



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ENERGETICKÝ ÚSTAV

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
ENERGY INSTITUTE

VLASTNÍ TVARY VÍROVÉHO PROUDĚNÍ

EIGENMODES OF THE SWIRLING FLOW

DIPLOMOVÁ PRÁCE
MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE
AUTHOR

Bc. MARTIN JÍZDNÝ

VEDOUCÍ PRÁCE
SUPERVISOR

doc. Ing. PAVEL RUDOLF, Ph.D.

BRNO 2011

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Energetický ústav

Akademický rok: 2010/2011

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

student(ka): Bc. Martin Jízdny

který/která studuje v **magisterském navazujícím studijním programu**

obor: **Fluidní inženýrství (2301T036)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Vlastní tvary vírového proudění

v anglickém jazyce:

Eigenmodes of the swirling flow

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Rychlostní pole s tangenciální složkou rychlosti je velmi náchylné ke vzniku nestabilit. Ty se mohou projevit např. vznikem tzv. vírového copu, který způsobuje tlakové pulzace. Cílem diplomové práce je studovat vznik nestabilit v souvislosti s rychlostním polem na vstupu do difuzoru. Diplomant bude využívat software vyvinutý na odboru a CFD program Fluent.

Cíle diplomové práce:

Studium vlivu rychlostního pole na stabilitu vírového proudění s využitím CFD a metody vlastní ortogonální dekompozice.

Testování použitých metod proběhne na příkladu obtékání kvádru, za kterým vzniká Kármánova vírová stezka

Seznam odborné literatury:

1. Rudolf, P.: A contribution to study of the swirling flow. Habilitační práce. 2010.
2. Susan-Resiga, R., Dan Ciocan, G., Anton, I., Avellan, F.: Analysis of the Swirling Flow Downstream a Francis Turbine Runner, Journal of Fluids Engineering , vol. 128, no1, pp. 177-189. 2006.

Vedoucí diplomové práce: doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2010/2011.

V Brně, dne 19.11.2010

L.S.

doc. Ing. Zdeněk Skála, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc.
Děkan fakulty

Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá studiem dynamiky vírového proudění. Vírové proudění se v hydraulických strojích vyskytuje poměrně často (např. vírový cop v sací troubě vodní turbíny) a mnohdy negativně ovlivňuje jejich provoz. Dostatečná znalost tohoto charakteristického proudění je proto nezbytným předpokladem pro zdokonalení hydraulických strojů.

Teoretická část práce je z velké části zaměřena na popis nestabilit proudění a jejich projevů s důrazem na Kármánovu vírovou stezku a vírový cop. V další části práce jsou na tato dvě zmíněná nestacionární proudění aplikovány dvě metody, které umožňují identifikovat jejich určité dynamické vlastnosti. První metodou je Fourierova transformace, pomocí které je možné určit vlastní frekvence nestacionárního proudění. Druhou metodou je tzv. vlastní ortogonální dekompozice (POD), která umožňuje identifikovat vlastní tvary daného proudění v rovině nebo prostoru. Metoda vlastní ortogonální dekompozice je v této práci použita pro nalezení rovinných vlastních tvarů Kármánovy vírové stezky a prostorových vlastních tvarů vírového copu.

Klíčová slova

Vlastní tvary proudění, Kármánova vírová stezka, vírový cop, Fourierova transformace, vlastní ortogonální dekompozice, nestability proudění

Abstract

This thesis deals with study of dynamics of the swirling flow. The swirling flow occurs frequently in hydraulic machinery (e.g., vortex rope in draft tube of the hydraulic turbine) and often influences operation of these machines. For this reason, sufficient knowledge regarding this characteristic flow is necessary for subsequent improvement of hydraulic machines.

The theoretical part of this thesis contains description of flow instabilities and their manifestations, notably Kármán vortex street and vortex rope. In the next part, two methods are applied to these two transient flows in order to identify their specific dynamic properties. The first method, Fourier transform, enables to find frequencies of transient flow. The second method, proper orthogonal decomposition (POD), enables to identify planar or spatial eigenmodes of a specific swirling flow. Proper orthogonal decomposition is used in this thesis to identify planar eigenmodes of Kármán vortex street and spatial eigenmodes of vortex rope.

Key words

Eigenmodes of the flow, Kármán vortex street, vortex rope, Fourier transform, Proper orthogonal decomposition, flow instabilities

Bibliografická citace

JÍZDNÝ, M. *Vlastní tvary vírového proudění*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2011. 79 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci s názvem *Vlastní tvary vírového proudění* vypracoval samostatně pod vedením doc. Ing. Pavla Rudolfa, Ph.D. a s využitím zdrojů, které jsou uvedeny na konci této práce.

V Brně, dne 27. 5. 2011

.....

JÍZDNÝ MARTIN

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval především vedoucímu mé diplomové práce doc. Ing. Pavlu Rudolfovi, Ph.D. za cenné rady, připomínky a náměty, které mi výrazně pomohly při zpracování zadání mé práce. Rovněž bych rád poděkoval Ing. Danielu Himrovi za užitečné rady týkající se programu Matlab a svému bratru Radku Jízdnému za technickou podporu při hardwarově náročných výpočtech.

Obsah:

1	Úvod.....	11
2	Vírové proudění.....	12
2.1	Základní pojmy a modely vírů.....	12
2.1.1	Modely vírů.....	14
2.2	Nestability proudění.....	16
2.2.1	Některé další nestability proudění.....	18
2.3	Jevy související s nestabilitou vírového proudění.....	21
2.3.1	Rozpad víru.....	21
2.3.2	Kármánova vírová stezka.....	21
2.3.3	Vírový cop.....	23
3	Fourierova transformace.....	25
3.1	Definice Fourierovy transformace spojité funkce.....	26
3.2	Definice Fourierovy transformace diskrétní funkce.....	27
3.3	Inverzní Fourierova transformace.....	28
4	Vlastní ortogonální dekompozice.....	29
4.1	Základní rovnice a principy metody POD.....	30
5	Aplikace Fourierovy transformace a CFD výpočtů na úlohu obtékání kvádru.....	33
5.1	CFD výpočty.....	33
5.2	Postprocessing.....	35
5.2.1	Určení vlastních frekvencí.....	35
5.2.2	Rozložení amplitud.....	36
5.2.3	Inverzní Fourierova transformace.....	39
6	Aplikace metody vlastní ortogonální dekompozice a CFD výpočtů na úlohu obtékání kvádru.....	40
6.1	CFD výpočty.....	40
6.2	Vlastní tvary Kármánovy vírové stezky.....	41
6.2.1	Vlastní tvary rychlostního pole.....	41
6.2.2	Vlastní tvary tlakového pole.....	46
6.2.3	Vlastní tvary velikosti vířivosti.....	50
6.3	Rekonstrukce okamžitého snímku.....	54
7	Aplikace metody vlastní ortogonální dekompozice a CFD výpočtů na proudění v kuželové savce vodní turbíny.....	56
7.1	CFD výpočty.....	56
7.2	Vlastní tvary vírového copu.....	59

7.2.1	Vlastní tvary rychlostního pole (velikosti rychlosti)	59
7.2.2	Vlastní tvary tlakového pole	65
7.3	Rekonstrukce okamžitého snímku.....	71
8	Závěr	73
9	Seznam použitých zdrojů	75
10	Seznam použitých zkratk a symbolů	78
11	Seznam příloh.....	79

1 Úvod

Diplomová práce se zabývá dynamikou vírového pohybu. Samotný vírový pohyb se velmi často vyskytuje v přírodě, ale zároveň i v technické praxi. V oboru hydraulických strojů se s vírovým pohybem lze setkat převážně v negativním významu, nicméně je možné nalézt i příklady využití pozitivního (např. vířivé čerpadlo apod.).

Nežádoucí vírové struktury u hydraulických strojů často snižují účinnost a v některých případech i životnost těchto zařízení. Jedním z příkladů negativního působení vírového pohybu na činnost hydraulických strojů je tzv. vírový cop. Tento jev vzniká v sací troubě převážně u Francisových vodních turbín při provozu mimo optimální pracovní bod (dokonalejší popis tohoto jevu je uveden v teoretické části práce). Z pohledu dynamiky tekutin však představuje vírový cop časově nestabilní spirálovou vírovou strukturu, která způsobuje nežádoucí tlakové pulzace. Jedním z hlavních cílů této diplomové práce je právě studium dynamiky vírového copu a vírového proudění obecně, což by mohlo přispět k potlačení jejich nežádoucích projevů. Hlavní důraz je v této práci kladen především na identifikaci vlastních tvarů¹, které jsou pro dané nestacionární vírové proudění charakteristické a které významně ovlivňují jeho celkovou dynamiku. Pro nalezení vlastních tvarů vírového proudění je použito prostředků numerického modelování proudění (CFD) a následně především metody vlastní ortogonální dekompozice, pro jejíž výpočet je použit program Matlab. Celá metodika výpočtů vlastních tvarů (včetně používané Fourierovy transformace) je nejdříve testována na rovinné úloze obtékání kvádru (čtverce), za kterým vzniká Kármánova vírová stezka. Následně je tato ověřená metodika použita pro identifikaci prostorových vlastních tvarů vírového copu, který vzniká v kuželové savce při daných okrajových podmínkách CFD výpočtu.

V teoretické části práce jsou obecně popsány jednotlivé metody používané při výpočtech vlastních tvarů, tzn. Fourierova transformace a metoda vlastní ortogonální dekompozice. Dále jsou v této části práce uvedeny základní poznatky o vírovém proudění a poměrně velká pozornost je věnována i nestabilitám proudění, se kterými souvisí vznik Kármánovy vírové stezky a vírového copu.

¹ Vlastní tvary proudění mají podobný fyzikální význam jako např. vlastní tvary kmitajícího nosníku v oboru mechaniky těles.

2 Vírové proudění

S vírovým prouděním se člověk v každodenním životě setkává až překvapivě často. Každý pohyb živého tvora na Zemi je doprovázen vznikem malých vzdušných vírů, které však nejsou viditelné a nemívají obvykle větší vliv na okolní prostředí. Pohyby velkých vírů v atmosféře a oceánech na naší planetě však už významné jsou a často mají i přímý dopad na životy lidí. Mezi takovéto významné v přírodě se vyskytující víry patří například hurikány, tornáda, fronty nízkého a vysokého tlaku, víry odtrhávající se od mořských proudů, vodní víry vzniklé působením slapových jevů a mnohé další. Vírové proudění, resp. interakce mezi víry, je jedním ze základních mechanismů předávání a disipace energie v atmosféře a oceánech.

Vírové proudění ovlivňuje i mnoho technických oborů. V některých technických aplikacích se vlastnosti tohoto pohybu využívají cíleně, u jiných zařízení tyto vlastnosti způsobují nemalé problémy s jejich provozem a správnou funkcí. S pozitivním využitím vírového pohybu (vírového proudění) dané tekutiny se lze setkat například u těchto zařízení: vířivé (kalové) čerpadlo, odlučovač nečistot, vírové průtokoměry, odstředivky a mnohé další. Naopak negativní účinky vírového pohybu se nejčastěji objevují u hydraulických strojů. U čerpadel se lze setkat například s tzv. vtokovými víry, které snižují účinnost čerpadla (čerpadlo částečně nasává místo vody vzduch). U radiálních čerpadel je často možné uvnitř lopatkového prostoru pozorovat vír, který částečně brání tekutině v pohybu (ucpává průtočný kanál) a tím dochází ke snížení účinnosti čerpadla. U vodních turbín se lze setkat s negativním projevem vírového pohybu například v podobě tzv. vírového copu, který bude v jedné z následujících kapitol popsán podrobněji.

S vírovým prouděním se tedy lze setkat v mnoha oblastech lidské činnosti. Získané poznatky o tomto jevu slouží k hlubšímu porozumění mechanismům, kterými se řídí proudění v atmosféře a oceánech nebo lze tyto poznatky využít ke zdokonalení různých technických zařízení.

2.1 Základní pojmy a modely vírů

Jednou ze základních fyzikálních veličin, kterou je možné popsat vírové proudění, je tzv. vířivost ω ¹. Tato vektorová veličina je definována pomocí diferenciálního operátoru ∇ (nabla) a vektoru rychlosti $\mathbf{v}$ následovně (Kundu, Cohen, 2008) [6]:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (2.1)$$

nebo také při použití Einsteinovy sumační symboliky lze definiční vztah (2.1) napsat takto (Kundu, Cohen, 2008) [6]:

$$\omega_i = (\text{rot } \mathbf{v})_i = \varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \quad (2.2)$$

Velikost vířivosti je tedy přímo úměrná velikosti gradientu rychlosti, tzn., že vířivost je největší v místech, kde dochází k největším změnám rychlosti proudění (např. mezní vrstva, odtržení proudu, zpětné proudění apod.). Podle toho, zda je vířivost nulová nebo

¹ Další název pro vířivost $\boldsymbol{\omega}$ je také vektor víru rychlosti.

nenulová, dělíme pohyb tekutiny na dvě důležité oblasti. Proudění, které má nulovou vířivost ($\omega = 0$), se nazývá potenciální (nevířivé). Jednotlivé částice tekutiny v tomto případě nerotují kolem vlastní osy. Naopak proudění, kde je vířivost různá od nuly ($\omega \neq 0$), se nazývá vířivé a částice rotují kolem vlastní osy.

Vířivost zaujímá důležitou roli v teoretické a výpočetní oblasti dynamiky proudění. Problém ovšem nastává při experimentálním měření, protože tuto veličinu je téměř nemožné dostatečně spolehlivě přímo měřit. Nejčastěji se proto její hodnoty odvozují z naměřených rychlostí dle rovnice (2.2), případně pomocí CFD výpočtů (Wilcox, 2000) [22].

Druhou důležitou veličinou, která popisuje vírové proudění, je tzv. cirkulace rychlosti. Cirkulace rychlosti Γ kolem uzavřené křivky C je definována jako křivkový integrál tečné složky rychlosti ke křivce C (Kundu, Cohen, 2008) [6]:

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{k} \quad (2.3)$$

kde $d\mathbf{k}$ je elementární vektor tečný ke křivce C (Obr. 2.1). Využitím Stokesovy věty lze získat propojení mezi cirkulací Γ a vířivostí ω . Tento vztah je definován následovně (Wilcox, 2000) [22]:

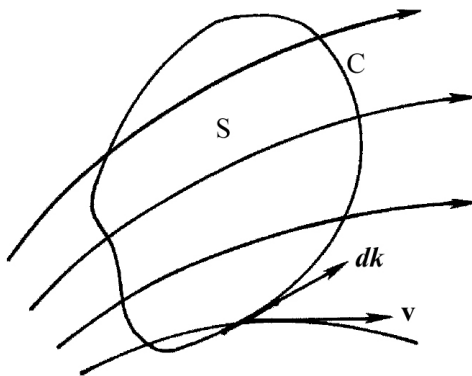
$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{k} = \iint_S \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.4)$$

tedy

$$\Gamma = \iint_S \omega \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.5)$$

kde $\mathbf{n}$ je normálový vektor k ploše S , která je ohraničena křivkou C (Obr. 2.1). Z rovnice (2.5) vyplývá, že cirkulace Γ je dána plošným integrálem normálové složky vektoru vířivosti vzhledem k ploše S . Pro potenciální (nevířivé) proudění je vektor vířivosti roven nule, a tedy musí platit, že i cirkulace je nulová. Hodnota cirkulace tedy určuje intenzitu vířivosti obsažené uvnitř oblasti ohraničené křivkou C (Wilcox, 2000) [22]. Velikost cirkulace rychlosti Γ není možné změřit, a z tohoto důvodu se opět stanovuje nejčastěji z naměřených rychlostí, případně z vektoru vířivosti podle rovnice (2.5).

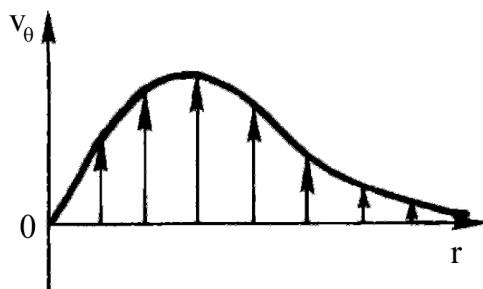
Rovnice (2.5) je zároveň definičním vztahem pro veličinu, která se nazývá intenzita víru μ . Tato veličina (stejně jako cirkulace rychlosti Γ) vyjadřuje tok vektoru vířivosti danou plochou S (Brdička *et al.*, 2005) [2].



Obr. 2.1 Cirkulace rychlosti – zobrazení uzavřené křivky C , která ohraničuje plochu S [6]

2.1.1 Modely vírů

Základní modely vírů popisují rychlostní pole, resp. průběh tangenciální rychlosti². Kombinací základních modelů vírů lze dosáhnout složitějších rychlostních profilů popisujících například proudění za oběžným kolem Francisovy turbíny (Susan-Resiga *et al.*, 2006) [18]. Příklad jednoduchého reálného průběhu tangenciální rychlosti v_θ v závislosti na radiální vzdálenosti r je zobrazen na Obr. 2.2.



Obr. 2.2 Zobrazení jednoduchého reálného profilu tangenciální rychlosti v závislosti na radiálním směru r [6]

Základní modely vírů, které popisují průběhy tangenciálních rychlostí, jsou následující:

Potenciální vír

Potenciální vír je definován pro nevířivé proudění ($\omega = 0$) a má tu vlastnost, že jeho hodnota vířivosti ω je uzavřena do singulárního (elementárního) bodu, kolem kterého tekutina potenciálně proudí. Singulární bod, který má určitou hodnotu vířivosti, je vyloučen z tohoto proudění, a proto lze toto proudění považovat za nevířivé ($\omega = 0$). Z těchto vlastností vyplývá méně používaný, avšak výstižnější název, který zní potenciální proudění kolem víru. Pro průběh obvodové (tangenciální) rychlosti v_θ potenciálního víru platí následující vztah (Kundu, Cohen, 2008) [6]:

$$v_\theta(r) = \frac{K}{r} \quad (2.6)$$

kde K je konstanta³ a r je vzdálenost od středu rotace. Velikost tangenciální rychlosti je nepřímo úměrná vzdálenosti od středu rotace. To tedy znamená, že funkční závislost tangenciální složky rychlosti v_θ a vzdálenosti od středu rotace r je hyperbolická. Potenciální vír neboli potenciální proudění kolem víru je proudění, které se v přírodě ve skutečnosti nemůže vyskytnout. Vířivost není nikdy v reálném světě uzavřena do singulárního bodu, ale vždycky se vyskytuje na nějaké oblasti s konečnými rozměry. Nicméně při splnění určitých předpokladů⁴ lze reálné vírové proudění nahradit modelem potenciálního víru a tím řešenou úlohu výrazně zjednodušit (Wilcox, 2000) [22].

² Axiální rychlost je u základních modelů uvažována jako konstantní. Radiální rychlost je obvykle nulová.

³ Konstanta K má rozměr m^2s^{-1} .

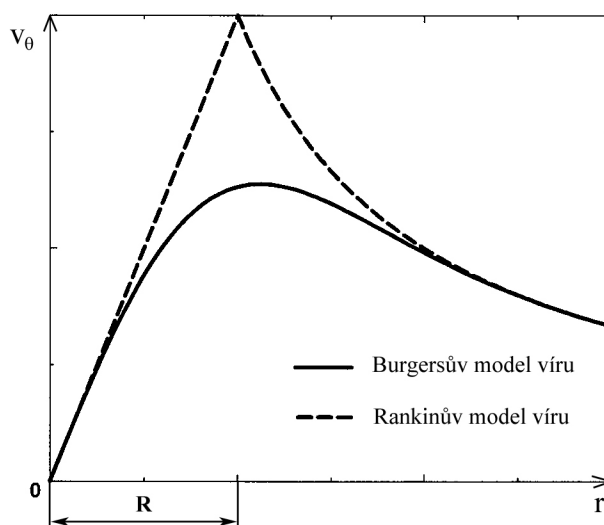
⁴ Hlavním předpokladem je vysoká hodnota Reynoldsova čísla. (Toto podobnostní číslo bude definováno v jedné z následujících kapitol.)

Rankinův model víru

Tento model víru je složen ze dvou průběhů tangenciální složky rychlosti. Důležitým předpokladem pro tento model je existence hraničního poloměru R (Obr. 2.3). Tento hraniční poloměr odděluje jádro víru, které je v blízkosti osy rotace, od vnějšího proudění. Jádro víru rotuje podobně jako pevné těleso, tzn., že tangenciální rychlost narůstá lineárně se vzdáleností od středu rotace r . Je zde také nenulový vektor vířivosti, tedy vířivé proudění. Ve vzdálenosti větší než R se nachází proudění potenciální ($\omega = 0$). Průběh tangenciální rychlosti v této oblasti je hyperbolický, podobně jako tomu bylo u předchozího modelu potenciálního víru. K velkému zjednodušení u tohoto modelu dochází především v okolí poloměru R , kde je ostré maximum (Obr. 2.3), což neodpovídá reálnému průběhu tangenciální rychlosti (Obr. 2.2). Tangenciální rychlost je u Rankinova modelu víru definována následovně (Susan-Resiga *et al.*, 2006) [18]:

$$v_{\theta}(r) = \begin{cases} \Omega \cdot r, & r < R \\ \frac{\Omega \cdot R^2}{r}, & r \geq R \end{cases} \quad (2.7)$$

kde Ω je úhlová rychlost vzhledem ke středu víru, R je hraniční poloměr oddělující jádro víru od okolního proudění a r je proměnná vzdálenost od středu víru.



Obr. 2.3 Zobrazení průběhu tangenciální složky rychlosti v závislosti na vzdálenosti od osy rotace pro Burgersův a Rankinův model víru [18]

Burgersův (Lambův) model víru

Burgersův model víru lépe popisuje průběh tangenciální rychlosti v okolí poloměru R (Obr. 2.3). V okolí tohoto poloměru je průběh tangenciální rychlosti zaoblen a Burgersův model víru se tímto velice přibližuje k reálnému průběhu tangenciální rychlosti (viz Obr. 2.2) (zaoblení u reálného průběhu tangenciální rychlosti je způsobeno viskozitou). Tangenciální rychlost Burgersova modelu víru je definována následujícím způsobem (Susan-Resiga *et al.*, 2006) [18]:

$$v_{\theta}(r) = \frac{\Omega \cdot R^2}{r} \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \right] \quad (2.8)$$

kde Ω je úhlová rychlost vzhledem ke středu víru, R je hraniční poloměr oddělující jádro víru od okolního proudění a r je proměnná vzdálenost od středu víru.

2.2 Nestability proudění

Jen málo jevů v oblasti dynamiky proudění tekutin má takový význam jako vznik a vývoj nestabilit proudění. Tento jev byl poprvé vědecky zkoumán na konci 19. století současně autory Helmholtzem, Rayleighem, Kelvinem a Reynoldsem a doposud není dokonale prozkoumán (Lugt, 1983) [8].

Nestabilita proudění je mechanismus, pomocí kterého se tekutina vyrovnává s velkými silami⁵, které na ni působí (Lugt, 1983) [8]. Doposud stabilní proudění se vlivem působení některé síly (viz. pozn. 5) stane nestabilním a po nějaké době může (ale nemusí) dojít k ustálení nového stabilního proudění. Toto nové stabilní proudění však může být citlivé na působení některé další síly a může se stát opět nestabilním. Během tohoto procesu dochází často ke vzniku zajímavých vírových struktur (Lugt, 1983) [8].

Princip stabilního a nestabilního proudění lze do jisté míry přirovnat ke známému příkladu z obecné mechaniky. Na *Obr. 2.4* je zobrazena kulička ve stabilní a nestabilní poloze. Malá výchylka kuličky, která je v nestabilní poloze, způsobí velkou změnu, tzn. pád kuličky. Naopak kulička ve stabilní poloze se vždy vrátí po nějaké době do původní polohy (za předpokladu malých výchylek). Podobné je to u stabilního a nestabilního proudění tekutin, ačkoliv situace je v tomto případě mnohem komplikovanější (Lugt, 1983) [8].



Obr. 2.4 Princip stability v obecné mechanice, **vlevo:** stabilní konfigurace, **vpravo:** nestabilní konfigurace [6]

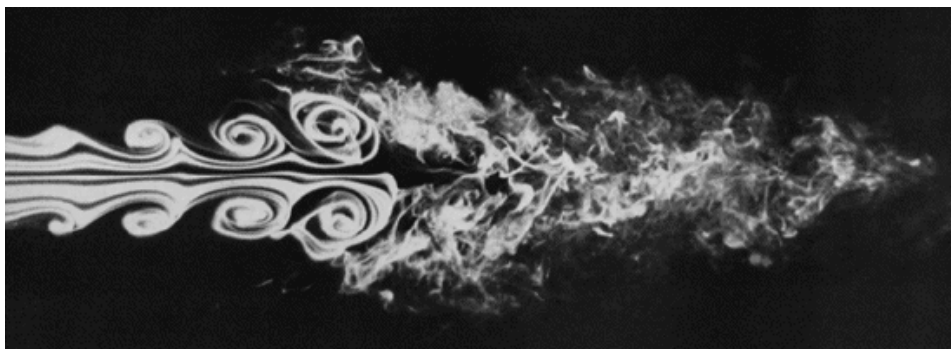
Jedním z hlavních cílů při výzkumu nestabilit proudění je určení kdy a jakým způsobem k rozpadu proudění dojde, jaký bude následný vývoj a případný vznik turbulencí (Drazin, Reid, 2004) [3]. Typickým a zároveň velmi významným příkladem je stabilita laminárního proudění. Při určitých podmínkách se může laminární proudění stát nestabilním, což má za následek přechod k novému režimu proudění, tzn. k proudění turbulentnímu (*Obr. 2.5*). Podmínky, při kterých dochází k nestabilitě laminárního proudění, mohou být kvantitativně vyjádřeny pomocí některého podobnostního čísla, například pomocí čísla

⁵ Mezi síly, které mohou způsobovat nestabilitu proudění tekutin, lze řadit hlavně sílu setrvačnou, odstředivou, gravitační, vztlakovou, elektromagnetickou, sílu od Coriolisova zrychlení a další [8].

Reynoldsova. Pomocí tohoto podobnostního čísla je určován počátek nestability, která vzniká působením setrvačných sil za současné přítomnosti sil viskózních (Lugt, 1983) [8]. Známy vztah pro Reynoldsovo číslo Re je definován následovně:

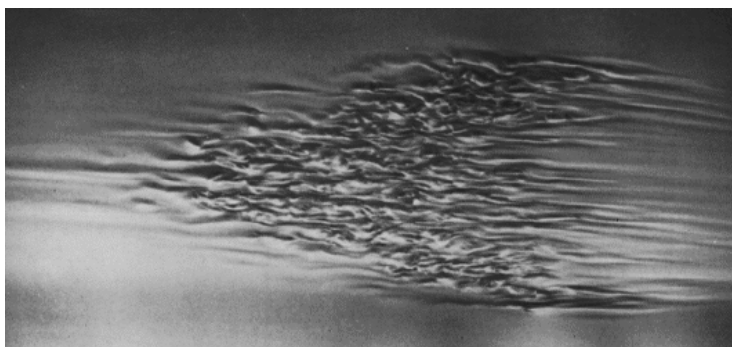
$$Re = \frac{\text{setrvačné síly}}{\text{viskózní síly}} = \frac{v \cdot L}{\nu} \quad (2.9)$$

kde v je rychlost, L je charakteristický rozměr a ν je kinematická viskozita.



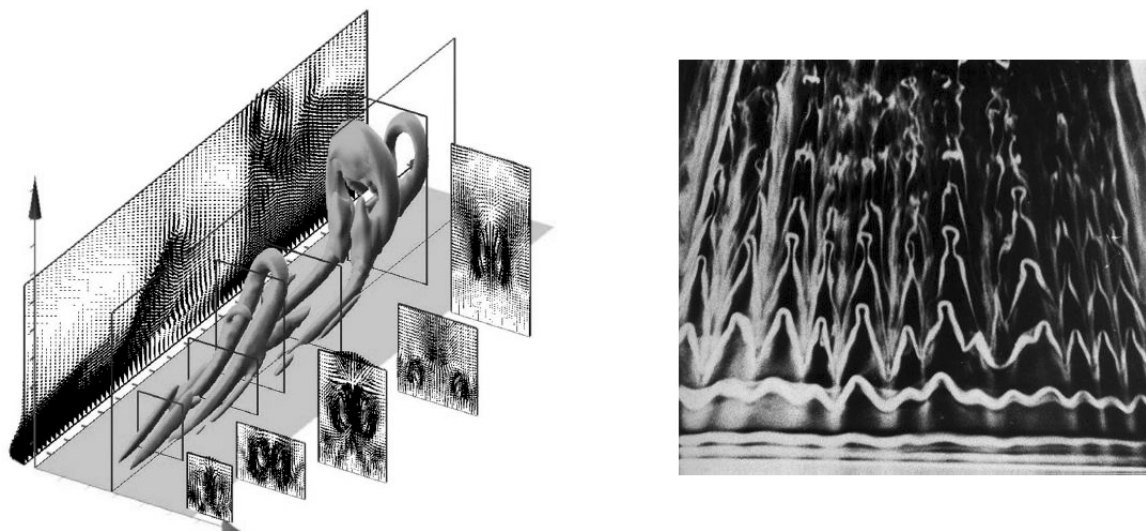
Obr. 2.5 Příklad přechodu laminárního (vířivého) proudění na turbulentní (vířivé) proudění, smysl proudění je zleva doprava [30]

Přechod z laminárního do turbulentního proudění je tedy důsledek nestability. Nestabilita proudění je v tomto případě vyvolána především působením setrvačné síly. Při určité velikosti této síly, resp. určité velikosti Reynoldsova čísla, dojde k nelineárnímu (nestabilnímu) chování laminárního proudění⁶ a tedy k přechodu na proudění turbulentní. Samotný přechod je často v literatuře označován jako intermitentní proudění nebo jednodušeji jako přechodový režim proudění. Během tohoto přechodového režimu dochází ke vzniku zajímavých vírových struktur a jevů. Jako příklad lze uvést tzv. turbulentní skvrnu (Obr. 2.6) a vlásečnicové víry (Obr. 2.7), které mohou být považovány za počáteční fázi turbulentního proudění.



Obr. 2.6 Turbulentní skvrna (vzniká při nestabilitě laminárního proudění, tzn. během přechodového režimu proudění) [30]

⁶ Tato nelinearita, resp. nestabilita laminárního proudění, souvisí s konvektivním členem v Navier-Stokesově rovnici.



