

Modelování Phillipsovy křivky s podporou systému Maple

Jan Luhan, Veronika Novotná

Ústav informatiky

Podnikatelská fakulta, VÚT Brno

Kolejní 2906/4, 612 00 Brno

luhan@fbm.vutbr.cz; novotna@fbm.vutbr.cz

Abstrakt: Tato práce představuje možnosti, které nabízí software Maple při řešení ekonomického modelu pomocí diferenciálních rovnic. Článek se zabývá modelem, který vyjadřuje vztah mezi mírou inflace a mírou nezaměstnanosti a který se stal známý jako Phillipsova křivka. Ekonomická teorie je popsána v úvodu kapitoly a slouží jako podklad pro formulování vztahů ekonomických veličin, které jsou dalším předmětem výzkumu. Z hlediska matematiky vede model k řešení systému obyčejných diferenciálních rovnic. Dále jsou v článku popsány některé základní nástroje pro práci s diferenciálními rovnicemi v Maple. V závěru dokumentu je uveden příklad řešení matematického modelování Phillipsovy křivky s podporou systému Maple.

Klíčová slova: Phillipsova křivka, Maple, diferenciální rovnice, ekonomický model, inflace, nezaměstnanost

Abstract: This paper presents the possibilities offered by Maple software for solving economic model by differential equations. The article deals with a formulation of the model which expresses the relationship between the rate of inflation and the rate of unemployment which is known as the Phillips curve. The economic theory serves as the basis for formulating relationships of the economic quantities which are further research topic. Mathematically, the model leads to solve a system of common differential equations. This article also describes some basic tools for working with differential equations in Maple. In the end of this paper is presented example of the solution of economic model with a support Maple.

Key Words: Phillips curve, Maple, differential equations, economic model, inflation, unemployment

1. Úvod

Ekonomika je jednou oblastí společenských věd, která se zabývá peněžními toky, obchodní činností a výrobními systémy ve společnosti. Na rozdíl od jiných vědních oblastí, kde mohou vědci experimentovat v kontrolovaném prostředí a po nasimulování konkrétních podmínek mohou otestovat své teorie, v ekonomii to je poměrně obtížné. Obdobným způsobem, jakým biologové používají modely, pro názorné ukázky, jak pracují například vnitřní orgány živých organismů, nebo strojní inženýři vytváří modely pro znázornění, jak konkrétní systém pracuje, tak také ekonomové považují modely za nástroj, který jim pomůže při řešení problémů. Manažeři musejí odhadovat vývoj ekonomických podmínek v příštím období, analyzovat, jak jednotlivé faktory ovlivní průběh ekonomických jevů, předvídat možná rizika a využívat schopnosti a iniciativy pracovníků ve svém podniku. Studium modelů v ekonomii patří k základním metodám, protože pokud chce ekonom posoudit dopady

určitých kroků v ekonomickém systému, potřebuje vytvořit model a získat historická data, aby mohl ověřit svoji teorii.

2. Modelování v ekonomii

Mnozí ekonomové mají vlastní specifické definice modelu v ekonomii. Následující definice jsou převzaté z níže uvedených ekonomických publikací:

Samuelson a Nordhaus v [16] uvedli definici modelu jako formálního rámce pro vyjádření základních rysů složitého systému za pomoci důležitých vztahů. Modely bývají obvykle prezentovány ve formě grafů, matematických rovnic a počítačových programů.

Begg, Fisher a Dornusch [2] uvádí, že případné závěry o budoucím chování lidí, jsou učiněny na základě teorií, které vychází z modelů, zjednodušujících realitu. Model je tedy prostředkem pro vývoj teorie.

K významným trendům současnosti patří studovat nejrůznější modelové situace, orientovat se v simulovaných podmínkách, hledat východiska, optimální řešení apod. Měření ekonomických veličin pak koresponduje s využíváním kvantitativních metod, tedy metod založených na výstupech matematických disciplín. Matematické modely nám mohou poskytnout snadněji pochopitelný popis všech významných faktorů dané situace a umožňují následně definovat podstatné vztahy mezi jednotlivými prvky studovaného systému.

Matematické modelování [1,2] proniklo do různých oborů přírodních, technických, ekonomických i sociálních věd a stalo se důležitým pomocníkem při modelování a simulacích systémů, analýzách a předvídání různých procesů, jevů, chování druhů a stavů společenstev.

