cit. 2015-12-26], xxv, 1159 s. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 978-80-214-2629-0.
- [2] KHURMI, R. A textbook of machine design: (S.I. units). 1st multicolour ed. New Delhi: Eurasia Publishing House, 2005 [cit. 2015-12-26], xvi, 1230 s. ISBN 81-219-2537-1.
- [3] GONEN, D., A. ORAL a M. C. CAKIR. Investigating the benefits of using circular die springs instead of rectangular die springs. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* [online]. 2015, 38(7): 799-812 [cit. 2015-12-21]. DOI: 10.1111/ffe.12269. ISSN 8756758x. Dostupné z: <http://doi.wiley.com/10.1111/ffe.12269>
- [4] ONDRÁČEK, Emanuel. Mechanika těles: pružnost a pevnost II. Vyd. 4., přeprac., V Akademickém nakladatelství CERM 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006 [cit. 2015-12-22], 262 s. ISBN 80-214-3260-8.
- [5] HARTL, Martin. Konstruování strojů, strojní součásti: Přednáška 8. E-learning na VUT v Brně [online]. Brno, 2015 [cit. 2015-12-22]. Dostupné z: https://moodle.vutbr.cz/pluginfile.php/186412/mod_resource/content/1/Prednasky_nahled/5%20KS%208%202015%20nahled.pdf
- [6] PETRUŠKA, Jindřich. MKP v inženýrských výpočtech. Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky FSI VUT v Brně [online]. [cit. 2015-12-26]. Dostupné z: <http://www.umt.fme.vutbr.cz/img/fckeditor/file/opory/RIV/MKP2011.pdf>
- [7] DUŠKOVÁ, T. Deformačně-napěťová analýza ohýbaných prutů metodou konečných prvků. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015 [cit. 2015-12-22]. 65 s. Školitel Ing. Tomáš Návrát, Ph.D.
- [8] ANSYS, Inc. ANSYS Workbench User's Guide [online]. 2009 [cit. 2015-12-26]. Dostupné z: http://orange.engr.ucdavis.edu/Documentation12.1/121/wb2_help.pdf
- [9] DME Die springs [online]. [cit. 2016-02-03]. Dostupné z: <http://www.dmeeu.com/files/catalogues/en/A5.pdf>
- [10] STONE, Robert. Fatigue Life Estimates Using Goodman Diagrams. MW Industries [online]. 11 [cit. 2016-02-14]. Dostupné z: <http://www.mw-ind.com/pdfs/GoodmanFatigueLifeEstimates.pdf>
- [11] JIMIN HE AND ZHI-FANG FU. Modal analysis. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2001 [cit. 2016-02-14]. ISBN 9780080511788
- [12] JANÍČEK, Přemysl, Emanuel ONDRÁČEK a Jan VRBKA. Mechanika těles: Pružnost a pevnost I. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004 [cit. 2016-02-14]. ISBN 80-214-2592-X.

9 Seznam příloh

CD s elektronickou verzí bakalářské práce