Obr. 2.7 Vlasečnicové víry (vznikají při nestabilitě laminárního proudění, tzn. během přechodového režimu proudění), **vlevo:** vizualizace pomocí CFD výpočtů [31], **vpravo:** reálný experiment [29]

Přechod z laminárního na turbulentní režim proudění je z hydraulického pohledu velmi významný projev nestability proudění, nicméně není to případ jediný. V následující kapitole jsou uvedeny některé další případy nestabilit proudění, s jejichž projevy se lze setkat v mnoha rozmanitých oborech lidské činnosti.

2.2.1 Některé další nestability proudění

Projevy nestability proudění mohou být velmi různorodé. Tato různorodost nestabilit je způsobena především typem síly, která nestabilitu způsobuje, a velmi také záleží na specifických podmínkách, při kterých nestability vznikají (např. prostorové uspořádání, rychlostní pole, teplotní pole, typ tekutiny apod.). Mezi poměrně známé nestability lze řadit například tyto:

- nestabilita Kelvin-Helmholtzova - (Obr. 2.8)
- nestabilita Bénardova (Bénardovy buňky) - (Obr. 2.9)
- nestabilita Rayleigh-Taylorova - (Obr. 2.9)
- Taylorovy víry (nestabilita Couettova proudění) – (Obr. 2.10)
- nestabilita Plateau-Rayleighova – (Obr. 2.10)

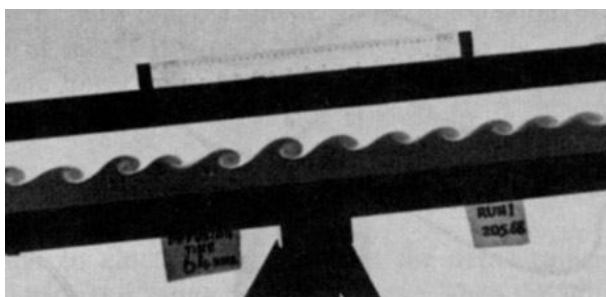
Mezi jevy, které s nestabilitou proudění úzce souvisí, patří dále například tyto:

- rozpad víru - (kapitola 2.3.1)
- Kármánova vírová stezka - (kapitola 2.3.2)
- vírový cop - (kapitola 2.3.3)

V následujících odstavcích budou zmíněné typy nestabilit a) až e) stručně popsány a vysvětleny.

a) **Kelvin–Helmholtzova nestabilita**

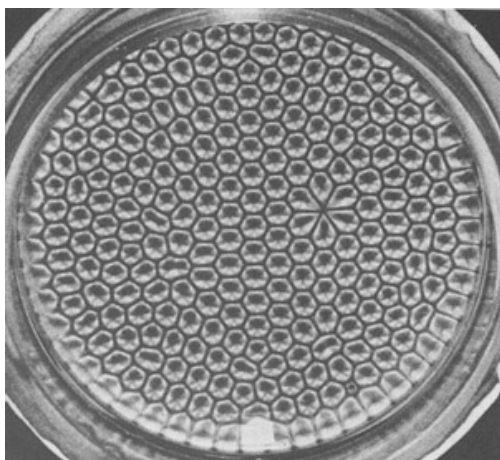
Kelvin-Helmholtzova nestabilita (*Obr. 2.8*) vzniká mezi dvěma proudy (vrstvami) tekutiny, které mají různou rychlost a hustotu, přičemž spodní vrstva tekutiny má větší hustotu a vrchní vrstva tekutiny má hustotu nižší (Kundu, Cohen, 2008) [6]. Důležitou úlohu při vzniku této nestability zaujímají třecí síly, resp. smykové napětí na rozhraní mezi vrstvami.



Obr. 2.8 Příklady nestabilit proudění - Kelvin-Helmholtzova nestabilita, **vlevo:** experimentální vizualizace [6], **vpravo:** vizualizace pomocí oblačnosti v přírodě [26]

b) **Bénardova nestabilita**

Bénardova nestabilita (*Obr. 2.9, vlevo*) patří mezi termální nestability. Nejčastěji vzniká při ohřevu tekutiny ze spodu. Spodní vrstva tekutiny je tedy teplejší než horní vrstva. Při dostatečném rozdílu teplot jsou stabilizující vlivy viskozity a tepelné vodivosti překonány a vzniká tepelné proudění (konvekce) pouze v rámci jednotlivých Bénardových buněk (Drazin, Reid, 2004) [3].



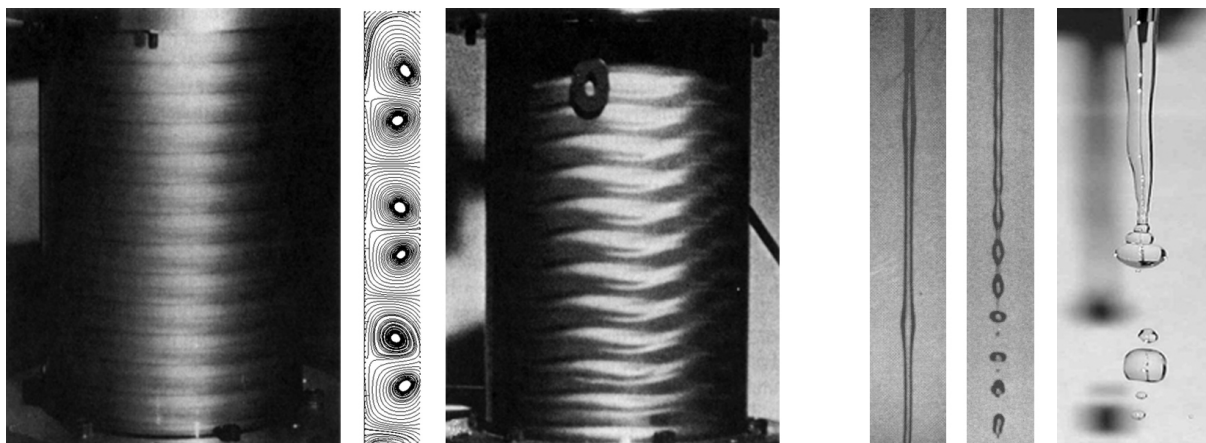
Obr. 2.9 Příklady nestabilit proudění, **vlevo:** Bénardova nestabilita (pohled shora na Bénardovy buňky) [3], **vpravo:** Rayleigh-Taylorova nestabilita [6]

c) Rayleigh-Taylorova nestabilita

Rayleigh-Taylorova nestabilita (*Obr. 2.9, vpravo*), známá také pod anglickým názvem „Finger instability“, vzniká mezi dvěma horizontálními vrstvami tekutin s rozdílnými hustotami, kdy tekutina s větší hustotou je umístěna nad tekutinou s menší hustotou (např. slaná voda a sladká voda, inverzní oblačnost apod.) [13]. Tato konfigurace vrstev tekutin je nestabilní, a tedy velmi citlivá na malé vnější podněty, které vedou v tomto případě ke vzniku Rayleigh-Taylorovy nestability.

d) Taylorovy víry (nestabilita Couettova proudění)

Taylorovy víry, které jsou projevem nestability Couettova proudění⁷, vznikají v mezeře mezi dvěma soustřednými válci, které se otáčejí protiběžně (případně rozdílnými rychlostmi). Tato nestabilita je velmi podobná Bénardově nestabilitě teplotního pole, kdy hnací silou byl rozdíl (gradient) teplot. V případě Taylorových vírů je hnací silou rozdíl (gradient) velikostí úhlové rychlosti válců a tedy i rozdílné odstředivé síly (Kundu, Cohen, 2008) [6]. Při určité kritické rychlosti otáčení válců se původně stabilní Couettovo proudění stane nestabilním a vznikne sekundární stabilní stav v podobě osově symetrických toroidních vírových struktur, tzn. Taylorových vírů [20]. Tyto toroidní vírové struktury (včetně jejich příčného řezu) jsou zobrazeny na *Obr. 2.10* vlevo.



Obr. 2.10 Příklady nestabilit proudění, **vlevo:** Taylorovy víry (2 režimy proudění Taylorových vírů a řez mezerou mezi válci s naznačením proudnic)[6] [20], **vpravo:** Plateau-Rayleighova nestabilita (zobrazení tvorby kapiček na třech příkladech), [3], [24]

e) Plateau-Rayleighova nestabilita

Plateau-Rayleighova nestabilita se často vyskytuje u proudu vody tekoucí z vodovodního kohoutku (*Obr. 2.10, vpravo*). Významný účinek na tuto nestabilitu má známý fakt, že se tekutina vždy snaží vlivem povrchového napětí zaujmout tvar s nejmenším možným povrchem. Vlivem nerovností v přírodním v potrubí (kapiláře) a působením

⁷ Couettovo proudění je obecně viskózní proudění mezi dvěma rovnoběžnými stěnami, přičemž jedna ze stěn je v rovnoměrném pohybu (Kundu, Cohen, 2008) [6]. V případě Taylorových vírů se tedy analogicky jedná o proudění v mezeře mezi dvěma válci.

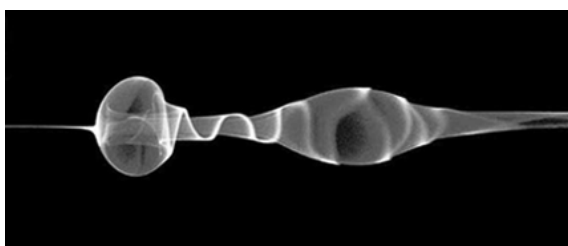
smykového napětí mezi tekutinou a vzduchem se volně padající proud vody může rozkmitat. Takový proud se stává nestabilním a díky této nestabilitě (a působením povrchového napětí) dochází k tvorbě nového stabilního tvaru v podobě jednotlivých kapiček (*Obr. 2.10, vpravo*). Tato nestabilita má souvislost s již zmíněnou Rayleigh-Taylorovou nestabilitou a její vlastnosti jsou využívány například u inkoustových tiskáren [12].

2.3 Jevy související s nestabilitou vírového proudění

2.3.1 Rozpad víru

Tento jev je pozorovatelný v mnoha typech vířivého proudění v přírodě i v průmyslu (Rudolf, 2010) [15]. Autor Sarpkaya (citován v [15]) definuje tento jev jako náhlou změnu ve struktuře jádra vírového proudění. Existují dva základní typy rozpadu víru. Prvním z nich je tzv. bublinový typ (*Obr. 2.11, vlevo*) a druhý typ je označován jako spirálový (*Obr. 2.11, vpravo*) (Rudolf, 2010) [15]. Základní princip rozpadu víru není ještě dokonale objasněn, a z tohoto důvodu existuje hned několik teorií, které vznik tohoto jevu popisují. Jedním z možných vysvětlení vzniku tohoto jevu je, že rozpad víru je důsledek nestability proudění (Lugt, 1983) [8].

Rozpad víru může mít významné dopady na provoz a správnou funkci některých strojů. V případě letadel může tento jev způsobit nechtěnou ztrátu vztlakové síly křídel při velkých úhlech náběhu, nebo může být užitečný a urychlovat zánik turbulencí za křídly letadel (tzv. tip vorticies), které výrazně zpomalují provoz na letištích (Rudolf, 2010) [15]. Rozpad víru také souvisí s výskytem nestabilit vířivého proudění v difuzorech hydraulických strojů (Rudolf, 2010) [15].



Obr. 2.11 Příklady nestabilit proudění - rozpad víru, **vlevo:** bublinový typ rozpadu víru [28], **vpravo:** spirálový typ rozpadu víru [28]

2.3.2 Kármánova vírová stezka

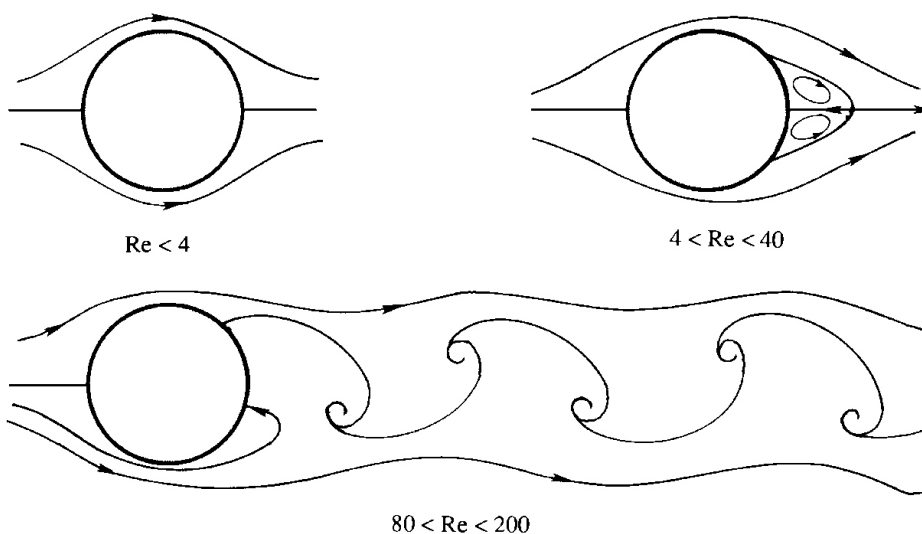
Nové proudění, které vznikne vlivem výskytu nestability, se může po uplynutí dostatečně dlouhé doby stát stabilním, tzn. stacionárním (např. Bénardovy buňky - *Obr. 2.9, vlevo*) nebo může zůstat nestabilním, tzn. nestacionárním, periodickým (Lugt, 1983) [8]. Jedním z příkladů proudění, které vznikne vlivem nestability proudění a zůstane periodickým je právě Kármánova vírová stezka. Tento poměrně často se vyskytující jev je charakteristický střídavým vznikem vírů za danou obtékanou překážkou (*Obr. 2.12*).



Obr. 2.12 Kármánova vírová stezka, **vlevo:** vzniklá v atmosféře při obtékání osamoceného ostrova (zachyceno družicí) [32], **vpravo:** reálný experiment [27]

Vznik a vývoj Kármánovy vírové stezky závisí na velikosti Reynoldsova čísla. Tuto závislost lze dobře popsat například na případu obtékání válce (Obr. 2.13). Při velmi malých hodnotách ($Re < 4$) je válec obtékán bez vzniku vírů, tedy potenciálně. V rozmezí hodnot $4 < Re < 40$ se víry vytvoří, ale zůstávají připojeny k válci. K střídavému odtrhávání vírů dochází až při vyšších hodnotách Reynoldsova čísla ($80 < Re < 200$). Odtrhávané víry mají při těchto hodnotách Re laminární charakter proudění (Kundu, Cohen, 2008) [6]. Kármánova vírová stezka však vzniká i při turbulentním režimu proudění, tedy při mnohem vyšších hodnotách Reynoldsových čísel.

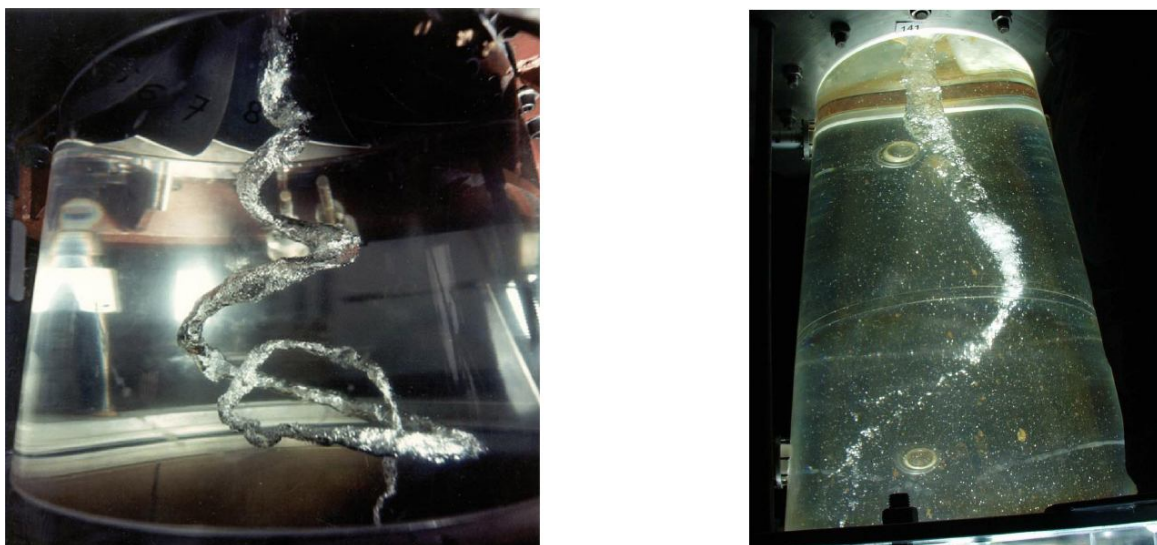
Odtrhávání vírů má periodický charakter a tedy rozestupy mezi víry jsou stejné. Je tedy možné určit frekvenci, s jakou se víry od daného obtékaného tělesa odtrhávají. Pokud je tato frekvence shodná s některou vlastní frekvencí obtékaného tělesa, může dojít k jeho rozkmitání, tzn. ke vzniku rezonance. Tento jev se poměrně často vyskytuje u různých válcových i neválcových částí osamocených staveb jako jsou například visuté mosty, ropné plošiny, tovární komíny apod. (Kundu, Cohen, 2008) [6]. Dalším příkladem výskytu Kármánovy vírové stezky jsou rozváděcí lopatky vodních turbín.



Obr. 2.13 Vliv Reynoldsova čísla na vznik Kármánovy vírové stezky [6]

2.3.3 Vírový cop

Rychlostní pole s tangenciální složkou rychlosti je velmi náchylné ke vzniku nestabilit. Takovéto rychlostní pole se vyskytuje při určitých podmínkách v savce⁸ vodní turbíny. Při provozu turbíny v blízkosti optima má proudění v savce převážně axiální charakter a nedochází ke vzniku nestabilit proudění. Problém ovšem nastává při regulaci turbíny. Při neoptimálních provozních režimech turbíny dochází k nedokonalému zpracování tangenciální složky rychlosti oběžným kolem. Proudění v savce má tedy rychlostní profil s výraznou tangenciální složkou rychlosti a je náchylné ke vzniku nestabilit. Jedním z častých projevů nestability proudění v savce je právě vznik vírového copu (*Obr. 2.14*) (Skoták, 2004) [17].



Obr. 2.14 Příklady vírového copu [25], [17]

Vírový cop je nesymetrický vír spirálovitého tvaru⁹, který lze zřetelně pozorovat při dostatečném poklesu tlaku v jádru tohoto víru. V případě, že tlak v jádru víru poklesne pod hodnotu tlaku nasycených par, vzniká jev, který se nazývá kavitace. Při tomto jevu dochází k náhlé přeměně vody na vodní páru, a proto lze vírový cop zřetelně zachytit (*Obr. 2.14*). Při opětovném zvýšení místního tlaku dochází k zpětné přeměně páry na kapalinu.

Vírový cop rotuje kolem osy, která v průběhu času může částečně měnit svoji polohu, tedy koná tzv. precesní pohyb. Podle autora Skoták (2004) [17] je smysl precese (rotace) vírového copu u Francisovy turbíny závislý na poloze provozních jednotkových otáček¹⁰ vzhledem k optimálním jednotkovým otáčkám turbíny (při uvažování konstantního jednotkového průtoku). Při jednotkových otáčkách nižších, než jsou optimální, je smysl precese vírového copu opačný než smysl rotace oběžného kola. Rotace vírového copu je při těchto podmínkách přibližně třikrát pomalejší než rotace oběžného kola. Naopak při

⁸ Savka je nedílnou součástí přetlakových vodních turbín. Jedná se o difuzor, který je umístěn za oběžným kolem a který slouží k přeměně nevyužitě kinetické energie na energii tlakovou, čímž dochází ke zvýšení účinnosti celé turbíny.

⁹ Tento tvar souvisí se spirálovitým typem rozpadu víru, viz. kapitola 2.3.1 (Rudolf, 2010) [15].

¹⁰ Jednotkové otáčky jsou přímo úměrné otáčkám oběžného kola. Podobně jednotkový průtok je přímo úměrný průtoku turbínou. Definiční vztahy těchto jednotkových veličin je možné dohledat v odborné literatuře.

překročení optimálních jednotkových otáček je smysl rotace oběžného kola a vírového copu stejný (Skoták, 2004) [17].

Rotace vírového copu je doprovázena vznikem tlakových pulzací, které se šíří do celého hydraulického systému a které často bývají příčinou provozních problémů vodních elektráren. Praktickým příkladem může být měřitelné zvýšení vibrací vodícího ložiska turbíny, což způsobuje jeho nadměrné opotřebení, a tím i snížení doby životnosti. Provoz turbíny při částečném výkonu je doprovázen nepříjemným praskáním a boucháním v oblasti savky, které se šíří po celé budově elektrárny. K nejvážnějším problémům ovšem dochází při rezonanci frekvence tlakových pulsací s vlastní frekvencí celého hydraulického systému. Tato situace by si následně vynutila omezení provozního rozsahu turbíny, jelikož hrozí poškození technologického zařízení vodní elektrárny (Skoták, 2004) [17].

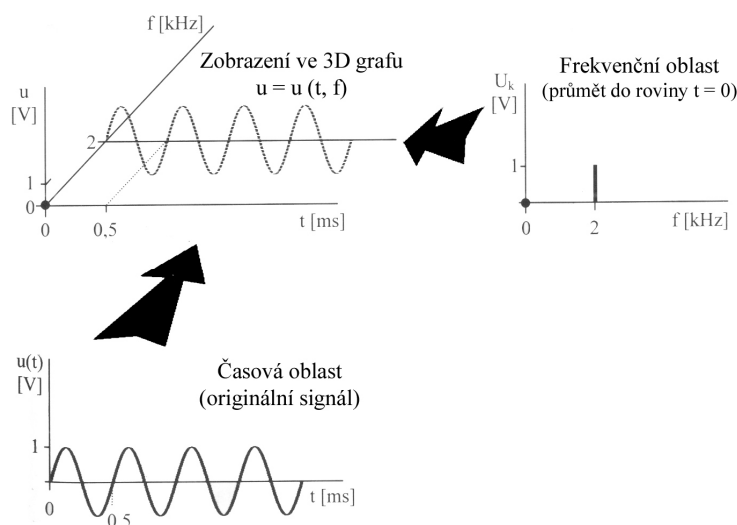
Vírový cop se vyskytuje hlavně u turbín, které nemají možnost natáčení lopatek. Jedná se tedy především o turbíny klasické a reverzní typu Francis, případně o axiální turbíny propelerové. U Kaplanových turbín vybavených natáčivými oběžnými lopatkami, byly pozorovány nestability v oblasti savky pouze při nestandardních režimech provozu (Skoták, 2004) [17].

Z důvodu nutnosti provozovat Francisovy turbíny i při menších výkonech (až do 30 % P_{max}) bylo třeba vyvinout a vyzkoušet metody umožňující potlačit tlakové pulsace v hydraulickém systému reálné vodní turbíny. K nejúčinnějším a prakticky ověřeným metodám patří zavedení vzduchu do oblasti savky nebo instalace stabilizujících žeber. Výjimkou ovšem nejsou elektrárny, kde bylo třeba provozní rozsah turbíny omezit (Skoták, 2004) [17].

V následujících kapitolách jsou popsány metody, které umožňují nalezení vlastních frekvencí a vlastních tvarů daného vírového proudění. Tyto metody jsou následně aplikovány na případ Kármánovy vírové stezky a vírového copu.

3 Fourierova transformace

Fourierova transformace je v technických oborech dobře známou a často používanou metodou, která je využívána především při analýze rozmanitých druhů signálů, zpracování obrazů apod. Tato lineární transformace umožňuje převod daného signálu z časové oblasti do oblasti frekvenční (Obr. 3.1), přičemž časová oblast je charakterizována závislostí sledované veličiny na čase, zatímco frekvenční oblast je typická zobrazením stejného signálu v souřadnicích amplituda - frekvence. Hlavním cílem Fourierovy transformace je identifikace významných frekvencí signálu, které často mají souvislost s konkrétními fyzikálními jevy odehrávajícími se v rámci sledovaného děje. Zobrazení a vyhodnocení signálu ve frekvenční oblasti je také často označováno jako spektrální analýza daného signálu¹.



Obr. 3.1 Princip Fourierovy transformace
(u - měřená veličina, t - čas, f - frekvence, U_k - amplituda)

Převod daného signálu z časové oblasti do frekvenční, neboli Fourierova transformace, je uskutečňován pomocí matematických vzorců a algoritmů. Dle autorů Zaplatílek a Doňar (2006) [23] existují určité rozdíly v těchto matematických postupech dané tím, zda je původní časový signál spojitý (analogový) nebo diskrétní (digitální). Spojitý signál bývá obvykle popsán analytickou funkcí závislou na čase a je tedy možné určit hodnotu dané veličiny v libovolném čase. Diskrétní signál je výstupem např. z různých měření a popisuje průběh dané veličiny jen v konkrétních N okamžicích, které jsou dány tzv. vzorkovací frekvencí měřicího zařízení. S diskrétním signálem také pracuje veškerá výpočetní technika, na které se Fourierova transformace obvykle vyhodnocuje. V této práci je Fourierova transformace aplikována na diskrétní data získaná pomocí CFD výpočtů.

Hlavní princip Fourierovy transformace je založen na tzv. Fourierově posloupnosti, která umožňuje rozložit libovolně složitý periodický signál na součet nekonečného množství funkcí sinus a kosinus, které jsou charakteristické svojí frekvencí, příslušnou amplitudou a fází. Pro spojitou a periodickou funkci $f(t)$ s periodou T_0 je Fourierova posloupnost definována následovně (Zaplatílek, Doňar, 2006) [23]:

¹ Obecně existuje více druhů spektrálních analýz, lišících se podle typu použité lineární transformace [23]. V této práci je pojem „spektrální analýza“ spojen výhradně s transformací Fourierovou.

Trigonometrický (složkový) tvar Fourierovy posloupnosti:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\Omega_0 t) + b_k \sin(k\Omega_0 t)] \quad (3.1)$$

kde a_k , b_k jsou tzv. koeficienty Fourierovy posloupnosti definované vztahy:

$$a_k = \frac{2}{T_0} \cdot \int_{T_0} f(t) \cdot \cos(k\Omega_0 t) dt \quad (3.2)$$

$$b_k = \frac{2}{T_0} \cdot \int_{T_0} f(t) \cdot \sin(k\Omega_0 t) dt \quad (3.3)$$

Konstanta $a_0/2$ představuje střední hodnotu funkce $f(t)$ v rámci jedné periody a je dána vztahem:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \cdot \int_{T_0} f(t) dt \quad (3.4)$$

Symbol Ω_0 se nazývá kruhová (základní) frekvence a je definována následovně:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (3.5)$$

Komplexní (exponenciální) tvar Fourierovy posloupnosti:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\Omega_0 t} \quad (3.6)$$

kde Fourierův koeficient c_k je dán vztahem:

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} f(t) \cdot e^{-jk\Omega_0 t} dt \quad (3.7)$$

3.1 Definice Fourierovy transformace spojitě funkce

Matematická definice Fourierovy transformace funkce $f(t)$ vychází z rovnice (3.6), tedy z definice Fourierovy posloupnosti v komplexním tvaru. Pro spojitou funkci $f(t)$ je Fourierova transformace definována v následujícím tvaru (viz např. Kuo *et al.*, 2006) [7]:

$$F(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\Omega t} dt \quad (3.8)$$

Po dosazení ekvivalentního vztahu (3.5) pro kruhovou frekvenci Ω do rovnice (3.8) a následném použití známého vztahu $f = 1 / T$ je možné získat druhou definici Fourierovy transformace spojitě funkce závislou tentokrát přímo na frekvenci f ve tvaru:

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt \quad (3.9)$$

3.2 Definice Fourierovy transformace diskrétní funkce

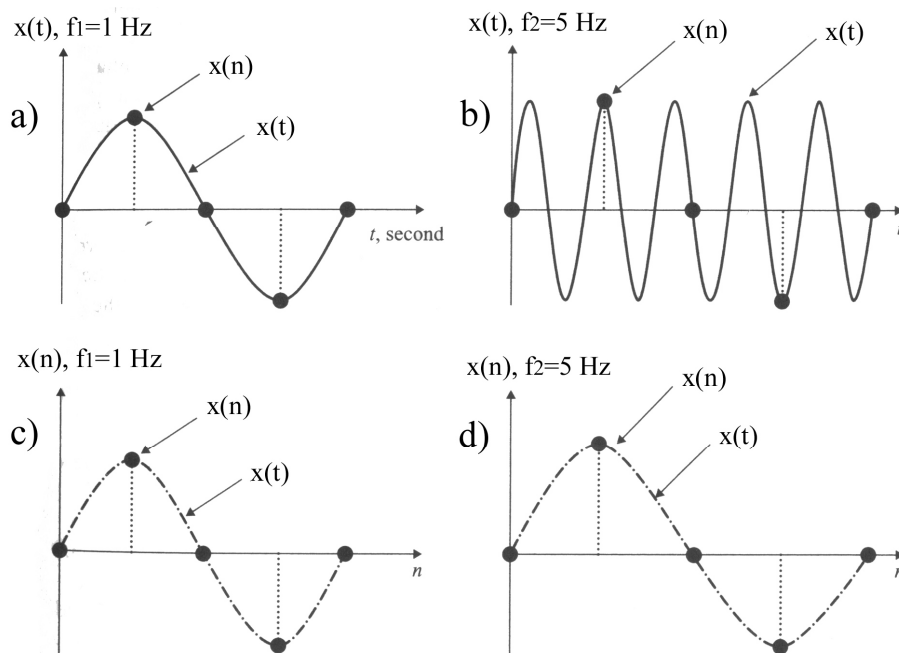
Pro diskrétní a konečnou funkci $f(n)$ s počtem hodnot N přejdou integrály v rovnici (3.8), resp. (3.9) na sumy a k -tý člen diskrétní Fourierovy transformace je roven (Kuo *et al.*, 2006) [7]:

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \cdot e^{-jkn(\frac{2\pi}{N})}; \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.10)$$

V obecném případě platí, že aplikací rovnice (3.10) na konečný počet diskrétních hodnot N bude výsledkem opět N komplexních koeficientů spektra $F(0), F(1), \dots, F(N-1)$. Z těchto komplexních čísel je již možné pomocí známých vztahů (tj. využitím definice absolutní hodnoty) dopočítat příslušné amplitudy (případně fáze) odpovídající jednotlivým frekvencím a následně vykreslit amplitudo-frekvenční charakteristiku dané diskrétní funkce.

Vztah (3.10) je využíván při výpočtu tzv. rychlé (diskrétní) Fourierovy transformace neboli FFT (Fast Fourier Transform). FFT je obecně algoritmus, který snižuje náročnost celého výpočtu Fourierovy transformace a je běžně dostupný v komerčních softwarech. Pro výpočty Fourierovy transformace v této práci (především kapitola 5) byla použita diskrétní forma algoritmu FFT definovaného v programu Matlab.