Modelování jevů, vycházejících z ekonomické skutečnosti a zachycené statistickými daty, je založené zejména na bázi matematických disciplín, jakými jsou statistika, numerické metody, operační výzkum, lineární a dynamické programování, optimalizace aj. Jak pro modelování, analýzu, diagnostiku, případně i řešení problémů kvantitativními metodami, tak i pro zpětný ekonomický výklad a aplikace je nezbytností využití vhodného počítačového systému. V ekonomii bylo matematické modelování používáno již v době, kdy programovatelné počítače ještě neexistovaly ani jako teoretické koncepce. Hromadnější použití počítačů při řešení úloh z oblasti ekonomie spadá do konce padesátých let, kdy počítače začaly být běžně dostupné. V té době byly již hlavní disciplíny, na nichž se matematické modelování zakládá, ustanoveny. Nástup počítačů přesto znamenal v matematickém modelování významný obrat. Především bylo možné ustoupit od vysokého stupně agregace ekonomických veličin, jinak nutné při výpočtech prostředky klasické matematické analýzy a numerické matematiky. (Agregací se rozumí zmenšení rozměrů modelu.) Neagregované modely mají schopnost přesněji vystihnout jevy v modelované ekonomické realitě, takže výsledky z nich získané je možné bezprostředně použít pro rozhodování a řízení. Nástupem počítačů se posílila úloha optimalizačních modelů, které bylo možné konstruovat více s ohledem na podstatu problému a méně s ohledem na výpočetní úsilí potřebné k jejich řešení. Počítače také umožnily shromáždit rozsáhlé statistické podklady o reálných ekonomických systémech, o které se mohly optimalizační, ale i deskriptivní modely opírat. Dnešní věda, matematika ani ekonomie, se bez těchto programů neobejde. Matematické programy totiž svou výpočetní rychlostí a rozsahem

umožňují řešit reálné problémy - průběh nabídky a poptávky, pohyb v odporovém prostředí, dynamické chování živočišných systémů atp.

3. Systém Maple

Matematických programů, schopných řešit konkrétní matematické úlohy, je velká řada, jelikož historicky vznikaly v rámci různých univerzit a jsou tedy zaměřeny na řešení různých problémů. Obecně se mezi matematické programy řadí i programy na tvorbu grafů (např. Graph, Gnuplot), statistické programy (např. Statistica, Origin, SPSS), případně programy specializované na numerické výpočty (např. Matlab, Scilab, Maple). Komplexnější matematické programy umožňují nejen řešit rovnice a pracovat s algebraickými výrazy, ale také zvládají integrální a diferenciální počet, kreslení grafů, práci s jednotkami, interaktivní změnu dokumentů, numerické výpočty a mnoho dalšího.

Standardním jazykem, který je používaným v matematických programech, je obvykle angličtina. Některé programy nabízejí i další jazyky (v určitých případech i češtinu), nicméně většina názvů funkcí (příkazů) používaných v matematických programech vychází z angličtiny (např. simplify, solve, atd.).

V našem článku bude podrobněji popsána možnost využití systému Maple pro řešení makroekonomického modelu Phillipsovy křivky. Systém byl vyvíjen převážně v Kanadě na University of Waterloo, a právě proto dostal jméno Maple (javor). Maple je vůdčím víceúčelovým matematickým softwarovým nástrojem. Poskytuje pokročilé vysokovýkonné matematické výpočetní jádro s plně integrovanou numerikou a symbolikou, vše dostupné z WYSIWYG prostředí dokumentu. [11]

Maple bývá používán jako matematický software především pro možnost řešit výpočty symbolicky. Je velice podobný programům Mathematica a Maxima, které však nabízejí mnohem méně funkcí. Nespornou výhodou Maple je, že umí nejen provádět analytické výpočty se vzorci, ale stejně dobře zvládne i numerický výpočet a případné grafické zobrazení výsledků. Jde tedy o systém, který vytváří přitažlivé uživatelské prostředí, a současně i poskytuje velmi širokou paletu možností pro využívání kvantitativních metod pro praxi, aplikační úlohy, vědecké výpočty pro mnoho oborů aj. Dále Maple umožňuje uživateli dokumentovat jeho práci. Uživatel má k dispozici možnost vytvořit článek v LATEXu nebo HTML dokumentu v podobě webové stránky. V Maple jsou k dispozici nejen příkazy a funkce v tzv. jádru, ale specializované knihovny, kterých je více než sedmdesát. Náповěda Maple pak poskytuje velmi přesný popis jednotlivých příkazů spolu s jejich parametry. Interaktivní komunikace Maple je pak výrazně podporována vytvářením tzv. zápisníků.

Mezi jeho významná pozitiva patří průběžné inovace, které reagují na potřeby praxe, vstřícné pracovní a komunikační prostředí pro uživatele, stále dokonalejší vizualizační prostředky a prezentace vědeckých výpočtů a především samostatnost zvládnutí systému i pro začínající uživatele.

Pokud tedy využijeme pracovní prostředí systému Maple, stává se matematika a statistika nástrojem pro rychlou a dostupnou kvantifikaci reálných ekonomických jevů a procesů. Navíc využitím systému Maple získáváme možnost jejich vizualizace, animace a simulace. Počítačový systém Maple zajišťuje významnou bázi prostředků pro využití jak pracovního, tak komunikačního prostředí z nejrůznějších odborných oblastí na mezinárodní úrovni.

