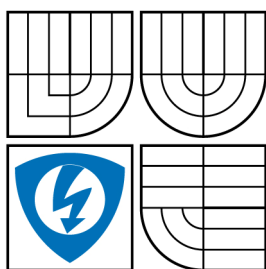


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A KOMUNIKAČNÍCH  
TECHNOLOGIÍ  
ÚSTAV AUTOMATIZACE A MĚŘICÍ TECHNIKY

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION  
DEPARTMENT OF CONTROL AND INSTRUMENTATION

# NÁVRH ŘÍZENÍ SAMOBALANCUJÍCÍHO DVOUKOLOVÉHO PODVOZKU

CONTROL DESIGN OF TWO WHEELED SELF-BALANCING SCOOTER

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE  
BACHELOR'S THESIS

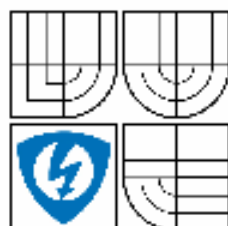
AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

JAKUB VYORAL

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

PROF. ING. FRANTIŠEK ŠOLC, CSC.

BRNO 2009



VYSOKÉ UČENÍ  
TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta elektrotechniky  
a komunikačních technologií

Ústav automatizace a měřicí techniky

## Bakalářská práce

bakalářský studijní obor  
Automatizační a měřicí technika

**Student:** Jakub Vyorál  
**Ročník:** 3

**ID:** 72769  
**Akademický rok:** 2008/2009

### NÁZEV TÉMATU:

**Návrh řízení samobalancujícího dvoukolového podvozku**

### POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

Sestavte matematický model samobalancujícího dvoukolového podvozku typu Segway. Správnost matematického modelu v maximální možné míře verifikujte. S pomocí tohoto matematického modelu navrhnete řízení podvozku, které zajistí jeho stabilizaci v klidu a pomalém pohybu po rovině (max. 5 km/h). Podvozek by měl být schopen autonomního startu typu "vztyk z vodorovné polohy". Při návrhu řídicího systému berte v úvahu reálné možnosti konstrukčního provedení podvozku.

### DOPORUČENÁ LITERATURA:

Robert Grap: "Kinematika a dynamika mechatronických systémů" CERM 2007  
Clark M.A. et al.: "EDGAR, A Self-balancing Scooter", Final Report Oct. 27, 2005, Faculty of Engineering, The Univ. of Adelaide, Australia

**Termín zadání:** 9.2.2009

**Termín odevzdání:** 1.6.2009

**Vedoucí práce:** prof. Ing. František Šolc, CSc.

prof. Ing. Pavel Jura, CSc.  
*Předseda oborové rady*

### UPOZORNĚNÍ:

Autor bakalářské práce nesmí při vytváření bakalářské práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.

## Návrh řízení samobalancujícího dvoukolového podvozku

Bakalářská práce

Specializace studia : Automatizace a měřicí technika  
Autor práce : Jakub Vyoral  
Vedoucí práce : Prof. Ing. Šolc

### Abstrakt

Práce se zabývá odvozením matematického modelu samobalancujícího vozíku typu Segway, ověřením správné funkčnosti a návrhem regulace pro jeho skutečnou realizaci. K vyřešení matematického modelu jsou zvoleny Lagrangeovy rovnice 2. druhu. Návrh konstant stavové regulace je vyzkoušen na linearizovaném modelu systému.

Praktická realizace využívá prostředí programu Matlab Simulink s nadstavbou xPC Target pro řízení v reálném čase.

### Klíčová slova

Segway  
Lagrangeovy rovnice  
stavová regulace  
samobalancující  
Matlab  
xPC Targetu

## Control design of two wheeled self-balancing scooter

Bachelor's thesis

Specialization : Control and instrumentation  
Author : Jakub Vyoral  
Supervisor : Prof. Ing. Šolc, Csc.

### Abstract

This thesis contains derivation of mathematical model of self-balancing Segway like scooter, its proper verification and design of state space control. Model is based on Lagrange equations. Constants of state space controller are tested on linearized system.

Practical realization uses design environment of Matlab Simulink with xPC Target extension for real-time control.

### Key words

Segway  
Lagrange equations  
state space control  
self-balancing  
Matlab  
xPC Target

## **BIBLIOGRAFICKÁ CITACE**

VYORAL J. Návrh řízení samobalancujícího dvoukolového podvozku. Brno:  
Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních  
technologií, 2009, 65 s, 1s příloh. Vedoucí bakalářské práce prof. Ing. František Šolc,  
Csc

## **Prohlášení**

„Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma Návrh řízení samobalancujícího dvoukolového podvozku jsem vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této bakalářské práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 152 trestního zákona č. 140/1961 Sb.“

V Brně dne: **1. června 2009**

.....  
podpis autora

## **Poděkování**

Děkuji vedoucímu bakalářské práce prof. Ing. Františku Šolcovi, CSc. za účinnou metodickou, pedagogickou a odbornou pomoc a další cenné rady při zpracování mé bakalářské práce.

V Brně dne: **1. června 2009**

.....  
podpis autora

## Obsah

<b>1. ÚVOD .....</b>	<b>9</b>
<b>2. MATEMATICKÝ MODEL .....</b>	<b>10</b>
2.1 Schéma vozíku segway .....	11
2.2 Zjednodušení zvolená při řešení .....	12
2.3 rychlost a zrychlení řidiče .....	12
2.4 matematický Model motoru .....	15
2.5 momenty vyvolané motory .....	19
2.6 Výpočet matematického modelu Lagrangeovými rovnicemi .....	21
2.6.1 Kinetické energie systému .....	22
2.6.2 Potenciální energie systému .....	23
2.6.3 Ztrátová energie .....	24
2.6.4 Práce vykonaná systémem .....	24
2.6.5 Lagrangeova funkce pro systém .....	25
2.6.6 Dosazení parciálních derivací .....	25
2.7 Linearizace modelu .....	29
<b>3. OVĚŘENÍ MODELU .....</b>	<b>33</b>
3.1.1 Stabilní polohy .....	33
3.1.2 Ustálené kmity .....	33
<b>4. VYPOČÍTANÉ A ZMĚŘENÉ KONSTANTY .....</b>	<b>39</b>
4.1 Konstanty setrvačných vlastností .....	40
4.2 Elektromechanické konstanty .....	44
<b>5. NÁVRH ŘÍZENÍ .....</b>	<b>46</b>
5.1 Nastavení K .....	47
5.2 Senzory .....	48
5.3 xpc Target .....	50
5.4 Simulace na reálném zařízení a linearizovaném matematickém modelu .....	51
5.4.1 Linearizovaný model .....	51
5.4.2 Reálné zařízení .....	54

<b>6. ZÁVĚR .....</b>	<b>59</b>
<b>7. SEZNAM POUŽITÝCH VÝRAZŮ A ZKRATEK.....</b>	<b>62</b>
<b>8. PŘÍLOHY .....</b>	<b>63</b>
8.1 Momenty setrvačnosti vybraných těles .....	63
Použitá literatura .....	64



## 1. ÚVOD

Cílem práce je sestavení matematického modelu vozítka Segway. Vytvoření simulace tohoto modelu v prostředí MatLab a na základě experimentů navrhnout jeho reálné řešení.

Segway je elektrické dvoustopé vozítko, které dokáže samostatně udržet rovnováhu. Navrhovaný model má za úkol vyregulovat toto pojízdné inverzní kyvadlo v kolmé poloze za pomoci horizontálního pohybu. K řízení se použije PC kartu MF 614 (Multifunction I/O Card), která komunikuje přes prostředí Simulink pomocí nadstavby xPC Target. Vyřeší se tak problém s převodem veličin, navrhováním řídicí elektroniky a komunikace po sériové lince.

## 2. MATEMATICKÝ MODEL

Význam použitých indexů  $i$  :

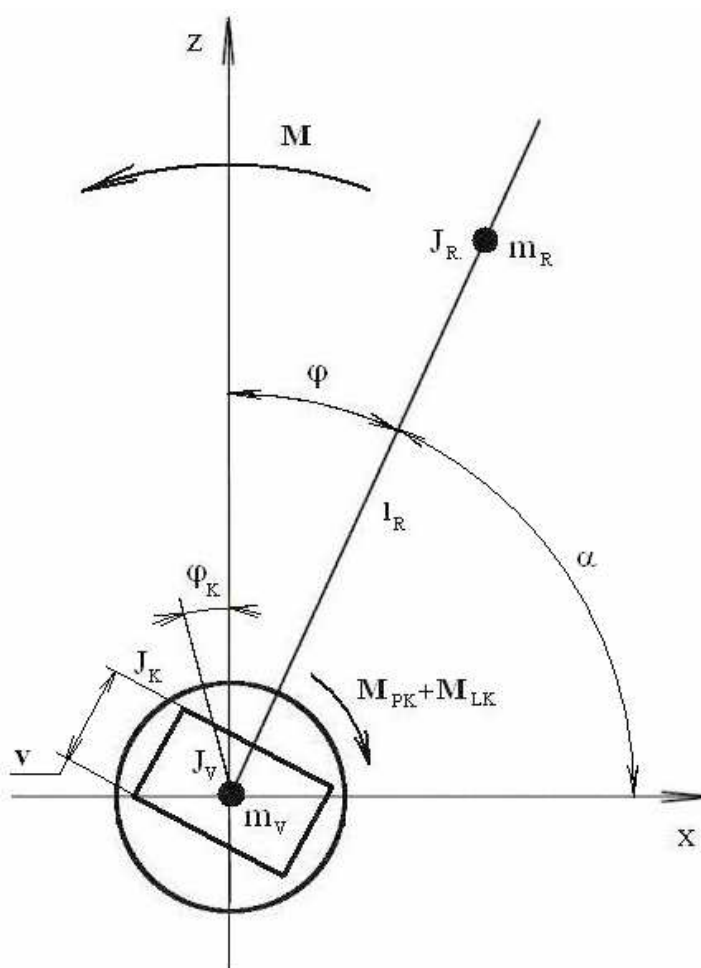
Označení indexu	Objekt
V	vozík
K	kolo
S	skelet vozíku
J	řídící jednotka
k, p	kinetická, potenciální složka energie systému
R	kyvadlo, řidič
P, L	pravý, levý
x, y, z	značení os souřadného systému
m	motor
i	obecný index

Veličiny použité při výpočtu,  $i$  zastupuje index

Veličina	Jednotka	Popis
L	[m]	délka kyvadla
r	[m]	poloměr kola
g	[m.s <sup>-2</sup> ]	tíhové zrychlení
$\varphi, \delta, \varepsilon$	[rad]	úhlové natočení kyvadla kolem os x, y, z
$m_i$	[kg]	hmotnost
$J_i$	[kg.m <sup>2</sup> ]	moment setrvačnosti
$M_i$	[Nm]	moment síly
$\omega_i$	[rad.s <sup>-1</sup> ]	úhlová rychlost
$E_i$	[J]	energie
$H_i$	[N]	horizontální síla
A	[J], [-]	práce, amplituda
D	[m]	šířka vozíku
d	[m]	polovina šířky vozíku
$d_i$	[%]	střída PWM modulace
s	-	Laplaceův operátor
$s_i$	[m]	šířka
$v_i$	[m]	výška
n	[ot.min <sup>-1</sup> ]	otáčky motoru

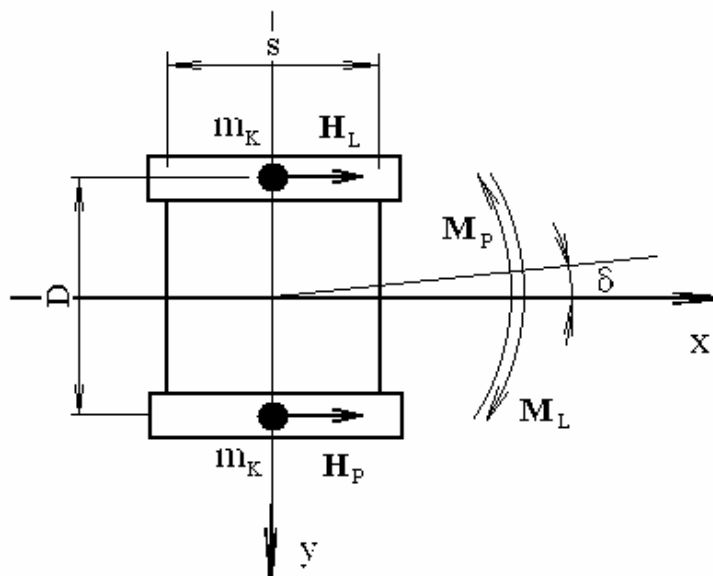
## 2.1 SCHÉMA VOZÍKU SEGWAY

Vozík je umístěn do kartézského souřadného systému. Směr kladného pohybu je zvolen kladný směr osy  $x$ . Osa rotace pro úhlové natočení  $\varphi$  je totožná s osou  $y$ .



Obr. 1: Schéma vozíku typu Segway

Podvozek vozíku Obr. 1: svírá s osou  $x$  úhel zatáčení  $\delta$ . Hmotnosti vozíku a kyvadla jsou soustředěny do dvou hmotných bodů reprezentujících hmotnost řidiče  $m_R$  a hmotnost vozíku  $m_V$ . Momenty  $M_L$  a  $M_P$  jsou protichůdné momenty vyvolané motory, které způsobují rotaci vozíku v ose  $z$ .