Za určitých podmínek může při Fourierově transformaci diskrétních funkcí dojít k nechtěné ztrátě informace neboli k tzv. aliasingu či podvzorkování (*Obr. 3.2*).



Obr. 3.2 Vysvětlení pojmu aliasing (podvzorkování): **a), b)** originální spojitá funkce o frekvencích 1 Hz a 5 Hz; **c), d)** rekonstruované funkce z diskrétních hodnot $x(n)$; na dvojici grafů a), c) ke ztrátě informace nedochází, zatímco u grafů b), d) k aliasingu dochází

Pro zabránění vzniku podvzorkování a ztrátám informací je nutné splnit tzv. Nyquistův teorém². Tento teorém definuje vztah mezi vzorkovací frekvencí³ f_{vz} a maximální frekvencí dané diskrétní funkce f_{max} , o které chceme získat nezkreslenou informaci. Pro potlačení aliasingu je nutné splnit následující vztah [23]:

$$f_{vz} \geq 2 \cdot f_{max} \quad (3.11)$$

Z hodnot uvedených v kapitolách 5.1 a 5.2.1 vyplývá, že je v této práci Nyquistův teorém splněn s dostatečnou rezervou.

Za účelem výpočtu diskrétní Fourierovy transformace v rámci této práce byla vyvinuta procedura v programu Matlab. Tato procedura využívá především vnitřní funkci Matlabu pro výpočet diskrétní Fourierovy transformace. Konkrétní použití Fourierovy transformace při analýze daného proudění je uvedeno v kapitole 5.

3.3 Inverzní Fourierova transformace

Inverzní (zpětná) Fourierova transformace umožňuje na základě znalosti spektrálního obrazu dané funkce $F(f)$ rekonstruovat původní časově závislý průběh funkce $f(t)$. Pro rekonstrukci diskrétní funkce $f(n)$ je možné využít upravené definiční vztahy pro Fourierovu posloupnost (3.1) až (3.4), případně využít přímo definičního vztahu zpětné diskrétní Fourierovy transformace v komplexním tvaru, který je definována následovně [23]:

$$f(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \cdot e^{+jkn\left(\frac{2\pi}{N}\right)} ; \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.12)$$

² Tento teorém je často v literatuře znám také pod pojmy Shanonův teorém, Kotělnikovův teorém či vzorkovací poučka [23].

³ Vzorkovací frekvence dané diskrétní funkce může být v tomto případě chápána jako počet diskrétních hodnot za 1 sekundu.

4 Vlastní ortogonální dekompozice

Vlastní ortogonální dekompozice (Proper Orthogonal Decomposition, POD) je poměrně rozšířenou a dlouho známou metodou, která je využívána např. při analýze dynamických systémů, kompresi velkých datových souborů, zpracování obrazů nebo řízení systémů.¹ V oboru mechaniky kontinua byla poprvé použita v roce 1967 autorem Lumley za účelem analýzy dynamiky proudění (Rudolf, 2010) [15].

Vlastní ortogonální dekompozice je obecně technika, která umožňuje identifikaci dominantních znaků poměrně rozsáhlých datových souborů. V mechanice tekutin je tato technika používána především pro analýzu turbulentního a nestacionárního proudění a slouží k dokonalějšímu porozumění fyzikálním zákonům a mechanismům, kterými se dané proudění řídí [5]. Při použití POD metody na konkrétní nestacionární proudění lze nalézt struktury proudění neboli vlastní tvary proudění (eigenmodes), které nejvíce přispívají k celkové energii proudění. Vlastní tvary proudění mohou být volně definovány jako skryté koherentní struktury² v proudění, které přispívají svojí určitou mírou energie k celkovému obrazu proudění [15].

Metodu POD použitou pro analýzu proudění v mechanice tekutin lze pomocí analogie částečně přirovnat k modální analýze v obecné mechanice. Při uvažování například rovného nosníku, který je z jedné strany pevně vetknutý a z druhé strany volný ve všech směrech pohybu, lze pomocí rozkmitání tohoto volného konce a následné modální analýzy stanovit sadu vlastních frekvencí a vlastních tvarů kmitů této soustavy. Vlastní tvar kmitů bude v tomto případě složený z kombinace goniometrických funkcí sinus a kosinus, které budou charakteristické svojí určitou frekvencí, amplitudou a fází. Podobně je tomu u metody vlastní ortogonální dekompozice v mechanice tekutin, která umožňuje identifikaci vlastních tvarů daného proudění na sledované oblasti. Tyto vlastní tvary proudění jsou tvořeny koherentními (dominantními) strukturami proudění, které se liší v závislosti na pořadovém čísle daného vlastního tvaru.

Hlavní výhodou POD metody je její linearita a možnost aplikace této metody na nelineární úlohy, např. na turbulentní proudění [15]. Metoda vlastní ortogonální dekompozice (POD) je tedy užitečný nástroj pro analýzu proudění umožňující především [5]:

- identifikaci vlastních tvarů proudění na sledované oblasti,
- přiřazení určité hodnoty relativní energie každému vlastnímu tvaru proudění podle jeho příspěvku k celkovému obrazu proudění,
- hlubší náhled do skrytých mechanismů a fyzikálních dějů uvnitř proudění, které je pomocí jiných metod obtížné či úplně nemožné zachytit,
- rekonstrukci originálního proudění v daném časovém okamžiku za pomoci pouze několika vlastních tvarů proudění s největší relativní energií.

¹ V těchto oborech je tato metoda někdy také nazývána jako „Karhunen – Loève Decomposition“ nebo „Principal Component Analysis“ [5].

² Koherentní struktury jsou malé oblasti proudění s koncentrovanou vířivostí. Doba existence této vířivosti (resp. koherentních struktur) je dominantní ve srovnání s dobou existence turbulentních vírů vznikajících vlivem smykového napětí (Rudolf, 2010) [15].

Existují dvě hlavní metody pro výpočet vlastní ortogonální dekompozice, přičemž první se nazývá tzv. přímá metoda a druhá metoda je označována jako tzv. metoda snapshotů neboli metoda okamžitých snímků. Výběr vhodné metody pro výpočet POD závisí především na množství vstupních dat [15]. V této práci je pro výpočet POD používána výhradně metoda snapshotů, a proto bude dále analyzován již jen tento případ.

Základem pro výpočet POD pomocí metody snapshotů jsou soubory dat (okamžité snímky) popisující rozložení sledované veličiny (nejčastěji rychlosti, tlaku apod.) na dané oblasti a v pravidelně se opakujících časových intervalech. Tyto okamžité snímky rozložení sledované veličiny na určité oblasti je možné získat CFD výpočty, což je i případ této práce (kapitoly 6 a 7). Pro získání okamžitých snímků rychlostního pole se také velmi často využívá experimentálního měření označovaného jako PIV (Particle Image Velocimetry), jehož výstupem jsou přímo potřebné snímky ve formě datových souborů [15].

4.1 Základní rovnice a principy metody POD [15]

V následujících odstavcích budou definovány nejdůležitější rovnice a principy, kterých se při výpočtu vlastní ortogonální dekompozice využívá. Rigorózní odvození a matematický popis této metody je dostupný v odborné literatuře a přesahuje rozsah této diplomové práce.

V následujících odstavcích bude pro jednoduchost zavedena skalární funkce³ $u(\mathbf{x}, t)$, která je definována v prostoru Ω a časové doméně T . Tato skalární funkce byla získána například měřením (případně CFD výpočty) v N bodech sledované oblasti proudění a v M časových okamžicích (snapshotech). Hlavním úkolem metody POD je nalezení optimální aproximace skalární funkce $u(\mathbf{x}, t)$ ⁴ v následující formě (Rudolf, 2010) [15]:

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^M a_i(t) \cdot \phi_i(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

kde $\phi_i(\mathbf{x})$ je soubor časově nezávislých ortonormálních funkcí⁵ a $a_i(t)$ je soubor výhradně časově závislých ortonormálních funkcí.

Pro nalezení optimální aproximace funkce $u(\mathbf{x}, t)$ podle rovnice (4.1) se využívá metody nejmenších čtverců, která je v tomto případě formulovaná následovně [15]:

$$\min \int_{\Omega} \int_T \left[u(\mathbf{x}, t) - \sum_{i=0}^M a_i(t) \cdot \phi_i(\mathbf{x}) \right]^2 dt d\mathbf{x} \quad (4.2)$$

Pro nalezení doposud neznámých funkcí $\phi_i(\mathbf{x})$ v rovnicích (4.1) a (4.2) se využívá matematických postupů, které řeší tzv. vlastní problém dané matice. Tento vlastní problém je obecně matematicky popsán následovně [21]:

³ Touto skalární funkcí může být například statický tlak. Celou teorii je také možné rozšířit na obecnou vektorovou funkci (např. vektorové rychlostní pole apod.) [15].

⁴ Tučně zvýrazněné proměnné (psané malým písmem) symbolizují v rámci této práce vektor (v případě velkého tučného písma se jedná o matici). Vektor $\mathbf{x}$ bude mít tedy ve dvourozměrném prostoru 2 složky, tzn. $\mathbf{x} (x, y)$.

⁵ Pojem „ortonormální“ lze vysvětlit následovně: Pokud mají být dva vektory ortonormální, pak musí být navzájem ortogonální (tzn. kolmé), a navíc musí mít oba jednotkovou velikost. Podobně je tomu i u funkcí [11].

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{h} = \lambda \cdot \mathbf{h} \quad (4.3)$$

kde λ je vlastní (charakteristické) číslo obecné matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{h}$ je vlastní vektor, resp. vlastní funkce obecné matice $\mathbf{A}$ (příslušející vlastnímu číslu λ). Řešením vlastního problému (rovnice (4.3)) je tedy možné určit vlastní čísla λ a vlastní vektory (resp. vlastní funkce) $\mathbf{h}$. Matematické postupy pro vyřešení rovnice (4.3) je možné dohledat v odborné literatuře (např. Rektorys, 1988 [14]) a nebudou již v této práci dále rozebírány.

V rámci metody POD aplikované na proudění je neznámým funkcím $\phi_i(\mathbf{x})$ v rovnicích (4.1) a (4.2) přiřazen význam vlastních funkcí (vlastních vektorů) $\mathbf{h}$ v rovnici (4.3). Tyto vlastní funkce $\phi_i(\mathbf{x})$ je tedy možné určit vyřešením rovnice vlastního problému, která je analogicky k rovnici (4.3) pro metodu POD definována následovně [15]:

$$\int_{\Omega} \mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \cdot \phi_i(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \lambda_i \cdot \phi_i(\mathbf{x}) \quad (4.4)$$

kde $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')^6$ je korelační matice. Samotné řešení této rovnice (tzn. určení vlastních funkcí $\phi_i(\mathbf{x})$ a vlastních čísel λ_i) lze podobně jako v případě rovnice (4.3) dohledat v odborné literatuře zabývající se metodou POD. V následujících odstavcích budou proto vlastní funkce $\phi_i(\mathbf{x})$ a příslušná vlastní čísla λ_i považovány již za určené. Známé vlastní funkce $\phi_i(\mathbf{x})$ jsou přímo hledanými vlastními tvary daného proudění, které je možné graficky interpretovat, což je i jedním z hlavních cílů této práce.

Důležitou fyzikální vlastností metody POD je, že vlastní čísla λ získaná vyřešením rovnice (4.4) vyjadřují energii příslušející k daným koherentním strukturám (resp. vlastním tvarům proudění). Po seřazení těchto vlastních čísel λ (a tím i příslušných vlastních tvarů) podle velikosti lze vykreslit vlastní tvary s největší energií, tzn. vlastní tvary, které jsou nejvýznamnější. Pro lepší názornost je vhodné vyjádřit tyto energie ve formě relativních energií, kterými jednotlivé vlastní tvary přispívají k celkové energii proudění. Relativní energie příslušející ke k -tému vlastnímu tvaru je definována následovně [15]:

$$E_k = \frac{\lambda_k}{E_C} \quad (4.5)$$

kde E_C je celková energie definovaná jako součet všech vlastních čísel λ :

$$E_C = \sum_{i=1}^M \lambda_i \quad (4.6)$$

V případě použití metody POD na rychlostní pole má tato relativní energie souvislost s kinetickou energií proudění a je tedy označována jako relativní kinetická energie daného vlastního tvaru. Při použití této metody na tlakové pole je relativní energie daného vlastního tvaru označována jako tzv. relativní mohutnost tohoto tvaru nebo relativní mohutnost

⁶ Symbol apostrof ' značí transpozici daného vektoru (případně matice).

koherentních struktur. V případě pole vířivosti je relativní energie přiřazovaná vlastním tvarům označována jako tzv. relativní enstrofie⁷ vlastních tvarů.

Metoda vlastní ortogonální dekompozice může být na základě rovnice (4.1) a výše uvedených poznatků o energiích vlastních tvarů chápána podle autora Berkooz *et al.* (1993) [1] také jako optimalizační procedura, která mezi všemi možnými realizacemi proudění v dané oblasti vyhledá takové realizace, které nejvíce zvyšují střední energii vlastních tvarů proudění.

Pro úplnou aproximaci původní skalární funkce $u(\mathbf{x}, t)$, jejíž tvar je uveden v rovnici (4.1), je nutné určit ještě časové koeficienty $a_i(t)$. Tyto koeficienty mohou být dopočítány právě z rovnice (4.1) ze známých hodnot původní funkce $u(\mathbf{x}, t)$ a již určené příslušné vlastní funkce $\phi_i(\mathbf{x})$. Výsledný vztah pro výpočet časových koeficientů bude mít tvar [15]:

$$a_i(t) = u(\mathbf{x}, t) \cdot \phi_i(\mathbf{x}) ; \quad i = 1 \dots M \quad (4.7)$$

Časové koeficienty jsou závislé pouze na čase a lze z jejich průběhů stanovit vlastní frekvence a příslušné amplitudy (příp. fáze) pomocí např. Fourierovy transformace popsané v kapitole 3.

Vypočítané hodnoty časových koeficientů $a_i(t)$ spolu s příslušnými tvary vlastních funkcí $\phi_i(\mathbf{x})$ lze také použít pro zpětnou rekonstrukci jednotlivých okamžitých snímků proudění, tzn. snapshotů. Tato zpětná rekonstrukce může být provedena na základě následujícího vztahu [15]:

$$u(\mathbf{x}, t_n) \cong \sum_{i=1}^M a_i(t_n) \cdot \phi_i(\mathbf{x}) \quad (4.8)$$

kde čas t_n je zvolený čas, ve kterém je prováděna zpětná rekonstrukce příslušného okamžitého snímku rozložení dané veličiny na sledované oblasti. Pro provedení dostatečně kvalitní rekonstrukce stačí použít jen několik prvních vlastních tvarů proudění, které jsou charakteristické největšími hodnotami relativní energie (viz také kapitoly 6.3 a 7.3).

V rámci této práce bylo v programu Matlab vyvinuto několik dílčích procedur, které umožňují praktickou aplikaci metody POD na dané proudění. Hlavní procedura, která řeší rovnici vlastního problému (4.4) a identifikuje tak vlastní funkce $\phi_i(\mathbf{x})$ a jejich příslušné relativní energie byla převzata od autora Meyer (2008) [10].

Metoda vlastní ortogonální dekompozice byla v této práci použita pro nalezení vlastních tvarů proudění u následujících případů:

1. Obtékání kvádrů, za kterým vzniká Kármánova vírová stezka (kapitola 6).
2. Proudění v kuželové savce vodní turbíny, ve které vzniká vírový cop (kapitola 7).

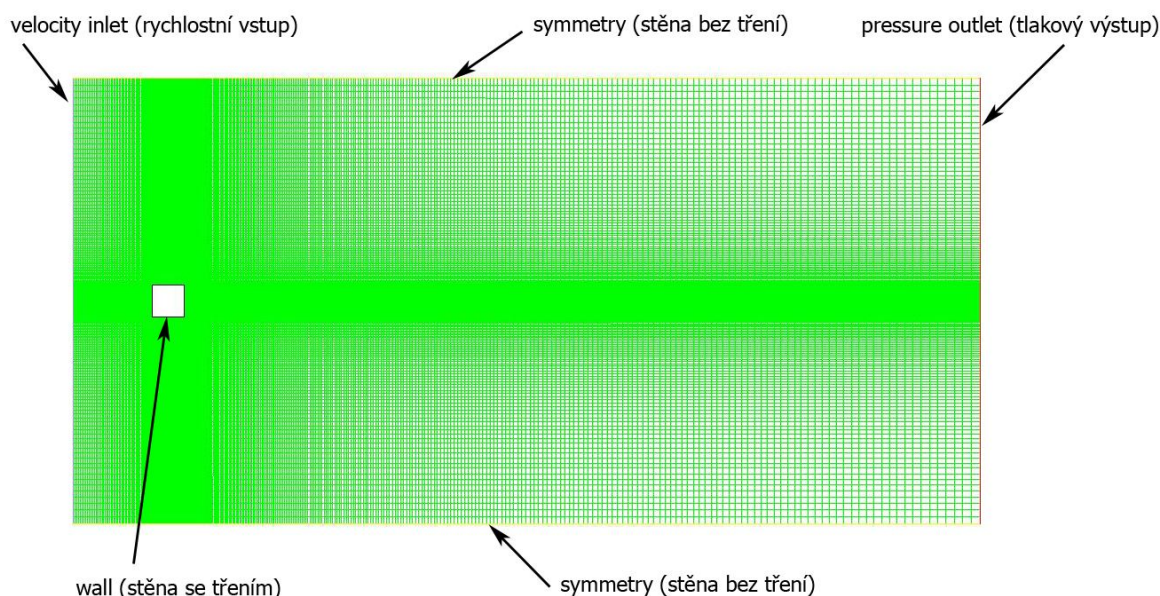
⁷ Enstrofie je obecně veličina přímo úměrná druhé mocnině vířivosti. V případě pole vířivosti je tedy pro relativní energii použito označení relativní enstrofie podobně jako tomu je u relativní energie rychlostního pole, resp. druhé mocniny rychlosti a zavedeného označení relativní kinetické energie.

5 Aplikace Fourierovy transformace a CFD výpočtů na úlohu obtékání kvádro

V této kapitole bude aplikována Fourierova transformace na úlohu obtékání kvádro především za účelem nalezení vlastních frekvencí Kármánovy vírové stezky, která vzniká za danou obtékanou překážkou. Takto získané vlastní frekvence budou pak dále sloužit pro verifikaci metody vlastní ortogonální dekompozice, která bude aplikována na stejnou geometrii (kapitola 6). Data potřebná pro Fourierovu transformaci byla získána pomocí CFD výpočtů, které jsou popsány v následující kapitole.

5.1 CFD výpočty

Pro výpočty proudění okolo kvádro byl použit komerční program Fluent. Strukturovaná, konformní výpočetní síť o velikosti 61400 buněk (typu QUAD) byla vytvořena v preprocesoru Gambit. Výsledky CFD výpočtů, resp Fourierovy transformace, o kterých pojednává tato část práce jsou dále srovnávány s experimentem, který byl proveden autory Lyn a Rodi (1994) [9]. Celá výpočetní úloha je na rozdíl od daného experimentu řešena ve 2D, kde hlavní rozměry (převzaté z experimentu) jsou 0,56 x 1,14 m a strana obtékaného čtverce $D = 0,04$ m [9].



Obr. 5.1 Výpočetní doména a okrajové podmínky

Vstupní okrajová podmínka – rychlostní vstup (velocity inlet):

Vstupní rychlost je 0,535 m/s [9], intenzita turbulence neboli poměr fluktuační složky rychlosti ke střední rychlosti je rovna 2% a hydraulický průměr (rozměr největšího možného víru v doméně) je roven 0,04 m.

Výstupní okrajová podmínka – tlakový výstup (pressure outlet):

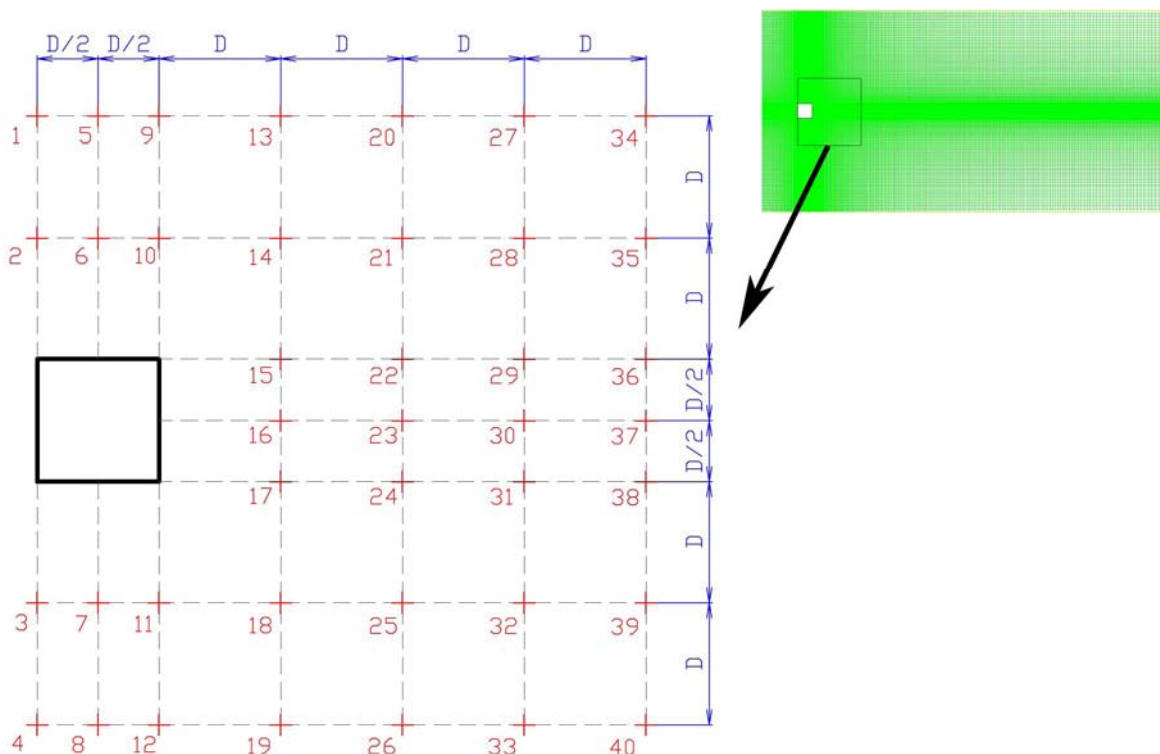
Na výstupu z výpočetní domény je předepsán atmosférický tlak a pro případné vracející se proudění do výpočetní domény jsou na výstupu definovány tyto parametry: intenzita turbulence 10 % a hydraulický průměr 0,04 m. Ostatní okrajové podmínky jsou zobrazeny na *Obr. 5.1*.

Pro vlastní CFD výpočet jsou použity Reynoldsovy středované rovnice, neboli RANS (Reynolds Avaraged Navier-Stokes). Turbulentní proudění je modelováno pomocí dvou-rovnicevého realizable k-epsilon modelu, přičemž mezní vrstva je modelována pomocí nerovnovážných stěnových funkcí. Hybnostní členy a turbulentní veličiny k-epsilon modelu jsou diskretizovány interpolačním schématem UPWIND 2. řádu. Pro tlakové členy bylo použito interpolační schéma STANDARD. Celá úloha je řešena jako nestacionární s časovým krokem $\Delta T = 0,005$ s.

Během výpočtu byly ve 40 bodech (*Obr. 5.2*) monitorovány průběhy:

- statického tlaku
- rychlosti ve směru osy x
- rychlosti ve směru osy y

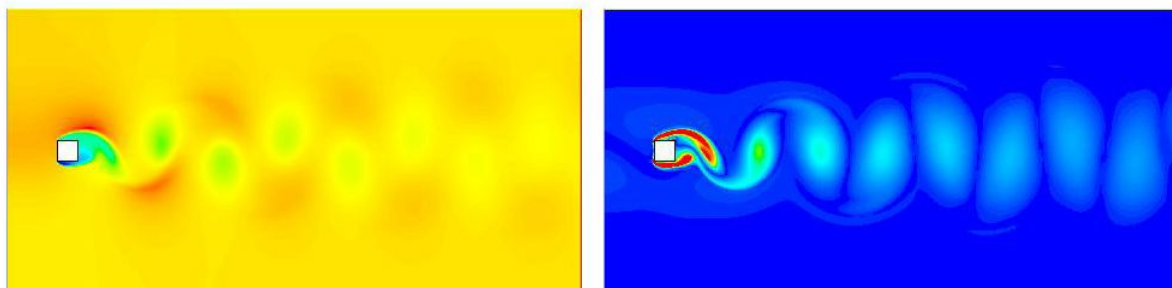
Sledované veličiny byly ukládány v každém časovém kroku po dobu přibližně 102 sekund, tj. přibližně 20400 hodnot příslušné veličiny v každém bodě. Na takto získaná data byla následně aplikována Fourierova transformace.



Obr. 5.2 Umístění bodů ve výpočetní doméně pro monitorování tlaku a složek rychlosti

5.2 Postprocessing

Po vykreslení tlaku a velikosti vektoru vířivosti ve výpočetní doméně (*Obr. 5.3*) je zřejmé, že za danou překážkou vznikají očekávané periodicky se odtrhávající víry, tzv. Kármánova vírová stezka, která bude dále analyzována.



Obr. 5.3 Zobrazení Kármánovy vírové stezky, **vlevo:** vykreslení pomocí tlaků, **vpravo:** vykreslení pomocí velikosti vektoru vířivosti

5.2.1 Určení vlastních frekvencí

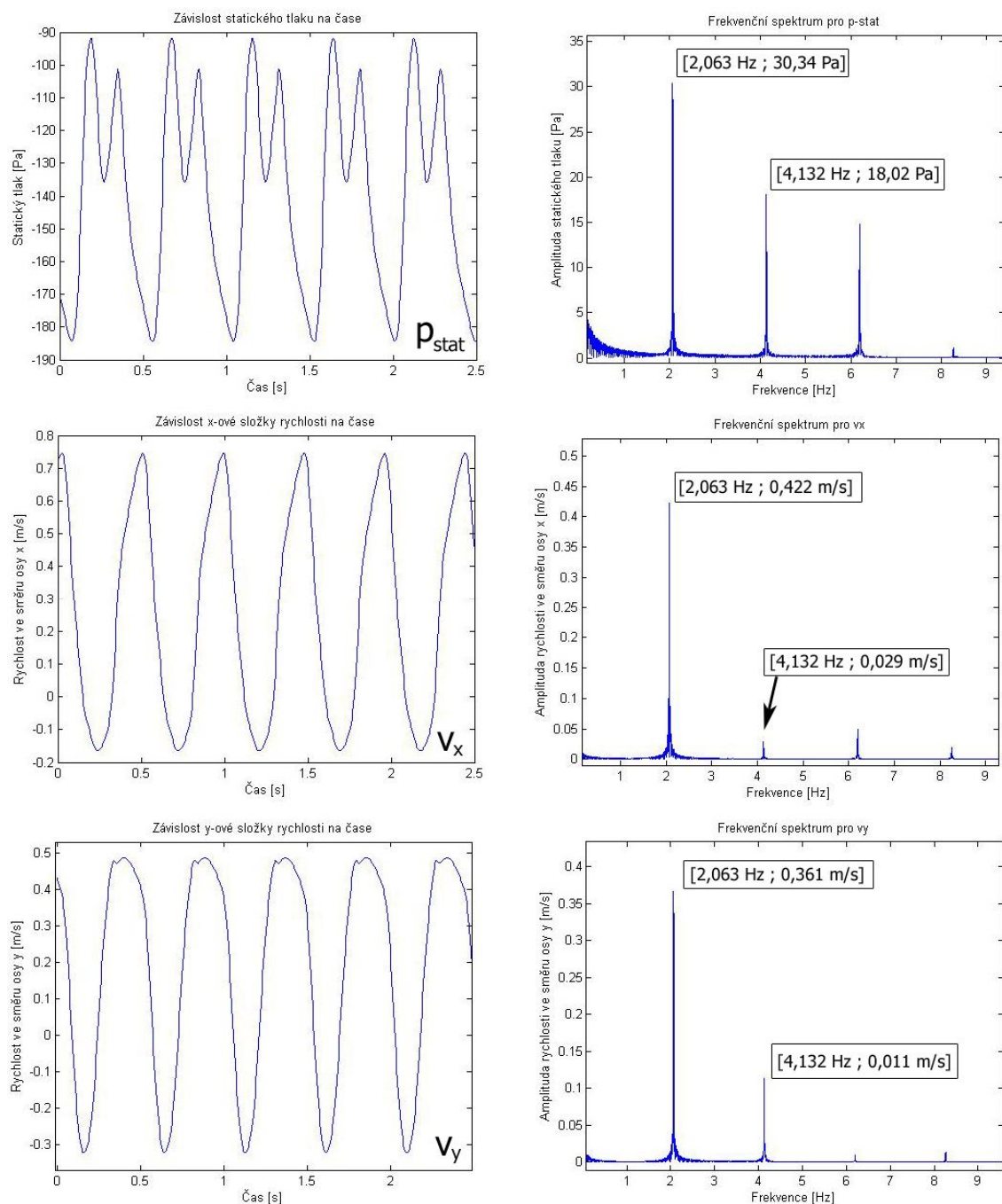
Ze získaných průběhů statického tlaku a složek rychlosti ve směru osy x a y byly pomocí Fourierovy transformace (kapitola 3) určeny vlastní frekvence periodického pohybu vírů ve zvolených bodech (*Obr. 5.4*). První vlastní frekvence $f_{1,CFD}$, tzn. frekvence odtrhávání vírů, je 2,063 Hz. Druhá vlastní frekvence periodického pohybu $f_{2,CFD}$ vychází 4,132 Hz. Pro vypočtenou první vlastní frekvenci $f_{1,CFD}$ je bezrozměrné Strouhalovo číslo charakterizující neustálené proudění definované vztahem [19]:

$$Sh = \frac{f_1 \cdot D}{v} \quad (5.1)$$

rovno $Sh_{CFD} = 0,154$ (D je strana obtékaného čtverce a v je vstupní rychlost). Z experimentálního měření podle autorů Lyn a Rodi (1994) [9] vychází (při stejném Reynoldsově čísle jako v numerickém výpočtu $Re = 21400$) první vlastní frekvence odtrhávání vírů $f_{1,exp} = 1,79 \pm 0,05$ Hz a Strouhalovo číslo $Sh_{exp} = 0,134$. Je tedy zřejmé, že se numerický výpočet s experimentálním měřením liší přibližně o 15 %, což není zanedbatelná odchylka.