4. Phillipsova křivka

Jedním z nástrojů, který se již řadu let využívá k předpovídání budoucí míry inflace, je tzv. Phillipsova křivka. Jejím autorem je novozélandský ekonom A. W. Phillips, který ve své práci v roce 1958, uveřejnil názor, že existuje inverzní vztah mezi mírou změny mezd a nezaměstnaností v britské ekonomice. V článku „The Relation Between Unemployment and the Rate of Change of Money Wage Rates in the United Kingdom, 1861-1957“ [14] se zaměřil na analýzu vztahu mezi mírou nezaměstnanosti a vývojem sazeb nominálních hodinových mezd.

Samuelson a Solow v [17] ukázali empirickou platnost vztahu na datech Spojených států a otevřeli prostor pro interpretaci původního Phillipsova vztahu do roviny cenová inflace versus míra nezaměstnanosti.

Následující ekonomický vývoj v 70. letech však spíše odpovídal teorii přirozené míry nezaměstnanosti Miltona Friedmana [5]. Nicméně další ekonomický vývoj přivedl některé z ekonomů (např. O. Blancharda [3]) k názoru, že dlouhodobé přetrvávání vysoké míry nezaměstnanosti má tendenci zvyšovat přirozenou míru nezaměstnanosti.

Přestože mezi ekonomy zůstává Phillipsova křivka kontroverzním tématem, většina z nich dnes myšlenku krátkodobého vztahu mezi inflací a nezaměstnaností přijímá. Například autoři Fischer, Liu a Zhou ukazují, že model Phillipsovy křivky může správně předpovědět směr změny inflace v přibližně 60-70% případů. [4]

Podle běžného vysvětlení tento vztah vzniká z pomalého přizpůsobování některých cen v krátkém období. Politici mohou z této situace těžit pomocí různých nástrojů, které mají k dispozici a jsou schopni krátkodobě ovlivnit kombinaci inflace a nezaměstnanosti.

Vysvětlení výše zmíněného jevu například Gordon [8] shrnuje do dvou přístupů – strukturalistického a hysterezního. Strukturalistický přístup viděl a vidí důvod rostoucího NAIRU ve specifických překážkách na straně nabídky, zatímco hysterezní naopak předpokládá, že NAIRU sleduje vývoj aktuální nezaměstnanosti.

Novokeynesiánská Phillipsova křivka (NKPC) je založena na strukturním modelování inflace. Pro její odvození se totiž využívá mikroekonomických základů. Charakteristickým je tak prostředí monopolistické konkurence s přítomností nominální cenové rigidity. Tu ve své práci představuje Taylor prostřednictvím modelu strnulých mezd, Rotemberg [15] kvadratickým modelem cenového přizpůsobování. Mezi představiteli, kteří ve svých studiích uplatnili strukturální přístup, patří např. Layard, Nickell a Jackman [10].

Význačným příspěvkem, který zužuje strukturu současné hodnoty inflace pro údaje americké ekonomiky, jsou. [6],[18] Výsledky studií pak uvádí, že NKPC se shoduje s Euro údaji velmi dobře, možná lépe než s údaji v USA.

Ve studii [12] je hodnoceno působení vnějších vlivů na inflaci ve 12 členských zemích EU. Empirická studie je založena na neokeynesiánské verzi Phillipsovy křivky, kterou se zabývá i Gal a Monacelli [7], v souvislosti s malými otevřenými ekonomikami.

Hysterezní model nezaměstnanosti je založen na Phillipsově křivce s adaptivním očekáváním. Hlavním důsledkem existence jevu hystereze v nezaměstnanosti je, že jakákoliv úroveň nezaměstnanosti je konzistentní se stabilní inflací, jejíž míra závisí pouze na minulém vývoji inflace a nezaměstnanosti.

Nový test na hysterezi navrhl v [13] Pérez-Alonzo. Součástí testu byl rozklad nezaměstnanosti na komponenty. V této simulační studii byla využita metoda Monte Carlo a bootstrapové algoritmy, testovány byly data z Itálie, Francie a USA. V této práci byly podány důkazy o hysterezi pro všechny testované země.

Pro 17 zemí OECD byla zkoumána empirická platnost hypotézy hystereze v [9]. Autoři zjišťovali, zda existují důkazy pro nestabilní míru nezaměstnanosti v závislosti na vzdělání. Hypotéza zde potvrzena nebyla.

Z dalších studií můžeme jmenovat například empirickou studii Staigera, Stocka a Watsona, ve které autoři předkládají důkazy o existenci potenciálních vazeb mezi růstem produktivity práce a přirozenou mírou nezaměstnanosti. Podle těchto autorů, byla rozšířena Phillipsova křivka o tuto variabilní proměnnou, což velice zpřesnilo její výsledky pro období druhé poloviny 90. let. [19]

5. Diferenciální rovnice v Maple

Systém Maple poskytuje účinné nástroje pro řešení více typů diferenciálních rovnic. Před tím, než začneme pracovat s diferenciálními rovnicemi, je vždy potřeba v zápisníku aktivovat balík DEtools, pomocí příkazu **with(DEtools)**. Tento balík obsahuje příkazy, se kterými budeme při řešení diferenciálních rovnic pracovat.