Obr. 2: Podvozek vozíku

## 2.2 ZJEDNODUŠENÍ ZVOLENÁ PŘI ŘEŠENÍ

- pojmy kyvadlo a řidič zmíněné v textu mají ekvivalentní význam
- kola mají shodné parametry

$$J_{KP} = J_{KL} = J_K$$

$$m_{KP} = m_{KL} = m_K$$

- při otáčení vozíku dochází k rotaci v z-osách kol, pokud je vozík dostatečně těžký a úhel natočení malý, je možné zvolit osu rotace celého systému v těžišti vozíku
- zanedbaný vliv rotace kolem osy x a y na kyvadlo

## 2.3 RYCHLOST A ZRYCHLENÍ ŘIDIČE

Pro výpočet rychlosti a zrychlení hmotného bodu řidiče je vhodné použít transformačních matic. V případě vozíku Segway se jedná o kombinaci translačního

pohybu s rotačním. Kdyby se nezanedbával vlivu úhlů  $\delta$  a  $\varepsilon$ , byla by potřeba zahrnout dvě další rotace. Použije-li homogenní transformační DH matice [4], lze popsat transformaci mezi systémem vozíku a kyvadla následujícím způsobem :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{p}_v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_y & \mathbf{x}_R \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

kde :  $\mathbf{p}_v$  - souřadný systém vozíku

$\mathbf{p}_R$  - souřadný systém kyvadla

$\mathbf{x}_R$  - translační část transformace, souřadnice polohy těžiště kyvadla, zvýrazněno podtržením pro zvýraznění, že se jedná o vektor

$\mathbf{R}_y$  - matice rotace kolem osy y

Matice rotace  $\mathbf{R}_y$  představuje otočení kyvadla kolem osy y o úhel  $\alpha$ , sklon kyvadla k ose x:

$$\mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Uvažme, že  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \varphi$  a  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \varphi$ , rotační matice přejde do použitelné formy se závislostmi na úhlu náklonu kyvadla  $\varphi$ :

$$\mathbf{R}_Y^* = \begin{pmatrix} \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Dosazením do (2.1) dostaneme výsledný tvar transformace mezi souřadným systémem kyvadla a vozíku :

$$\begin{pmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi & 0 & \cos \varphi & x + l \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\cos \varphi & 0 & \sin \varphi & l \cos \varphi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Můžeme přímo přepsat souřadnice polohy těžiště řidiče :

$$\underline{\mathbf{x}}_R = \begin{pmatrix} x + l \sin \varphi \\ 0 \\ l \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Derivováním dostaneme rychlost kyvadla

$$\underline{\dot{\mathbf{x}}}_R = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x + l \sin \varphi \\ 0 \\ l \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} + l \dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 \\ -l \dot{\varphi} \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{Rx} \\ v_{Ry} \\ v_{Rz} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Pro získání zrychlení provedeme druhou derivaci

$$\underline{\ddot{\mathbf{x}}}_R = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{x} + l \dot{\varphi} \cos \varphi \\ 0 \\ l \dot{\varphi} \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} + l \ddot{\varphi} \cos \varphi - l \dot{\varphi} \sin \varphi \\ 0 \\ -l \ddot{\varphi} \sin \varphi - l \dot{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Natočení do souřadného systému kyvadla.  $\mathbf{R}_y^*$  je maticí natočení (2.2) pro úhel  $\varphi$

$$\ddot{\mathbf{x}}_{R\text{Rot}} = \mathbf{R}_y^* \underline{\ddot{\mathbf{x}}}_R$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_{\text{RRot}} = \begin{pmatrix} \sin \varphi & 0 & -\cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} + l\ddot{\varphi} \cos \varphi - l\dot{\varphi} \sin \varphi \\ 0 \\ -l\ddot{\varphi} \sin \varphi - l\dot{\varphi} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Zrychlení v souřadném systému kyvadla :

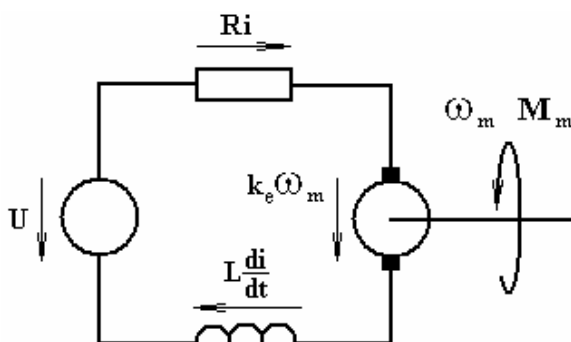
$$\ddot{\mathbf{x}}_{\text{RRot}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \sin \varphi - l\dot{\varphi}^2 \\ 0 \\ \ddot{x} \cos \varphi - l\ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{Rx} \\ a_{Ry} \\ a_{Rz} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

## 2.4 MATEMATICKÝ MODEL MOTORU

Matematický model ss motoru řízeného napájecím napětím  $U$ . Vydeme ze schéma na Obr. 3: . Podle 1.KZ platí rovnice

$$U = Ri + k_e \omega_m + L \frac{di}{dt} \quad (2.7)$$

kde :	$R$	$[\Omega]$	odpor vinutí rotoru motoru
	$i$	$[A]$	proud motorem
	$k_e$	$[V.s.rad^{-1}]$	elektromotorická konstanta
	$\omega_m$	$[rad.s^{-1}]$	úhlová rychlost rotoru
	$L$	$[H]$	vlastní indukčnost motoru
	$U$	$[V]$	napětí na motoru



Obr. 3: Model motoru

Výstupní moment motoru  $M_m$  závisí na konstrukční momentové konstantě  $k_m$  :

$$M_m = k_m i \quad (2.8)$$

$$J_m \frac{d\omega_m}{dt} = M_m \quad (2.9)$$

$$J_m \frac{d\omega_m}{dt} = k_m i \quad (2.10)$$

Zjednodušíme rovnici dosazením  $L = 0H$  a vyjádříme proud  $i$  :

$$i = \frac{U}{R} - \frac{k_e}{R} \omega_m \quad (2.11)$$

Dosazení (2.11) do (2.10) :

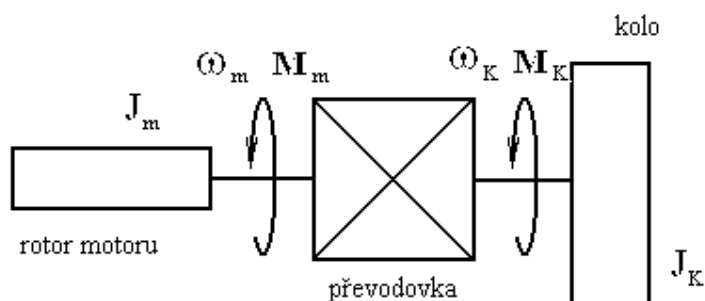
$$\frac{d\omega_m}{dt} = \frac{k_m}{J_m R} U - \frac{k_m k_e}{J_m R} \omega_m \quad (2.12)$$

Za předpokladu, že  $\dot{\varphi}_m = \omega_m$  a  $\ddot{\varphi}_m = \frac{d\omega_m}{dt}$  dosadíme do stavového modelu podle kapitoly 2.7



$$\begin{pmatrix} \dot{\phi}_m \\ \ddot{\phi}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_m k_e}{J_m R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k_m}{J_m R} \end{pmatrix} U \quad (2.13)$$

Přepočet momentu setrvačnosti rotoru motoru na moment setrvačnosti za převodovkou.



Obr. 4: Přepočet momentu setrvačnosti za převodovku

Převodový poměr definujeme jako poměr vstupních otáček k výstupním :

$$N = \frac{\dot{\phi}_m}{\dot{\phi}_k} = \frac{M_k}{M_m} \quad (2.14)$$

Přepočet pomocí zákona o zachování energie :

$$\begin{aligned} J_m \dot{\phi}_m^2 &= J_m^* \dot{\phi}_k^2 \\ J_m^* &= J_m \left( \frac{\dot{\phi}_m}{\dot{\phi}_k} \right)^2 = J_m N^2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Moment setrvačnosti kola se započítaným vlivem momentu setrvačnosti rotoru motoru :

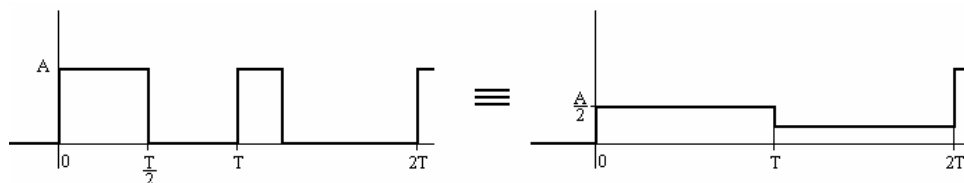
$$J_K^* = J_K + J_m^* \quad (2.16)$$

Stavový model lze upravit na tvar veličin za převodovkou

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_K \\ \ddot{\varphi}_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_m k_e}{J_K^* R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_K \\ \dot{\varphi}_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k_m}{J_K^* N R} \end{pmatrix} U \quad (2.17)$$

Protože máme požadavek na řízení momentu motoru, použijeme PWM modulaci vstupního napětí. Frekvence obdélníkových pulzů se zvolí podle potřeb řešené úlohy. Střída signálu napětí  $d$  řídí plochu impulzů. Při dostatečně velké frekvenci je možné považovat plochy impulzů za ekvivalentní s plochami, které získáme násobením napětí přímo hodnotou střídý z rozsahu  $d \in \langle -1, 1 \rangle$ . Viz Obr. 5:

$$U = dU_A \quad (2.18)$$



Obr. 5: Ekvivalent střídý

Upravený model se vstupním signálem střídý

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_K \\ \ddot{\varphi}_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_m k_e}{J_K^* R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_K \\ \dot{\varphi}_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k_m U}{J_K^* N R} \end{pmatrix} d \quad (2.19)$$

## 2.5 MOMENTY VYVOLANÉ MOTORY

Vyjdeme z matematického modelu stejnosměrného komutátorového motoru (2.19). Moment motoru působící na levé a pravé kolo:

$$\begin{aligned} M_{LK} &= -\frac{k_m k_e}{Rr} \dot{x} + \frac{k_m U}{NR} d_L \\ M_{PK} &= -\frac{k_m k_e}{Rr} \dot{x} + \frac{k_m U}{NR} d_P \end{aligned} \quad (2.20)$$

Moment působící na vozík v ose y vychází jako příspěvek od obou kol (Obr. 1: )

$$M = M_{LK} + M_{PK} = -\frac{2k_m k_e}{Rr} \dot{x} + \frac{k_m U}{NR} (d_L + d_P) \quad (2.21)$$

Moment působící v ose z vyvolaný jedním motorem vypočítáme jako horizontální sílu působící ze středu kola vozíku na rameni odpovídajícímu polovině šířky vozíku d.

Horizontální síla působící na kolo

$$H = \ddot{x} m_K \quad (2.22)$$

Pro kolo vozíku platí :

$$\dot{\phi}_K = -\frac{\dot{x}}{r} \quad (2.23)$$

$$\ddot{\phi}_K = -\frac{\ddot{x}}{r} \quad (2.24)$$

Úhlové zrychlení vozíku  $\ddot{\phi}_K$  pak převedeme na zrychlení vozíku podle (2.24)

$$J_K^* \ddot{\phi}_K = -M_K$$

$$\ddot{x} = \frac{r}{J_K^*} M_K$$

Dosazení do (2.22)

$$H = \frac{m_K r}{J_K^*} M_K$$

Moment levého a pravého kola působící na rotaci podvozku v ose z

$$M_L = dH_L = \frac{m_K r d}{J_K^*} M_{KL}$$

$$M_P = dH_P = \frac{m_K r d}{J_K^*} M_{KP} \quad (2.25)$$

Z Obr. 2: lze odvodit, že při natočeném vozíku je vzdálenost x průměrnou hodnotou x-ových souřadnic kol a platí :

$$x_P + x_L = 2x \quad (2.26)$$

Rozdíl x-ových souřadnic v závislosti na úhlu natočení.

$$x_P - x_L = 2d \sin \delta$$

$$\dot{x}_P - \dot{x}_L = 2\dot{\delta} d \cos \delta \quad (2.27)$$

## 2.6 VÝPOČET MATEMATICKÉHO MODELU LAGRANGEOVÝMI ROVNICEMI

Lagrangeovy rovnice vychází z optimalizace rozložení energie v systému. Systém s nejmenší energií odpovídá hledanému modelu, který nezávisí na fyzikálním principu.

Využití Lagrangeových rovnic II. Druhu :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial R}{\partial q} = \frac{\partial A}{\partial q} \quad (2.28)$$

$$\text{kde } L = E_k - E_p$$

Systém má 3 stupně volnosti, bude tedy sestávat ze tří diferenciálních rovnic :

1. Za zobecněnou rychlost  $\dot{q}$  je zvolena rychlost  $\dot{x}$ , jako obecnou výchylku  $q$  zvolíme  $x$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x} \quad (2.29)$$

2. Za zobecněnou rychlost  $\dot{q}$  se volí úhlová rychlost  $\dot{\varphi}$ , obecnou výchylkou  $q$  bude  $\varphi$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{\partial R}{\partial \varphi} = \frac{\partial A}{\partial \varphi} \quad (2.30)$$

3. Za zobecněnou rychlost  $\dot{q}$  se je zvolena úhlová rychlost  $\dot{\delta}$ , obecnou výchylkou  $q$  bude  $\delta$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \delta} - \frac{\partial R}{\partial \delta} = \frac{\partial A}{\partial \delta} \quad (2.31)$$

### 2.6.1 Kinetické energie systému

Z matice (2.5) dostaneme výslednou rychlost  $v_R$  :

$$\begin{aligned} v_R^2 &= v_{Rx}^2 + v_{Rz}^2 \\ v_R^2 &= (\dot{x} + l\dot{\phi} \cos \varphi)^2 + (l\dot{\phi} \sin \varphi)^2 \\ v_R^2 &= \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi} \cos \varphi + l^2\dot{\phi}^2 \cos^2 \varphi + l^2\dot{\phi}^2 \sin^2 \varphi \\ v_R^2 &= \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi} \cos \varphi + l^2\dot{\phi}^2 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Kinetické energie kol, kyvadla, vozíku a rotace kolem osy z

$$\begin{aligned} E_{kK} &= \frac{1}{2} m_K (\dot{x}_L^2 + \dot{x}_R^2) + \frac{1}{2} J_K^* (\dot{\phi}_L^2 + \dot{\phi}_R^2) = \left( m_K + \frac{J_K^*}{r^2} \right) \dot{x}^2 \\ E_{kR} &= \frac{1}{2} m_R v_R^2 + \frac{1}{2} J_V \dot{\phi}^2 = \frac{1}{2} m_R (\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi} \cos \varphi + l^2\dot{\phi}^2) + \frac{1}{2} J_R \dot{\phi}^2 \\ E_{kV} &= \frac{1}{2} m_V \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_V \dot{\phi}^2 \\ E_{k\delta} &= \frac{1}{2} J_{Vz} \dot{\delta}^2 \end{aligned}$$

Celková kinetická energie představuje součet všech dílčích kinetických energií v systému :

$$E_k = \sum E_{ki} = E_{kK} + E_{kR} + E_{kV} + E_{k\delta} \quad (2.33)$$

$$E_k = \left( m_K + \frac{J_K^*}{r^2} \right) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left( \dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi + l^2 \dot{\varphi}^2 \right) + \frac{1}{2} J_R \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_V \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_V \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} J_{Vz} \dot{\delta}^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} \left[ \left( 2m_K + \frac{2J_K^*}{r^2} + m_R + m_V \right) \dot{x}^2 + (m_R l^2 + J_R + J_V) \dot{\varphi}^2 + 2m_R l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + J_{Vz} \dot{\delta}^2 \right]$$

(2.34)

Pro zjednodušení výrazů zavedeme vhodné substituce :

$$a = 2m_K + \frac{2J_K^*}{r^2} + m_R + m_V \quad [a] = kg \quad (2.35)$$

$$b = m_R l^2 + J_R + J_V \quad [b] = kg \cdot m^2 \quad (2.36)$$

Kinetická energie tedy přejde do tvaru :

$$E_k = \frac{1}{2} (a \dot{x}^2 + b \dot{\varphi}^2 + 2m_R l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + J_{Vz} \dot{\delta}^2) \quad (2.37)$$

### 2.6.2 Potenciální energie systému

Potenciální energie kyvadla je závislá na souřadnici  $z_R$  řidiče :

$$z_R = l \cos \varphi$$

$$E_{pR} = m_R g z_R$$

$$E_{pR} = m_R g l \cos \varphi \quad (2.38)$$

Souřadný systém vozíku je umístěn v těžišti vozíku. Zde je vztažný nulový potenciál pole a proto je potenciální energie řidiče celkovou potenciální energií soustavy :

$$E_p = E_{pR} = m_R g l \cos \varphi \quad (2.39)$$

### 2.6.3 Ztrátová energie

Protože se v systému neuvažují ztráty, bude ztrátová energie rovna nule

$$R = 0 \quad (2.40)$$

### 2.6.4 Práce vykonaná systémem

Pro doplnění celé rce je třeba vyjádřit celkovou práci vykonanou v systému.

