Oponentský posudek na disertační práci

Ing. Petry Rozehnalové

nazvanou:

HOMOGENIZATION IN PERFORATED DOMAINS

Předložená disertační práce je věnována tématu modelování periodicky heterogenních struktur metodami homogenizace, které jsou založeny na asymptotické analýze parciálních diferenciálních rovnic s oscilujícím koeficienty nebo na periodicky perforovaných oblastech. Je zaměřena na metodu tzv. **operátoru periodického rozkládání**, dále jen **OPR** (the operator of the periodic unfolding). Příslušná teorie pro použití zavedeného operátoru byla obšírně zpracována v teoretických článcích, jež jsou v práci citovány. Je nutno podotknout, že vybraná metoda byla také již použita v mnohých aplikacích, mezi něž patří nejen úlohy na oblastech s perforacemi (dírami), ale také jinými rozličnými heterogenitami, tedy aplikacích, které mají dosti přímý vztah ke skutečným problémům přesahujícím rámec analýzy diferenciálních rovnic.

Jak vyplývá z její úvodní části, disertační práce si klade za cíl dokázat vybrané teoretické výsledky konvergence pro pozměněnou definici OPR. Dalším vytčeným cílem je použít tyto výsledky pro homogenizaci okrajových úloh s integrálním typem okrajových podmínek na hranici děr.

Práce čítající cca 65 stran je rozčleněna do 7 kapitol, včetně úvodu a závěru, a obsahuje dodatek "A" doplňující aplikační část práce o informace technického charakteru. Úvod zasazuje práci do kontextu dosavadních známých výsledků v oblasti homogenizace a upozorňuje na problematiku zavedení pojmu konvergence funkcí nad oblastmi, které se mění s ε, tedy s parametrem, vůči němuž se konvergenční analýza vyšetřuje. Tato část obsahuje také prameny, z nichž autorka práce vycházela nebo které se k tématu vztahují. Bohužel, některé významné práce mající bezprostřední vztah nejsou zmíněny. Kapitola 2 shrnuje vybrané známé výsledky z funkcionální analýzy. Operátor OPR je zaveden v kapitole 3., v níž jsou po vzoru v úvodu citovaných publikací uvedeny teoretické výsledky s důkazy, které byly provedeny pro pozměněnou definici OPR. Kapitoly 4 a 5 jsou věnovány homogenizaci na periodicky perforovaných oblastech. Je zde sice naznačen obecný případ nekonstantního (myšleno vůči ε) poměru mezi velikosti buňky a velikostí díry, který má klíčový význam pro studium některých aplikačně zajímavých úloh, viz [CDGO-2008], nicméně dále je uvažován jen běžný případ poměru konstantního. Pro takovou situaci jsou ukázány základní vlastnosti OPR ve vztahu ke konvergenci funkcí a jejich gradientů. Jako jediný aplikační příklad si autorka zvolila eliptickou úlohu s integrálními podmínkami na hranici děr. V kapitole 6 jsou k tomuto problému uvedeny numerické výsledky, které ilustrují některé aspekty konvergence řešení původní úlohy k řešení úlohy homogenizované.

Aktuálnost tématu

Téma disertační práce je potencionálně aktuální z hlediska použití již dříve vyvinuté teorie pro řešení úloh z oblasti modelování materiálů a dějů v heterogenních prostředích obecně. Tomuto aspektu se ovšem práce nevěnuje. Z hlediska teorie homogenizace samotné, na níž je práce zaměřena, je problém homogenizace na perforovaných oblastech klasickým problémem, jemuž se v posledních deseti letech věnovala řada prací. Jako velmi aktuální téma, které je v práci zmíněno jen okrajově, lze považovat problematiku numerického modelování, využití korektorů řešení pro rekonstrukci řešení na periodické buňce. Podstatou práce byla revize metody homogenizace založené na OPR.

Dosažení v disertaci stanoveného cíle

Cíle stanovené v úvodu práce lze považovat za splněné. Pro pozměněnou definici operátoru periodického rozkládání (OPR) byly provedeny důkazy vybraných teoretických konvergenčních výsledků, které byly použity pro řešení úlohy na perforované oblasti. Makroskopický model získaný metodou homogenizace byl počítačově implementován, numerické řešení ilustruje konvergenci sekvence řešení přímé úlohy pro škálu parametrů ε k řešení homogenizované úlohy.