Pro samotnou derivaci se obvykle užívají příkazy **diff**, **Diff** a **D**. V tomto příspěvku se pro další výpočty bude používat příkaz **diff**. Za jeho argument je pokládán výraz a zapisuje se ve tvaru **diff(výraz, proměnná)**.

Chceme-li zjistit, o jaký druh diferenciální rovnice se jedná, použijeme příkaz **odeadvisor**, který danou rovnici klasifikuje.

Základním příkazem pro řešení diferenciálních rovnic je **dsolve**, který má velké množství volitelných argumentů. Povinným parametrem tohoto příkazu je diferenciální rovnice (je-li uveden pouze výraz, pokládá se roven nule). Pokud hledáme obecné řešení, výsledkem příkazu **dsolve** je analytické řešení (pokud existuje) v uzavřeném tvaru. Jako konstanty jsou uvedeny **_C1**, **_C2**, atd. V případě, že hledáme partikulární řešení, musí být předepsány i počáteční podmínky. Ty se zapisují společně s rovnicí do množinových závorek, a řešení je pak uvedeno v uzavřeném tvaru, kde jsou příslušné konstanty vyčísleny.

K příkazu **dsolve** při řešení soustavy diferenciálních rovnic můžeme zapisovat seznamy více parametrů stejného typu do složených závorek. Zápis je pak ve tvaru **dsolve({seznam diferenciálních rovnic, seznam počátečních podmínek}, {neznámé funkce}, další argumenty)**.

Řešení dané rovnice můžeme také vykreslit pomocí příkazů **deplot**, **odeplot** nebo **phaseportrait**. Příkaz **plot**, který se obecně používá pro vykreslení grafu funkce v programu Maple, zde přímo použít nemůžeme.

Příkaz **odeplot**, z balíku **plots**, se používá pro vykreslení jednoho nebo více grafů numerického řešení s počátečními podmínkami. Povinným parametrem pro tento příkaz je výstup příkazu **dsolve** (... , numeric), volitelnými parametry jsou potom osy a funkce proměnných, které chceme vykreslit, rozsah os, na kterých graf vykresluje a další parametry grafu, které jsou stejné jako pro příkaz **plot**.

Pro příkaz **deplot** (nebo také **DEplot**), na rozdíl od příkazu **odeplot**, jsou povinným argumentem diferenciální rovnice nebo soustava diferenciálních rovnic a stanovení počáteční podmínky. K příkazu **deplot** také existuje mnoho volitelných argumentů, které prostředím grafu pozměňují.

Dalším příkazem pro vykreslení grafu řešení diferenciálních rovnic je **phaseportrait**. Pokud chceme znázornit řešení pouze jedné diferenciální rovnice, vykreslí nám Maple stejný graf, který se vykreslí zadáním příkazu **deplot**. Pokud však zadáme příkaz **phaseportrait** a pro autonomní soustavu dvou diferenciálních rovnic o dvou neznámých, příkaz vykreslí graf i závislosti těchto dvou neznámých funkcí, včetně směrového pole, které vyjadřuje závislost $(dy/dt)/(dx/dt)$, tudíž po vykrácení dy/dx .

Maple, verze 9.5 a vyšší, umožňuje uživateli provádět vybrané akce i bez znalosti syntaxe příslušných příkazů. K příkazu **dsolve** existuje jeho interaktivní varianta **dsolve[interactive]**. Zde je využíváno grafické rozhraní Maplu, vytvořené pomocí tzv. Mapletů. V tomto příkazu lze nastavit, jaké výsledky, týkající se řešení diferenciální rovnice, chceme zobrazit. Po kliknutí myši v menu na Tools a dále na Assistant, kde volíme možnost ODE Analyzer. Díky tomu je možné rovnici zadat, dále ji opakovaně upravovat, případně zadávat a měnit počáteční podmínky, zavádět a rušit parametry modelu atd. ODE Analyzer umožňuje provádět jak symbolické, tak i numerické řešení diferenciálních rovnic a následně i vykreslit jejich řešení.

6. Aplikace diferenciálních rovnic při modelování Phillipsovy křivky

V matematických modelech bývají velice často využívány diferenciální rovnice. V následujícím příkladu je popsán model, ve kterém jsou pomocí diferenciálních rovnic popsány dvě veličiny, které na sebe vzájemně působí.

Budeme dále vycházet z rozšířené verze Phillipsovy křivky:

$$w = f(U) + g\pi, \quad (0 < g \leq 1), \quad (1)$$

kde označuje

- π očekávanou míru inflace
- w míru růstu nominální mzdy
- U míru nezaměstnanosti.

Základní myšlenkou tohoto vztahu je, že pokud bude mít inflace dostatečně dlouho určitý trend, potom si lidé vytvoří inflační očekávání, která se promítnou v jejich požadavcích na mzdu. Z toho plyne, že w by mělo být rostoucí funkcí π .