Práce kol podle (2.23):

$$A_K = -M\varphi_K = \frac{M}{r} x \quad (2.41)$$

Práce při zatáčení vozíku je brána jako rozdíl prací vyvolaných protichůdnými momenty kol :

$$A_{Vz} = (M_P - M_L) \delta$$

Dosazení momentů z (2.25):

$$A_{Vz} = \frac{m_K r d}{J_K^*} (M_{PK} - M_{LK}) \delta \quad (2.42)$$

Momenty působící na kola dosadíme dle (2.20) :



$$A_{V_z} = \frac{m_K r d}{J_K^*} \delta \left[ \frac{k_m k_e}{R r} (\dot{x}_L - \dot{x}_P) + \frac{k_m U}{N R} (d_P - d_L) \right]$$

Dosazení (2.27) :

$$A_{V_z} = \frac{m_K r d}{J_K^*} \delta \left[ -\frac{2k_m k_e d}{R r} \dot{\delta} \cos \delta + \frac{k_m U}{N R} (d_P - d_L) \right]$$

Výsledná práce systému je dána součtem všech prací :

$$A = \sum A_i = A_K + A_R + A_{V_z}$$

$$A = \left[ -\frac{2k_m k_e}{R r} \dot{x} + \frac{k_m U}{N R} (d_L + d_P) \right] \left( \frac{x}{r} - \varphi \right) + \frac{m_K r d}{J_K^*} \delta \left[ -\frac{2k_m k_e d}{R r} \dot{\delta} \cos \delta + \frac{k_m U}{N R} (d_P - d_L) \right]$$

(2.43)

### 2.6.5 Lagrangeova funkce pro systém

Lagrangeova funkce je definována jako rozdíl kinetické a potenciální energie

$$L = E_k - E_p = \frac{1}{2} (a \dot{x}^2 + b \dot{\varphi}^2 + 2m_R l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + J_{V_z} \dot{\delta}^2) - m_R g L \cos \varphi$$

(2.44)

### 2.6.6 Dosazení parciálních derivací

Dosazení parciálních derivací do rovnice (2.29)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = a\dot{x} + m_R l \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = a\ddot{x} + m_R l (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{M}{r}$$

tedy

$$a\ddot{x} + m_R l (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) = \frac{M}{r} \quad (2.45)$$

Dosazení parciálních derivací do rovnice (2.30)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = b\dot{\varphi} + m_R l \dot{x} \cos \varphi$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = b\ddot{\varphi} + m_R l (\ddot{x} \cos \varphi - \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_R l \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi + m_R g l \sin \varphi$$

$$\frac{\partial A}{\partial \varphi} = -M$$

tedy

$$\begin{aligned} b\ddot{\varphi} + m_R l (\ddot{x} \cos \varphi - \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi) - (-m_R l \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi + m_R g l \sin \varphi) &= -M \\ b\ddot{\varphi} + m_R l \ddot{x} \cos \varphi - m_R g l \sin \varphi &= -M \end{aligned} \quad (2.46)$$

Dosazení parciálních derivací do rovnice (2.30)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}} = J_{V_z} \dot{\delta}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}} \right) = J_{V_z} \ddot{\delta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta} = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial \delta} = \frac{m_K r d}{J_K^*} \left[ -\frac{2k_m k_e d}{Rr} \dot{\delta} \cos \delta + \frac{k_m U}{NR} (d_P - d_L) \right]$$

platí :

$$\ddot{\delta} = -\frac{2k_m k_e d^2 m_K}{J_{V_z} J_K^* R} \dot{\delta} \cos \delta + \frac{m_K k_m U r d}{J_K^* N R} (d_P - d_L) \quad (2.47)$$

V prvních dvou rovnicích soustavy se objevila algebraická smyčka

$$a\ddot{x} + m_R l \ddot{\varphi} \cos \varphi - m_R l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = \frac{M}{r} \quad (2.48)$$

$$b\ddot{\varphi} + m_R l \ddot{x} \cos \varphi - m_R g l \sin \varphi = -M \quad (2.49)$$

Pro vyjádření druhých derivací stavových veličin a tím i odstranění algebraické smyčky, přepíšeme rovnice do maticového tvaru. Jako zjednodušení použijme substituci  $c = m_R l \cos \varphi$  :

$$\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{M}{r} + m_R g l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\ -M + m_R g l \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\begin{vmatrix} a & c \\ c & b \end{vmatrix}} \text{adj} \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{M}{r} + m_R g l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \\ -M + m_R g l \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{ab - c^2} \begin{pmatrix} \left(c + \frac{b}{r}\right)M + b m_R l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - c m_R g l \sin \varphi \\ \left(-a - \frac{c}{r}\right)M - c m_R l \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + a m_R g l \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

Přepíšeme rovnice (2.51) :

$$\ddot{x} = \frac{rc + b}{(ab - c^2)r} M + \frac{b m_R l}{ab - c^2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \frac{c m_R g l}{ab - c^2} \sin \varphi \quad (2.52)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{-ra - c}{(ab - c^2)r} M - \frac{c m_R l}{ab - c^2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \frac{a m_R g l}{ab - c^2} \sin \varphi \quad (2.53)$$

Po dosazení momentů do (4.51) a (4.52) dostáváme výsledný nelineární model

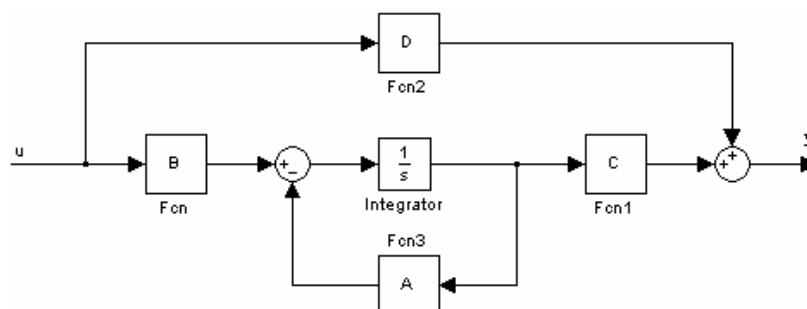
$$\ddot{x} = -\frac{2k_m k_e (rc + b)}{Rr^2 (ab - c^2)} \dot{x} + \frac{k_m U (rc + b)}{NRr (ab - c^2)} (d_L + d_P) + \frac{b m_R l}{ab - c^2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \frac{c m_R g l}{ab - c^2} \sin \varphi \quad (2.54)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{2k_m k_e (ra + c)}{Rr^2 (ab - c^2)} \dot{x} - \frac{k_m U (ra + c)}{NRr (ab - c^2)} (d_L + d_P) - \frac{c m_R l}{ab - c^2} \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \frac{a m_R g l}{ab - c^2} \sin \varphi \quad (2.55)$$

$$\ddot{\delta} = -\frac{2k_m k_e d^2 m_K}{J_{vz} J_K^* R} \dot{\delta} \cos \delta + \frac{m_K k_m U r d}{J_K^* N R} (d_P - d_L) \quad (2.56)$$

## 2.7 LINEARIZACE MODELU

Pokud je linearizace možná, ve vztahu k charakteru modelu, popřípadě požadavkům na něj kladeným, je vhodné použít stavového prostoru. Obecný stavový model představuje schéma na Obr. 6:



Obr. 6: Schéma stavového modelu

Matematický model stavového prostoru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Matice  $\mathbf{A}$  představuje koeficienty dynamiky systému,  $\mathbf{B}$  matici vstupních proměnných,  $\mathbf{C}$  výstupní matici proměnných. Matice  $\mathbf{D}$  určuje míru přímé vazby vstupu na výstup. Protože v modelu není žádná přímá vazba na výstup, je matice  $\mathbf{D}$  linearizovaného modelu nulová a dále se neuvažuje.

Pro malé úhly  $\varphi, \delta$  platí linearizace Taylorovým rozvojem

$$\sin \varphi \approx \varphi \tag{2.57}$$

$$\cos \varphi \approx 1 \Rightarrow c \approx m_R l$$

$$\dot{\varphi}^2 \approx 0$$

$$\cos \delta \approx 1$$

Poté lze rovnice zapsat do tvaru (2.54) ÷ (2.56):

$$\ddot{x} = -\frac{2k_m k_e (rm_R l + b)}{J_K R r (ab - m_R^2 l^2)} \dot{x} + \frac{k_m U (rm_R l + b)}{J_K r (ab - m_R^2 l^2)} (d_L + d_P) - \frac{m_R^2 l^2 g}{ab - m_R^2 l^2} \varphi \quad (2.58)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{2k_m k_e (ra + m_R l)}{J_K R r (ab - m_R^2 l^2)} \dot{x} - \frac{k_m U (ra + m_R l)}{J_K r (ab - m_R^2 l^2)} (d_L + d_P) + \frac{am_R g l}{ab - m_R^2 l^2} \varphi \quad (2.59)$$

$$\ddot{\delta} = -\frac{2k_m k_e d^2 m_K r}{J_{Vz} J_K^* R r} \dot{\delta} + \frac{m_K k_m U r d}{J_K^* N R} (d_P - d_L) \quad (2.60)$$

Rovnice linearizovaného modelu nyní zahrnují pouze lineární kombinace stavových proměnných, proto lze jejich koeficienty brát přímo jako prvky matic stavového modelu.

Za předpokladu, že zvolíme vektory stavových a vstupních veličin jako

$$\mathbf{x} = (x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi}, \delta, \dot{\delta})^T \quad (2.61)$$

$$\mathbf{u} = (d_L, d_P)^T \quad (2.62)$$

dostáváme z rovnic přímo koeficienty matice A :

$$A_{22} = -\frac{2k_m k_e (rm_R l + b)}{J_K R r (ab - m_R^2 l^2)}$$

$$A_{23} = -\frac{m_R^2 l^2 g}{ab - m_R^2 l^2}$$

$$A_{42} = \frac{2k_m k_e (ra + m_R l)}{J_K R r (ab - m_R^2 l^2)}$$

$$A_{43} = \frac{am_R g l}{ab - m_R^2 l^2}$$

$$A_{66} = -\frac{2k_m k_e d^2 m_K r}{J_{Vz} J_K^* R r}$$

Koeficienty matice B :

$$B_2 = \frac{k_m U (r m_R l + b)}{J_K r (ab - m_R^2 l^2)}$$

$$B_4 = -\frac{k_m U (r a + m_R l)}{J_K r (ab - m_R^2 l^2)}$$

$$B_6 = \frac{m_K k_m U r d}{J_K^* N R}$$

Matice C představuje výstup systému. K regulaci stability soustavy jsou nejdůležitější veličiny  $x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi}$ , k zatáčení je možné navíc vyvést i  $\delta, \dot{\delta}$ . Převod všech nezměnných proměnných na výstup tedy provedeme jednotkovou maticí o rozměrech 6x6. Systém nemá vazbu ze vstupu na výstup, proto je matice D nulová.

Matice linearizovaného modelu :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & A_{42} & A_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_2 & B_2 \\ 0 & 0 \\ B_4 & B_4 \\ 0 & 0 \\ B_6 & -B_6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{E}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Výsledný stavový model :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & A_{42} & A_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_2 & B_2 \\ 0 & 0 \\ B_4 & B_4 \\ 0 & 0 \\ B_6 & -B_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ d_P \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ d_P \end{pmatrix} \quad (2.64)$$



### 3. OVĚŘENÍ MODELU

Ověření modelu je prováděno na nelineárním matematickém modelu. Vyzkoušejme tedy několik situací, při kterých by se měl vozík zachovat jednoznačně ověřitelným způsobem.

#### 3.1 STABILNÍ POLOHY

Vyjděme z předpokladu, že na neřízený vozík s nulovým vychýlením  $\varphi = 0$  nepůsobí žádné vnější síly nebo momenty, kromě tíhového zrychlení. Za těchto podmínek jsou  $d_L, d_p$  rovny nule stejně jako  $\dot{x}, \dot{\varphi}, \dot{\delta}$ .