Úroveň rozboru současného stavu v disertační práci řešené problematiky

V úvodu práce jsou zmíněny hlavní přístupy používané v homogenizaci heterogenních prostředí popsaných pomocí PDR. Seznam použité literatury obsahuje bez mála 40 položek, jsou v něm zastoupeny důležité práce, na něž se tato disertace odkazuje. Přesto některé publikace, které se vztahují k obsahu a tématu práce, chybí. Kromě teoretických prací, např. [CDGO-2008],[G-2006] a [G-2004], ale i dalších, které jsou zaměřeny na samotnou metodu homogenizace pomocí OPR, postrádám citace prací, které se týkají aplikací – jednak v širším smyslu, ale především aplikací konkretního typu úlohy s integrální podmínkou na hranici děr, viz např. [BGMO-2008].

Postup řešení problému a vlastní přínos doktoranda

Matematické postupy a metody uplatněné v disertační práci jsou adekvátní. Vlastní přínos doktorandky by bylo třeba vyjasnit během obhajoby. Podrobněji viz část "Připomínky a dotazy", body 2, 3.

Přínos disertační práce pro vědní obor a využitelnost při řešení aplikačních úloh

Práce přináší alternativní pohled na zavedení operátoru periodického rozkládání. Předvedené důkazy se zdají být správné. Výsledky lze využít pro řešení praktických problémů,

ačkoliv se na tuto stránku, tedy na aplikace metody homogenizace text práce příliš nesoustředí. Podrobněji viz část "Připomínky a dotazy", body 13, 14.

Jazyková a grafická úroveň práce

Práce má vhodně zvolenou strukturu, členění do jednotlivých kapitol je logické. Po stránce didaktické lze vytknout minimální doprovodný text, absenci komentáře k jednotlivým výsledkům zejména ve vztahu k podobným již publikovaným. Po jazykové i po grafické stránce je práce vyhovující, drobné chyby lze jistě tolerovat. Grafické zpracování výsledků je však velmi skromné a nepochybně by zasloužilo větší pozornost.

Připomínky a dotazy.

1. V úvodu práce se píše: "The thesis intents to be self-contained work suitable as the first reading for engineers and applied mathematicians." Domnívám ze, že to je velmi ambiciozní projekt. Z tohoto pohledu předložená práce nevyhovuje v mnohých ohledech. Uvádím jen některé.

   - Z práce není patrný dostatečný nadhled. To se projevuje absencí doprovodného a vysvětlujícího textu, ten ve většině případů chybí úvodních odstavcích jednotlivých kapitol, ale také v komentáři k jednotlivým výsledkům. Závěr práce je nedostatečný.
   - V práci značně podceněn aspekt aplikovatelnosti předvedené teorie. Postrádám návaznost ne řešené problémy z oblasti modelování materiálů, porézních prostředí a dalších oblastí, které se k inženýrství vztahují. Vybraný příklad je prezentován bez jakéhokoliv vysvětlení významu jednotlivých parametrů, funkcí a uvažovaných podmínek. Nezaznamenal jsem citaci prací, které se věnují danému problému modelování torze kompozitních hřídelí. Jsou citovány jen dvě práce (články ve sborníku), na nichž se doktorandka podílela. Navíc se podobný problém řeší v oblasti modelování porézních prostředí, viz např. [BGMO-2008], [RCL-2006].

2. V práci není jasně deklarován podíl autorky na předvedených výsledcích. Jsou citovány práce školitele, prof. RNDr. Jana Franců, CSc., na dvou z nich je doktorandka spoluautorkou.

3. Je-li přínosem práce vylepšení definice operátoru OPR, ze závěru práce není zřejmé, zda toto vylepšení se projeví na výsledku, tedy na nových teoretických (konvergenčních) výsledcích nebo na získaném tvaru modelu homogenizovaného kontinua, nebo jedná-li se pouze o jinou techniku některých důkazů. V každém případě by bylo vhodné porovnat odpovídající teorémy v citovaných článcích (pomocí přesných citací a odkazů) s výsledky v této disertaci uvedenými a vysvětlit rozdíly mezi odpovídajícími si teorémy a jejich důkazy.

4. Nevím, v čem spočívá výše zmíněné vylepšení definice OPR tím, že u hranice (tj. v oblasti Λ_ε^*) se prostě "nerozkládá". Tato oblast se přeci mění s ε, tedy jedná se pak o problém konvergence na funkcí nad oblastí "nestálou" – vyhnout se tomuto problému je hlavní důvod zavedení operátoru OPR (dle původní definice). Zmíněné kritérium pro integraci, viz např. práce [Cio+12], Corollary 2.7, (2.10), logicky postačuje pro možnost zanedbání integrálů ve zmíněné příhraniční oblasti, jestliže je k dispozici apriorní odhad řešení nezávislý na ε. Ostatně domnívám se, že na straně 30 této disertace je použit stejný argument, čili v konečném výsledku se oproti známým výsledkům nemění nic. Je-li tomu jinak, bylo by třeba tento bod během obhajoby vyjasnit.