Dále je třeba zohlednit fakt, že inflační tlak w může být kompenzovaný zvýšením produktivity práce (označme jako T). Případný inflační účinek se pak může projevit v případě, že nominální mzda roste rychleji, že produktivita práce. Pokud označíme míru inflace p , můžeme psát:

$$p = \alpha - T - \beta U, \quad (\alpha, \beta > 0) \quad (2)$$

Vztah (1) můžeme nyní převést na rovnici:

$$p = \alpha - T - \beta U + g\pi, \quad (0 < g \leq 1). \quad (3)$$

Pro popis charakteru změn v průběhu času můžeme použít hypotézu adaptivních očekávání a změnu pak vyjádříme vztahem:

$$\frac{d\pi}{dt} = j(p - \pi), \quad (0 < j \leq 1). \quad (4)$$

Pro zvýšení vypovídající schopnosti vytvářeného modelu zavedeme ještě třetí rovnici, popisující chování proměnné U . Pro jednoduchost budeme uvažovat, že je ovlivňována pouze prostřednictvím měnové politiky.

$$\frac{dU}{dt} = -k(m - p), \quad (k > 0), \quad (5)$$

kde m je tempo růstu nominálního peněžního zůstatku.

Nyní se pokusíme sestavit konkrétní model Phillipsovy křivky, vycházející z reálných hodnot. Pro rovnici (3), vyjadřující inflaci, byly hodnoty převzaty z článku [x], kde byly parametry odhadnuty z reálných dat české ekonomiky z let 1993-2005. Rovnice má tvar:

$$p = 0,311 + 0,037U + 0,949\pi. \quad (6)$$

Potom, pokud zvolíme $j=0,5$, z rovnice (4) plyne, že

$$\frac{d\pi}{dt} = 0,155 + 0,0185U - 0,5255\pi. \quad (7)$$

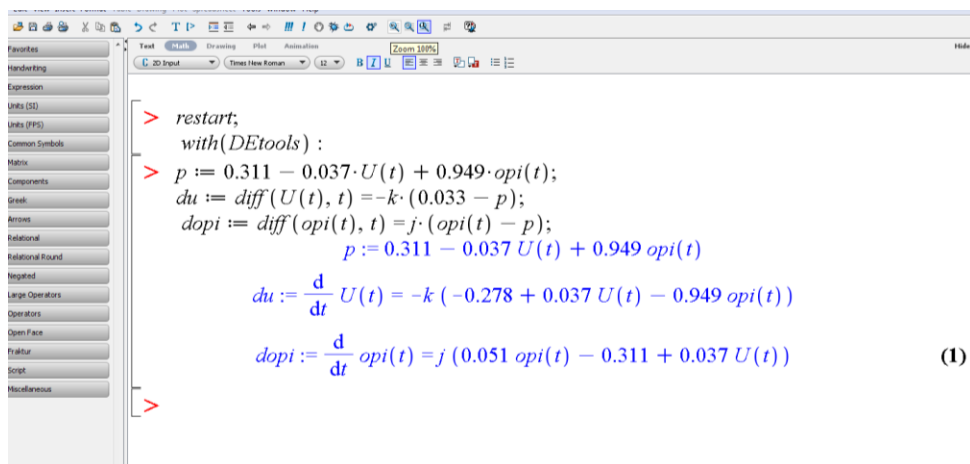
Pokud dosadíme p z (6) do rovnice (5) a budeme uvažovat $m=0,03$ a zvolíme $k=0,5$, platí

$$\frac{dU}{dt} = 0,1405 + 0,0185U - 0,4745\pi. \quad (8)$$

Nyní budeme soustavu diferenciálních rovnic (7),(8) řešit v Maple za počátečních podmínek

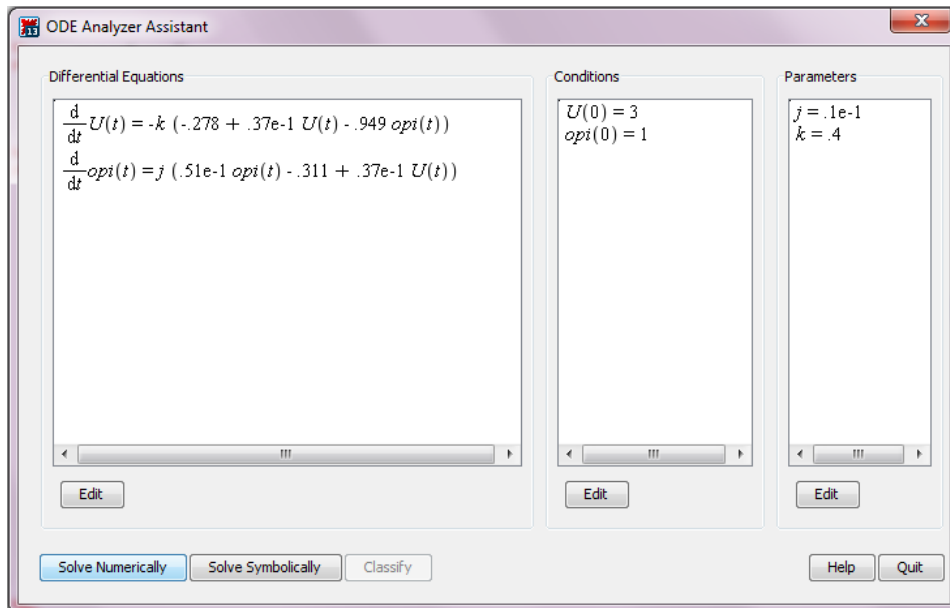
$$\pi(0) = 0,01, \quad U(0) = 0,05 \quad (9)$$

Nejprve zadáme do systému Maple soustavu diferenciálních rovnic, které musíme vyřešit.