Rovnice nabudou zjednodušený tvar :

$$\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{\varphi} = 0$$

$$\ddot{\delta} = 0$$

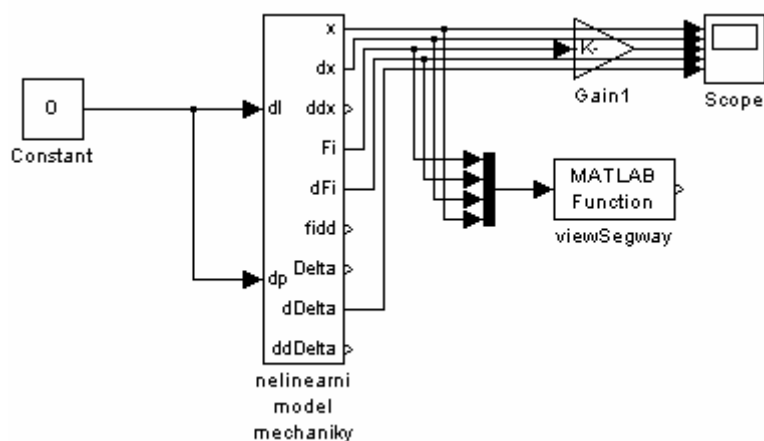
Systém se nyní nachází ve druhé ze svých dvou stabilních poloh.

Svėsme nyní zařízení kyvadlem dolů. Dosadíme hodnotu úhlu  $\varphi = \pi$ . Jsou-li řídicí momenty stále rovny nule a vozík v klidu, obdržíme stejné rovnice, což znamená, že se právě nacházíme ve druhé stabilní poloze.

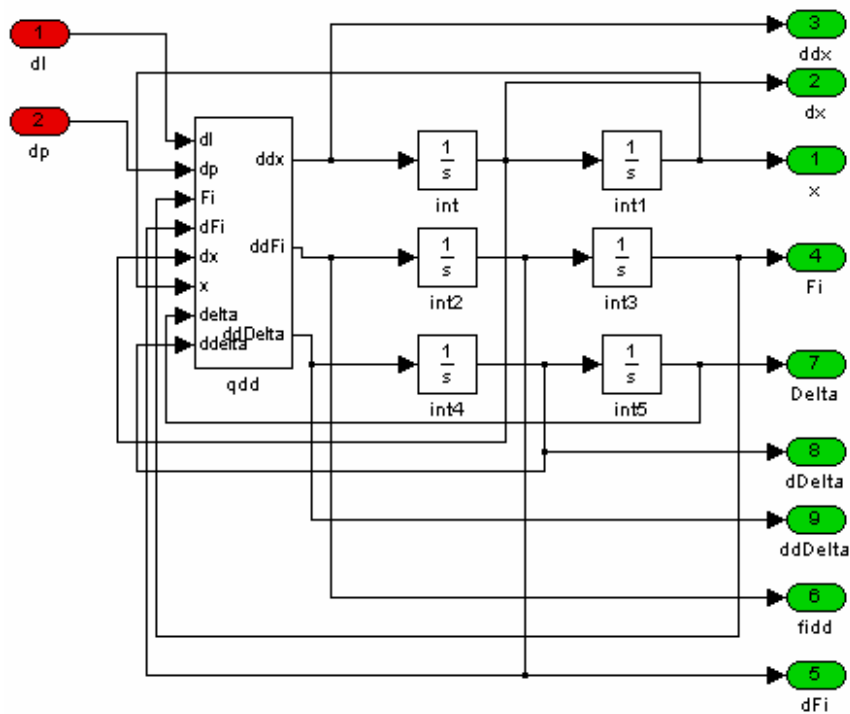
#### 3.2 USTÁLENÉ KMITY

Svėsíme vozík dle Obr. 9: . Zvolíme úhel odklonění od osy y například  $10^\circ$ . Za předpokladu, že na systém nepůsobí žádná síla v ose x, dále v ose y vždy působí tíhové zrychlení  $-g$  a všechna tření jsou zanedbána, musí systém začít kmitat ustálenými kmity kolem těžiště, jehož x-ová souřadnice se nesmí změnit.

### 3.2.1 Model ověřovaného modelu a použité funkce



Obr. 7: Simulační schéma na ověření modelu



Obr. 8: Schéma bloku nelineárního modelu mechaniky  
Obsah funkce qdd.m

```
function qqdd=qqdd(X)
%vypocitava zrychleni pomoci inverze matice setrvacnosti
global a b l mr r g N km ke U R L d mk Jk Jz

dl      = X(1);
dp      = X(2);
Fi      = X(3);
dFi     = X(4);
dx      = X(5);
x       = X(6);
delta   = X(7);
ddelta  = X(8);

c       = mr*l*cos(Fi);

M = -2*km*ke/R/r*dx+km*U/100/R*(dl+dp);
qqdd=1/(a*b-c^2)*
[(c+b/r)*M+b*mr*l*dFi*dFi*sin(Fi)-c*mr*g*l*sin(Fi);
(-a-c/r)*M-c*mr*l*dFi*dFi*sin(Fi)+a*mr*g*l*sin(Fi);
-2*km*ke*d*d*mk/Jk/Jz/R*ddelta*cos(delta)+mk*km*U*r*d/N/R/Jk*(dp-dl)
]; % vektor prepocitanych zrychleni stavovych velicin
```

### Obsah funkce viewSegway.m

```
function out=viewSegway(X)

% zobrazí animaci pohybu kyvadla

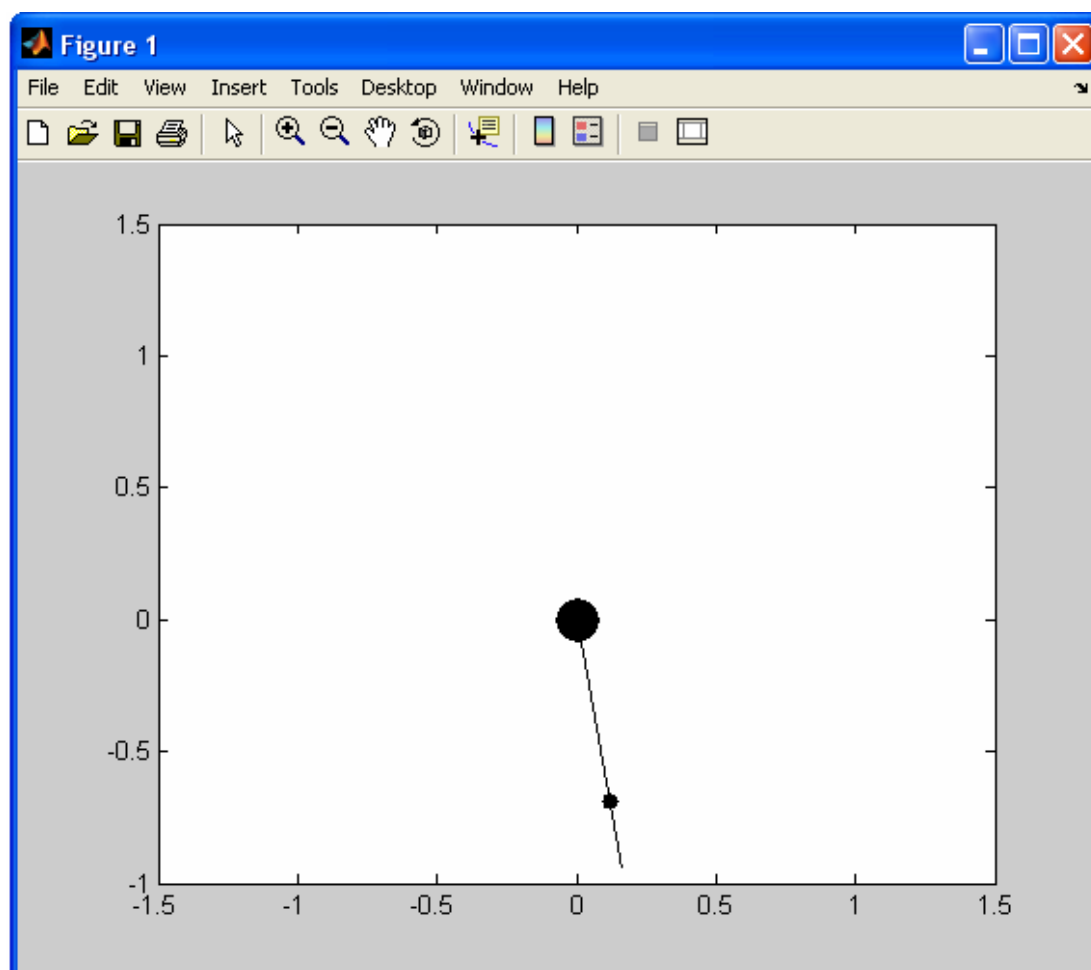
global L l

Fi = X(1);
dFi = X(2);
dx = X(3);
x = X(4);

plot([x x+L*sin(Fi)], [0 L*cos(Fi)], '-k');
hold on
plot(x,0, '.k', 'MarkerSize', 50);
plot(x+l*sin(Fi), l*cos(Fi), '.k', 'MarkerSize', 20);
hold off

if abs(x)>1.2
    axis([x-1.5 x+0.5 -1 1.5])
else
    axis([-1.5 1.5 -1 1.5])
end

drawnow;
out=1;
```



Obr. 9: Poloha vozíku  $\varphi = 170^\circ$

### 3.2.2 Popis ověření

Výpočet těžiště systému

$$\mathbf{r}_i = \frac{1}{m} \sum m_i \mathbf{r}_i \quad (2.65)$$

$$m = \sum m_i \quad (2.66)$$

Víme, že součty hmotností jsou zahrnuty v rámci dvou hmotných bodů systému, celková hmotnost se pak zjednoduší na vztah :

$$m = m_R + m_v \quad (2.67)$$

$$m = 5,2 + 3,2 = 8,8 \text{ kg}$$

$$\begin{pmatrix} x_T \\ y_T \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \left( m_v \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m_p \begin{pmatrix} x + \frac{L}{2} \sin \varphi \\ \frac{L}{2} \cos \varphi \end{pmatrix} + m_J \begin{pmatrix} x + l_J \sin \varphi \\ l_J \cos \varphi \end{pmatrix} + 2m_{Bat} \begin{pmatrix} x + l_{Bat} \sin \varphi \\ l_{Bat} \cos \varphi \end{pmatrix} \right)$$

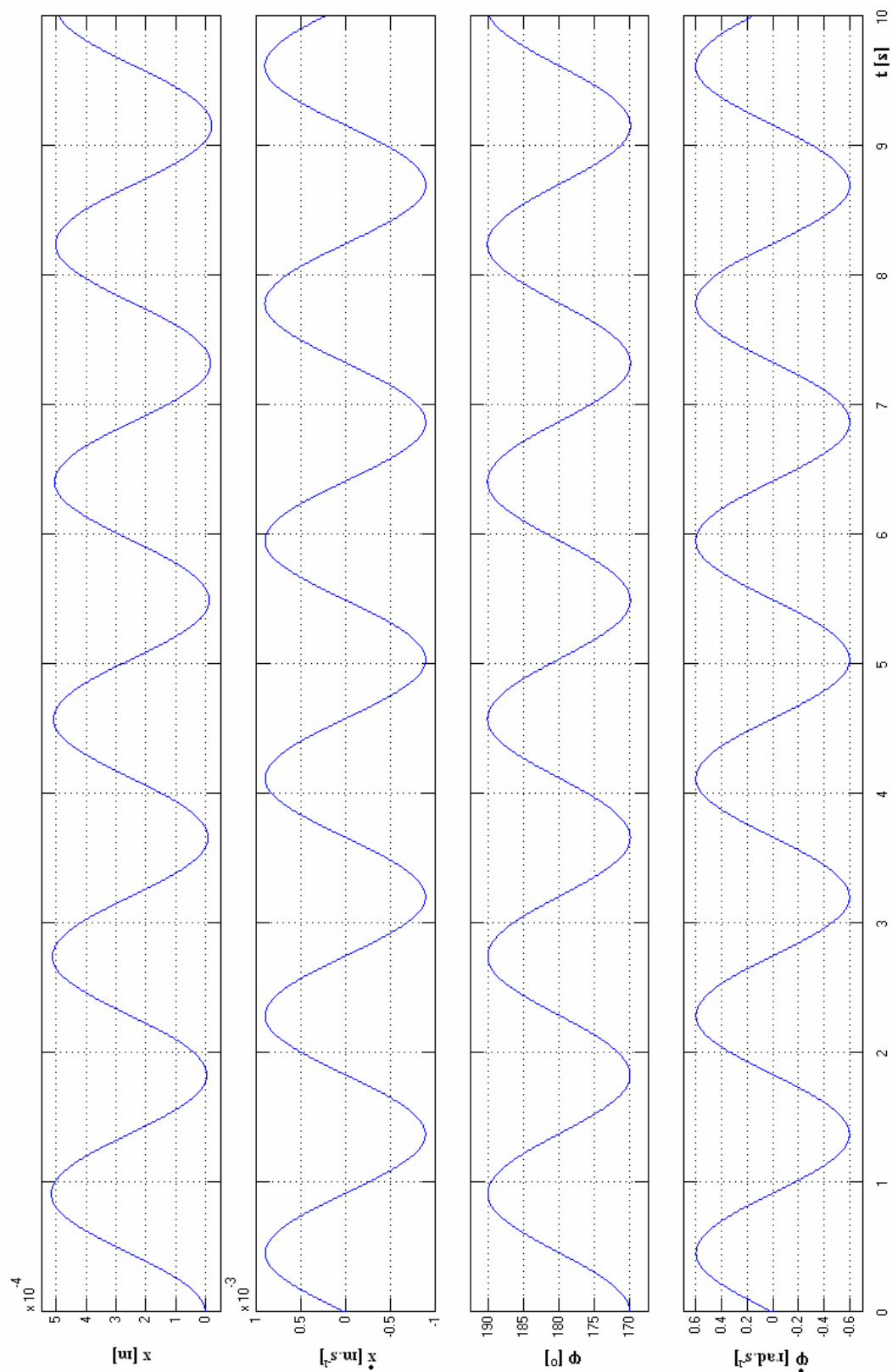
Zajímá nás jen souřadnice  $x_T$  :

$$x_T = \frac{1}{m} \left( m_p \frac{L}{2} \sin \varphi + m_J l_J \sin \varphi + 2m_{Bat} l_{Bat} \sin \varphi \right) = 0,023 \text{ m}$$

Souřadnici  $x_T$  zvážíme poměrem momentů setrvačnosti :

$$x_T^* = x_T \cdot \frac{J_v}{J_R + J_v} = 0,023 \cdot \frac{0,455}{17,5 + 0,445} = 5,701 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Výsledek se řádově shoduje s výsledkem simulace. Podle grafu 1 je patrné, že systém kmitá kolem těžiště s x-ovou souřadnicí  $2,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ .



Graf. 1: Ustálené kmity svěřeného vozíku

## 4. VYPOČÍTANÉ A ZMĚŘENÉ KONSTANTY

Aby se model přiblížil co nejlépe reálnému chování systému, dosadí se konstanty v rovnicích modelu změřenými a vypočítanými hodnotami reálného zařízení.

$m$	=	8,8	kg	celková hmotnost systému
$m_v$	=	3,6	kg	celková hmotnost vozíku
$m_R$	=	5,2	kg	celková hmotnost řidiče
$m_k$	=	0,485	kg	hmotnost kola
$m_U$	=	0	kg	hmotnost zátěže
$m_J$	=	1,3	kg	hmotnost řídicí jednotky
$m_P$	=	1,3	kg	hmotnost kyvadla
$J_R$	=	$4,55 \cdot 10^{-1}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	moment setrvačnosti řidiče
$J_K$	=	$3,5 \cdot 10^{-3}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	moment setrvačnosti kol
$J_K^*$	=	17,5	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	moment setrvačnosti kol a rotoru motoru za převodovkou
$J_v$	=	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	moment setrvačnosti vozíku
$D$	=	0,308	m	šířka vozíku
$S$	=	0,207	m	Délka
$V$	=	0,13	m	Výška
$D$	=	0,154	m	polovina šířky
$l$	=	0,7	m	vzdálenost umístění závaží od osy y
$l_J$	=	0,298	m	vzdálenost řídicí jednotky od osy y
$L$	=	0,957	m	délka řídítek od osy y
$r$	=	0,12	m	poloměr kola
$l_{\text{Bat}}$	=	0,05	m	vzdálenost umístění baterií od osy y
$d_{\text{Bat}}$	=	0,1	m	délka baterie
$s_{\text{Bat}}$	=	0,06	m	šířka baterie
$v_{\text{Bat}}$	=	0,15	m	výška baterie
$m_{\text{Bat}}$	=	1,3	kg	hmotnost baterie
$d_J$	=	0,3	m	délka řídicí jednotky
$s_J$	=	0,06	m	šířka řídicí jednotky
$v_J$	=	0,298	m	výška řídicí jednotky

Cap	=	4	A.h	kapacita baterie
$M_{Lmax}$	=	2,29	N.m	maximální moment motoru
$M_{max}$	=	11,17	N.m	maximální potřebný moment
U	=	24	V	napájecí napětí motoru
$i_{max}$	=	0,8	A	maximální proud motorem
R	=	30	$\Omega$	odpor vinutí motoru
$k_m$	=	2,86	$N.m.A^{-1}$	konstanta momentu motoru
$\omega_{max}$	=	8,38	$rad.s^{-1}$	maximální otáčky motoru
$k_e$	=	1,84	$V.s.rad^{-1}$	konstanta EMF napeti motoru
N	=	100	-	převodový poměr planetové převodovky
$n_m$	=	8000	$ot.min^{-1}$	výstupní otáčky motoru (bez převodovky)
I	=	2048	$imp.ot^{-1}$	počet impulzů za otáčku

#### 4.1 KONSTANTY SETRVAČNÝCH VLASTNOSTÍ

Celková hmotnost balancované váhy sestává z hmotnosti kyvadla (řídítek), řídící jednotky, přídavné zátěže na vrcholu kyvadla a dvou baterií.

$$m_R = m_p + m_j + m_U + 2m_{Bat}$$

$$m_R = 1,3 + 1,3 + 0 + 2 \cdot 1,3 = 5,2 kg$$

Moment setrvačnosti vozíku je součtem dílčích momentů setrvačnosti skeletu včetně motorů, sběrníkových kabelů a senzorů

$$J_v = \frac{1}{12} \cdot m_s (v^2 + s^2) = \frac{1}{12} \cdot 2,6 \cdot (0,207^2 + 0,170^2) = 2,7 \cdot 10^{-2} kg \cdot m^2$$

Moment setrvačnosti kola omezíme pouze na výpočet momentu setrvačnosti válce s o poloměru kola :



$$J_K = \frac{1}{2} m_K r^2 = \frac{1}{2} \cdot 0,485 \cdot 0,12^2 = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Celkový moment setrvačnosti řidiče je součtem momentů setrvačnosti baterií, jejichž těžiště je položeno nad osou motorů a je třeba je balancovat, dále momentu setrvačnosti řídicí jednotky, přídatné zátěže a řidítek.

$$J_R = 2J_{Bat} + J_J + J_U + J_P$$

Poloha těžiště baterie se nachází na souřadnicích  $\begin{bmatrix} x_{TBat} \\ y_{TBat} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,04 \\ 0,03 \end{bmatrix} [m]$ .

Vzdálenost baterie od osy y :

$$l_{Bat} = \sqrt{x_{TBat}^2 + y_{TBat}^2} = \sqrt{0,04^2 + 0,03^2} = 0,05 \text{ m}$$

$$J_{Bat} = \frac{1}{12} \cdot m_{Bat} (v_{Bat}^2 + s_{Bat}^2) + m_{Bat} \cdot l_{bat}^2 = \frac{1}{12} \cdot 1,3 \cdot (0,15^2 + 0,12^2) + 1,3 \cdot 0,05^2 = 7,24 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$J_J = \frac{1}{12} \cdot m_J (s_J^2 + v_J^2) + m_J \cdot l_J^2 = \frac{1}{12} \cdot 1,3 \cdot (0,06^2 + 0,298^2) + 1,3 \cdot 0,165^2 = 4,54 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$J_U = \frac{1}{12} \cdot m_U (v_U^2 + s_U^2) + m_U \cdot l^2 = 0$$

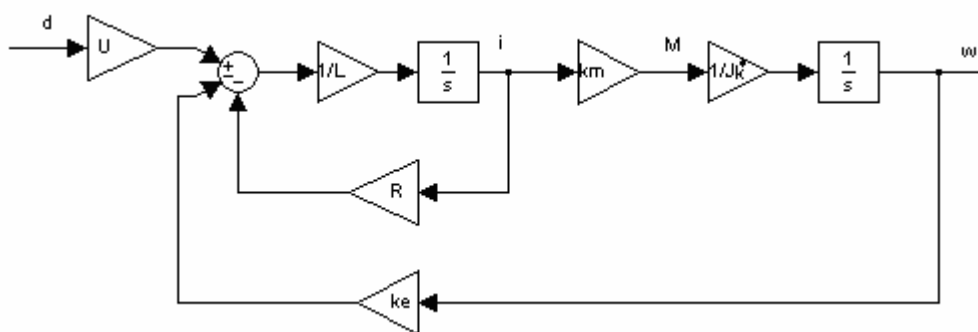
Moment setrvačnosti řidítek se spočítá jako příspěvek momentů setrvačností 4 stěn dutého tělesa. Zvažme zjednodušení, že rozměr tloušťky materiálu a šířky tyče jsou ve druhé mocnině zanedbatelné proti výšce tyče. Potom můžeme moment setrvačnosti brát jako příspěvek 4 stěn bez rozdílu umístění vzhledem k ose rotace

$$J_P = 4 \cdot \left( \frac{1}{12} \cdot \frac{m_P}{4} L^2 + \frac{m_P}{4} \cdot \left( \frac{L}{2} \right)^2 \right) = 4 \cdot \left( \frac{1}{12} \cdot \frac{1,3}{4} \cdot 0,957^2 + \frac{1,3}{4} \cdot \left( \frac{0,957}{2} \right)^2 \right) = 3,96 \cdot 10^{-1} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Výsledný moment setrvačnosti řidiče

$$J_R = 2J_{Bat} + J_J + J_U + J_P = 2 \cdot 7,24 \cdot 10^{-3} + 4,54 \cdot 10^{-2} + 0 + 3,96 \cdot 10^{-1} = 4,55 \cdot 10^{-1} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Moment setrvačnosti rotoru motoru :



Obr. 10: Schéma rovnice modelu motoru (2.19)

Za předpokladu, že  $L = 0$ , platí pro přenos řídicího momentu v Laplaceově transformaci :

$$F_m(s) = \frac{\omega(s)}{D(s)} = U \frac{\frac{k_m}{RJ_m s}}{1 + \frac{k_m k_e}{RJ_m s}} = \frac{\frac{U}{k_e}}{\frac{J_m R}{k_m k_e} s + 1} \quad (4.1)$$

Motor se chová jako setrvačný členek prvního řádu a časovou konstantou

$$T_1 = \frac{J_m R}{k_m k_e} \quad (4.2)$$

Zatížíme-li motor známým momentem setrvačnosti, například  $J_k$ , dostaneme časovou konstantu :

$$T_2 = \frac{(J_m + J_k)R}{k_m k_e} \quad (4.3)$$

Ze změřených odezev na jednotkový skok řídicího napětí a dvou rovnic o dvou neznámých. Z (4.2) a (4.3) se vypočítají parametry motoru.

$$k_m k_e = \frac{J_k R}{T_2 - T_1} \quad (4.4)$$

$$J_m = J_k \frac{T_1}{T_2 - T_1} \quad (4.5)$$

Měřením byly časové konstanty stanoveny

$$T_1 = 10ms$$

$$T_2 = 30ms$$

Moment setrvačnosti pro rotor motoru

$$J_m = J_k \frac{T_1}{T_2 - T_1} = 3,5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{10}{30 - 10} = 1,75 \cdot 10^{-3} kg \cdot m^2$$

Moment setrvačnosti kola je proti přepočítanému momentu setrvačnosti rotoru zanedbatelně malý.

$$J_m^* = J_m N^2 = 1,75 \cdot 10^{-3} \cdot 100^2 = 17,5 kg \cdot m^2$$

$$J_K^* = J_K + J_m^* = 3,5 \cdot 10^{-3} + 17,5 \approx 17,5 kg \cdot m^2$$

## 4.2 ELEKTROMECHANICKÉ KONSTANTY

Enkodéry motorů mají 2048 impulzů na 1 otáčku. S převodovým poměrem  $N = 100$  dává enkodér :

$$I^* = I \cdot N = 2048 \cdot 100 = 204800 \text{ imp} \cdot \text{ot}^{-1}$$

Maximální výstupní úhlová rychlost z převodovky motoru se vypočítá z maximálních výstupních otáček motoru

$$\omega_{\max} = 2\pi \cdot \frac{n_m}{60N} = 2\pi \cdot \frac{8000}{60 \cdot 100} = 8,38 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Příkon motoru

$$P_L = \frac{UI_{\max}}{2} = M_L \omega_{\max}$$

$$P_L = 24 \cdot 0,8 = 19,2 \text{ W}$$

Maximální moment vyvinutý motorem

$$M_{L\max} = \frac{P_L}{\omega_{\max}} = \frac{19,2}{8,38} = 2,29 \text{ Nm}$$

Maximální moment  $M_{\max}$  je moment potřebný pro zvednutí vozíku

z vodorovné polohy  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  v klidovém stavu. Počítáno s balancovanou hmotností :

$$M_{\max} = g \left( m_J v_J + 2m_{bat} l_{bat} + m_P \frac{L}{2} \right)$$

$$M_{\max} = 9,81 \cdot \left( 1,3 \cdot 0,298 + 2 \cdot 1,3 \cdot 0,05 + 1,3 \frac{0,957}{2} \right) = 11,17 Nm$$

Získání elektromechanických konstant motoru (4.4)

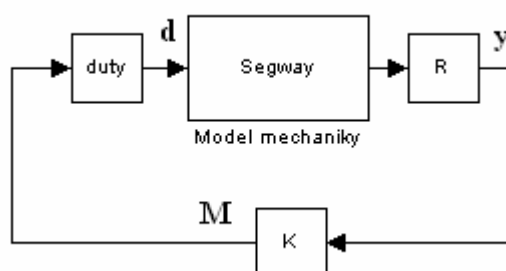
$$k_m k_e = \frac{J_k R}{T_2 - T_1} = \frac{3,5 \cdot 10^{-3} \cdot 30}{20 \cdot 10^{-3}} = 5,25 Nm Vs A^{-1} rad^{-1}$$

$$k_m = \frac{M_{L\max}}{I_{\max}} = \frac{2,29}{0,8} = 2,86 Nm \cdot A^{-1}$$

$$k_e = \frac{k_m k_e}{k_m} = \frac{5,25}{2,86} = 1,84 Vs \cdot rad^{-1}$$

## 5. NÁVRH ŘÍZENÍ

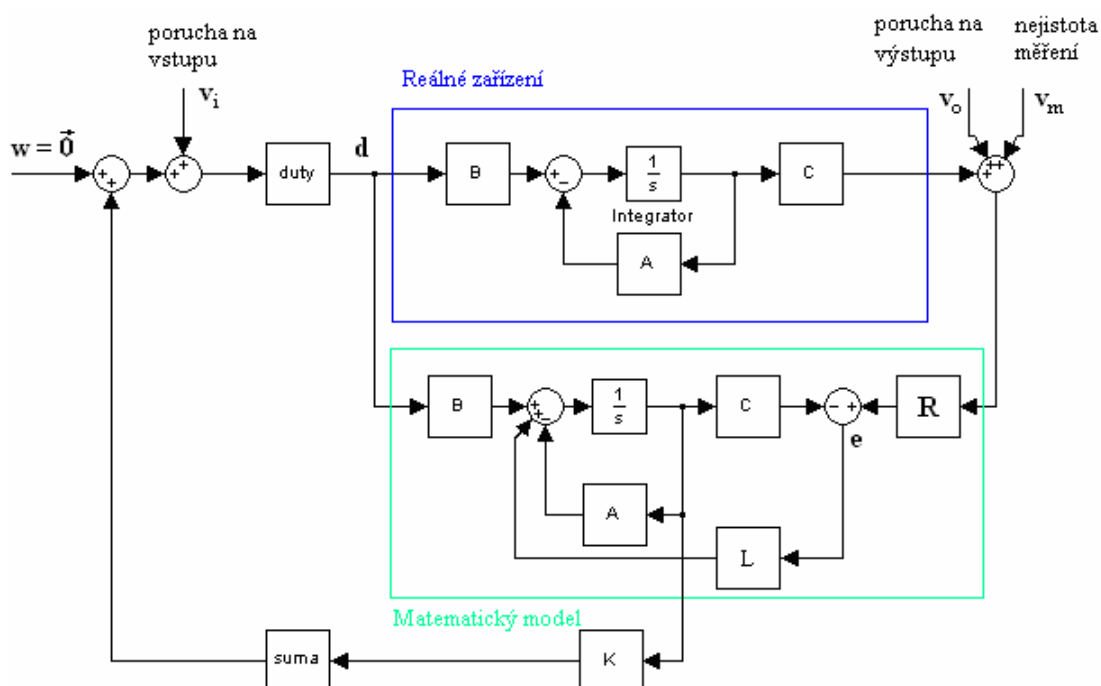
Regulace matematického modelu vozíku může být zařízena různými typy regulátorů. Nevýhodou PID regulace je získání regulačních konstant, které jsou určeny pouze pro jedinou konfiguraci vozíku. Změnou hmotnosti u reálného zařízení stačí, aby se vystřídal dva různí řidiči s odlišnou váhou a výškou, regulační konstanty se musí také změnit, jinak není zaručena stabilita vozíku. U použitého modelu se jedná o změnu nebo posunutí závaží na kyvadle. Tento problém řeší využití stavové regulace.