5. V návaznosti na výše uvedenou poznámku mám dotaz. Může změna definice OPR přispět k zohlednění mezních vrstev a podobných jevů, které mohou být významné z hlediska fyzikálních procesů?

6. Nemá být teorém 3.8 spíše důsledkem teorému 3.7?

7. Nakolik je příklad na straně 24 původní myšlenkou autorky?

8. Str. 2: Nevím, jak chápat větu v úvodu práce: "Even if there existed some u_0 for which $\|u_\varepsilon - u_0\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon^*)} \to 0$, as $\varepsilon \to 0$, one could not speak about "convergence" (in a strong or weak sense) of the sequence $\{u_\varepsilon\}$. ", přičemž se ve větě Thm. 5.4 právě tento výraz vyskytuje, tedy silná konvergence řešení.

9. Studiu konvergence řešení eliptických úloh s neproporcionálním poměrem míry děr a míry periodické buňky, viz strana 35, je věnována práce [CDGO-2008], kde byly zavedeny další speciální operátory OPR. Bohužel, tato práce není citována.

10. Silná konvergence v teorému 5.4 je v normě $L^2(\Lambda_\varepsilon^*)$ prostoru. Co lze říci o konvergenci gradientů? Práce opomíjí záležitost vlivu korektorů řešení.

11. Jaký význam mají korektory (v práci nazývané "auxiliary functions") pro vyhodnocení výsledku výpočtu pomocí homogenizovaného modelu? Ilustrace konvergence řešení pro dané $\varepsilon > 0$ k řešení získanému pomocí modelu (53) není dostatečně přesná.

12. V práci není nijak zmíněna otázka odhadu chyby aproximace řešení pomocí řešení úlohy homogenizované. Má (může mít) pozměněná definice OPR vliv na výsledky v pracích [G-2006], [G-2004], které se problematice tzv. "korektorového výsledku" věnují?

13. Domnívám se, že poměr doplňujícího textu (kapitola 2) vůči vlastním výsledkům je nepřiměřeně vysoký. Prezentaci výsledků a komentářům by měl být věnován větší prostor (kapitoly 4-6).

14. Absence vysvětlení fyzikálního modelu torze v kapitole 4, absence citací...

Reference

[CDGO-2008] Cioranescu, D., Damlamian, A., Griso, G., Onofrei, D. The periodic unfolding method for perforated domains and Neumann sieve models. Journal de Mathematiques Pures et Appliques 89(3), 2008

[G-2006] Griso, G. Interior error estimate for periodic homogenization. Analysis and Applications 4, Issue 1 (2006) 61-79.

[G-2004] Griso, G. Error estimate and unfolding for periodic homogenization. Asymptotic Analysis 40, 3-4 (2004) 269-286.

[BGMO-2008] Baffico, L., Grandmont, C., Maday, Y., Osses, A. Homogenization of elastic media with gaseous inclusions. SIAM Multiscale Model. Simul. 7 (2008) 432-465

[RCL-2006] Rohan, E., Cimrman, R., Lukeš, V. Numerical modelling and homogenized constitutive law of large deforming fluid saturated heterogeneous solids. Computers & Structures 84 (2006) 1095-1114.

Celkové hodnocení

Práce ing. Petry Rozehnalové je věnována stále perspektivní oblasti aplikované matematiky, která je využitelná při řešení technických problémů. Autorka prokázala kvalitní znalosti z funkcionální analýzy a asymptotické analýzy diferenciálních rovnic, které jsou předpokladem pro aktivní používání metod homogenizace. Samotná disertační práce má celkově dobrou úroveň, ale má i některé nedostatky, na něž upozorňuji. Proto **práci ing. Petry Rozehnalové doporučuji k obhajobě**, během níž by se doktorandka měla vyjádřit k otázkám a připomínkám uvedeným v tomto posudku.

V Plzni 16.2.2016

Prof. Dr. Ing. Eduard Rohan, DSc.

Katedra mechaniky, NTIS,
Fakulta aplikovaných věd
Západočeská univerzita v Plzni