Podle autora Durão *et al.* (1988) [4] je při $Re = 14000$ experimentálně získaná hodnota Strouhalova čísla rovna $Sh_{exp,2} = 0,133$. Při porovnání velikostí Strouhalových čísel z daných dvou zdrojů [9] a [4] při odlišných Re je možné konstatovat, že při obtékání kvádru je závislost Strouhalova čísla na čísle Reynoldsově velmi malá. Tato hypotéza je potvrzena i autory Sarioglu a Yavuz (2000) [16] pro rozsah $Re = 10^4 \div 10^5$.

Na základě srovnání poznatků od různých autorů v minulém odstavci budou při porovnávání experimentu dle autora Lyn [9] s výsledky numerického modelování uváděných v této práci považovány hodnoty z experimentu za správné (s ohledem na nejistoty měření). To tedy znamená, že rozdíl přibližně 15 % mezi vypočtenou a experimentálně zjištěnou frekvencí, respektive Strouhalovými čísly, je způsoben nedokonalostí numerického modelování proudění. Pravděpodobnou hlavní příčinou je zjednodušení 3D experimentální úlohy na 2D výpočetní úlohu.

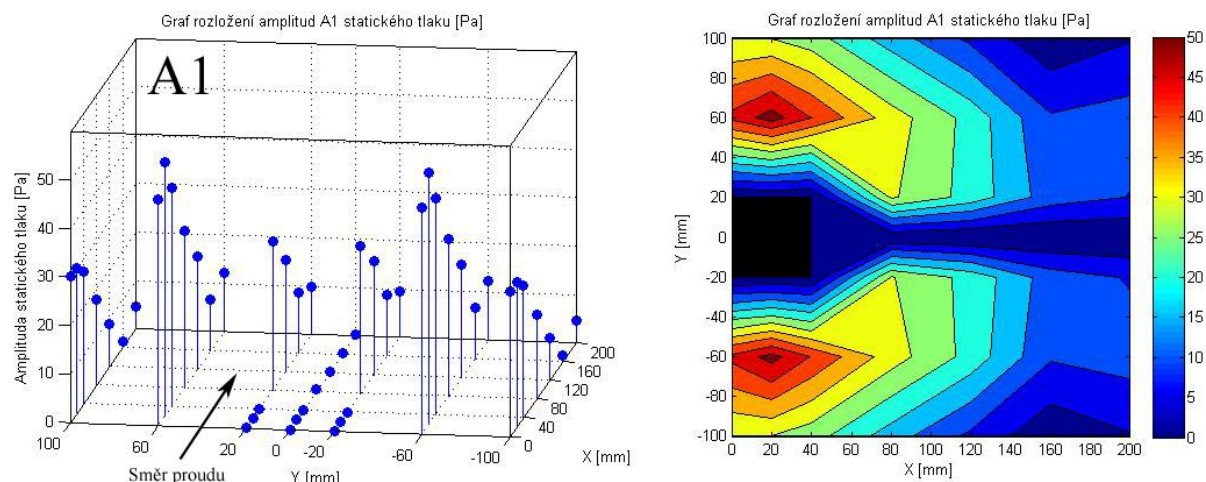


Obr. 5.4 Zobrazení vypočtených dat pro bod číslo 17, *vlevo:* v časové doméně, *vpravo:* ve frekvenční doméně (po Fourierově transformaci)

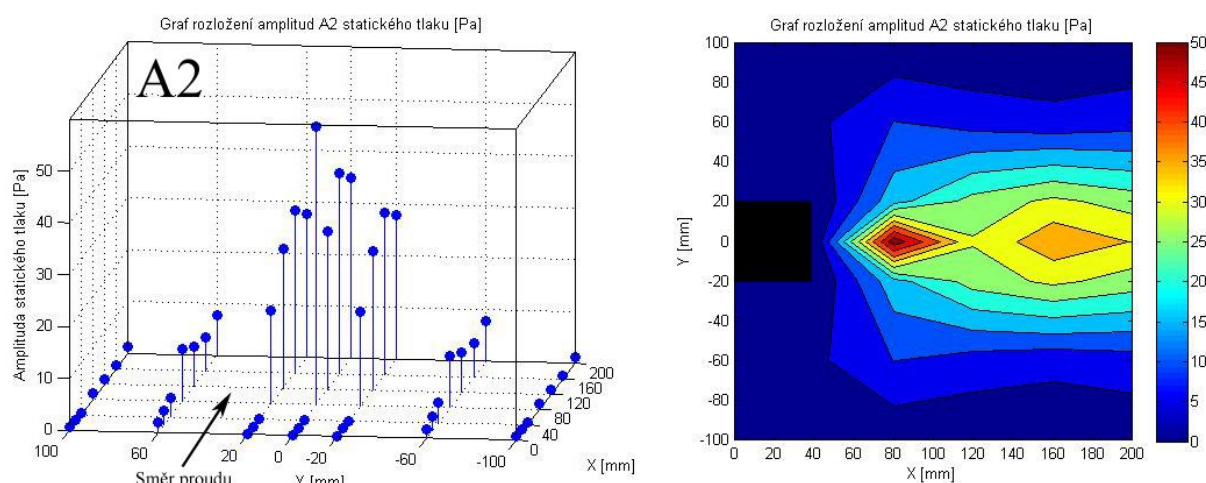
5.2.2 Rozložení amplitud

Pomocí transformace získaných dat do spektrální oblasti byly zjištěny vlastní frekvence odtrhávání vírů (kapitola 5.2.1), ke kterým přísluší amplitudy v jednotlivých bodech sledované oblasti. K první vlastní frekvenci $f_{1,CFD} = 2,063$ Hz přísluší amplitudy s označením A1 a obdobně k $f_{2,CFD} = 4,132$ Hz přísluší amplitudy A2 v daných 40 bodech. Následující obrázky (Obr. 5.5 až Obr. 5.10) ukazují rozložení amplitud statického tlaku, x-ové složky rychlosti a y-ové složky rychlosti v závislosti na poloze monitorovacích bodů vzhledem k obtékanému kvádru.

Amplitudy statického tlaku:

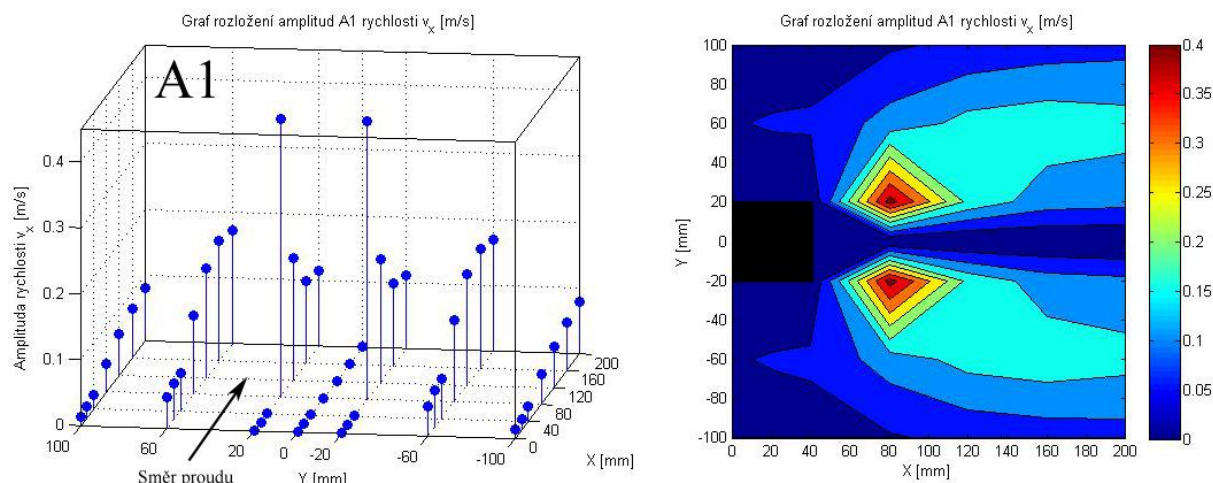


Obr. 5.5 Rozložení velikostí amplitud statického tlaku příslušejících k **první** vlastní frekvenci ($f_1=2,063$ Hz), **vlevo**: zobrazení v 3D grafu, **vpravo**: zobrazení ve vrstevnicovém grafu

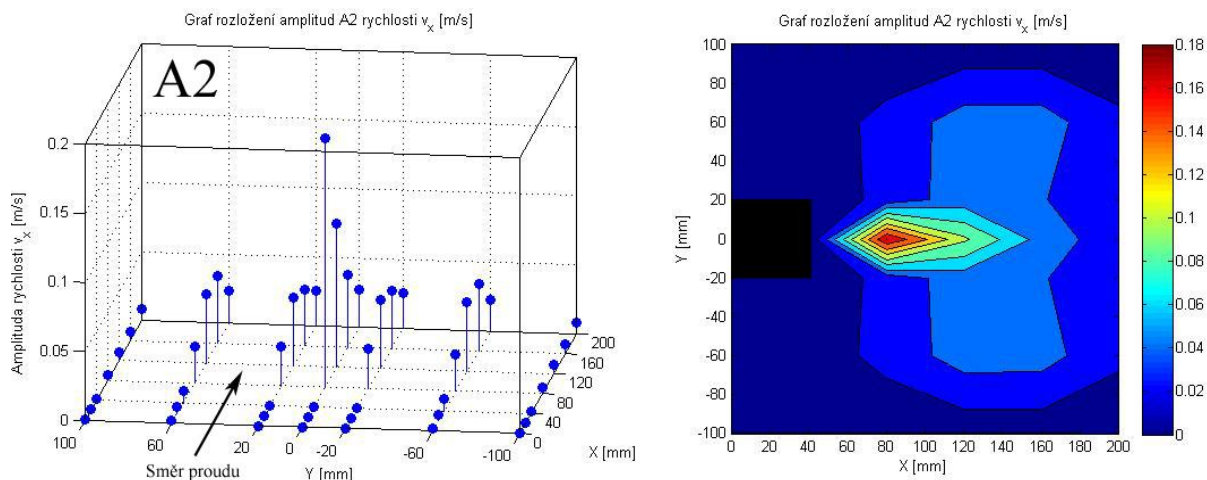


Obr. 5.6 Rozložení velikostí amplitud statického tlaku příslušejících k **druhé** vlastní frekvenci ($f_1=4,132$ Hz), **vlevo**: zobrazení v 3D grafu, **vpravo**: zobrazení ve vrstevnicovém grafu

Amplitudy x-ové složky rychlosti:

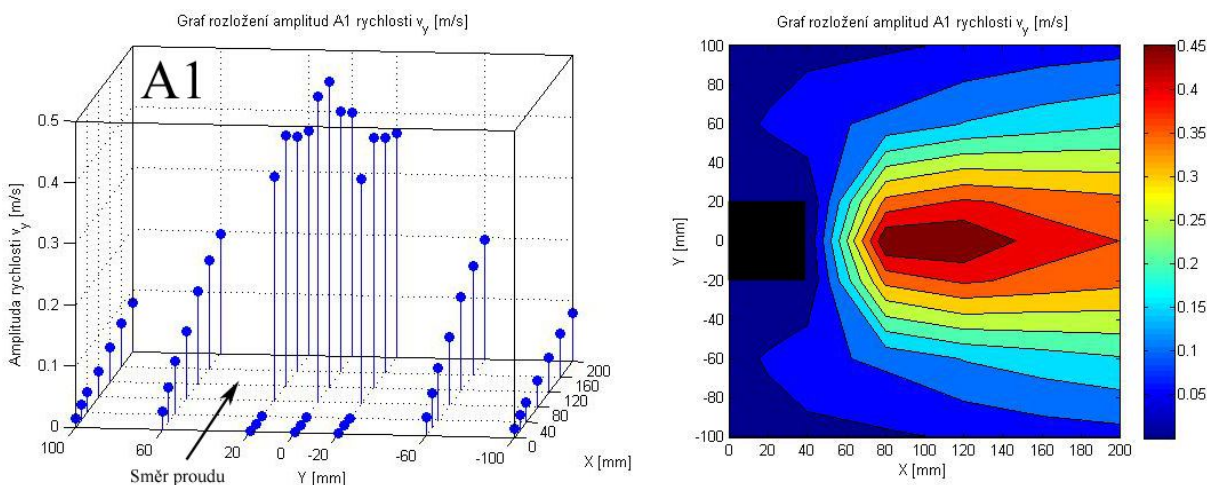


Obr. 5.7 Rozložení amplitud x-ové složky rychlosti příslušejících k frekvenci $f_1 = 2,063$ Hz

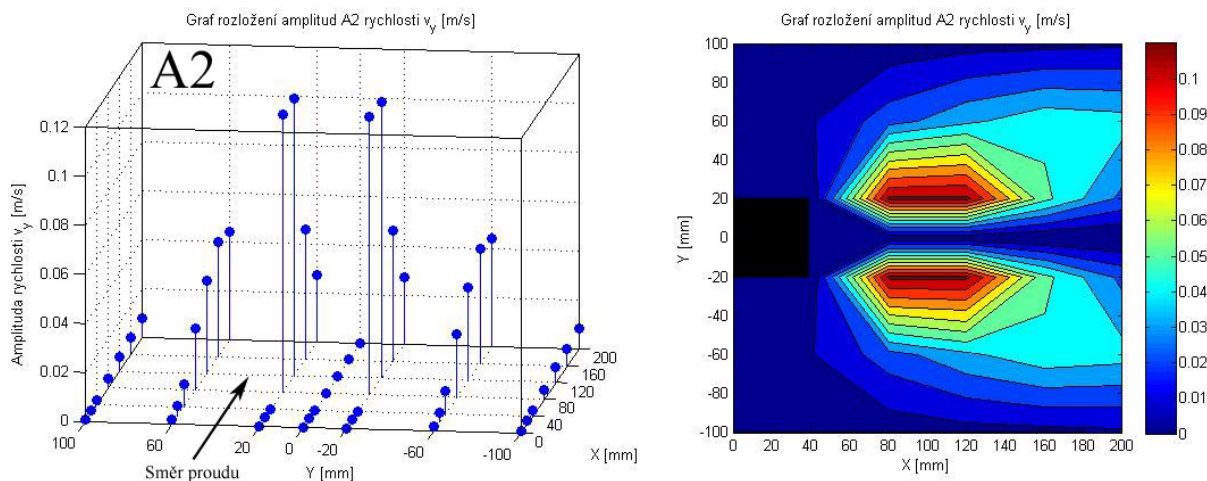


Obr. 5.8 Rozložení amplitud x -ové složky rychlosti příslušejících k frekvenci $f_2 = 4,132$ Hz

Amplitudy y -ové složky rychlosti:



Obr. 5.9 Rozložení amplitud y -ové složky rychlosti příslušejících k frekvenci $f_1 = 2,063$ Hz



Obr. 5.10 Rozložení amplitud y -ové složky rychlosti příslušejících k frekvenci $f_2 = 4,132$ Hz

Vrstevnicové grafy (zobrazené na pravé straně *Obr. 5.5* až *Obr.5.10*) byly vytvořeny v programu Matlab pomocí funkce *countourf*, která prokládá známé hodnoty průběhu sledované veličiny nad rovinou x,y a umožňuje tedy plošné vykreslení daných diskretních hodnot.

Největších pulzací statického tlaku (A_1) je na sledované oblasti dosahováno v blízkosti bočních stran obtékané překážky (*Obr. 5.5*). Naopak největších amplitud rychlostí ve směru x i y je dosahováno až v úplavu za překážkou (*Obr. 5.7* a *Obr. 5.9*). Oba tyto jevy jsou důsledkem vzniku a šíření vírových struktur v Kármánově vírové stezce. Z porovnání *Obr. 5.7* a *Obr. 5.9* také vyplývá, že největší amplitudy x -ové a y -ové složky rychlosti jsou přibližně stejně velké ($v_x \approx v_y \approx 0,4$ m/s). Nicméně velikosti oblastí, ve kterých se tyto maximální amplitudy vyskytují, jsou velmi rozdílné. Z tohoto důvodu je možné konstatovat, že v úplavu za kvádrem je ve sledované oblasti výraznější kmitání rychlostí v y -ovém směru než ve směru x -ovém.

5.2.3 Inverzní Fourierova transformace

Inverzní (zpětná) Fourierova transformace umožňuje na základě znalosti průběhu dané funkce ve frekvenční oblasti rekonstruovat průběh této funkce v oblasti časové (viz také kapitola 3.3). Pro výpočet zpětné (diskretní) Fourierovy transformace byla v rámci této práce vyvinuta procedura v programu Matlab, která vychází přímo z definičních vztahů Fourierovy posloupnosti (viz rov. (3.1) až (3.4)). Aplikací této procedury na vybrané frekvenční průběhy tlaku a složek rychlosti v daných monitorovaných bodech lze určit příslušné průběhy časové. Tyto nové (rekonstruované) časové průběhy se velmi přesně shodují s originálními časovými průběhy, které byly získány pomocí CFD výpočtů. Tímto postupem je tedy možné verifikovat výpočty Fourierovy transformace prováděné v rámci této práce.

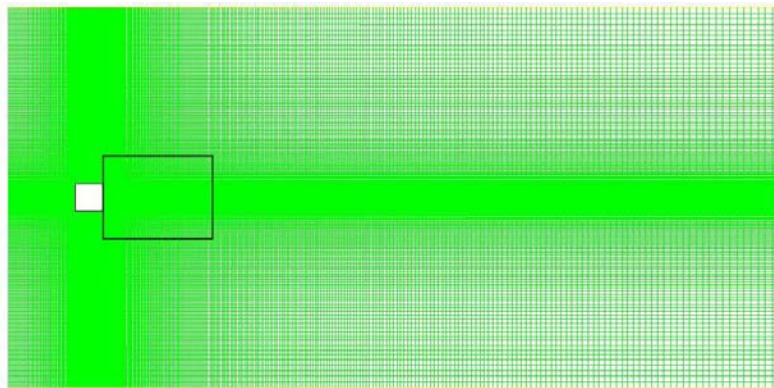
6 Aplikace metody vlastní ortogonální dekompozice a CFD výpočtů na úlohu obtékání kvádrů

Pomocí metody vlastní ortogonální dekompozice (POD) je možné nalézt vlastní tvary proudění na dané oblasti (podrobněji viz kapitola 4). Vstupní data potřebná pro tuto metodu je možné získat přímo měřením (např. metodou PIV) nebo pomocí CFD výpočtů. V případě této kapitoly je metoda vlastní ortogonální dekompozice aplikována na data získaná CFD výpočty na dané geometrii obtékaného kvádrů, za kterým vzniká Kármánova vírová stezka. Identifikace vlastních tvarů proudění je prováděna především pro rychlostní pole, tlakové pole a pro pole vířivosti.

6.1 CFD výpočty

Pro výpočty proudění okolo kvádrů byly použity stejné programy a identická geometrie jako pro výpočty vstupních dat pro Fourierovu transformaci v kapitole 5.1. Identické bylo i samotné nastavení programu Fluent, včetně použití nestacionárního výpočtu s časovým krokem $\Delta T = 0,005s$.

Vstupní data pro metodu vlastní ortogonální dekompozice byla však na rozdíl od předchozího výpočtu získána pomocí zapisování hodnot z každé buňky a v každém časovém okamžiku (tzn. pořizování okamžitých snímků, snapshotů) na obdélníkové ploše o rozměrech 0,17 x 0,12 m. Relativní umístění této plochy vzhledem k obtékanému kvádrů je zřejmé z Obr. 6.1.



Obr. 6.1 Zobrazení plochy, na které jsou snímána data pro metodu POD

Během výpočtu byly na této oblasti monitorovány hodnoty:

- Statického tlaku
- Složky rychlosti ve směru x
- Složky rychlosti ve směru y
- Velikosti vířivosti

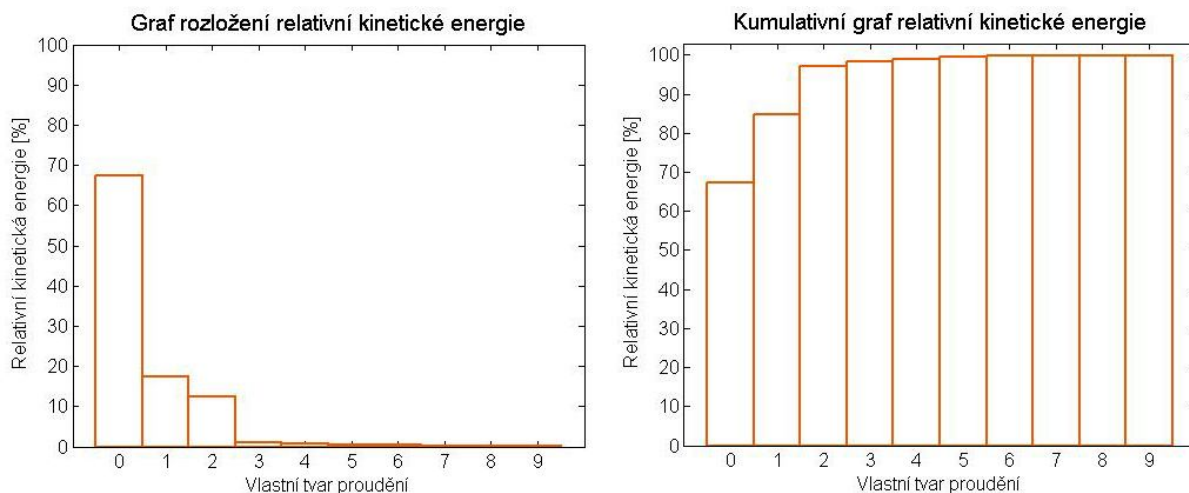
Tyto veličiny byly ukládány v každém časovém kroku po dobu 10 sekund, tj. 2000 okamžitých snímků, resp. snapshotů pro každou veličinu na oblasti obsahující přibližně 9800 buněk.

6.2 Vlastní tvary Kármánovy vírové stezky

6.2.1 Vlastní tvary rychlostního pole

V této kapitole budou zobrazeny nejvýznamnější vlastní tvary rychlostního pole na sledované oblasti. Na základě kapitoly 4 je možné každému vlastnímu tvaru rychlostního pole přiřadit určitou hodnotu relativní energie, resp. relativní kinetické energie, jejíž velikost vyjadřuje důležitost daného vlastního tvaru. Velikosti relativních kinetických energií příslušejících k daným vlastním tvarům jsou zobrazeny na Obr. 6.2. Z kumulativního grafu je zřejmé, že v prvních 10 vlastních tvarech rychlostního pole je obsaženo více jak 99,9 % celkové kinetické energie. Z tohoto důvodu mají ostatní vlastní tvary jen velmi malý vliv na dynamické vlastnosti proudění a není nutné je dále uvažovat. Největší hodnota relativní kinetické energie je přiřazena k nultému vlastnímu tvaru proudění, který má význam průměrné hodnoty ze všech okamžitých snímků proudění (průměru ze všech snapshotů) a lze ho jednoduše získat i bez použití metody POD¹.

Důležitou charakteristikou vlastních tvarů proudění je také jejich párování. Vlastní tvary, které jsou v párech (např. první a druhý vlastní tvar, třetí a čtvrtý vlastní tvar atd.), jsou charakteristické vzájemně blízkou hodnotou relativní energie (Obr. 6.2) a po vykreslení mívají podobné (fázově posunuté, otočené apod.) i své konkrétní grafické zobrazení (Obr. 6.6 a Obr. 6.7) Z tohoto důvodu budou vždy vykreslovány tři vlastní tvary s největší relativní energií (tj. nultý, první a druhý) a dále už jen liché vlastní tvary proudění, tj. třetí, pátý, sedmý a devátý.



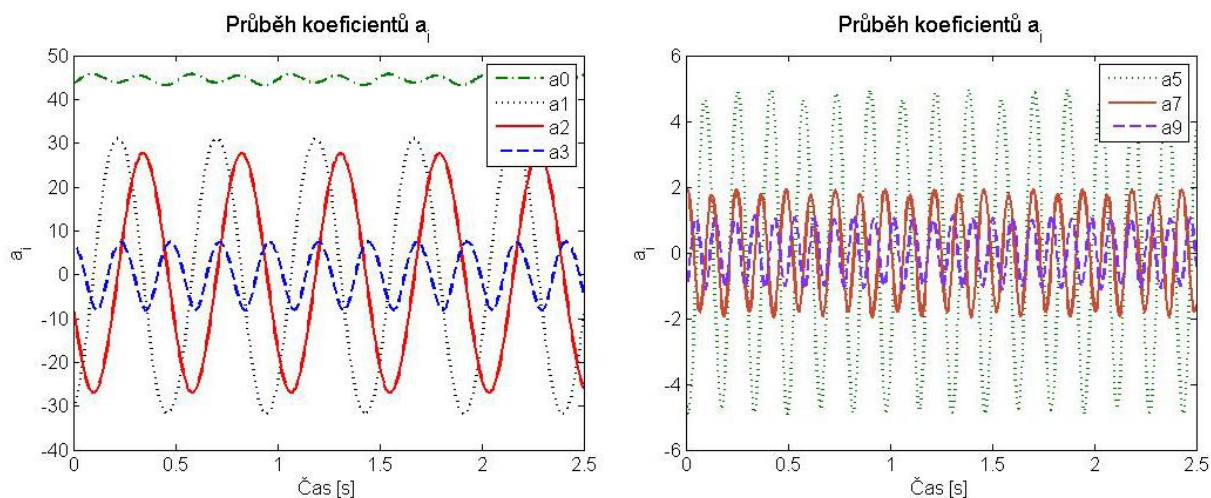
Obr. 6.2 Zobrazení relativních kinetických energií jednotlivých vlastních tvarů, **vlevo:** velikost relativní kinetické energie, **vpravo:** kumulativní graf relativních kinetických energií

Pomocí rovnice (4.7), je možné určit průběh časových koeficientů $a_i(t)$ příslušejících k jednotlivým vlastním tvarům. Časové koeficienty jsou závislé pouze na čase (Obr. 6.3) a jsou v nich uloženy informace o vlastních frekvencích příslušných vlastních tvarů proudění. V rámci této kapitoly byly vlastní frekvence příslušných vlastních tvarů určeny

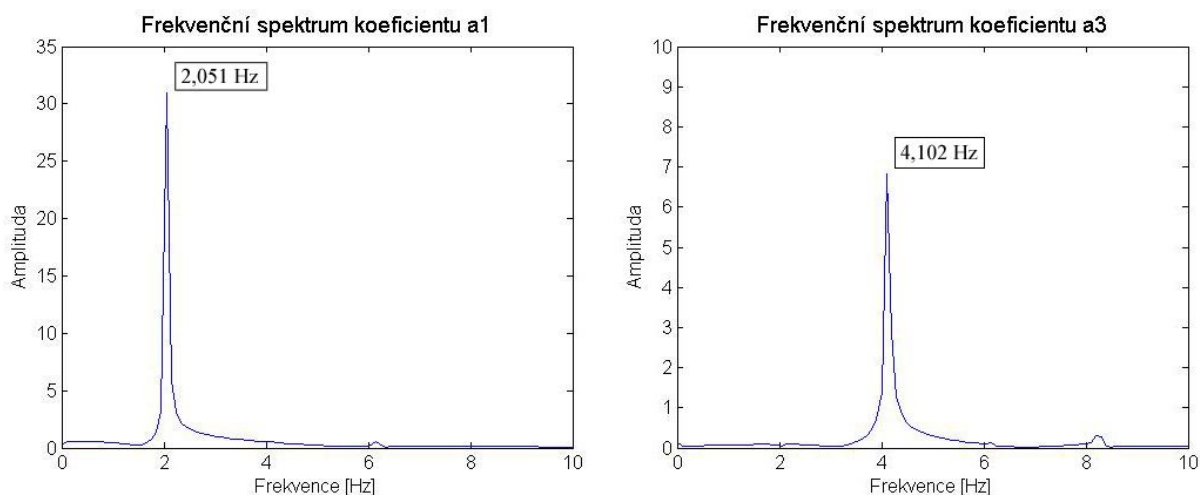
¹ Nultý vlastní tvar proudění lze zcela z metody POD vynechat. Tímto postupem lze získat větší rozdíly mezi jednotlivými hodnotami relativních kinetických energií vlastních tvarů.

pomocí Fourierovy transformace časových koeficientů a_i . Vlastní frekvence prvního (i druhého) vlastního tvaru proudění vychází $f_{1,POD} = 2,051$ Hz a vlastní frekvence třetího (i čtvrtého) vlastního tvaru proudění vychází $f_{2,POD} = 4,102$ Hz (Obr. 6.4).

V kapitole 5 byla určena první a druhá vlastní frekvence periodického pohybu vírů přímo z dat získaných CFD výpočty. Velikosti těchto vlastních frekvencí byly $f_{1,CFD} = 2,063$ Hz a $f_{2,CFD} = 4,132$ Hz. Výsledky frekvencí získaných z časových koeficientů z metody POD jsou tedy velmi blízké ověřeným frekvencím získaným pomocí CFD výpočtů. Z teoretických poznatků o metodě POD vyplývá, že hlavní vlastní frekvence fyzikálních dějů (v tomto případě f_{CFD}) by mělo být možné identifikovat i v rámci metody POD (f_{POD}), čehož je zde dosaženo. Tímto lze částečně potvrdit i správnou aplikaci metody POD v této práci.