Obr. 11: Princip stavové regulace

Schéma na Obr. 11: představuje princip stavové regulace pro vozík Segway. Protože se neměří skutečné hodnoty stavových veličin, musí se z naměřených hodnot v bloku **R** zrekonstruovat stavové veličiny. Vektor výstupních veličin **y** se v bloku **K** vynásobí váhami pro jednotlivé stavové veličiny a výsledek sečte v hodnotu řídicího momentu **M**. Blok **duty** převede moment na vektor stříd pro jednotlivá kola a ty vstupují jako korekce zpět do modelu systému.

Při dostatečně věrném matematickém modelu je možné použít simulaci současně s chodem reálného zařízení. Situace je popsána na Obr. 12: Do zařízení se pouští stejný řídicí signál jako do modelu. Rozdíl mezi reálným systémem a modelem je vektor odchylky  $e = (x_e, \dot{x}_e, \varphi_e, \dot{\varphi}_e, \delta_e)^T$ .



Obr. 12: Principiální schéma stavové regulace pro vozík Segway

Blok **K** přebírá vektor odchylky **e** a násobí každou složku příslušnou regulační konstantou. Blok **suma** oddělené složky sečte, v závislosti na  $\delta$  vytvoří vektor opravných momentů. **duty** opět zastupuje funkci pro převod řídicích momentů na PWM signál. Vektor žádané veličiny **w** je nulový vektor momentů na kola. Systém se reguluje na nulový moment, který nastává v klidovém stavu vozíku nebo při konstantní rychlosti. Matice **L** váží odchylku **e** a zahrnuje ji do dynamiky modelu.

Na vozík působí také vektory poruch a vlivů okolí  $v_{i,o,m}$ .

## 5.1 NASTAVENÍ K

Pro regulaci systému zatím uvažujme schéma z Obr. 11: Nastavení váhových koeficientů pro vektor **K** uděláme logický postupem. Vybereme vhodné stavové veličiny, které budou ve zpětné vazbě. Jistě  $x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi}$ , pro korekci rotace v ose  $z$  může být zahrnut i úhel  $\delta$ . Při řízení zatáčení bude ještě zvláštní vazba od  $\delta$  navíc.

Protože regulujeme systém v první řadě na nulový úhel  $\varphi$ , vazba pro tuto stavovou veličinu je nejdůležitější ze všech. Nastavením dosáhneme soustavy, která kmitá ustálenými kmity v ose  $x$ . V reálném světě se vždy takové chování v rámci ztrát změní na rozbíhavé kmity a systém se stane nestabilním. Zavedeme-li další vazbu od  $\dot{\varphi}$ , kmitání se redukuje. Kyvadlo se ustálí, má tendenci ujíždět v ose  $x$  a zrychlovat donekonečna. Zavedením vazby od  $\dot{x}$  se systém nevzdaluje, kmitá na místě. Až s poslední vazbou  $\ddot{x}$  se model ustálí na místě s malou amplitudou kmitů.

Naklonění vozíku způsobí poruchový moment vyvolaný gravitačním zrychlením. Malý úhel vyvolá moment :

$$M_{\varphi} = m_R g l \sin \varphi \approx k_{Fi} \cdot \varphi$$

$$k_{Fi} = m_R g l = 35,7$$

Zmíněným postupem se v simulaci získají zbylé konstanty

$$k_{dFi} = 20$$

$$k_{dx} = 50$$

$$k_x = 1$$

## 5.2 SENZORY

Pro regulaci balancujícího vozíku je třeba senzorů pro získání hodnot stavových veličin systému. Na konstrukci zmenšeného modelu bude umístěn akcelerometr ADXL 203, gyroskop AXDRS401 a enkodéry motorů, z jejichž signálů se poté provede výpočet hodnot. Protože výstupní napětí obou senzorů je úměrné zrychlení, je nutné zjistit, na čem je závislé zrychlení kyvadla v místě řidiče a podle uvážení zvolit nejvhodnější pozice pro umístění senzorů. K výpočtu zrychlení (2.5) se přičte vliv tíhového zrychlení :



$$\ddot{\underline{x}}_R = \begin{pmatrix} \ddot{x} \sin \varphi - l \dot{\varphi}^2 \\ 0 \\ \ddot{x} \cos \varphi - l \ddot{\varphi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -g \cos \varphi \\ 0 \\ -g \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$a_{RXRot} = \ddot{x} \sin \varphi - l \dot{\varphi}^2 - g \cos \varphi \quad (5.1)$$

$$a_{RYRot} = \ddot{x} \cos \varphi - l \ddot{\varphi} - g \sin \varphi \quad (5.2)$$

Z první rovnice je zřejmé, že akcelerometr umístěný na kyvadle bude měřit ve své ose x zrychlení, které je závislé i na úhlové rychlosti  $\dot{\varphi}$  a  $l$ , vzdálenosti senzoru od osy rotace y. Jako řešení je možné pozici tohoto umístění zvolit co nejbližší k ose rotace, tedy  $l \rightarrow 0$  a tím vliv minimalizovat.  $a_{RXRot}$ ,  $a_{RYRot}$  jsou výstupními signály x, y ze senzoru. Redukujeme tak počet neznámých v rovnicích na 2 :

$$a_{RXRot} = \ddot{x} \sin \varphi - g \cos \varphi \quad (5.3)$$

$$a_{RYRot} = \ddot{x} \cos \varphi - g \sin \varphi \quad (5.4)$$

Pro malé hodnoty zrychlení  $\ddot{x}$  lze psát

$$\varphi = \arctan 2(a_{RYRot}, a_{RXRot}) \quad (5.5)$$

Stavové veličiny  $\varphi, \ddot{\varphi}$  se vypočítají postupným derivováním. Mezi kroky derivací je nutné vložit filtr dolní propusti, který zbavuje signál vysokých frekvencí vznikajících na vibracích při PWM řízení a šumu okolního prostředí.

Výstupní signál gyroskopu ADXRS 401 je úměrný úhlovému zrychlení při naklonění od horizontální polohy. Pro získání úhlového natočení je třeba dvakrát integrovat nejen signál včetně statické chyby, která nastává odečítáním konstantního offsetu od reálného signálu posunutého teplotním driftem. Gyroskop nebude ve výsledném řešení potřeba. Je důležitý pro ověření měřeného úhlu nezávislým způsobem vzhledem k enkodérům. Výstup z enkodérů má sám o sobě také integrační

charakter, udává počet impulzů úměrný úhlovému natočení motoru, proto je také zatížený integrační chybou např. při prokluzu kol. Kombinací enkodérů a gyroskopu je možné dosáhnout dlouhodobě stabilního systému.

Pokud vozík nezatáčí, bude v ideálním případě výstup z enkodérů shodný. V reálném provedení bude jistě odlišný. Úhel natočení  $\delta$  vypočítáme z upravené rovnice (2.27) :

$$\frac{r(\varphi_{ENCP} - \varphi_{ENCL})}{k_I} = 2d \sin \delta \quad (5.6)$$

kde  $\dot{\varphi}_{ENCP}, \dot{\varphi}_{ENCL}$  jsou výstupy enkodérů pravého a levého motoru.

$k_I$  konstanta pro přepočet impulzů na úhel natočení

Po zjednodušení pro malý úhel  $\delta$ , mějme  $\sin \delta \approx \delta$  :

$$\delta = \frac{r}{2d} (\varphi_P - \varphi_L) \quad (5.7)$$

Derivací (5.7) získáme další stavovou proměnnou :

$$\dot{\delta} = \frac{r}{2d} (\dot{\varphi}_P - \dot{\varphi}_L) \quad (5.8)$$

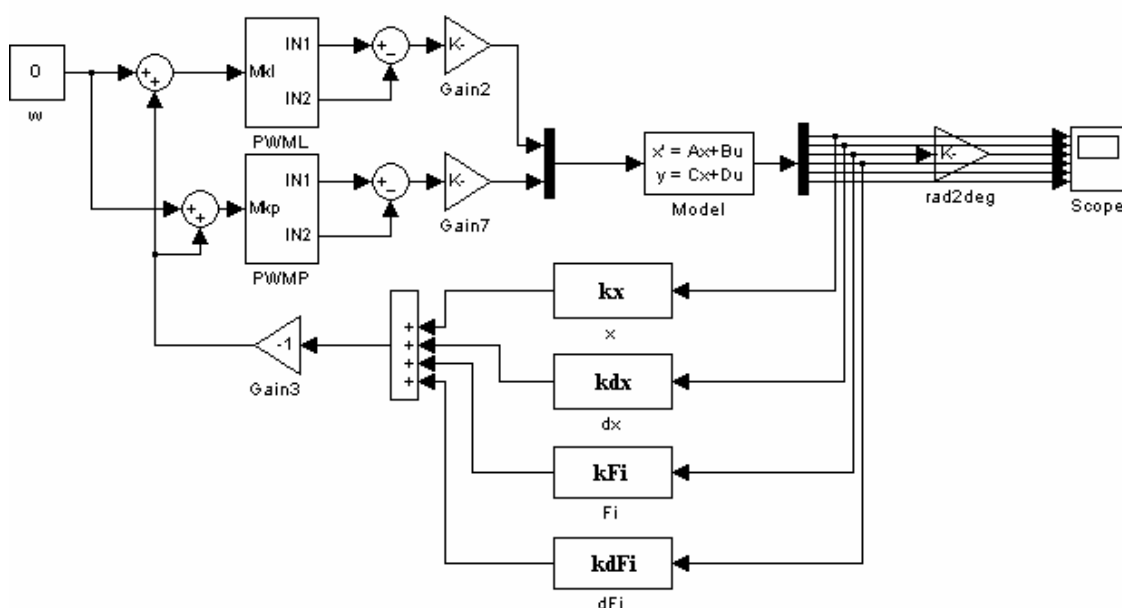
### 5.3 xPC Target

Pro jednoduchost obsluhy a snadnou aplikaci matematického modelu se jako vhodná řídicí jednotka použije PC s rozšířením o PCI kartu MF 614. Karta je se svými analogovými vstupy a výstupy ideální pro rychlé snadné zpracování signálů ze senzorů. Jako řídicí software je použit Matlab 2009a s nadstavbou Simulink xPC Target 4.1.

K programování aplikací spustitelných na cílové stanici (Target PC) je potřeba vygenerovat DOS bootovací soubory, které se nahrají na Targetu PC do bootovací složky xPC Targetu. Po restartu se nabídne možnost spuštění DOSu nebo xPC Target programu. Ten je možno zavádět po sériové lince, disketovou mechaniku nebo s využitím ethernetového síťového adaptéru, který se využil jako nejlepší možnost. Řídící PC s programem Matlab Simulink s nadstavbou xPC Target může být připojené odkudkoliv z Internetu. Programování a kompilace modelu probíhá na vzdáleném PC. Po síti se spustitelný program nahraje do paměti Target PC, ke kterému může být připojen externí monitor jako provizorní osciloskop. Vzdáleným přístupem je také možné zařízení kontrolovat a zaznamenávat naměřené údaje. Pokud se zruší připojení k síti, je možné zapnutou řídicí desku nechat v chodu i bez monitorování.