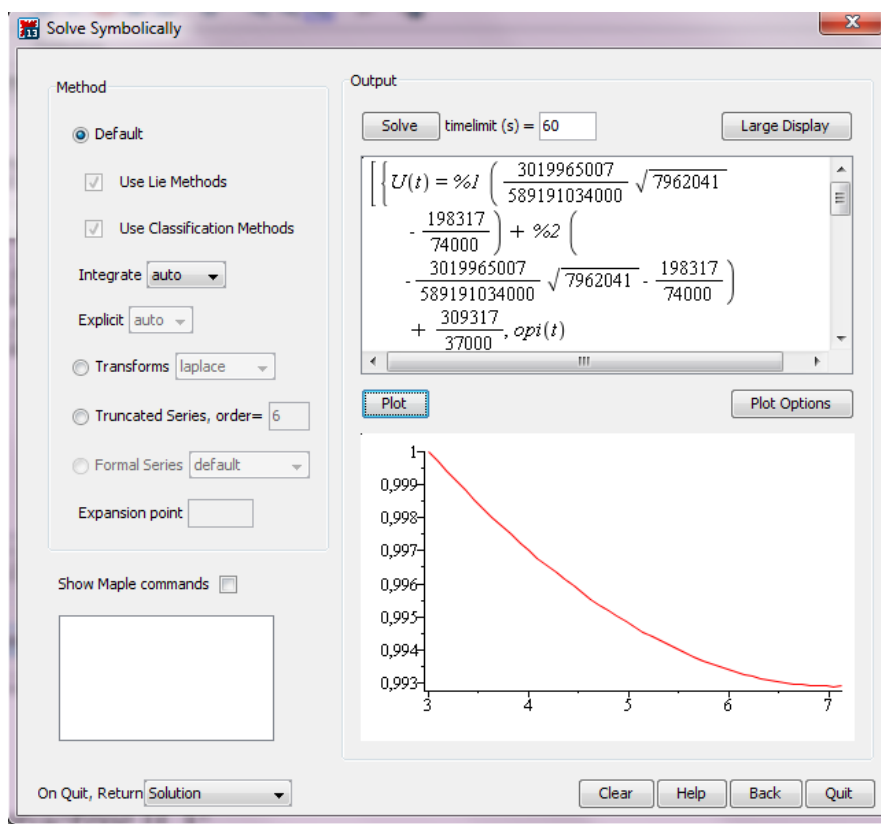
Obr. 1: První krok výpočtu

Pro usnadnění práce nyní využijeme příkaz `dsolve[interactive]`, pomocí kterého zadáme všechny potřebné parametry.



Obr. 2: Druhý krok výpočtu

V této chvíli je vše připravené pro zahájení řešení, a tak klikneme na tlačítko Solve Symbolically pro numerický výpočet řešení. Přejdeme tak do dalšího okénka, jež po levé straně nabízí případnou volbu nastavení různých metod, které lze využít k nalezení řešení. V našem případě nebudeme nic měnit a využijeme standardního nastavení.



Obr. 3: Třetí krok výpočtu

Po stisknutí tlačítka Solve bylo zobrazeno symbolické řešení. Současně toto okno umožňuje zobrazit i graf, který je vidět v jeho spodní části. Po stisknutí tlačítka Quit se vrátíme zpět do zápisníku Maple, do nějž bude vložen zápis symbolického řešení. Stejného výsledku dosáhneme i přímým použitím příkazu dsolve.

```

> restart,
with(DEtools):
> p := 0.311 - 0.037*U(t) + 0.949*opi(t);
du := diff(U(t), t) = -k*(0.033 - p);
dopi := diff(opi(t), t) = j*(opi(t) - p);
p := 0.311 - 0.037 U(t) + 0.949 opi(t)
du := d
dr U(t) = -k (-0.278 + 0.037 U(t) - 0.949 opi(t))
dopi := d
dr opi(t) = j (0.051 opi(t) - 0.311 + 0.037 U(t))
(1)
> [
> sol1:=dsolve([diff(U(t), t)=-0.4*(0.033-p), diff(opi(t), t)=0.01*(opi(t)-p), U(0)=3, opi(0)=1], [U(t),
opi(t)]);
sol1 := [ U(t) = -1531
74 e
1
200000 (-1429 + sqrt(7962041)) t ( 1083843
15924082000 sqrt(7962041) + 967
2000 )
+ 1
74 e
1
200000 (-1429 + sqrt(7962041)) t ( 1083843
15924082000 sqrt(7962041) + 967
2000 ) sqrt(7962041) - 1531
74 e
1
200000 (1429 + sqrt(7962041)) t (
- 1083843
15924082000 sqrt(7962041) + 967
2000 ) - 1
74 e
1
200000 (1429 + sqrt(7962041)) t (
- 1083843
15924082000 sqrt(7962041) + 967
2000 ) sqrt(7962041)
+ 309317
37000 , opi(t) = e
1
200000 (-1429 + sqrt(7962041)) t ( 1083843
15924082000 sqrt(7962041) + 967
2000 ) + e
1
200000 (1429 + sqrt(7962041)) t (
- 1083843
15924082000 sqrt(7962041) + 967
2000 ) + 33
1000 ]
(2)