Obr. 6.3 Zobrazení průběhů časových koeficientů $a_i(t)$



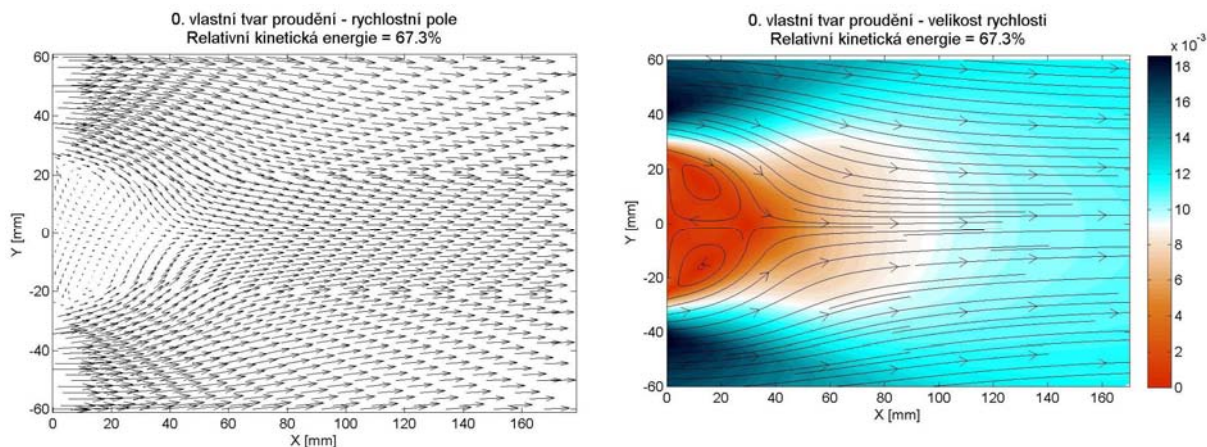
Obr. 6.4 Stanovení vlastních frekvencí z průběhu koeficientů a_1 a a_3 pomocí Fourierovy transformace

Na následujících obrázcích (Obr. 6.5 – Obr. 6.11) jsou zobrazeny vlastní tvary rychlostního pole včetně nultého (středního) vlastního tvaru. Na levé straně těchto obrázků jsou zobrazeny vlastní tvary pomocí vektorového rychlostního pole. Na pravé straně jsou zobrazeny vlastní tvary, které vznikly aplikací metody POD na data popisující velikost

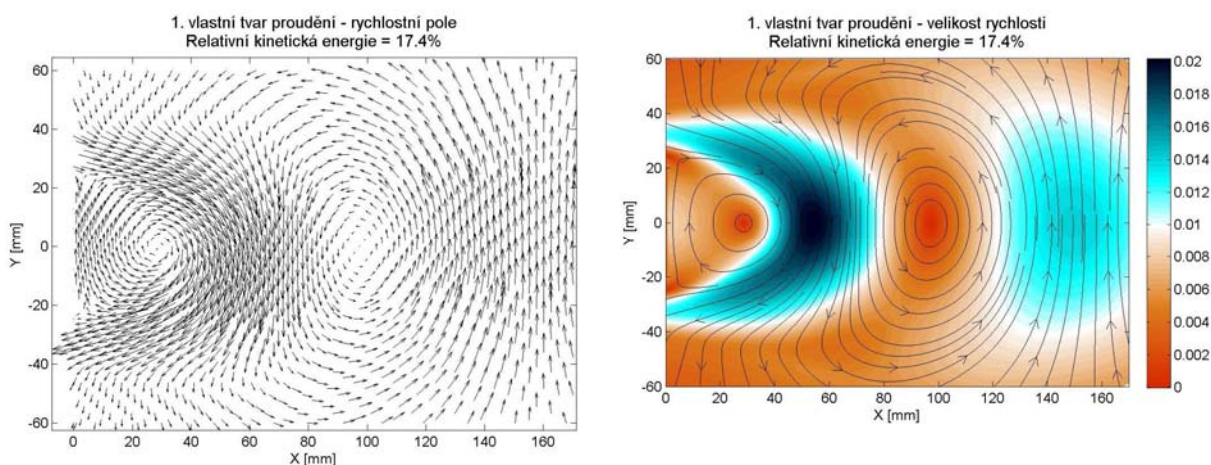
rychlosti. Obrázky na pravé straně jsou navíc doplněny o křivky, které velmi dobře identifikují vírové (koherentní) struktury ve sledovaném rychlostním poli. Tvary těchto nespojitých křivek² jsou velice podobné tvarům proudnic.

Na tomto místě je nutné poznamenat, že výstupní hodnoty z metody POD, tzn. hodnoty vlastní funkce $\phi_i(\mathbf{x})$ dané veličiny (hodnoty na barevné stupnici u obrázků) jsou v rámci této práce vhodné pouze pro vzájemné porovnání. Tyto vlastní funkce mají vždy úzkou spojitost s příslušnou veličinou (rychlost, tlak, vířivost apod.). Z tohoto důvodu budou tedy vykreslované hodnoty označovány v této práci (kromě obrázků) jako hodnoty vlastní funkce příslušné veličiny.

Na barevných obrázcích umístěných na pravé straně je tedy možné pozorovat spojitost mezi vírovými strukturami vykreslenými pomocí orientovaných křivek a rozložením hodnot vlastní funkce velikosti rychlosti na dané oblasti. Z těchto obrázků je zřejmé, že hodnota vlastní funkce velikosti rychlosti je nejnižší (tmavě oranžová barva) v místech, kde jsou jádra vírových struktur. Totéž platí i pro reálnou velikost rychlosti a vírové struktury, tedy že v jádrech vírových struktur je nižší velikost rychlosti než v okolním proudovém poli.

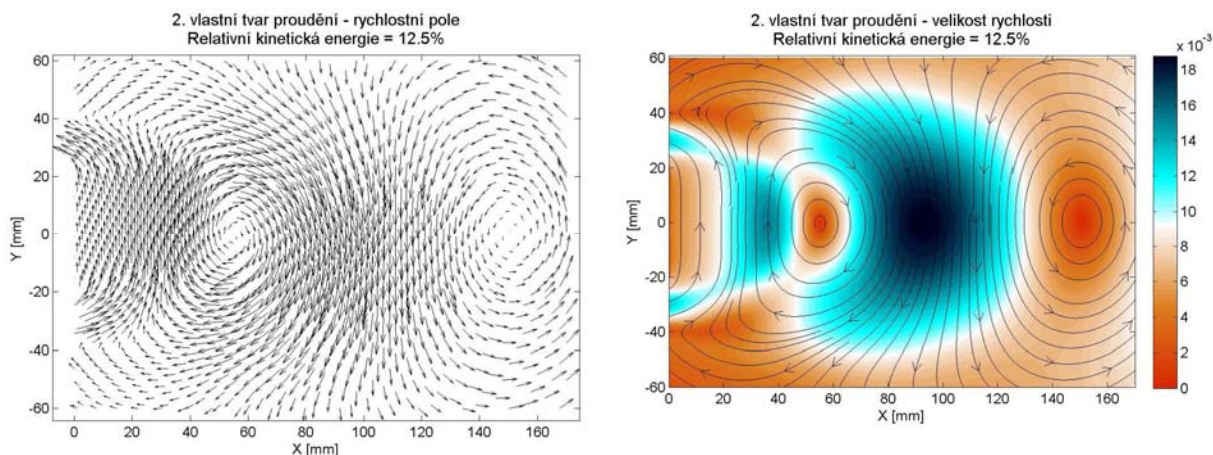


Obr. 6.5 Nultý vlastní tvar rychlostního pole, **vlevo:** vektorové rychlostní pole, **vpravo:** velikost rychlosti (v pozadí) a naznačení směru proudění (v popředí)

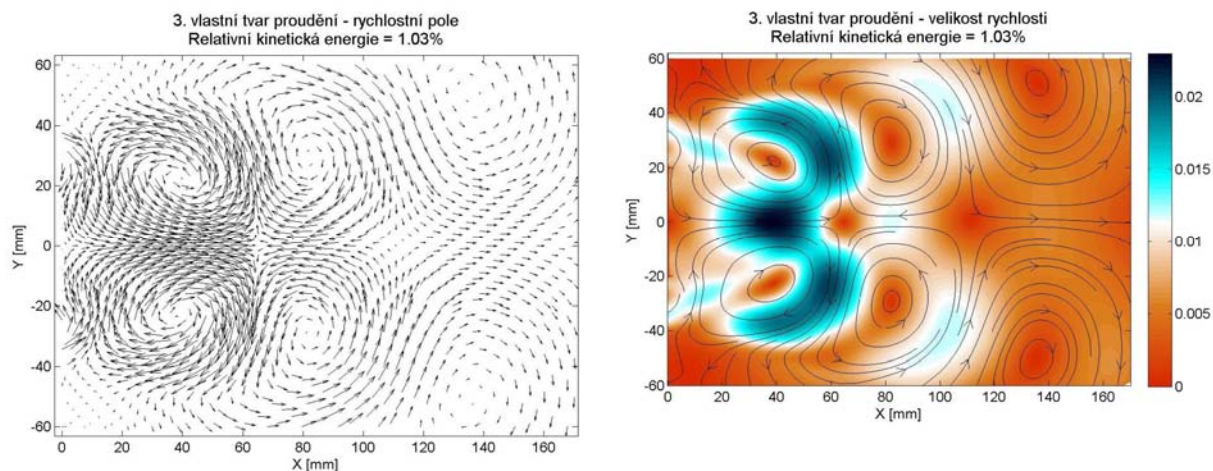


Obr. 6.6 První vlastní tvar rychlostního pole, **vlevo:** vektorové pole, **vpravo:** velikost rychlosti

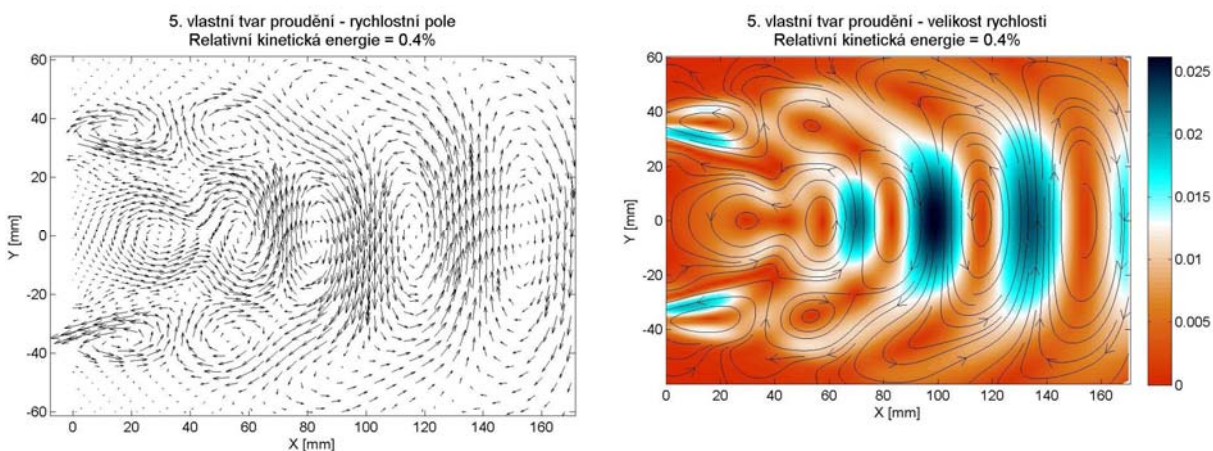
² Tyto křivky jsou vykreslovány v programu Matlab pomocí funkce `streamslice`, která provádí řezy daným proudovým polem při konstantní z-ové souřadnici (i pro případ 2D úlohy). Z tohoto důvodu jsou vykreslované křivky nespojité a nedají se označit za proudnice.



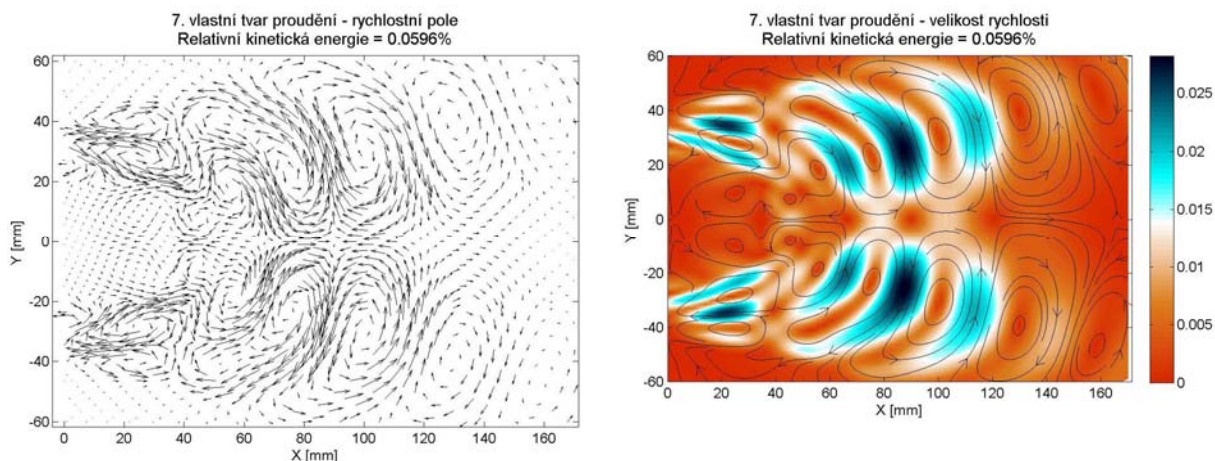
Obr. 6.7 Druhý vlastní tvar rychlostního pole, **vlevo:** vektorové rychlostní pole, **vpravo:** velikost rychlosti (v pozadí) a naznačení směru proudění (v popředí)



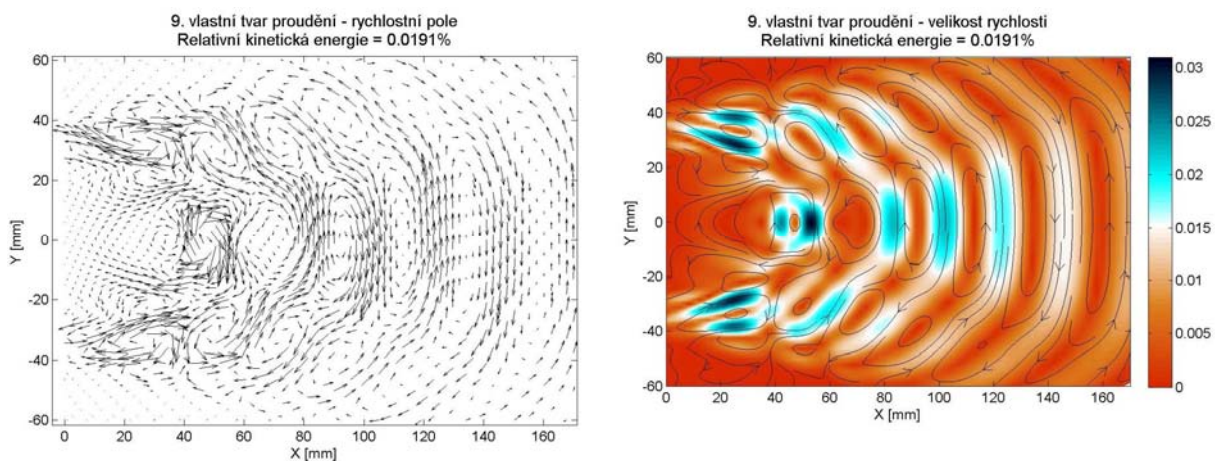
Obr. 6.8 Třetí vlastní tvar rychlostního pole, **vlevo:** vektorové rychlostní pole, **vpravo:** velikost rychlosti (v pozadí) a naznačení směru proudění (v popředí)



Obr. 6.9 Pátý vlastní tvar rychlostního pole, **vlevo:** vektorové rychlostní pole, **vpravo:** velikost rychlosti (v pozadí) a naznačení směru proudění (v popředí)



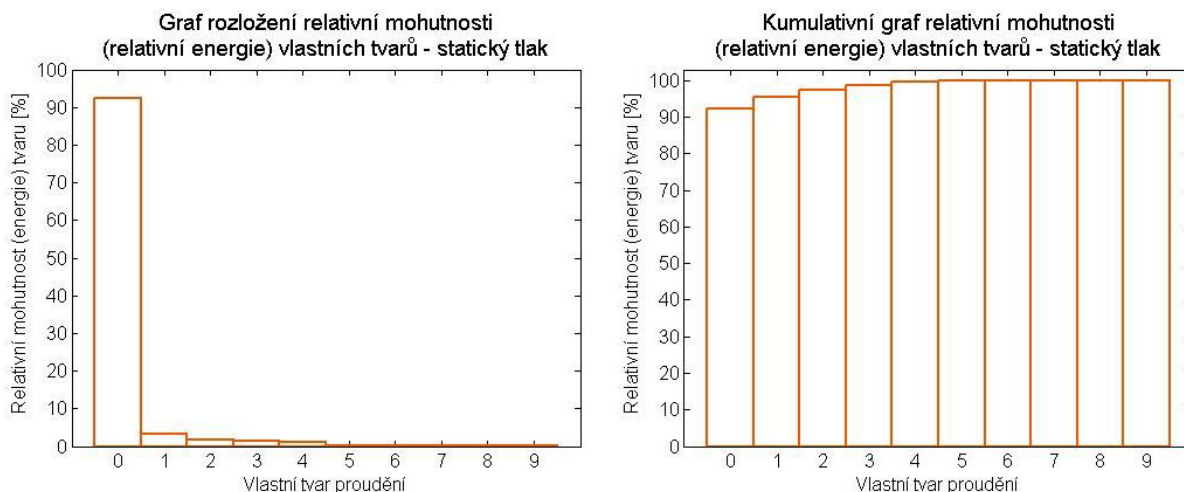
Obr. 6.10 Sedmý vlastní tvar rychlostního pole, **vlevo:** vektorové rychlostní pole, **vpravo:** velikost rychlosti (v pozadí) a naznačení směru proudění (v popředí)



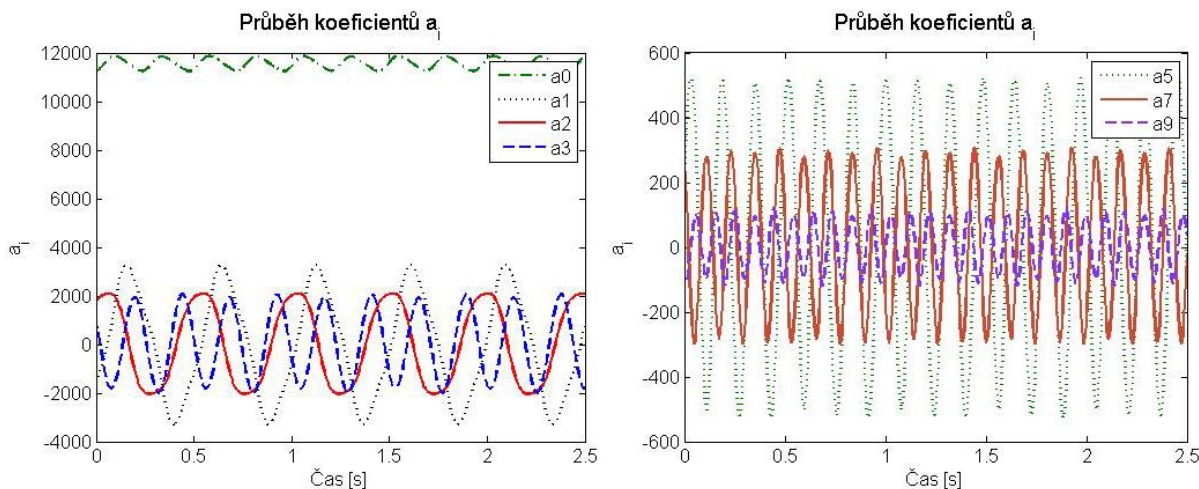
Obr. 6.11 Devátý vlastní tvar rychlostního pole, **vlevo:** vektorové rychlostní pole, **vpravo:** velikost rychlosti (v pozadí) a naznačení směru proudění (v popředí)

6.2.2 Vlastní tvary tlakového pole

Metoda POD je v této kapitole použita pro identifikaci vlastních tvarů tlakového pole na stejné geometrii jako v předchozím případě. Důležitost jednotlivých vlastních tvarů je v případě tlakového pole určena tzv. relativní mohutností (druhá mocnina p totiž nedává dobrý fyzikální smysl). Tato hodnota relativní mohutnosti má velice podobný význam jako relativní kinetická energie v případě pole rychlostního. Nultému vlastnímu tvaru (tj. tvaru s významem průměrné hodnoty) je přiřazena relativní mohutnost přibližně 92 % (Obr. 6.12). Tento vlastní tvar je tedy velmi dominantní v rámci metody POD, ale z hlediska samotné dynamiky proudění nemá velký význam, protože se jedná o tzv. časově střední pohled na proudění. Následující vlastní tvary (počínaje prvním vlastním tvarem) však již význam z pohledu dynamiky proudění mají. Z kumulativního grafu (Obr. 6.12) je zřejmé, že v prvních 10 vlastních tvarech tlakového pole je obsaženo opět více jak 99,9 % celkové mohutnosti (energie) všech vlastních tvarů. Právě těchto několik prvních vlastních tvarů bude mít hlavní vliv na dynamiku proudění za daným kvádrem.



Obr. 6.12 Zobrazení relativní mohutnosti (relativní energie) vlastních tvarů tlakového pole, **nalevo:** relativní mohutnost jednotlivých vlastních tvarů, **napravo:** kumulativní graf

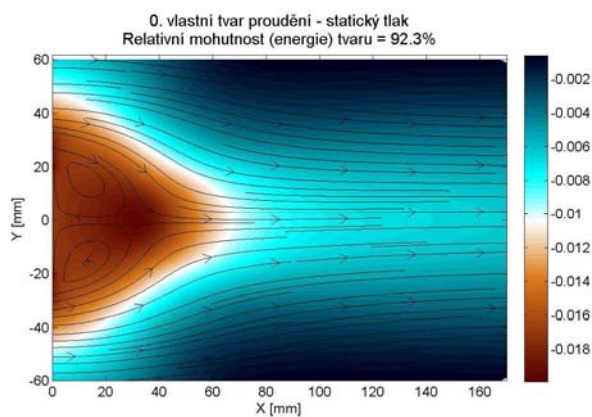


Obr. 6.13 Zobrazení průběhů časových koeficientů $a_i(t)$

Z průběhu časových koeficientů (*Obr. 6.13*) je možné určit vlastní frekvence příslušných vlastních tvarů proudění. Po aplikaci Fourierovy transformace na koeficient a_1 , resp. a_2 (příslušející k prvnímu, resp. druhému vlastnímu tvaru tlakového pole) vychází vlastní frekvence shodně $f_{1,POD} = 2,051$ Hz. Vlastní frekvence třetího (i čtvrtého) vlastního tvaru tlakového pole vychází $f_{2,POD} = 4,102$ Hz. Tyto vlastní frekvence jsou téměř totožné s první, resp. druhou vlastní frekvencí Kármánovy vírové stezky, které byly získané použitím Fourierovy transformace na data z CFD výpočtů (kapitola 5.2.1).

Na následujících obrázcích (*Obr. 6.14 až Obr. 6.17*) jsou vykresleny vlastní tvary tlakového pole. V popředí těchto obrázků jsou pro srovnání vykresleny vlastní tvary rychlostního pole pomocí orientovaných křivek, které naznačují směr proudění a identifikují vírové (koherentní) struktury.

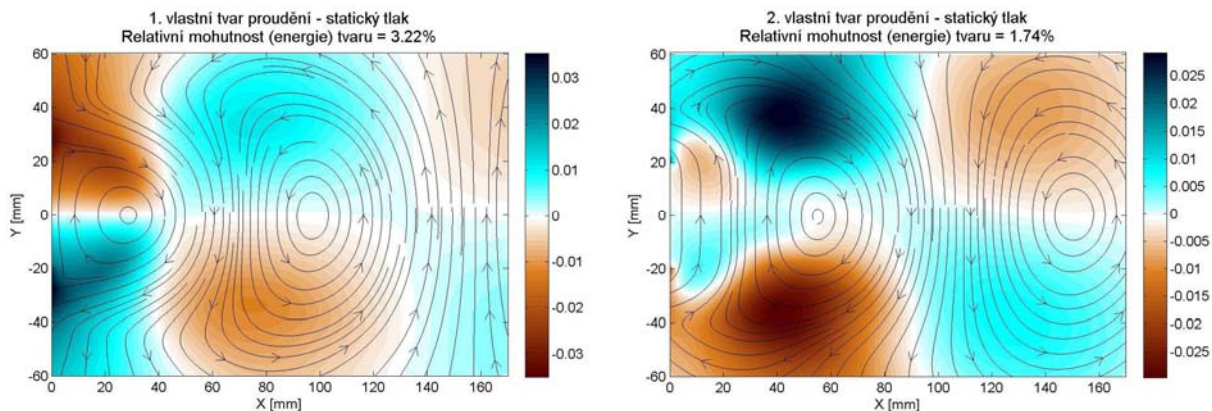
Obecně platí, že v jádru vírové struktury jsou nejnižší hodnoty statického tlaku. V případě nultého vlastního tvaru tlakového pole se vírové struktury nachází v místech nejnižších hodnot vlastní funkce tlaku³ $\phi_i(\mathbf{x})$, jejíž hodnoty jsou vždy zobrazeny vpravo od daného obrázku. V případě některých dalších vlastních tvarů je situace odlišná. U třetího a sedmého vlastního tvaru lze nalézt vírové struktury i v blízkosti míst s nejvyššími hodnotami vlastní funkce tlaku $\phi_i(\mathbf{x})$. Tento jev je způsoben tím, že všechny vlastní tvary tlakového pole ve skutečnosti v čase kmitají (podobně jako je tomu u kmitání z jedné strany vetknutého nosníku). Geometrické rozložení vlastních tvarů však zůstává neměnné (podobně jako uzly kmitu vlastních tvarů u daného nosníku). Mění se (kmitají) hodnoty vlastní funkce tlaku $\phi_i(\mathbf{x})$ ze záporných hodnot do kladných a zpět. Na daných obrázcích je znázorněna pouze jedna krajní poloha vlastních tvarů tlakového pole. Druhá krajní poloha by měla pouze inverzní barevné provedení. Kmitání vlastních tvarů je názorně vidět na videích umístěných v příloze⁴.



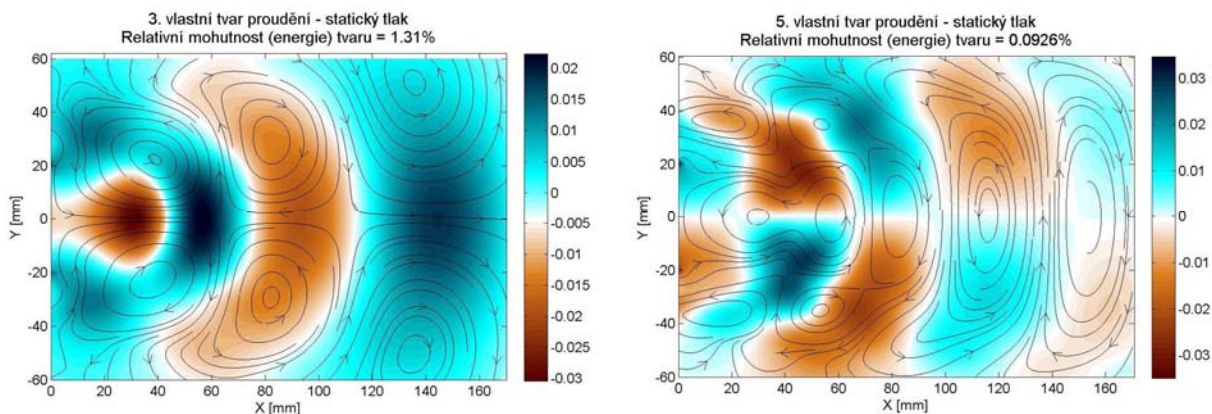
Obr. 6.14 Nultý vlastní tvar tlakového pole (křivky podobné proudnicím v popředí obrázku jsou získány z POD rychlostního pole a velmi dobře identifikují vírové struktury)

³ Vlastní funkce tlaku $\phi_i(\mathbf{x})$ úzce souvisí se statickým tlakem, ale jde pouze o hodnoty relativní, které slouží k vzájemnému porovnávání (více na straně 43).

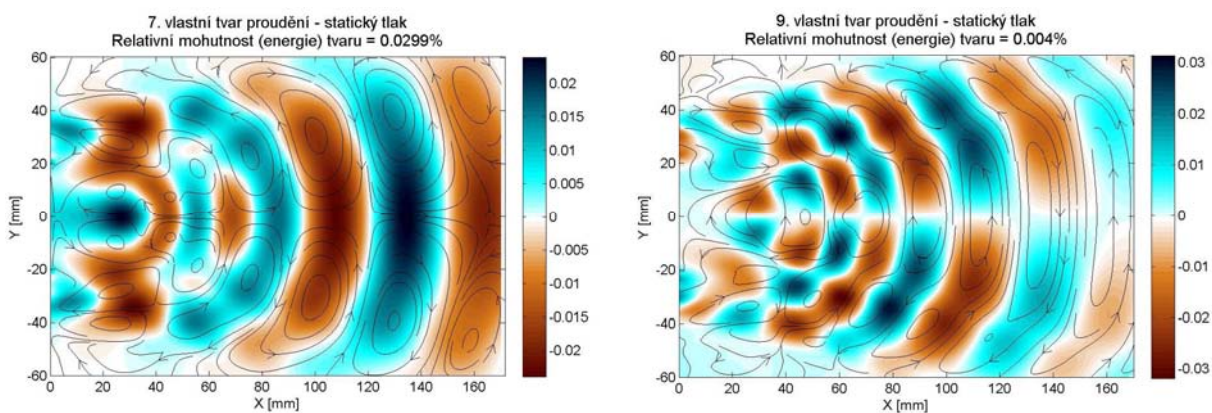
⁴ Videá zobrazující kmitání vlastních tvarů (tzn. časový vývoj vlastních tvarů) lze obdržet vynásobením časově nezávislého vlastního tvaru $\phi_i(\mathbf{x})$ s příslušným časově závislým koeficientem $a_i(t)$ a následným postupným vykreslením těchto již časově závislých hodnot.



Obr. 6.15 Vlastní tvary tlakového pole, **vlevo:** 1. vlastní tvar, **vpravo:** 2. vlastní tvar
(v popředí obrázků jsou vykresleny orientované křivky znázorňující vírové struktury vlastních tvarů rychlostního pole)



Obr. 6.16 Vlastní tvary tlakového pole, **vlevo:** 3. vlastní tvar, **vpravo:** 5. vlastní tvar
(v popředí obrázků jsou vykresleny orientované křivky znázorňující vírové struktury vlastních tvarů rychlostního pole)



Obr. 6.17 Vlastní tvary tlakového pole, **vlevo:** 7. vlastní tvar, **vpravo:** 9. vlastní tvar
(v popředí obrázků jsou vykresleny orientované křivky znázorňující vírové struktury vlastních tvarů rychlostního pole)

Vlastní tvary tlakového pole se mezi sebou vzájemně liší nejen samotným umístěním vírových struktur, ale také jiným způsobem. Některé vlastní tvary tlakového pole jsou symetrické podle roviny $y = 0$ (vlastní tvary číslo 3 a 7) a jiné vlastní tvary jsou antisymetrické podle této roviny (vlastní tvary číslo 1, 2, 5 a 9). U obou typů tvarů nedochází k přesné shodě mezi umístěním nejnižších (resp. nejvyšších) hodnot vlastních funkcí tlaku a umístěním vírů, znázorněných pomocí orientovaných křivek.