## 5.4 SIMULACE NA REÁLNÉM ZAŘÍZENÍ A LINEARIZOVANÉM MATEMATICKÉM MODELU

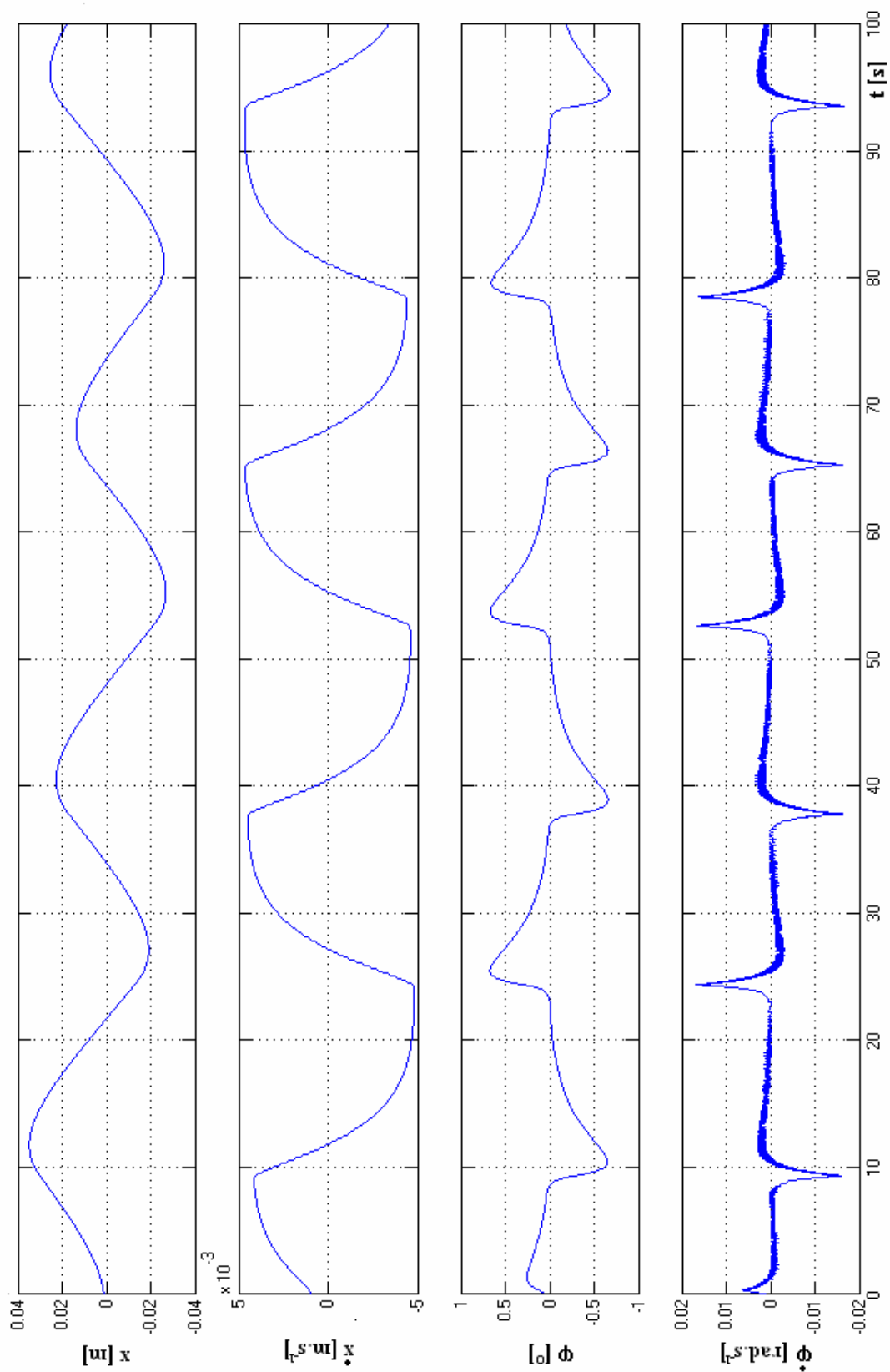
### 5.4.1 Linearizovaný model



Obr. 13: Schéma pro simulaci na reálném zařízení

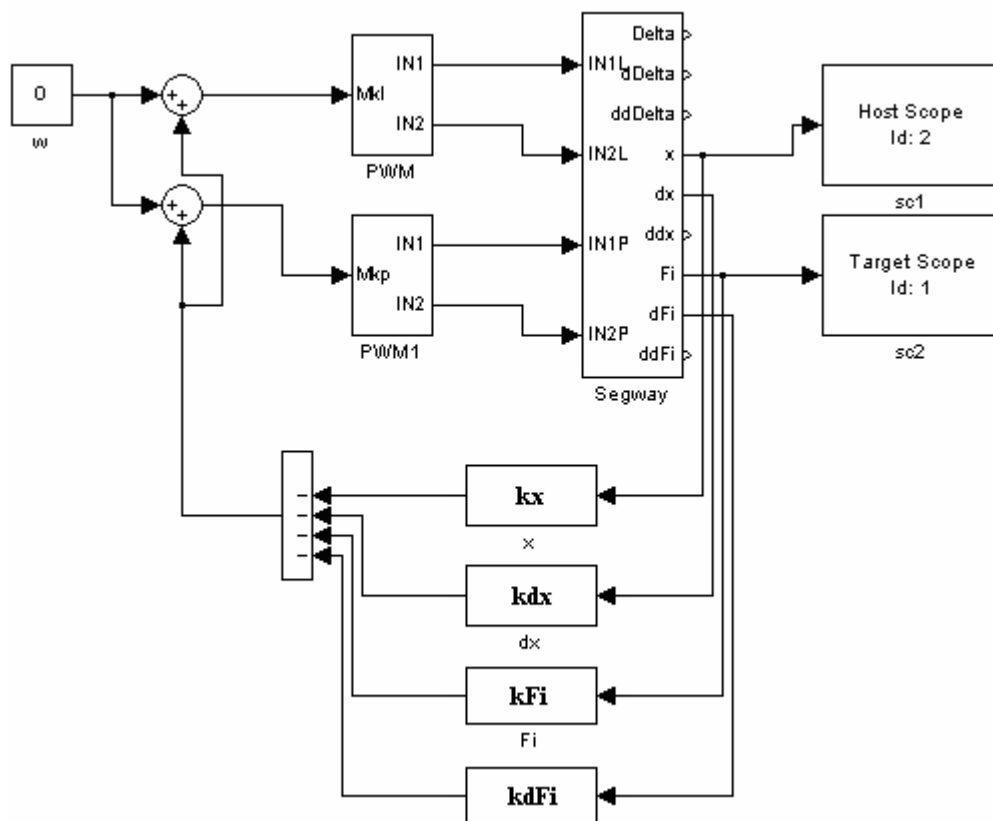
S nastavenými regulačními konstantami z 5.1 dostaneme výsledek simulace zobrazený na grafu 2. V případě všech stavových veličin systém kmitá s periodou  $T = 28,13s$  kolem nulových hodnot. V ose  $x$  se objevují i ustálené kmity o nižší frekvenci. Odchylka od nulové polohy vozíku nepřesáhne 4 cm. Rychlost vozíku je zanedbatelně malá. Výchylka  $\varphi$  je menší než  $0,75^\circ$ .

Zkoušením různých situací na modelu je zřejmé, že přičtení konstantní hodnoty k úhlu nezpůsobí, že vozík Segway začne ujíždět. Změní pouze polohu  $x$ . Pro rozpohybování vozíku je třeba přičítat konstantní moment na vstupu ať úmyslný, nebo poruchový.



Graf. 2: Výsledek simulace na linearizovaném modelu

### 5.4.2 Reálné zařízení

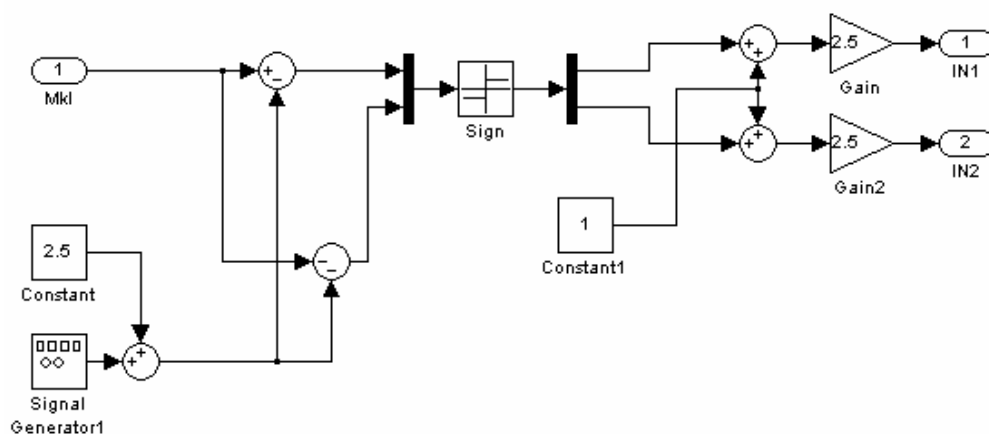


Obr. 14: Schéma pro simulaci na reálném zařízení

Karta mf614 má podporu pro 4 PWM výstupní signály. Nové ovladače pro program Matlab již tuto funkci nemají zahrnuty. Problém se řeší s pomocí nahrání starého ovladače a nestandardními úpravami v knihovně vstupů/výstupů karty mf614lib.mdl. S náhradní kartou mf624 se objevily problémy s nestabilitou Target PC, kdy se při použití bloku pro PWM výstup program zacyklí a je nutné systém restartovat.

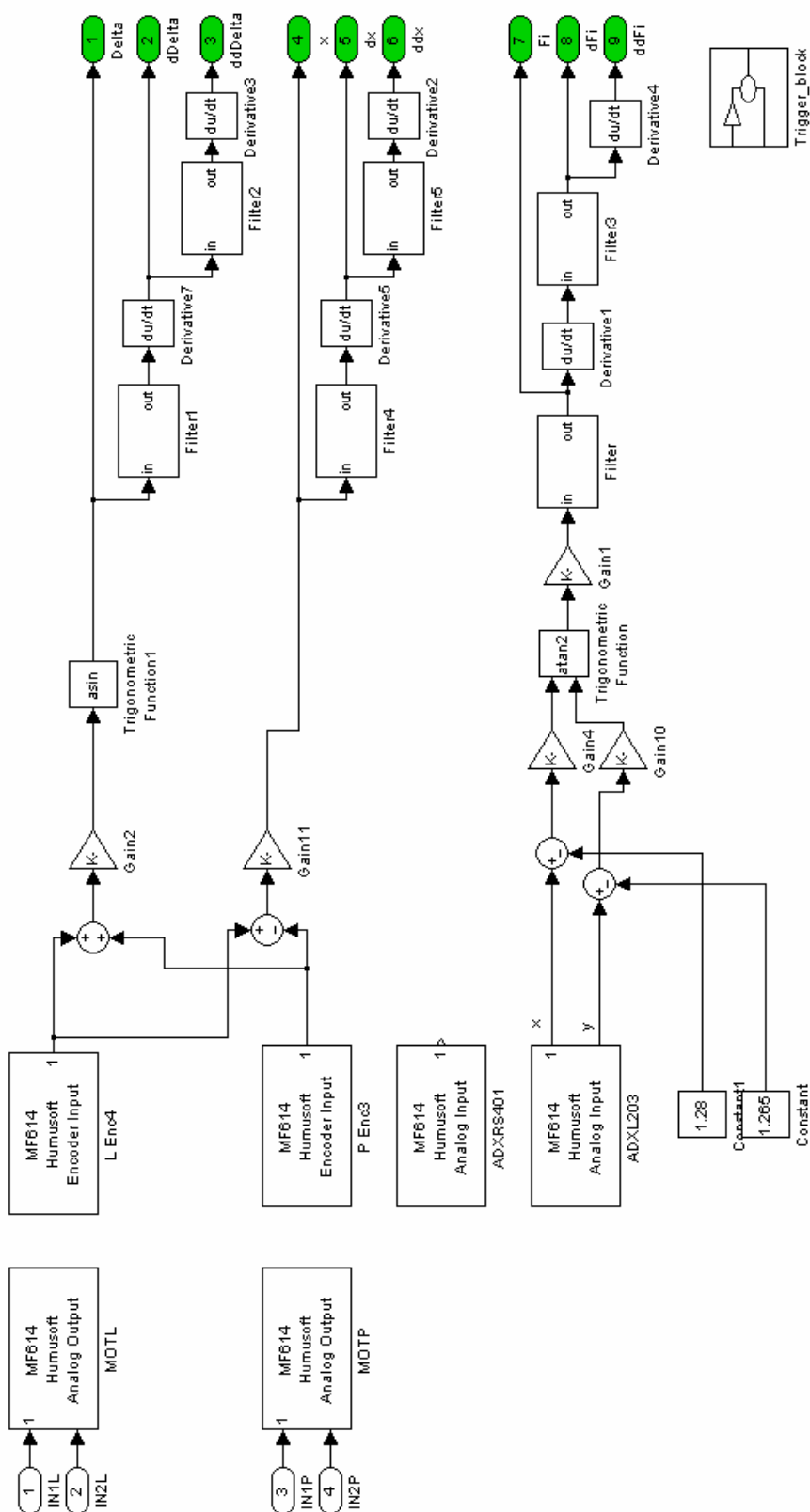
Aby nebyla potřeba vyrábět HW jednotky realizující PWM modulaci, je zvoleno náhradní řešení softwarově v bloku PWM pomocným generátorem pily. PWM řízení motorů je připojeno k IN1, IN2 vstupům výkonových jednotek MOT-1 [10]. Ovládají se obdélníkovým signálem o frekvenci  $f = 100\text{Hz}$  s amplitudou 5V. Hodnota zaslaná na výstup odpovídá přímo výstupnímu napětí se saturací  $\pm 10\text{V}$ , využijí se pouze diskrétní hodnoty 0 a 5V. S ohledem na dobu kroku simulace 1ms

existuje jen 10 diskretních hodnot střídavy, která může být na motory přenesena. Je zřejmé, že toto softwarové řešení není ideální. Směr rotace motoru určuje použití vstupu IN1 nebo IN2. V modelu je zařízeno při výpočtu střídavy signálu řídicího momentu, aby nedošlo k současnému spuštění obou vstupů.



Obr. 15: Schéma bloku PWM1

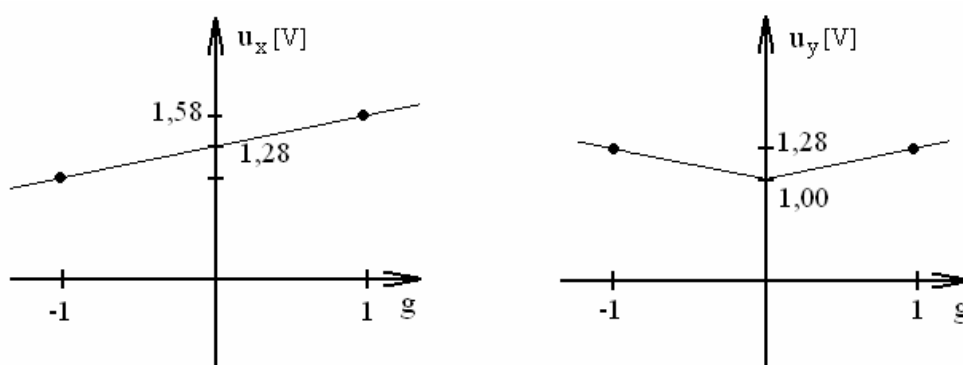
Bloky Host Scope a Target Scope jsou zobrazovací prostředky pro xPC Target. Host Scope běží v době simulace na Host PC obdobně jako osciloskop Scope nástavby Simulink. Target Scope běží na Target PC, který zobrazuje grafy podle nastavení zvolených na Host PC.



Obr. 16: Schéma zapojení senzorů

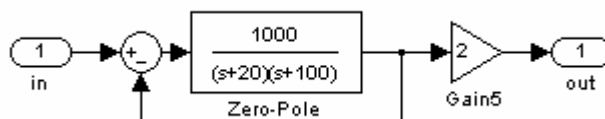


Vstupní signály  $x, y$  (Obr. 16: ) měřené na akcelerometru neodpovídají datasheetovým charakteristikám. Napětí pro statické zrychlení  $0\text{ g}$  je z neznámého důvodu posunuto z  $2,5\text{V}$  na  $1,28\text{V}$  pro osu  $x$  a na  $1\text{V}$  pro osu  $y$ . Akcelerometr tak dává jen  $51,2\%$  úrovně očekávaného výstupního signálu. I přes tento nedostatek zůstává funkce zachována a lze hodnoty přepočítat na použitelná data.