```

Obr. 4: Čtvrtý krok výpočtu

Pro další práci s výsledky využijeme i některé další funkce, které nám umožní snadnější zpracování získaných výsledků (evalf, subs).

V této chvíli tedy můžeme očekávanou inflaci vyjádřit rovnicí

$$\pi = 0,6755543626 e^{0,006963544395t} + 0,2914456377 e^{-0,02125354440t} + 0,033$$

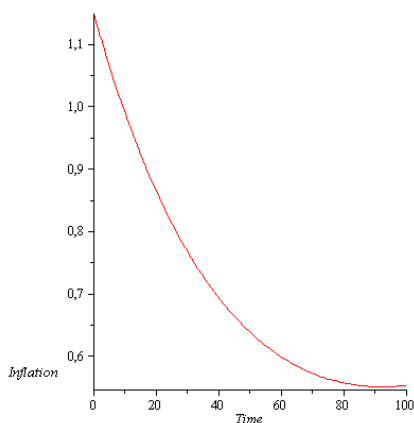
a nezaměstnanost je dána rovnicí

$$U = 11,78302722 e^{0,006963544395t} - 17,14294614 e^{-0,02125354440t} + 8,359918919$$

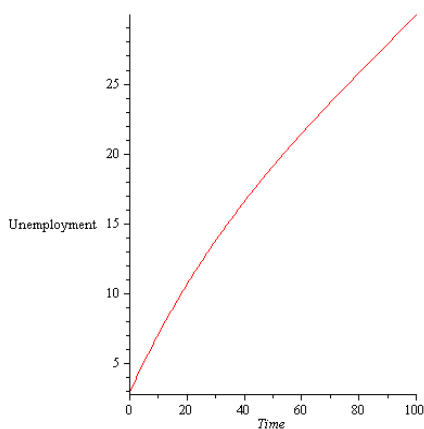
Aktuální míru inflace tedy můžeme po dosazení do vztahu (6) vyjádřit jako

$$p = 0,033 + 0,2051290830 e^{0,006963544395t} + 0,9108709174 e^{-0,02125354440t}$$

Příkazem plot můžeme nyní vyjádřit i průběh chování inflace a nezaměstnanosti v čase.

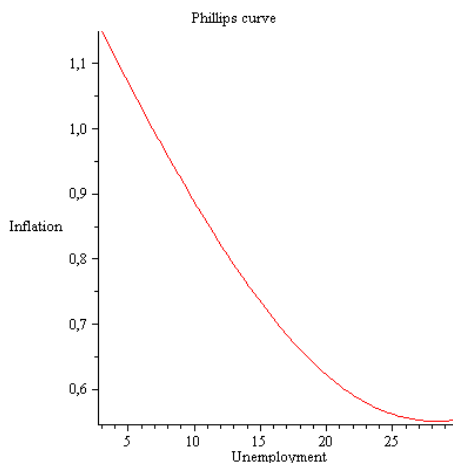


Obr. 5: Křivka inflace



Obr. 6: Křivka nezaměstnanosti

Klasický graf Phillipsovy křivky pak má následující podobu



Obr. 7: Phillipsova křivka

7. Závěr

Při sestavování modelů není pro ekonomy jediným problémem samotné teoretické řešení stanoveného problému, ale i výběr nástroje, pomocí kterého budou propočítány parametry nutné pro dostatečné popsání modelu. Cílem tohoto článku bylo přiblížit čtenáři postup při řešení modelu Phillipsovy křivky pomocí diferenciálních rovnic v systému Maple. Řešení bylo popsáno od samotného zadání diferenciálních rovnic až

po konečné sestavení modelu, včetně grafického znázornění Phillipsovy křivky. V článku nebylo možné podrobně popsat všechny příkazy a jejich parametry, které bylo při řešení třeba použít. I přes toto omezení by měl čtenář poskytnout dostatek informací, nutných pro samostatné řešení obdobných problémů.