Symetrické vlastní tvary tlakového pole (tj. 3. a 7. vlastní tvar) mají nejnižší (i nejvyšší) hodnoty vlastní funkce tlaku umístěné v blízkosti roviny symetrie, a lze tedy předpokládat i podobné rozmístění vírových struktur. Orientované křivky (získané z rychlostního pole) však tento předpoklad vyvrací a odhalují vždy dvojice vírů umístěných v určité vzdálenosti od osy symetrie.

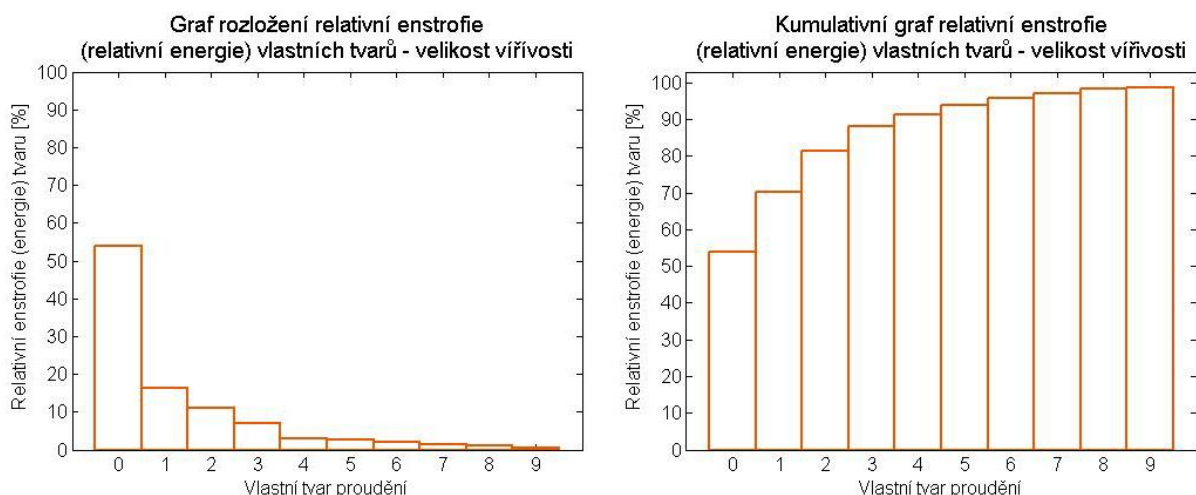
V případě antisymetrických tvarů tlakového pole (první, druhý, pátý a devátý vlastní tvar) je tomu přesně naopak. Z průběhu orientovaných křivek je zřejmé, že v tomto případě neexistují dvojice vírů, ale naopak pouze jeden vír s jádrem ležícím v blízkosti roviny symetrie. Antisymetrické vlastní tvary tlakového pole tvoří naopak dvojice s malou a velkou hodnotou vlastní funkce tlaku.

Na základě vlastních tvarů tlakového a rychlostního pole, které jsou uvedeny v této práci, a vlastních tvarů tlakových a rychlostních polí v práci autora Rudolf (2010) [15] lze předpokládat, že se symetrické a antisymetrické vlastní tvary po párech střídají. První a druhý vlastní tvar tlakového pole má antisymetrické rozložení, třetí a čtvrtý vlastní tvar tlakového pole má symetrické rozložení atd. U rychlostního pole je to přesně opačně. Je otázkou, jestli tato hypotéza bude platit obecně a jestli toto střídání symetrických a antisymetrických vlastních tvarů nemůže mít nějaký hlubší fyzikální význam spojený s dynamikou proudění. Odpovědi na tyto otázky (včetně samotného potvrzení této hypotézy na větším počtu případů) leží již mimo rozsah této diplomové práce a nebudou zde proto dále řešeny.

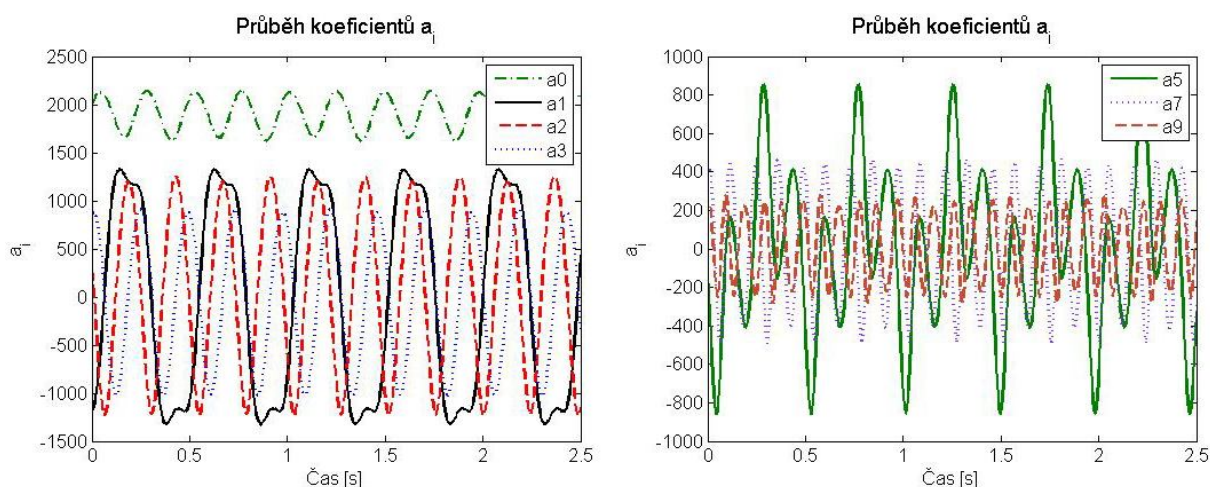
Faktem zůstává, že nalezené vírové struktury pomocí POD tlakového a rychlostního pole si velmi přesně odpovídají svým relativním umístěním ve sledované oblasti (při zanedbání rozdílů mezi symetrickými a antisymetrickými vlastními tvary, tzn. rozdílů mezi jedním vírem s jádrem v blízkosti roviny symetrie a dvojicí vírů umístěnými dále od roviny symetrie). Důležitý je také fakt, že vlastní frekvence jednotlivých vlastních tvarů získaných z časových koeficientů rychlostního a tlakového pole si vzájemně odpovídají a korespondují i s vlastními frekvencemi Kármánovy vírové stezky.

6.2.3 Vlastní tvary velikosti vířivosti

V této kapitole je metoda vlastní ortogonální dekompozice použita pro identifikaci vlastních tvarů velikosti vířivosti. Důležitost jednotlivých vlastních tvarů vířivosti je určena pomocí hodnot relativní energie, která má v případě pole vířivosti význam tzv. enstrofie (Obr. 6.18). Nultý vlastní tvar velikosti vířivosti není tak dominantní jako v případě rychlostního a tlakového pole. Z grafů na Obr. 6.18 je zřejmé, že vlastním tvarům s vyšším pořadovým číslem je v některých případech přiřazena až řádově větší hodnota relativní energie (resp. enstrofie) než v předchozích kapitolách. Nárůst celkové relativní energie (enstrofie) v kumulativním grafu je však výrazně pomalejší, nicméně v prvních deseti vlastních tvarech je ukryta většina celkové relativní energie proudění (98,7 %). Prvních deset vlastních tvarů je tedy opět z pohledu dynamiky proudění nejvýznamnějších a budou proto dále analyzovány.



Obr. 6.18 Zobrazení relativní enstrofie (relativní energie) vlastních tvarů vířivosti, **nalevo:** relativní enstrofie jednotlivých vlastních tvarů, **napravo:** kumulativní graf



Obr. 6.19 Zobrazení průběhů časových koeficientů $a_i(t)$

Z průběhu časových koeficientů (*Obr. 6.19*) je možné, stejně jako v předchozích případech, určit vlastní frekvence příslušných vlastních tvarů proudění. Po aplikaci Fourierovy transformace na koeficient a_1 , který přísluší k prvnímu vlastnímu tvaru proudění, vychází vlastní frekvence $f_{1,POD} = 2,051$ Hz. Pro koeficient a_2 však vychází vlastní frekvence odlišná, tedy $f_{2,POD} = 4,102$ Hz. To je významný rozdíl oproti předchozím případům, kdy bylo možné identifikovat stejnou první vlastní frekvenci $f_{1,POD}$ u prvního i druhého vlastního tvaru proudění, druhou vlastní frekvenci $f_{2,POD}$ u třetího a čtvrtého vlastního tvaru proudění atd. V případě časových koeficientů velikosti vířivosti je opět možné identifikovat vlastní frekvence f_{POD} u dvojice vlastních tvarů ovšem s tím rozdílem, že jsou tyto frekvence posunuté o jeden vlastní tvar, což je názorně ukázáno v Tab. 1.

Tab. 1 Porovnání vlastních frekvencí jednotlivých vlastních tvarů

Vlastní tvar č. (časový koeficient a_i)	Vlastní frekvence f_{POD} jednotlivých vlastních tvarů proudění [Hz] (hodnoty jsou získané z časových koeficientů a_i)		
	Rychlostní pole	Tlakové pole	Pole velikosti vířivosti
1	2,051	2,051	2,051
2	2,051	2,051	4,102
3	4,102	4,102	4,102
4	4,102	4,102	6,152*
5	6,152*	6,152*	6,152*

* Tyto vlastní frekvence již nejsou ve frekvenční oblasti jediné výrazné. Další výraznou vlastní frekvencí je především $f_{1,POD} = 2,051$ Hz. U ostatních vlastních tvarů (s ještě vyšším pořadovým číslem) je rozložení vlastních frekvencí komplikovanější.

Toto posunutí vlastních frekvencí tedy znamená, že např. druhý vlastní tvar rychlostního pole a druhý vlastní tvar velikosti vířivosti nekmitají na stejných frekvencích. Podobně tomu je i v případě vlastních tvarů velikosti vířivosti a tlakového pole (frekvence vlastních tvarů tlakového pole a rychlostního pole si totiž odpovídají).

Jedním z hlavních závěrů analýzy vlastních tvarů tlakového pole v předchozí kapitole bylo, že si vlastní tvary tlakového a rychlostního pole odpovídají svým geometrickým umístěním koherentních (vírových) struktur (při zanedbání rozdílů v symetrii tvarů). Z porovnání vlastních tvarů velikosti vířivosti s vlastními tvary rychlostního a tlakového pole vyplývá, že si vlastní tvary geometrickým umístěním koherentních struktur vzájemně neodpovídají (i s ohledem na definici vířivosti⁵). První vlastní tvar rychlostního a tlakového pole si tedy neodpovídá s prvním vlastním tvarem velikosti vířivosti, druhý vlastní tvar rychlostního a tlakového pole si neodpovídá s druhým vlastním tvarem velikosti vířivosti atd.

Posunutí frekvencí vlastních tvarů vířivosti vůči frekvencím vlastních tvarů tlakového a rychlostního pole (Tab. 1) má souvislost s posunutím samotných vlastních tvarů vířivosti vůči vlastním tvarům tlakového a rychlostního pole. Pokud jsou tedy vlastní tvary tlaku a rychlosti posunuty ve smyslu posunu časových koeficientů (Tab. 1), je možné nalézt určitou

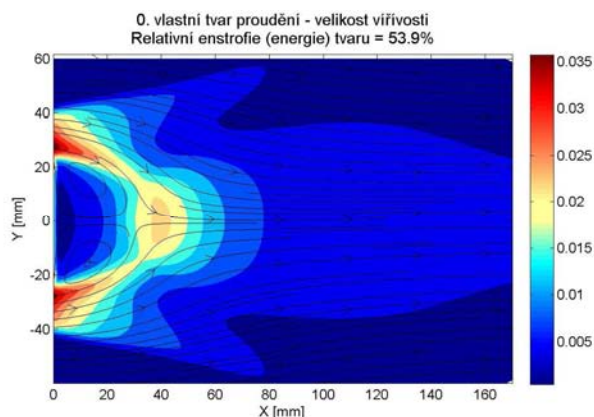
⁵ Velikost vektoru vířivosti je maximální v místech, kde dochází k největším změnám rychlosti, tzn. kde je největší gradient rychlosti. Mezi taková místa patří jádro víru a jeho okolí, ale také např. mezní vrstva a další. Nemusí tedy vždy platit, že v místech s velkou hodnotou velikosti vířivosti existuje vír.

geometrickou podobnost mezi vlastními tvary rychlosti a vířivosti, resp. tlaku a vířivosti. Na Obr. 6.21 až Obr. 6.23 jsou zobrazeny již vzájemně posunuté (odpovídající si) vlastní tvary rychlosti a vířivosti, přičemž v popředí obrázků jsou vykresleny orientované křivky znázorňující posunuté vlastní tvary rychlostního pole a v pozadí nově nalezené vlastní tvary velikosti vířivosti.

Z obr. Obr. 6.21 až Obr. 6.23 je patrné, že při zanedbání rozdílů v symetrii⁶ si vlastní tvary velikosti vířivosti a posunuté vlastní tvary rychlosti vzájemně svojí polohou odpovídají. U některých vlastních tvarů se však poloha koherentních struktur vířivosti a rychlosti mírně rozchází, což má pravděpodobně příčinu v samotné definici vířivosti, která vychází z gradientu (tj. změny hodnot) rychlostního pole. V případě porovnání vlastních tvarů vířivosti a tlakového pole je situace velice podobná.

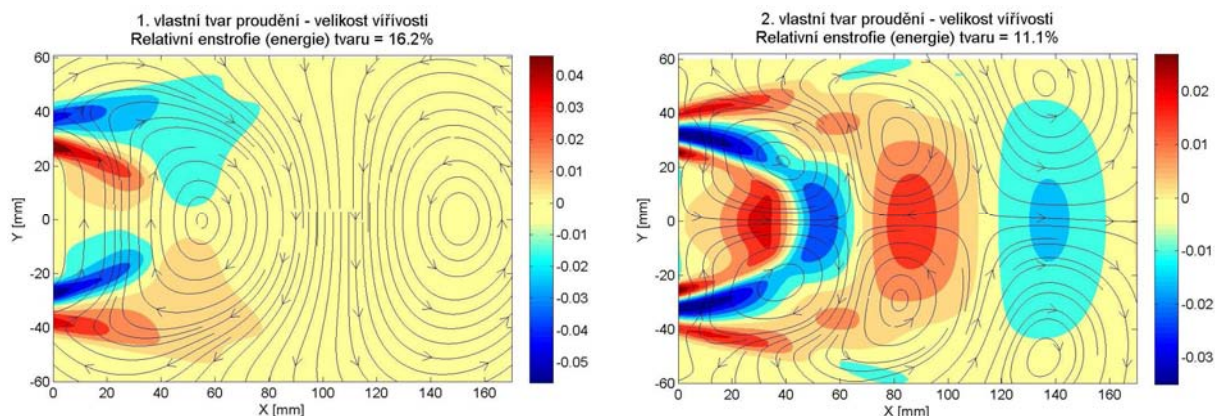
Příčina posunutí vlastních frekvencí a vlastních tvarů vířivosti oproti vlastním frekvencím a tvarům rychlostního a tlakového pole (viz Tab. 1) nebyla v rámci této práce zcela objasněna. Jednou z možných příčin by mohla být chyba ve zpracování dat velikosti vířivosti, nicméně pro výpočet vlastních tvarů byly ve všech třech případech (rychlost, tlak, vířivost) použity vždy stejné postupy a procedury, a proto je toto vysvětlení velmi nepravděpodobné. Za účelem nalezení příčiny tohoto posunutí byl dále proveden nový CFD výpočet a následně byla na získaná data aplikována Fourierova transformace (podobně jako v kapitole 5). Nalezená spektra vlastních frekvencí pole vířivosti byla porovnána s již známými spektry vlastních frekvencí tlaku a složek rychlosti (viz kapitola 5). Ani v tomto případě však nebyla objevena žádná výrazná souvislost. Nalezení skutečného důvodu posunutí vlastních tvarů a frekvencí vířivosti by však vyžadovalo detailnější analýzu samotné metody POD, což je již mimo rozsah této práce.

Na Obr. 6.20 jsou pro úplnost vykresleny nulté vlastní tvary vířivosti a rychlosti, které mají význam časově střední hodnoty. Tyto nulté vlastní tvary si vzájemně odpovídají bez nutnosti posouvání.

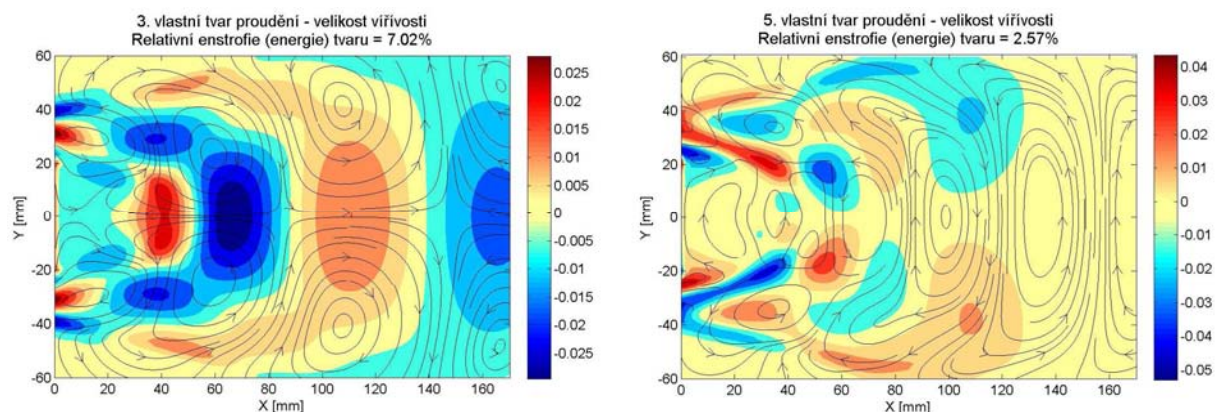


Obr. 6.20 Nultý vlastní tvar velikosti vířivosti (křivky podobné proudnicím v popředí obrázku jsou získány z POD rychlostního pole a velmi dobře identifikují vírové struktury)

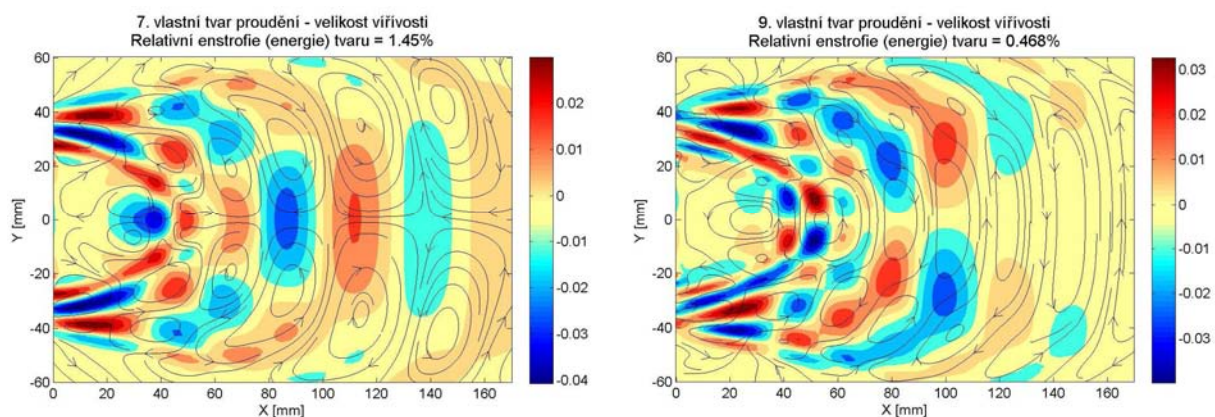
⁶ Rozdíl v symetrii vlastních tvarů vířivosti a rychlosti je podobný jako v případě vlastních tvarů rychlosti a tlaku (kapitola 6.2.2). Symetrickému vlastnímu tvaru rychlostního pole tedy odpovídá nesymetrický vlastní tvar vířivosti a opačně. Symetrie vlastních tvarů vířivosti a tlaku je souhlasná.



Obr. 6.21 Vlastní tvary velikosti vířivosti, **vlevo:** 1. vlastní tvar, **vpravo:** 2. vlastní tvar
(v popředí obrázků jsou vykresleny orientované křivky znázorňující vírové struktury vlastních tvarů rychlostního pole)



Obr. 6.22 Vlastní tvary velikosti vířivosti, **vlevo:** 3. vlastní tvar, **vpravo:** 5. vlastní tvar
(v popředí obrázků jsou vykresleny orientované křivky znázorňující vírové struktury vlastních tvarů rychlostního pole)



Obr. 6.23 Vlastní tvary velikosti vířivosti, **vlevo:** 7. vlastní tvar, **vpravo:** 9. vlastní tvar
(v popředí obrázků jsou vykresleny orientované křivky znázorňující vírové struktury vlastních tvarů rychlostního pole)

6.3 Rekonstrukce okamžitého snímku

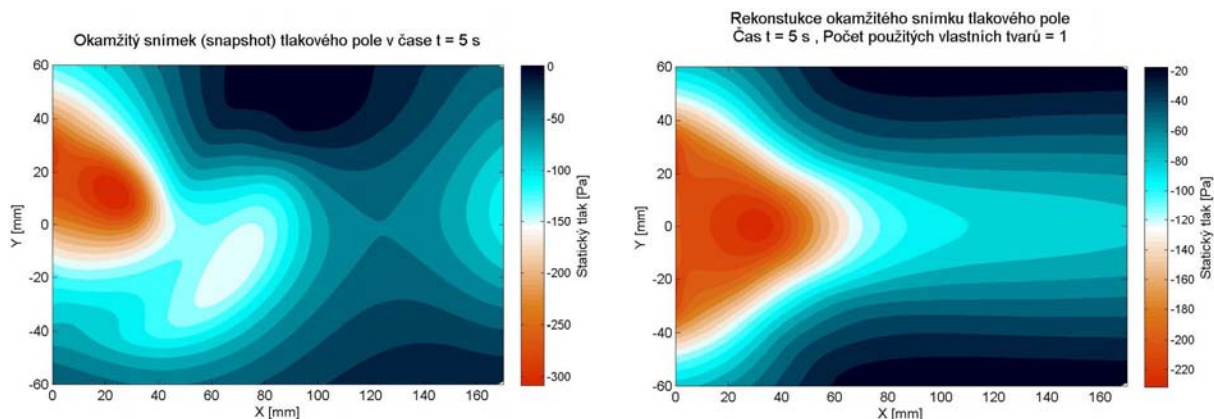
Z vypočítaných hodnot časových koeficientů $a_i(t)$ a vlastních funkcí, resp. vlastních tvarů $\phi_i(\mathbf{x})$ lze provést rekonstrukci jakéhokoliv okamžitého snímku příslušné veličiny. Rekonstruovaný okamžitý snímek je možné určit pomocí vztahu (4.8), který je definován následovně (viz také kapitola 4):

$$u(\mathbf{x}, t_n) \cong \sum_{i=1}^M a_i(t_n) \cdot \phi_i(\mathbf{x})$$

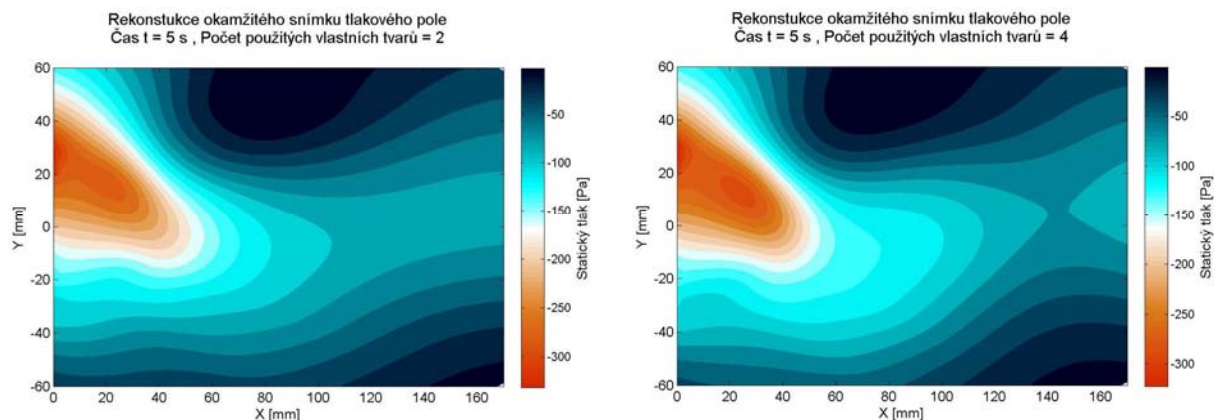
V závislosti na hodnotě M (tj. počet použitých vlastních tvarů) se odvíjí přesnost dané rekonstrukce okamžitého snímku. Na následujících obrázcích (*Obr. 6.24 až Obr. 6.26*) je ukázáno, jak počet použitých vlastních tvarů pro rekonstrukci ovlivňuje výsledný okamžitý snímek tlakového pole. Na levé straně *Obr. 6.24* je zobrazen originální okamžitý snímek tlakového pole (v čase $t = 5$ s), který vznikl vykreslením dat získaných přímo z CFD výpočtů. Na pravé straně je zobrazen nultý vlastní tvar tlakového pole, který je v čase neměnný⁷ a který slouží jako výchozí tvar pro rekonstrukci. K tomuto nultému (časově střednímu) vlastnímu tvaru jsou tedy postupně přičítány ostatní vlastní tvary. Čím vyšší počet vlastních tvarů je pro rekonstrukci zvolen, tím je rekonstrukce přesnější (*Obr. 6.25 a Obr. 6.26*). Z těchto obrázků je zřejmé, že při uvažování prvních deseti vlastních tvarů (tj. nultý až devátý tvar) se rekonstruovaný okamžitý tvar tlakového pole již velmi přibližuje originálnímu okamžitému snímku tlakového pole v daném čase. Při uvažování pouze prvních pěti vlastních tvarů (tj. nultý až čtvrtý tvar) lze získat o něco méně přesnou rekonstrukci, která se však v hlavních rysech už také shoduje s originálním snímkem (*Obr. 6.26, vlevo*). Postupné zpřesňování rekonstruovaných snímků v závislosti na počtu použitých vlastních tvarů koresponduje s přiřazením hodnot relativní mohutnosti jednotlivým vlastním tvarům tlakového pole (*Obr. 6.12*).

Tento postup by bylo možné použít i pro rekonstrukci okamžitého snímku rychlostního pole, případně pole vířivosti. Výsledek by byl velice podobný jako v případě rekonstrukce okamžitého snímku tlakového pole.

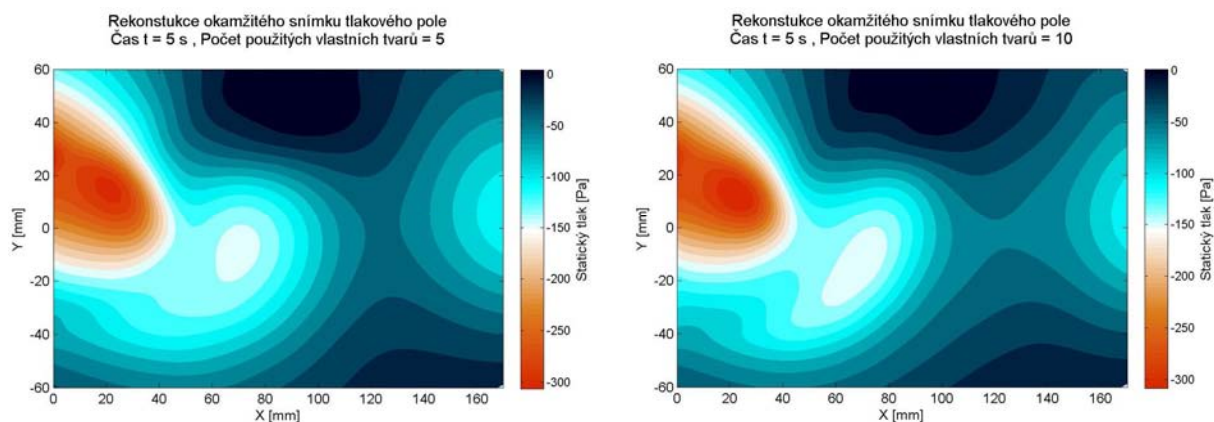
⁷ Nultý vlastní tvar v rámci této části práce není zcela neměnný v čase. Z průběhu časových koeficientů (*Obr. 6.13*) je zřejmé, že mírně kmitá. Nicméně tyto kmity jsou řádově menší než kmity u ostatních vlastních tvarů a lze je proto vzhledem k ostatním hodnotám časových koeficientů považovat téměř za konstantní.



Obr. 6.24 Rekonstrukce okamžitých snímků statického tlaku,
vlevo: originální okamžitý snímek v čase $t = 5$ s,
vpravo: nulový vlastní tvar tlakového pole, který je výchozím tvarem pro rekonstrukci



Obr. 6.25 Rekonstrukce okamžitých snímků statického tlaku v čase $t = 5$ s,
vlevo: rekonstruovaný okamžitý snímek pomocí prvních dvou vlastních tvarů (tj. 0. a 1. tvar),
vpravo: rekonstruovaný okamžitý snímek pomocí prvních čtyř vlastních tvarů (tj. 0. až 3. tvar)



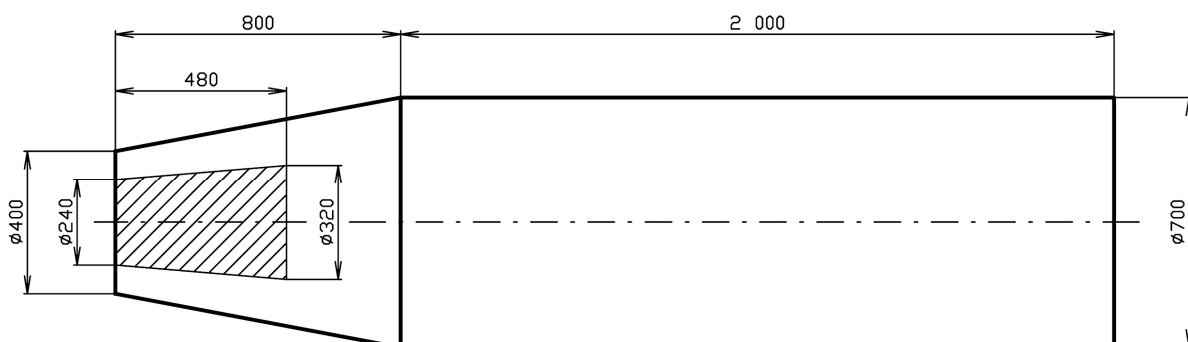
Obr. 6.26 Rekonstrukce okamžitých snímků statického tlaku v čase $t = 5$ s,
vlevo: rekonstruovaný okamžitý snímek pomocí prvních pěti vlastních tvarů (tj. 0. až 4. tvar),
vpravo: rekonstruovaný okamžitý snímek pomocí prvních 10 vlastních tvarů (tj. 0. až 9. tvar)

7 Aplikace metody vlastní ortogonální dekompozice a CFD výpočtů na proudění v kuželové savce vodní turbíny

Tato kapitola se zabývá aplikací metody vlastní ortogonální dekompozice na proudění v kuželové savce vodní turbíny, ve které vzniká vírový cop. Potřebná data pro metodu POD byla získána pomocí CFD výpočtů, které byly provedeny vedoucím této práce. Identifikace vlastních tvarů proudění je následně prováděna pro rychlostní a tlakové pole. V následující podkapitole je popsána geometrie této úlohy a hlavní parametry CFD výpočtu.