Graf. 3: Výstupní napětí  $x, y$  akcelerometru v závislosti na konstantě tíhového zrychlení

Výstupní počet impulzů z enkodérů je průměrován a pro výpočet ujeté vzdálenosti  $x$  násobený konstantou. Postupným derivováním s filtrací špiček vznikajících derivací šumu a rušení od PWM výkonových pulzů se získá rychlost  $\dot{x}$  a zrychlení  $\ddot{x}$  vozíku.



Obr. 17: Blok filtru

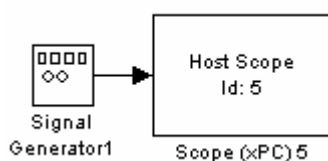
Filtrace probíhá v bloku Filter. Jedná se o setrvačný článek 2.řádu. (viz. Obr. 17: ) Přenos v Laplaceově obraze vypadná následovně :

$$F_f = \frac{k}{(T_{1f}s + 1)(T_{2f}s + 1)}$$

Časové konstanty byly zvoleny  $k = 1$ ,  $T_{1f} = 0,05s$ ,  $T_{2f} = 0,01s$

$$F_f = \frac{1}{(0,05s + 1)(0,01s + 1)}$$

Trigger blok na Obr. 18: obsahuje generátor obdélníkových impulzů, který řídí Host Scope. Ve chvíli, kdy naměří nastavený počet vzorků, triggruje všechny ostatní Host Scopy. Nastavením kombinace počtu odečítaných vzorků a frekvence lze dosáhnout na triggerovaných Scopech, aby počet vzorků odpovídal např. času běhu v jednotkách ms. Nepříjemnou vlastností je zobrazení dat až po uplynutí této doby, což nevádí při ukládání naměřených průběhů.



Obr. 18: Trigger blok

## 6. ZÁVĚR

Ke změření stavových veličin systému jsou použity enkodéry motorů a akcelerometr ADXL203EB (EB je značení DPS, na které je akcelerometr dodáván) umístěný do osy rotace y. Gyroskop ADXRS401 je zapojen, ale není využit. Nadále může být použit k upřesnění měřeného náklonu.

S použitím bloků enkodéru karty mf614 výrazně stoupá riziko ztráty komunikace s Target PC v době běhu simulace. Zachování systému při poruše komunikace není programem xPC Target bezpečně ošetřeno. Program se buď provádí dále, dokud se nedokončí, nebo přestane fungovat a hodnoty výstupů v daném okamžiku dále drží nezměněny. Při řízení pulzně šířkovou modulací můžou nastat několik situací.

1. motory se vypnou, vozík spadne
2. motory se pustí na plný výkon, vozík spadne a ujíždí
3. jeden motor se vypne, druhý běží na plný výkon, rotace a pád

Na případ pádu se musí brát ohled, jakýkoliv větší otřes není pro vozík vhodný kvůli citlivému gyroskopu a akcelerometru.

Hlavním důvodem problému s komunikací je pravděpodobně běh programu Matlab 2009a na školním serveru. Na lokální stanici Host PC není SW nainstalován, okno spuštěného programu se chová jako terminál. Komunikace mezi Host PC a Target PC probíhá přes server. Pokud je školní síť zatížena a používá-li se větší množství Host-scopů, je ztráta komunikace velmi pravděpodobná už do 10s po spuštění programu na Target PC. Program spuštěný přes Matlab Simulink se oproti xPCexploreru musí restartovat i s celým prostředím Matlab. Pád komunikace je nutné řešit restartem Target PC s následným opětovným zkompilem kódu. Tyto procedury jsou časově velmi náročné a zabraly zpočátku až 40% úsilí stráveného nad aplikací. Ve večerních hodinách, kdy je server méně zatížen, se stabilita systému výrazně zlepší. Jako řešení problému je vhodné nainstalovat potřebný SW s ovladači

řídící karty na Host PC. Použitím síťové instalace nepřibývají jen problémy zcela náhodných pádů komunikace, ale i ztráta dat z Host-scopů.

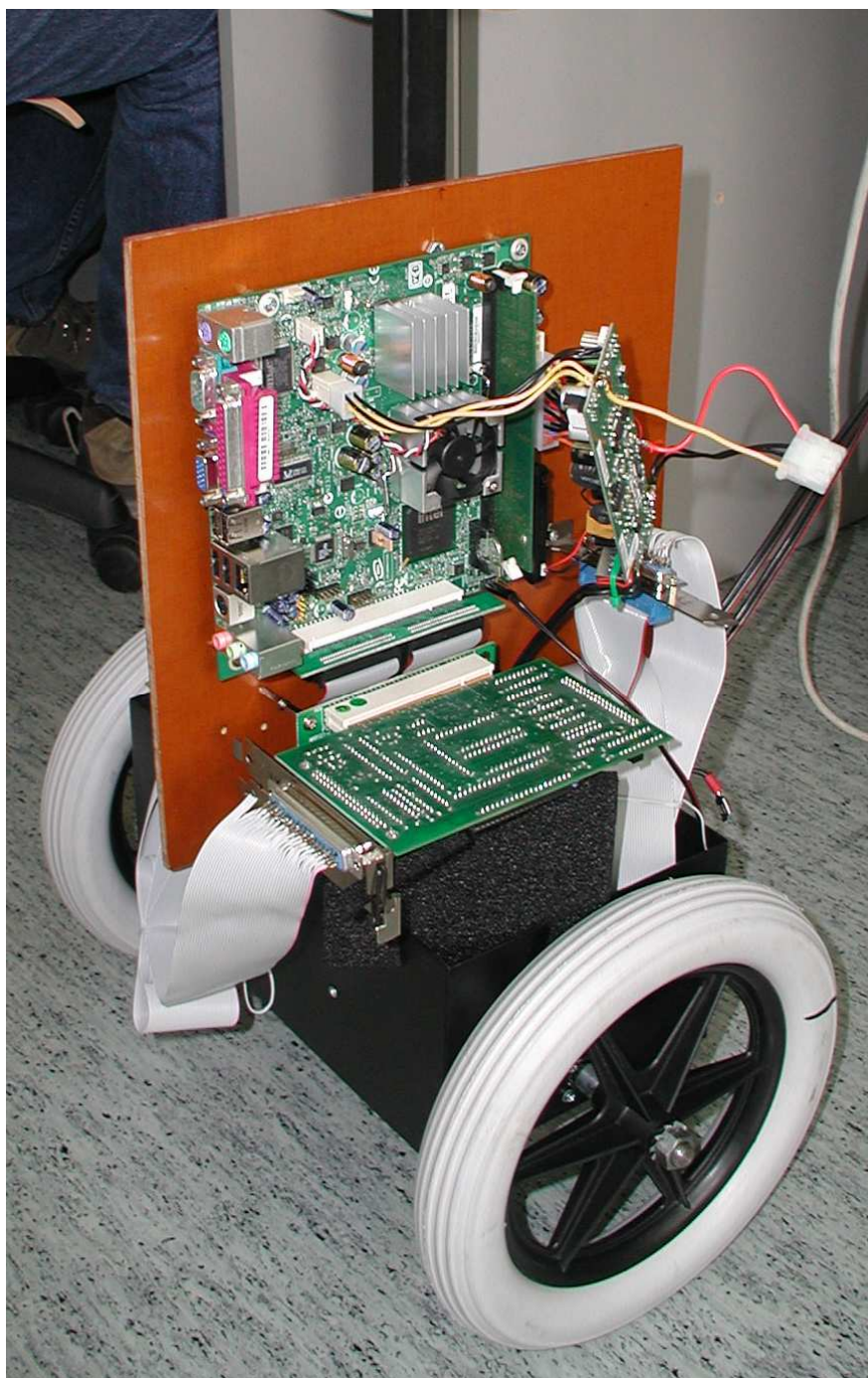
Možností řešení ztráty dat simulace je použití File-scopů. Tento blok ukládá výsledky simulací v průběžném módu nebo lazy módu až na konec simulace. Výsledek je ukládán na Target PC.

Nepříjemným nedostatkem xPC Target knihoven je nemožnost použití bloku Matlab Function programu Simulink. Schémata pro simulace na reálném zařízení se sestavují výhradně z elementárních prvků.

Stavové regulace se ukázala jako vhodná volba pro danou aplikaci. Práce ovšem nezahrnuje grafy naměřené přímo na zařízení, vozík nevydrží balancovat déle než 10s než se projeví hardwarové závady na kolech. Protáčení náboje kola způsobuje nedostatečný přenos řídícího momentu a vozík se začne otáčet. PWM řízení také ze svého principu vyvolává rázy, které zapříčiňují uvolňování uchycení kol s následnou 20° vůlí. Na hřídelích motorů se objevuje opotřebení z neustálého uchycování.

Řešením je přepracování návrhu uchycení kol. Přitažení hřídelí motorů ve dvou místech tak, aby styková plocha byla co největší. Protáčení náboje je možné vyřešit zábrusem do kola, kam se uchytí rozšířená hlavice náboje.

Obr. 19: dokumentuje stav současné práce. Vozík má ještě neupravená kola, proto je schopen balancování jen po dobu, dokud se neuvolní. Je vidět řídící jednotku přichycenou k desce o rozměrech dostatečných pro případné nahrazení současné řídící  $\mu$ ATX desky běžným ATX motherboardem. Kolmo k motherboardu je přes rozšiřovací desku PCI slotů připojena karta mf614. Ploché sběrníkové kabely vedou na svorkovnici s připojenými senzory. Pod deskou mf614 se nachází ethernetová karta, která slouží ke komunikaci s Host PC.



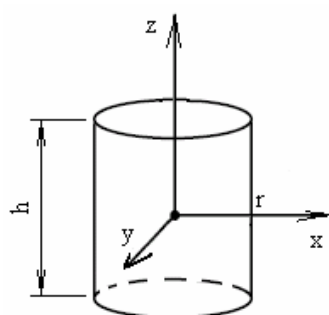
Obr. 19: Model vozíku Segway

## **7. SEZNAM POUŽITÝCH VÝRAZŮ A ZKRATEK**

DH matice	- Denavit – Hartenbergova matice [4]
DPS	- deska plošných spojů
HW	- hardware, fyzické zařízení
EMF	- elektromotorické napětí
PWM	- pulse width modulation, pulzně šířková modulace
SW	- software, programové vybavení
trigger	- spouštění časové základny osciloskopu

## 8. PŘÍLOHY

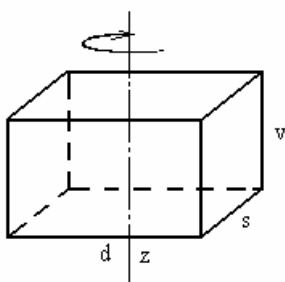
### 8.1 MOMENTY SETRVAČNOSTI VYBRANÝCH TĚLES



$$J_x = J_y = \frac{1}{12} m(3r^2 + h^2) \quad (8.1)$$

$$J_z = \frac{1}{2} mr^2 \quad (8.2)$$

Obr. 20: Momenty setrvačnosti válce



$$J_z = \frac{1}{12} m(d^2 + s^2) \quad (8.3)$$

Obr. 21: Moment setrvačnosti kvádru

Pro těleso s osou rotace ležící mimo těžiště platí Stokesova věta :

$$J = J_0 + ml^2 \quad (8.4)$$

kde :

$J_0$	[kg.m <sup>2</sup> ]	moment setrvačnosti tělesa v místě těžiště podle souběžné osy s osou rotace
$m$	[kg]	hmotnost tělesa
$l$	[m]	vzdálenost osy rotace od těžiště

## POUŽITÁ LITERATURA

- [1] Oficiální česká stránka Segway  
<http://www.segway.cz/>
- [2] Oficiální stránka Segway  
<http://www.segway.com/>
- [3] Prof. Ing. ŠOLC F., Csc ; Ing. VÁCLAVEK P., Ph.D. , skripta -  
Modelování a simulace, 31.10.2006
- [4] GREPL R., Kinematika a dynamika mechatronických systémů, Brno,  
2007
- [5] HALLIDAY D., RESNICK R., WALKER J., Fyzika, Část první –  
Mechanika, 2006
- [6] WEIQIAN ZHOU, Platform for ergonomic steering methods  
investigation of "Segway-style" balancing scooters

Dostupné z WWW:

[http://adt.waikato.ac.nz/uploads/approved/adt-  
uow20080130.140133/public/02whole.pdf](http://adt.waikato.ac.nz/uploads/approved/adt-uow20080130.140133/public/02whole.pdf)

- [7] BARKER N. P., BROWN C. P., DOWLING D. R. S, MODRA J. L.,  
TOOTELL D. J. SON of EDGAR State-Space Control of Electro-  
Drive Gravity-Aware Ride

Dostupné z WWW:

[http://www.mecheng.adelaide.edu.au/robotics\\_novell/projects/2006/S  
OnofEDGAR/Son\\_of\\_EDGAR\\_FINAL\\_REPORT.pdf](http://www.mecheng.adelaide.edu.au/robotics_novell/projects/2006/SOnofEDGAR/Son_of_EDGAR_FINAL_REPORT.pdf)

[http://www.mecheng.adelaide.edu.au/robotics/robotics\\_projects.php?  
wpage\\_id=44&title=31&browsebytitle=1](http://www.mecheng.adelaide.edu.au/robotics/robotics_projects.php?wpage_id=44&title=31&browsebytitle=1)



- [8] GRASSER F., D'ARRIGO A., COLOMBI S., RUFER A. - JOE: A Mobile, Inverted Pendulum

Dostupné z WWW :

<http://leiwww.epfl.ch/joe/>

**Další zdroje dostupné z WWW :**

- [9] xPC Target User's guide, Humusoft, 2003

Dostupné z WWW :

[http://www.mathworks.com/support/product/XP/productnews/xpc\\_target\\_ug\\_Nov\\_07\\_2003.pdf](http://www.mathworks.com/support/product/XP/productnews/xpc_target_ug_Nov_07_2003.pdf)

- [10] Modul MOT-1

Dostupné z WWW:

<http://www.jalsoft.iol.cz/>