Na závěr je možno konstatovat, že systém Maple je uživatelsky velmi přívětivý i pro začínající uživatele a umožňuje poměrně pohodlným způsobem získat podklady pro další rozhodování. Stává se tak vhodnou variantou pro podporu využití exaktních modelovacích metody v ekonomické praxi. Na uživateli potom zůstává provedení ekonomické interpretace získaných výsledků.

8. Použité zdroje

- [1] BARNES, B. ; FULFORD, G. *Mathematical Modelling with Case Studies: A Differential Equation Approach Using Maple*. Taylor & Francis, 2002. ISBN 9780415298049.
- [2] BEGG, D. ; FISCHER, S. ; DORNBUSCH, R. *Economics*, 6th ed. McGraw-Hill, 2000. 600 p. ISBN 978-0077107759.
- [3] BLANCHARD, O. *Macroeconomics*. 5th ed. Prentice-Hall, 2002. ISBN 0-13-110301-6.
- [4] FISHER, J., D., M. ; LIU, C., T. ZHOU, R. When Can We Forecast Inflation? *Chicago Economic Perspectives* [on-line]. p. 30-42. [cit. 2006-08-20]. Dostupné z: <http://www.chicagofed.org/publications/economicperspectives/2002/1qepart4.pdf>
- [5] FRIEDMAN, M.: The Role of Monetary Policy. *The American Economic Review*. May 1968, Vol. 58, No. 1. p. 1–17. ISSN 0002-8282.
- [6] GALÍ, A. ; GERTLER, J. *Inflation Dynamics: a Structural Econometric Analysis*. [cit. 2006-08-20] dostupný z: www.econ.ucdavis.edu/faculty/jorda/class/235b/notes/Topic%20%20Policy%20Rules/Gali%20and%20Gertler.pdf
- [7] GALI, J. ; MONACELLI, T. Monetary Policy and Exchange Rate Volatility in a Small Open Economy. *Review of Economic Studies*. 2005, Vol. 72. p. 707-734. ISSN 0034-6527.
- [8] GORDON, R. J. Hysteresis in History: Was There Ever a Phillips Curve? *The American Economic Review*. 1989, Vol. 79. p. 220–225. ISSN 0002-8282.
- [9] KULA, F. ; ASLAN, A. Hysteresis vs. Natural rate of unemployment: One, the other, or both? *South East European Journal of Economics and Business*, 5 (1), 2010. p. 91-94. ISSN 1840-118X.
- [10] LAYARD, R. ; NICKELL, S. ; JACKMAN, R. *Unemployment: Macroeconomic Performance and the Labour Market*. 2nd ed. Oxford : Oxford University Press, 2005. 623 p. ISBN 0-19-927917-9.
- [11] MAPLESOFT. *Math Software for Engineers, Educators & Students*. [Online]. [cit. 2008-05-15] Dostupné z: <http://www.maplesoft.com>.
- [12] MIHAILOV, A. ; RUMLER, F. ; SCHARLER, J. Inflation Dynamics in the New EU Member States: How Relevant Are External Factors? *Review of International Economics*, 2009, 19 (1). p. 65-76. ISSN 1467-9396.

- [13] PÉREZ-ALONZO, A. ; DI SANZO, S. Unemployment and hysteresis: A nonlinear unobserved components approach. *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 15 (1), art. no. 2, 2011. ISSN 1081-1826.
- [14] PHILLIPS, A. W. The Relation Between Unemployment and the Rate of Change of Money Wage Rates in the United Kingdom, 1861-1957. *Economica*. 1958, Vol. 25, No. 100. p. 283–299.
- [15] ROTEMBERG, J., J. Sticky Prices in the United States. *Journal of Political Economy*. 1982, Vol. 90, no. 6. p. 1187-1211. ISSN 00223808.
- [16] SAMUELSON, P. A. ; NORDHAUS, W. D. *Economics*, 19th ed., Irwin/McGraw-Hill, 2009. ISBN 978-0073511290.
- [17] SAMUELSON, P. A. ; SOLOW, R. M. Analytical Aspects of Anti-Inflation Policy. *The American Economic Review*. May 1960, Vol. 50, Issue 2. p. 177–194. ISSN 0002-8282.
- [18] SBORDONE, J. ; KURMANN, B. A search for a structural Phillips curve. *Computing in Economics and Finance 2004* [on-line]. Society for Computational Economics, 2004. No. 291. [cit. 2006-08-22]. Dostupné z: <http://ideas.repec.org/p/sce/scecf4/291.html>.
- [19] STEIGER, S. ; WATSON, A. *Macroeconometric Study on Monetary Policy Rules: Germany and the EMU*. [cit. 2006-09-20]. Dostupné z: <http://www.ncer.tsinghua.edu.cn/lunwen/paper2/wp200206.pdf>
- [20] CAPASSO, V. ; BAKSTEIN, D. *An Introduction to Continuous-Time Stochastic Processes. Theory, models, and applications to Finance, Biology and Medicine*, Birkhauser, Boston : Birkhauser, 2004. ISBN 978-0817632342.

JEL: E30