7.1 CFD výpočty

Pro výpočty proudění v kuželové savce vodní turbíny byl použit komerční program Fluent. Výpočetní síť o velikosti 483 000 buněk (typu QUAD) byla vytvořena v preprocesoru Gambit. Celá úloha byla řešena ve 3D. Na *Obr. 7.1* jsou zobrazeny hlavní rozměry výpočetní domény, které byly převzaty z práce autora Susan-Resiga *et al.* (2006) [18]. Data potřebná pro metodu POD byla zapisována z dílčího objemu, který měl 55720 buněk a jehož hlavní rozměry a umístění jsou zobrazeny na *Obr. 7.1* a *Obr. 7.3*.



Obr. 7.1 Hlavní rozměry kuželové savky (včetně ustavovacího nástavce o délce 2 m).
Z vyšrafované oblasti byla zapisována data pro metodu POD

Vstupní okrajová podmínka – rychlostní vstup (*Obr. 7.3*):

Vstupní rychlostní profil do savky byl převzat z práce autora Susan-Resiga *et al.* (2006) [18] a je tvořen součtem některých základních modelů vírů (viz kapitola 2.1.1). Tento rychlostní profil odpovídá 90% hodnotě optimálního průtoku Q_{opt} danou turbínou. Jedná se tedy o provoz turbíny mimo optimum, při kterém v savce vzniká vírový cop. Jednotlivé rychlosti zkoumaného profilu včetně porovnání s optimálním rychlostním profilem jsou zobrazeny na *Obr. 7.2*. Průběh těchto rychlostí je obecně popsán následujícími vztahy (Susan-Resiga *et al.*, 2006) [18]:

Tangenciální rychlost:

$$v_{\theta}(r) = \Omega_0 \cdot r + \Omega_1 \cdot \frac{R_1^2}{r} \cdot \left[1 - \exp \left(-\frac{r^2}{R_1^2} \right) \right] + \Omega_2 \cdot \frac{R_2^2}{r} \cdot \left[1 - \exp \left(-\frac{r^2}{R_2^2} \right) \right] \quad (7.1)$$

Axiální rychlost:

$$v_{ax}(r) = U_0 + U_1 \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{R_1^2}\right) + U_2 \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{R_2^2}\right) \quad (7.2)$$

Radiální rychlost:

$$v_r(r) = 0 \quad (7.3)$$

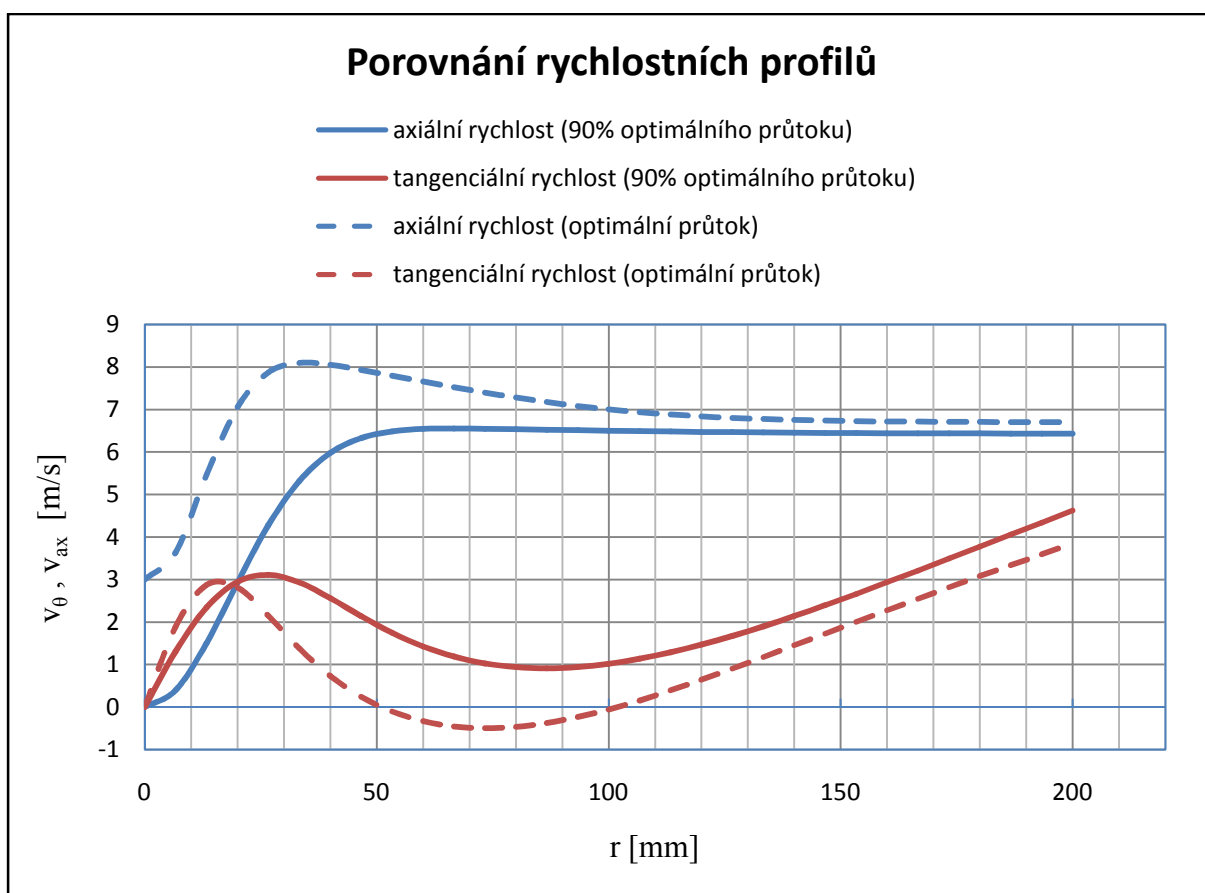
Kde r je relativní vzdálenost od osy rotace a platí $r \in < 0; 1 >$, přičemž

$$r_{skutečný} = r_{skutečný,max} \cdot r = 0,2 \cdot r \quad (7.4)$$

Konstanty v rovnicích (7.1) a (7.2) jsou pro optimální a zvolený rychlostní profil dány následující tabulkou (Susan-Resiga *et al.*, 2006) [18]:

Tab. 2 Empirické konstanty pro výpočet zkoumaného a optimálního rychlostního profilu

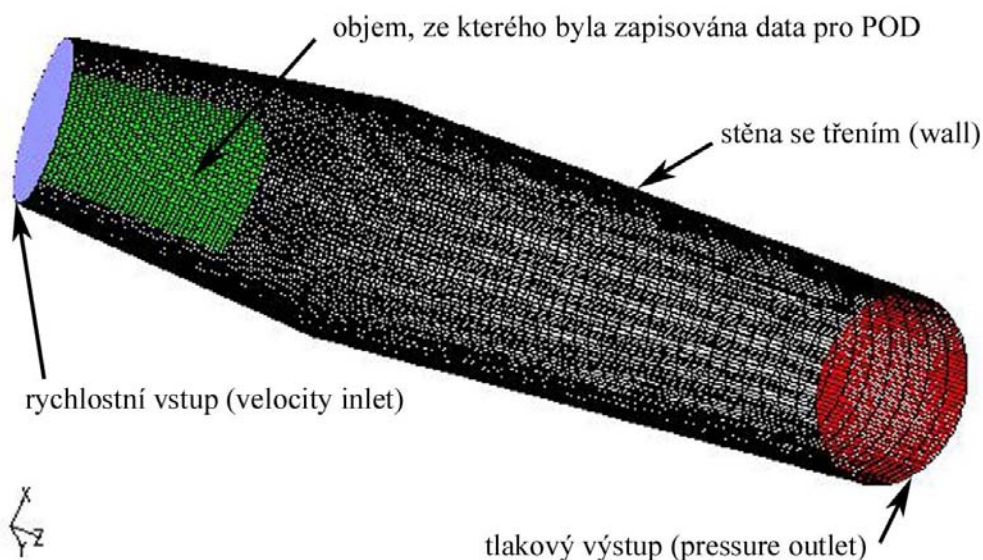
-	Ω_0	Ω_1	Ω_2	U_0	U_1	U_2	R_1	R_2
90% Q_{opt}	0,31765	-0,62888	2,2545	0,30697	0,01056	-0,3189	0,4664	0,1305
Q_{opt}	0,27113	-0,8031	3,496	0,31991	0,0871	-0,2735	0,3729	0,0831



Obr. 7.2 Porovnání rychlostních profilů (optimální a zkoumaný rychlostní profil)

Ostatní okrajové podmínky (*Obr. 7.3*):

Na výstupu z výpočetní domény je předepsán atmosférický tlak. Stěny savky jsou modelovány jako neprůtočné a je na nich předepisována nulová rychlost (okrajová podmínka Wall). Umístění všech okrajových podmínek je zobrazeno na *Obr. 7.3*.



Obr. 7.3 Umístění okrajových podmínek a dílčího objemu pro zapisování dat pro POD

Celá úloha je řešena jako nestacionární s časovým krokem $\Delta T = 0,001$ s. Pro vlastní CFD výpočet jsou použity Reynoldsovy středované rovnice, neboli RANS (Reynolds Avaraged Navier-Stokes). Turbulentní proudění je modelováno pomocí modelu RSM (Reynolds Stress Model), které je vhodné pro silně zavířené proudění. Pro výpočet hybnostních členů je použito interpolační schéma QUICK a pro výpočet turbulentních veličin je použito interpolační schéma UPWIND 2. řádu. Tlakové členy jsou počítány pomocí interpolačního schématu „PRESTO!“. Mezní vrstva je modelována pomocí nerovnovážných stěnových funkcí.

Během výpočtu byly v každém časovém kroku po dobu 2 sekund pořizovány okamžité snímky („snapshoty“) následujících veličin:

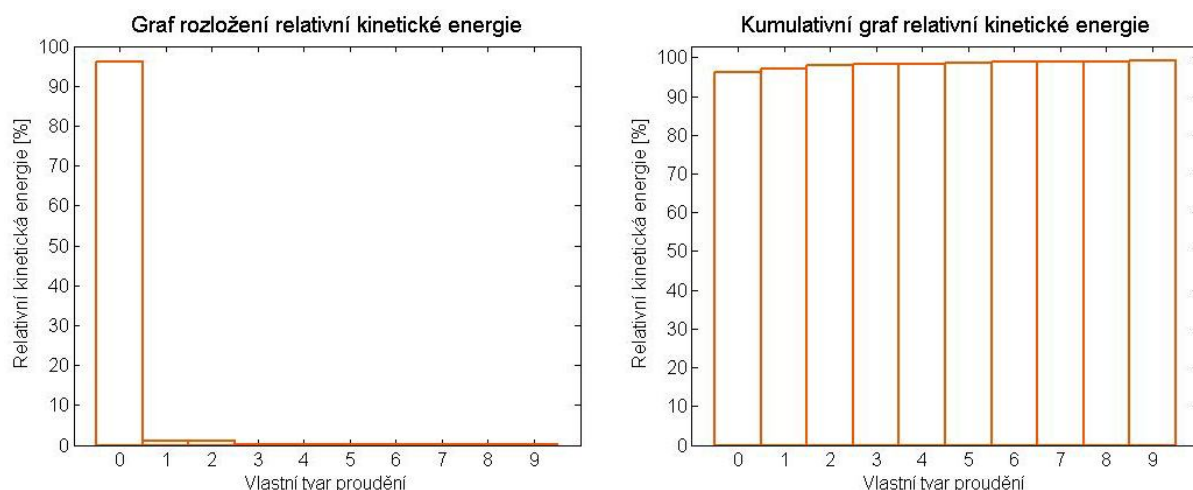
- statického tlaku
- rychlosti ve směru osy x
- rychlosti ve směru osy y
- rychlosti ve směru osy z

Celkem tedy bylo pořizováno 2000 okamžitých snímků od každé veličiny a z každé buňky umístěné ve sledované části savky. Pomocí takto získaných dat a metody POD je již možné identifikovat 3D vlastní tvary vírového copu (vírového proudění) v kuželové savce vodní turbíny.

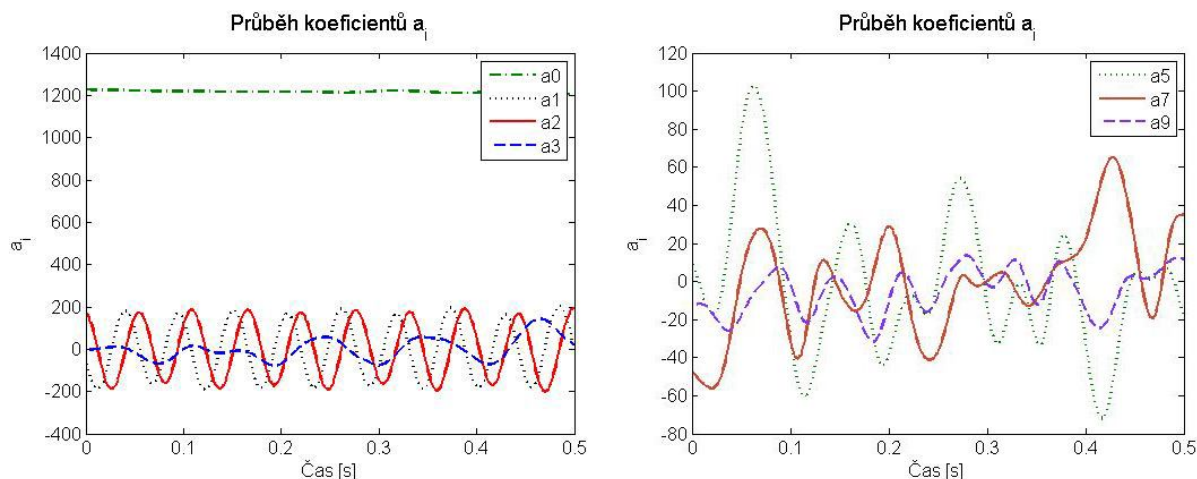
7.2 Vlastní tvary vírového copu

7.2.1 Vlastní tvary rychlostního pole (velikosti rychlosti)

V této kapitole je použita metoda POD pro identifikaci vlastních tvarů velikosti rychlosti v daném dílčím objemu kuželové savky, ve které vzniká vírový cop. Důležitost jednotlivých vlastních tvarů vírového copu je (podobně jako u vlastních tvarů rychlostního pole Kármánovy vírové stezky) určena velikostí relativní kinetické energie (*Obr. 7.4*). Nultý vlastní tvar proudění má opět význam časově střední hodnoty a v tomto případě je výrazně dominantní (cca 96 % celkové relativní kinetické energie). Z tohoto důvodu jsou ostatní relativní kinetické energie vlastních tvarů velice malé. Větší rozlišitelnosti mezi energiemi jednotlivých vlastních tvarů by bylo možné dosáhnout vyloučením časově středních hodnot z celé metody POD (vyloučením nultého vlastního tvaru). Z grafu na *Obr. 7.4* je zřetelné, že první a druhý vlastní tvar mají vyšší hodnotu relativní kinetické energie než vlastní tvary s větším pořadovým číslem. První a druhý vlastní tvar velikosti rychlosti vírového copu jsou tedy dle očekávání z pohledu dynamiky proudění nejvýznamnější.



Obr. 7.4 Zobrazení relativních kinetických energií jednotlivých vlastních tvarů, **vlevo:** velikost relativní kinetické energie, **vpravo:** kumulativní graf relativních kinetických energií



Obr. 7.5 Zobrazení průběhů časových koeficientů $a_i(t)$

Z průběhu časových koeficientů (*Obr. 7.5*) lze určit vlastní frekvence jednotlivých vlastních tvarů proudění. Po aplikaci Fourierovy transformace na koeficient a_1 a a_2 (příslušející k prvnímu a druhému vlastnímu tvaru velikosti rychlosti) vychází vlastní frekvence shodně $f_{1,POD} = 18,07$ Hz. Tato frekvence odpovídá frekvenci rotace vírového copu, která byla určena přímo na základě CFD výpočtů. Tento výsledek by bylo vhodné ověřit ještě experimentálně, nicméně pro daný rychlostní profil nejsou potřebná data z experimentu dostupná. U ostatních časových koeficientů (kromě nultého) mají amplitudo-frekvenční charakteristiky poměrně složité průběhy, ve kterých však lze identifikovat násobky základní frekvence rotace copu.

Na *Obr. 7.6* až *Obr. 7.12* jsou vykresleny 3D vlastní tvary velikosti rychlosti. V levé části těchto obrázků jsou vykresleny řezy sledovaným objemem, ze kterých je patrné rozložení velikosti vlastní funkce ϕ_i , resp. velikosti rychlosti příslušející danému vlastnímu tvaru¹. V pravé části obrázků jsou vždy vykreslena stejná data pomocí plochy o konstantní hodnotě vlastní funkce ϕ_i . Tyto konstantní hodnoty vlastní funkce jsou pro každý tvar vhodně voleny na základě zmíněných řezů. Obrázky na pravé straně tedy ukazují prostorové vlastní tvary velikosti rychlosti.

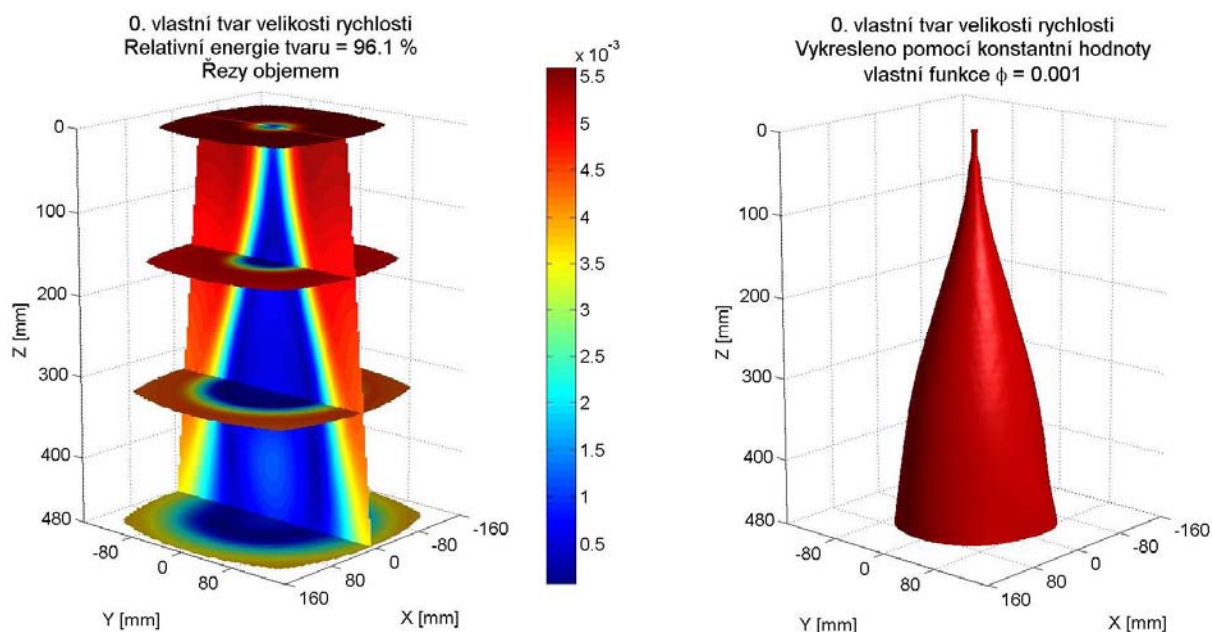
Nultý, tzn. časově střední vlastní tvar (*Obr. 7.6*), dosahuje nejvyšších hodnot vlastních funkcí, resp. nejvyšších velikostí rychlosti v místech, kde se již vírový cop nevyskytuje, tzn. na okrajích sledovaného objemu (v těchto místech jsou významné axiální (z-ové) složky rychlosti). Nultý vlastní tvar je srovnatelný s časově středním pohledem na dané proudění. Takovýto časově střední pohled je možné získat např. z programu Fluent (při použití Reynoldsových časově středovaných rovnic).

Na *Obr. 7.7* a *Obr. 7.8* jsou znázorněny první a druhý vlastní tvar velikosti rychlosti. Tyto tvary jsou z dynamického pohledu nejvýznamnější a jsou tvořeny dvěma rameny (spirálami). Z daných řezů je patrná symetrie těchto vlastních tvarů (podobně tomu bylo i u vlastních tvarů velikosti rychlosti Kármánovy vírové stezky v kapitole 6.2.1). Tyto vlastní tvary velikosti rychlosti vírového copu kmitají v podobném smyslu jako vlastní tvary velikosti rychlosti Kármánovy vírové stezky, tzn. od zobrazených maximálních hodnot po nulu a zpět.

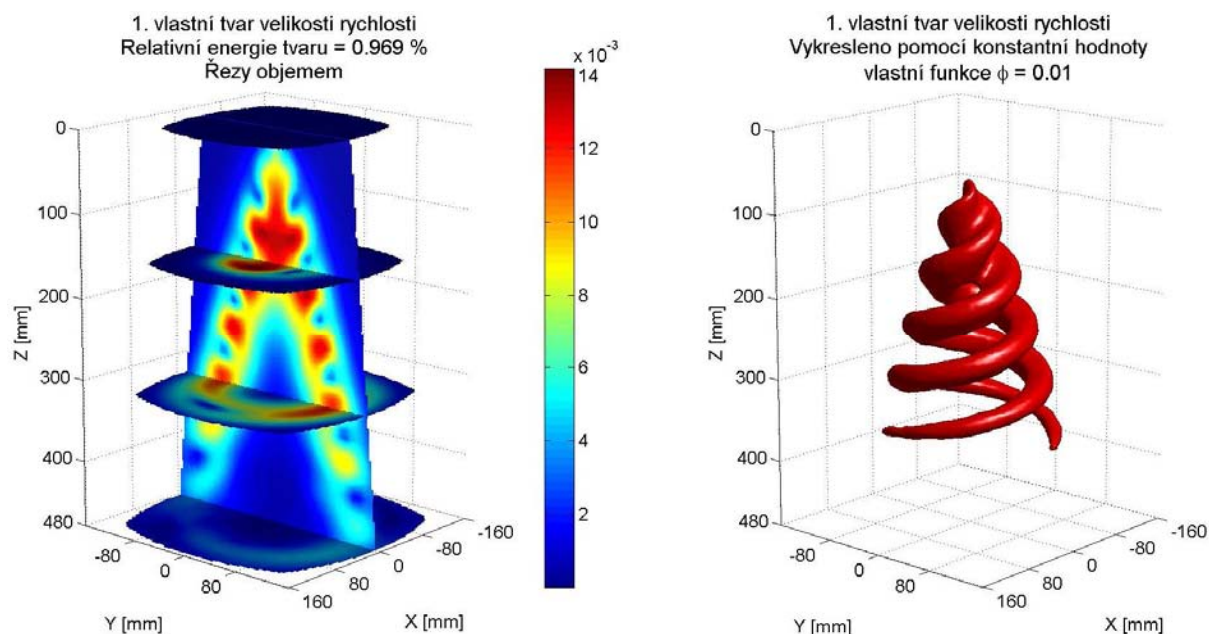
Na *Obr. 7.9* až *Obr. 7.12* jsou zobrazeny vlastní tvary velikosti rychlosti vírového copu mírně odlišným způsobem. Na základě řezů v levé části obrázků je opět vykreslen 3D tvar s konstantní (velkou) hodnotou vlastní funkce ϕ_i (zobrazeno červeně). Tyto červené vlastní tvary jsou doplněny ještě o tvary, které vzniknou vykreslením pomocí druhé (nižší) konstantní hodnoty vlastní funkce ϕ_i (zobrazeno modře). Modré tvary odhalují dodatečný (skrytý) charakter těchto vlastních tvarů, který není z daných řezů (vzhledem k maximálním hodnotám vlastní funkce) zřejmý². Na tomto místě je nutné zdůraznit, že mezi červeným a modrým tvarem nedochází ke střídavému kmitání, které je charakteristické pro vlastní tvary tlaku (viz kapitola 6.2.2 a 7.2.2 a videa v příloze). Jedná se tedy jen o dva odlišné způsoby vykreslení vlastního tvaru velikosti rychlosti, které lépe znázorňují charakter daného vlastního tvaru.

¹ Pomocí složek rychlosti by bylo možné v jednotlivých řezech vykreslit i vektorové rychlostní pole, nicméně tyto výsledky jsou již pro stejný rychlostní profil a geometrii prezentovány v práci autora Rudolf (2010) [15] a nebudou proto v této práci uváděny.

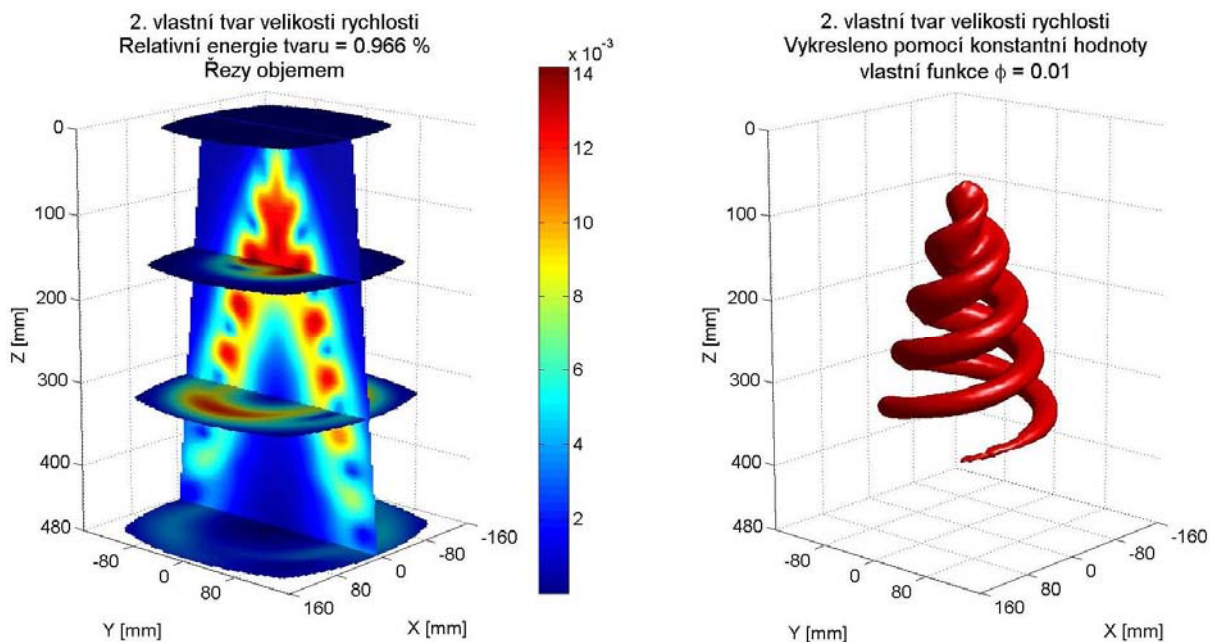
² Oříznutí modrých tvarů má souvislost s velikostí daného dílčího objemu, ze kterého byla data získána.



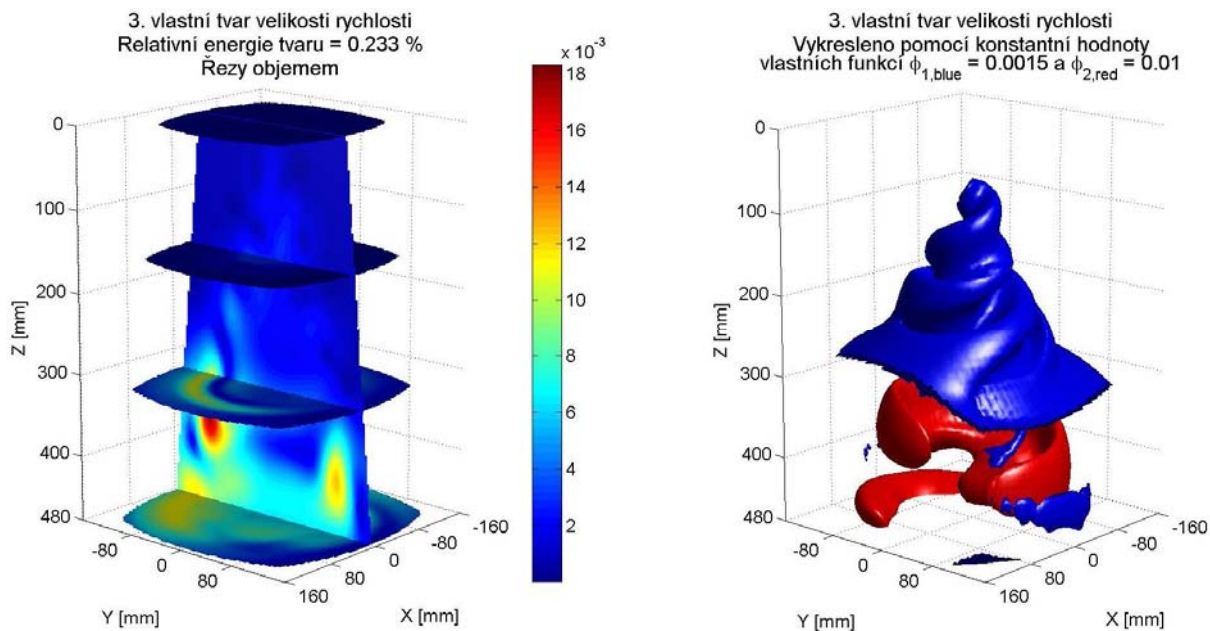
Obr. 7.6 Nultý vlastní tvar velikosti rychlosti, **vlevo:** řezy objemem, **vpravo:** vykreslení pomocí konstantní hodnoty vlastní funkce ϕ .



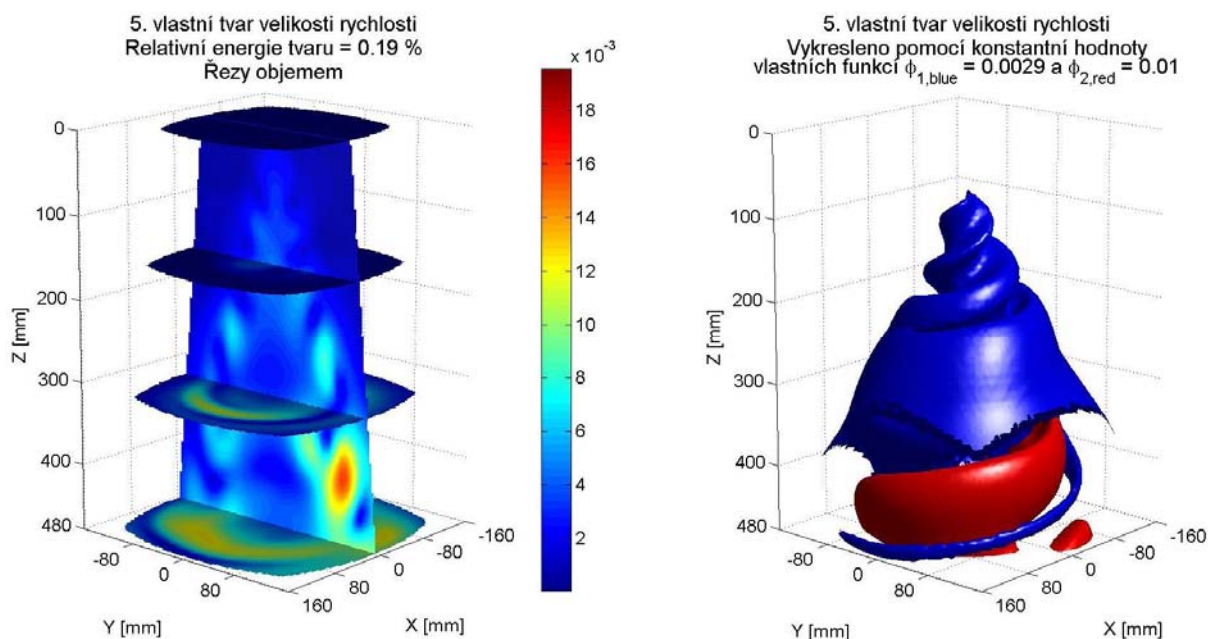
Obr. 7.7 První vlastní tvar velikosti rychlosti, **vlevo:** řezy objemem, **vpravo:** vykreslení pomocí konstantní hodnoty vlastní funkce ϕ



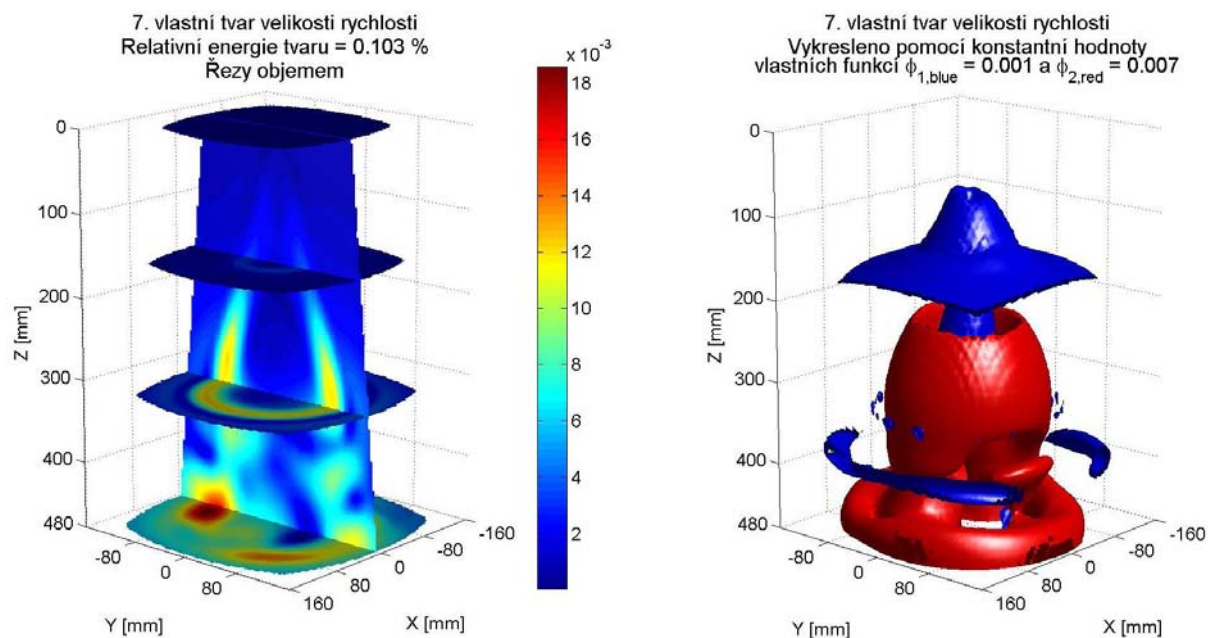
Obr. 7.8 Druhý vlastní tvar velikosti rychlosti, **vlevo:** řezy objemem, **vpravo:** vykreslení pomocí konstantní hodnoty vlastní funkce ϕ



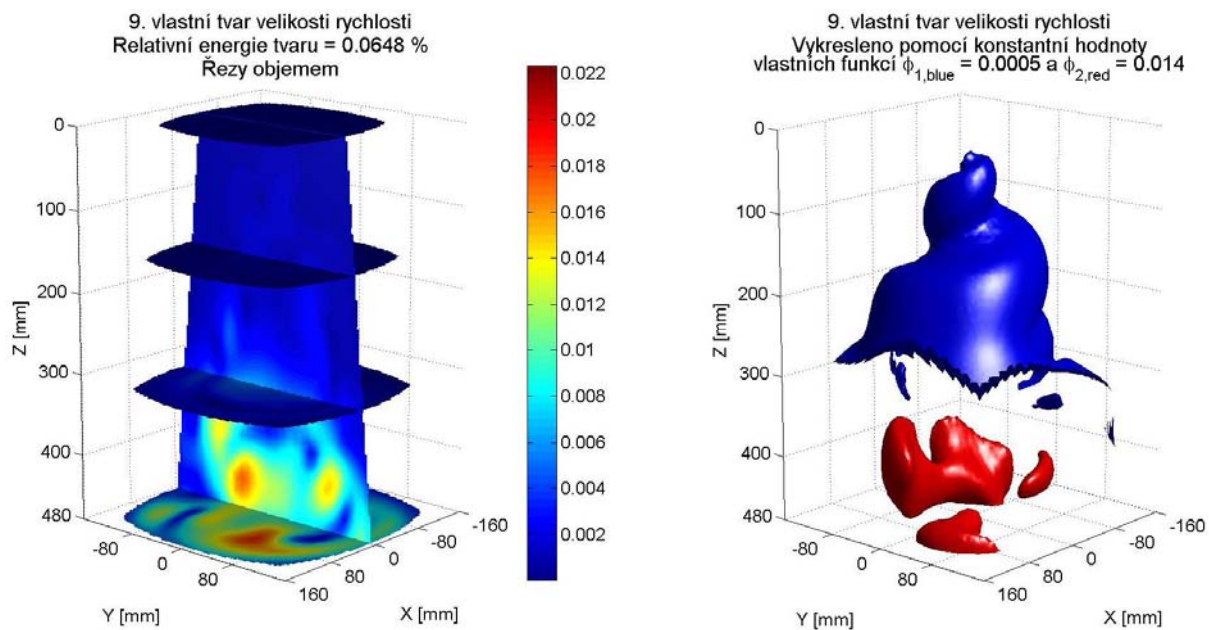
Obr. 7.9 Třetí vlastní tvar velikosti rychlosti, **vlevo:** řezy objemem, **vpravo:** vykreslení pomocí dvou konstantních hodnot vlastních funkcí ϕ (dva způsoby zobrazení), tvar s vyšší hodnotou vlastní funkce je zobrazen červeně



Obr. 7.10 Pátý vlastní tvar velikosti rychlosti, **vlevo:** řezy objemem, **vpravo:** vykreslení pomocí dvou konstantních hodnot vlastních funkcí ϕ (dva způsoby zobrazení), tvar s vyšší hodnotou vlastní funkce je zobrazen červeně



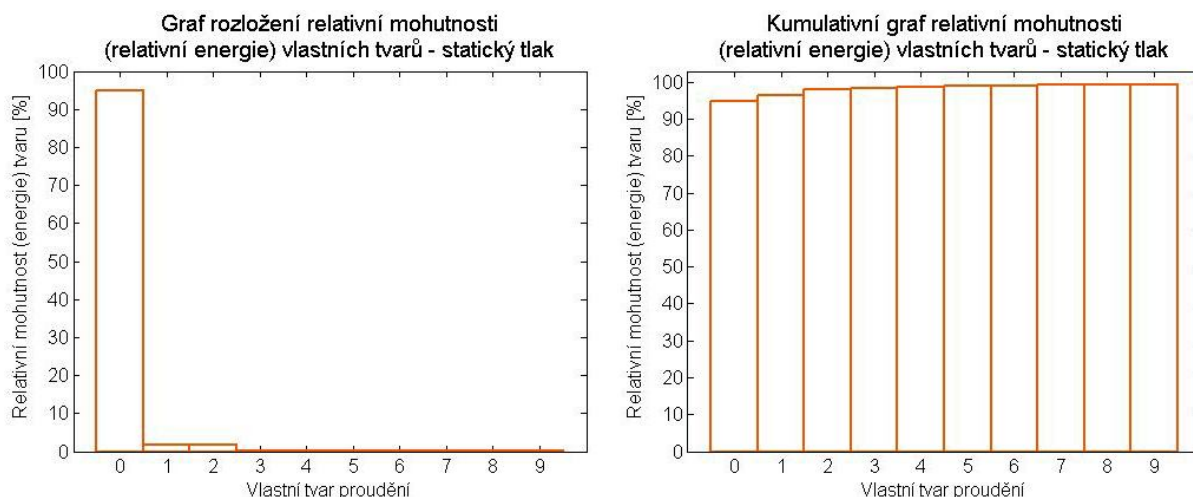
Obr. 7.11 Sedmý vlastní tvar velikosti rychlosti, **vlevo:** řezy objemem, **vpravo:** vykreslení pomocí dvou konstantních hodnot vlastních funkcí ϕ (dva způsoby zobrazení), tvar s vyšší hodnotou vlastní funkce je zobrazen červeně



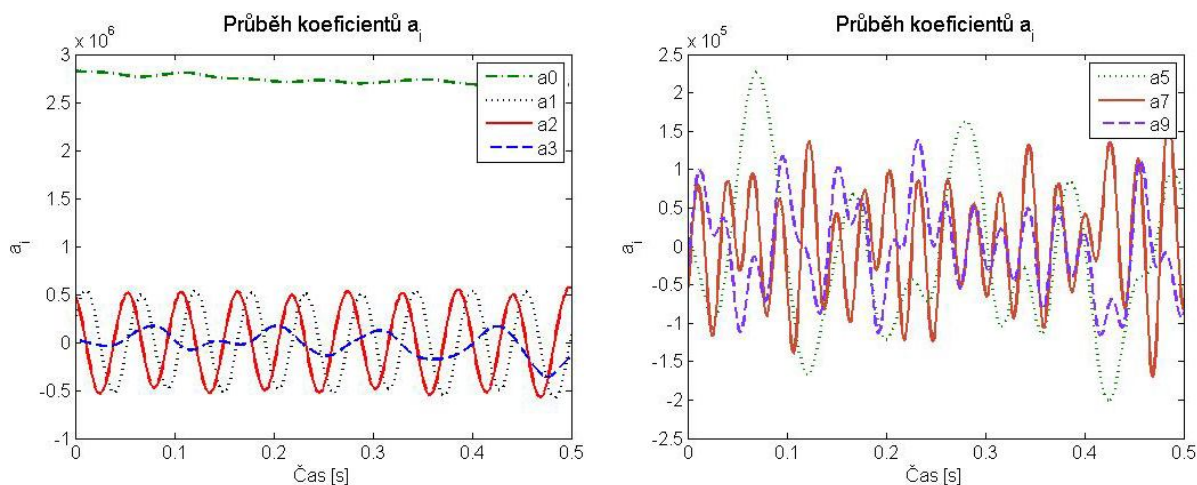
Obr. 7.12 Devátý vlastní tvar velikosti rychlosti, **vlevo:** řezy objemem, **vpravo:** vykreslení pomocí dvou konstantních hodnot vlastních funkcí ϕ (dva způsoby zobrazení), tvar s vyšší hodnotou vlastní funkce je zobrazen červeně

7.2.2 Vlastní tvary tlakového pole

V této kapitole je použita metoda POD pro identifikaci vlastních tvarů tlakového pole v daném dílčím objemu kuželové savky. Důležitost jednotlivých vlastních tvarů tlakového pole, resp. vírového copu je v tomto případě určena relativní mohutností (relativní energií daného tvaru, *Obr. 7.13*). Nultý vlastní tvar proudění (s významem časově střední hodnoty) je opět výrazně dominantní (cca 95 % celkové relativní mohutnosti). Z tohoto důvodu jsou hodnoty relativní mohutnosti přiřazované ostatním vlastním tvarům velice malé. Větší rozlišitelnosti mezi energiemi jednotlivých vlastních tvarů by bylo opět možné dosáhnout vyloučením časově středních hodnot z celé metody POD (vyloučením nultého vlastního tvaru). Z grafu na *Obr. 7.13* je dále zřetelné, že první a druhý vlastní tvar mají vyšší hodnotu relativní mohutnosti než vlastní tvary s větším pořadovým číslem. První a druhý vlastní tvar tlakového pole, resp. vírového copu jsou tedy dle očekávání z pohledu dynamiky proudění opět nejvýznamnější.



Obr. 7.13 Zobrazení relativní mohutnosti (relativní energie) vlastních tvarů tlakového pole, **nalevo:** relativní mohutnost jednotlivých vlastních tvarů, **napravo:** kumulativní graf



Obr. 7.14 Zobrazení průběhů časových koeficientů $a_i(t)$

Z průběhu časových koeficientů (*Obr. 7.14*) lze určit vlastní frekvence jednotlivých vlastních tvarů proudění. Po aplikaci Fourierovy transformace na koeficient a_1 a a_2 (příslušející k prvnímu a druhému vlastnímu tvaru tlakového pole) vychází vlastní frekvence opět shodně $f_{1,POD} = 18,07$ Hz, což je frekvence rotace vírového copu (viz předchozí kapitola). U ostatních časových koeficientů (kromě nultého) mají amplitudo-frekvenční charakteristiky poměrně složité průběhy, ve kterých však opět lze identifikovat násobky základní frekvence rotace copu. Vlastní frekvence získané z časových koeficientů rychlostního a tlakového pole si tedy vzájemně pro jednotlivé tvary odpovídají (menší rozdíly jsou až u vlastních tvarů s vyšším pořadovým číslem). Tyto poznatky o časových koeficientech jsou ve shodě s výsledky, které byly dosaženy při aplikaci metody POD na Kármánovu vírovou stezku.

Na následujících obrázcích (*Obr. 7.15 až Obr. 7.21*) jsou vykresleny 3D vlastní tvary tlakového pole. V levé části obrázků jsou opět vykresleny řezy³ sledovaným objemem, ze kterých je patrné rozložení velikosti vlastní funkce ϕ_i (velikost vlastní funkce v tomto případě úzce souvisí s velikostí statického tlaku). Z jednotlivých řezů vyplývá, že pro vlastní tvary statického tlaku (kromě nultého) jsou charakteristické dva geometrické tvary, které odpovídají kladným a záporným hodnotám vlastní funkce ϕ_i . V pravé části obrázků jsou tyto dva geometrické tvary vykresleny v prostoru, přičemž geometrický tvar příslušející kladné hodnotě vlastní funkce ϕ_i daného vlastního tvaru je zobrazen červeně a geometrický tvar vztahující se k záporné hodnotě vlastní funkce ϕ_i je vykreslen modře. Jednotlivé vlastní tvary vírového copu v čase opět kmitají podobným způsobem jako vlastní tvary statického tlaku u Kármánovy vírové stezky (viz příloha). Během tohoto kmitání dochází k postupné změně kladných hodnot vlastní funkce na záporné a zpět, resp. ke změně ze záporných hodnot vlastní funkce na kladné a zpět v případě modře vykreslených geometrických tvarů.

Pro jeden vlastní tvar tlakového pole jsou tedy charakteristické dva tvary geometrické (dány kladnou a zápornou hodnotou vlastní funkce), což je podstatný rozdíl oproti vlastním tvarům velikosti rychlosti, kdy byl identifikován jen jeden tvar geometrický příslušející k jednomu tvaru vlastnímu (viz např. *Obr. 7.7* a *Obr. 7.8*). Tento rozdíl má příčinu v samotném uvažování velikosti rychlosti, kdy je dle známého vztahu počítána velikost vektoru z jeho jednotlivých složek. Tímto postupem jsou záporné složky vektoru rychlosti eliminovány a je uvažována jen jejich absolutní hodnota. Vlastní tvary tlaku a velikosti rychlosti se z tohoto důvodu obtížně porovnávají. Je však velice pravděpodobné, že při současném vykreslení odpovídajících si 3D koherentních struktur tlakového pole a při vhodném 3D zobrazení proudnic (počítaných ze složek rychlosti a znázorňujících daný vlastní tvar rychlosti) by bylo možné pozorovat vzájemnou souvislost a podobné umístění mezi vlastními tvary rychlosti a tlaku. Tento předpoklad vychází z výsledků kapitoly 6.2.2, kde bylo provedeno vykreslení odpovídajících si 2D vlastních tvarů tlaku a rychlosti v rámci jednoho obrázku.

Nultý vlastní tvar (*Obr. 7.15*) má význam časově střední hodnoty tlakového pole. Na podélném řezu tohoto vlastního tvaru (*Obr. 7.15, vlevo*) jsou názorně vidět dvě různoběžné části přímek⁴, které tvoří řez pomyslnou kuželovou plochou. Tato kuželová plocha tvoří hranici výskytu vírového copu a znázorňuje tedy jeho postupné rozšiřování v radiálním směru v závislosti na směru axiálním. Úhel, který je pro tuto kuželovou plochu charakteristický, je

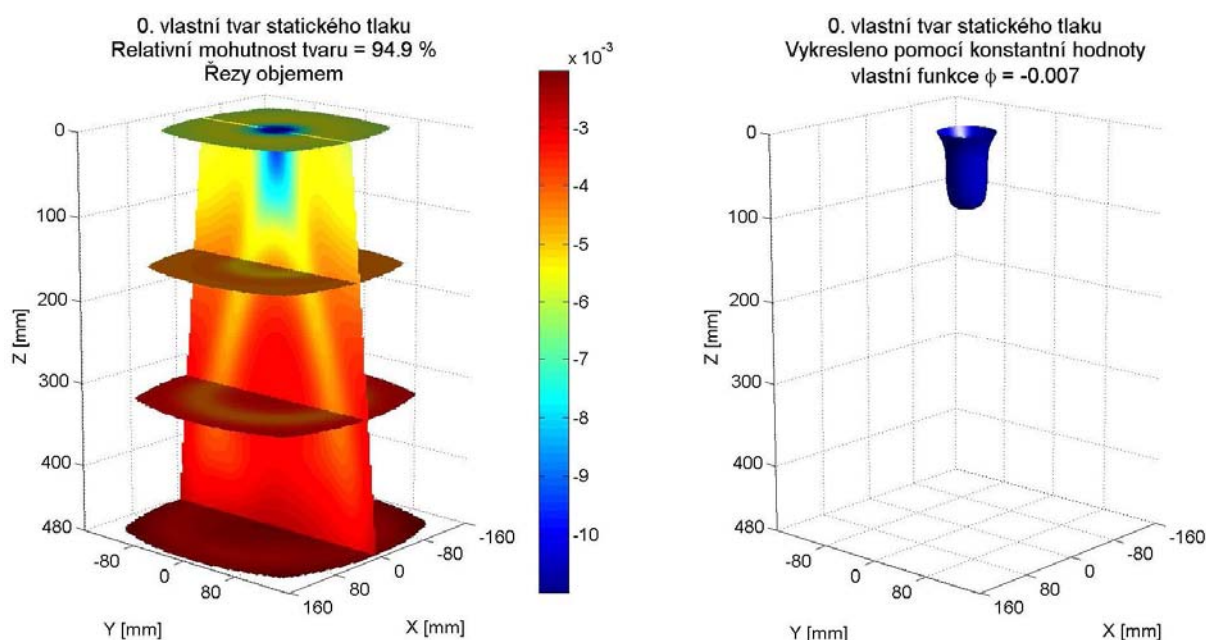
³ Jednotlivé řezy tlakovým polem jsou velice blízké výsledkům v práci autora Rudolf (2010) [15].

⁴ Tyto části přímek jsou znázorněny pomocí konstantní hodnoty vlastní funkce (žlutá barva na červeném pozadí).

v tomto případě větší než daný úhel kuželové savky, ve které vírový cop vzniká (Rudolf, 2010) [15].

První i druhý vlastní tvar tlakového pole (vírového copu) je tvořen vždy dvojicí spirálových útvarů (Obr. 7.16 a Obr. 7.17). Tyto dva vlastní tvary jsou vzájemně pootočené o úhel 90° a tvoří pár⁵, což je v souladu s teoretickými poznatky o metodě POD. Třetí vlastní tvar tlakového pole je svým geometrickým uspořádáním poměrně specifický⁶ (Obr. 7.18). Z daného řezu (Obr. 7.18, vlevo) vyplývá, že k celkovému obrazu tlakového pole tento tvar přispívá především ve spodní části sledovaného objemu. Pátý vlastní tvar má již opět spirálový charakter. Velikost průřezu spirálových útvarů u tohoto vlastního tvaru rychle narůstá, a z tohoto důvodu je velmi pravděpodobné, že bude tento vlastní tvar ovlivňovat celkový obraz tlakového pole opět především ve spodní části sledovaného objemu. Sedmý a devátý vlastní tvar tlakového pole má již komplikovanější geometrii (podobně jako u vyšších vlastních tvarů tlakového pole v případě Kármánovy vírové stezky). U těchto dvou vlastních tvarů se po vykreslení jedné kladné a jedné záporné konstantní hodnoty vlastní funkce ϕ_i objeví dvě koherentní struktury, které jsou (na rozdíl od předchozích vlastních tvarů) charakteristické hned čtyřmi spirálovými útvary.

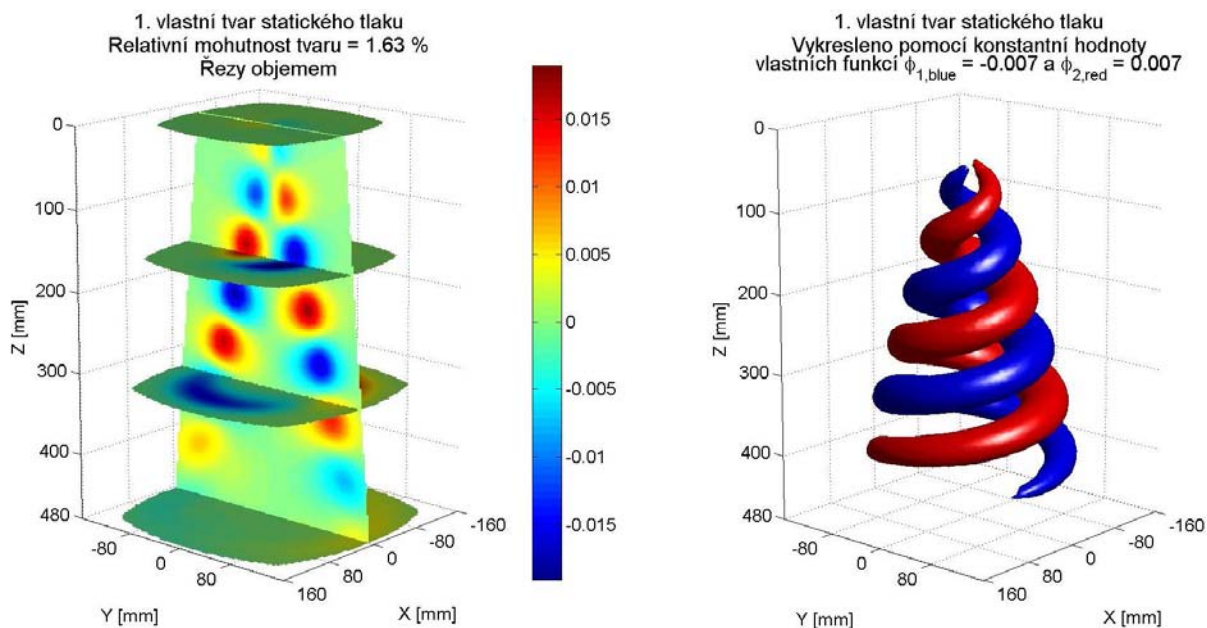
Pomocí metody vlastní ortogonální dekompozice je tedy možné vypočítat a následně vykreslit prostorové vlastní tvary tlakového a rychlostního pole (resp. velikosti rychlosti), které umožňují odlišný pohled na dynamické jevy probíhající při rotaci vírového copu v savce vodní turbíny.



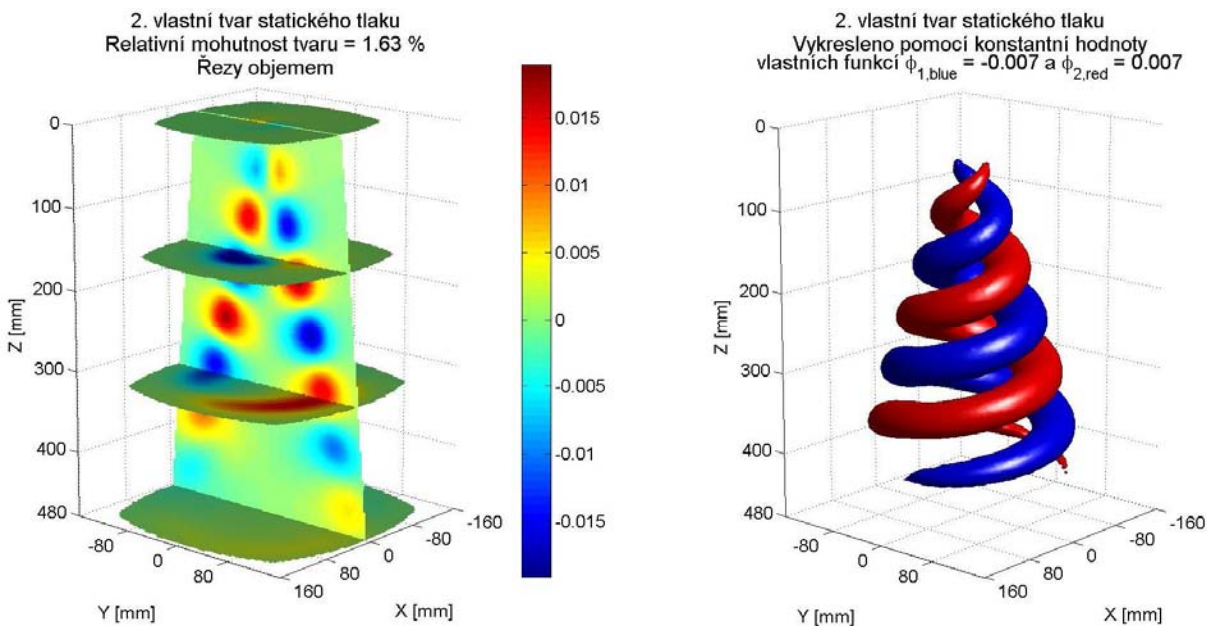
Obr. 7.15 Nultý vlastní tvar tlakového pole, **vlevo:** řezy objemem, **vpravo:** vykreslení pomocí konstantní hodnoty vlastní funkce ϕ

⁵ Vlastní tvary tvořící pár mají podobnou hodnotu relativní mohutnosti (energie) a podobný (pootočený) geometrický tvar.

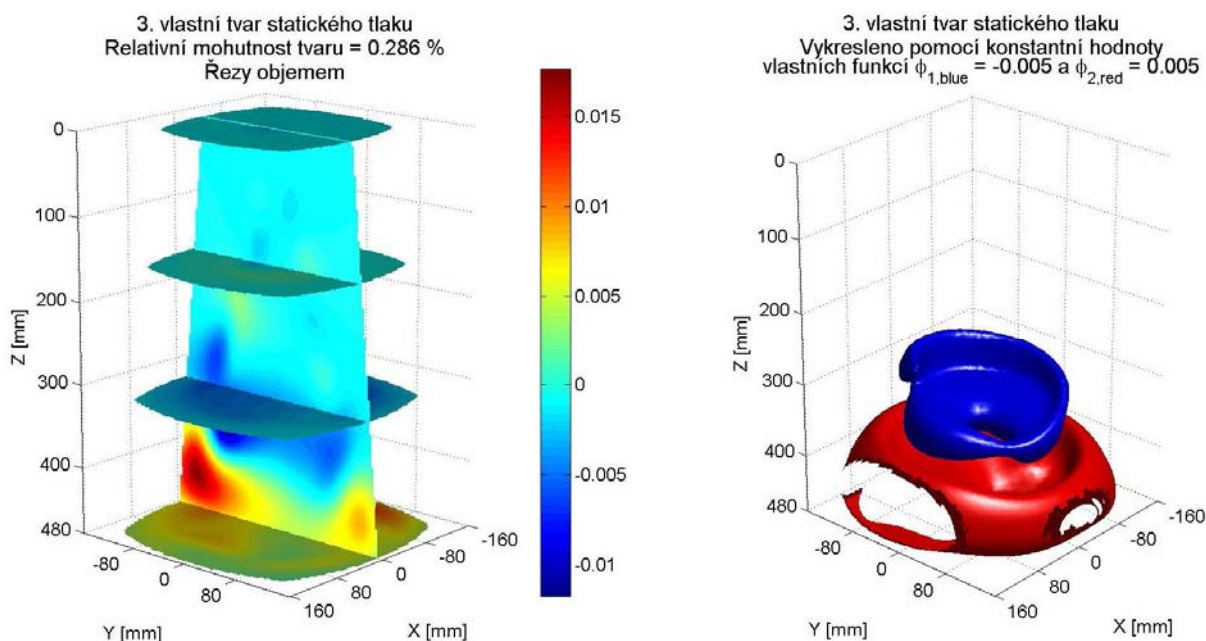
⁶ Oříznutí prostorových tvarů u třetího, pátého a devátého vlastního tvaru tlakového pole je způsobeno koncem daného dílčího objemu, ze kterého byla zapisována data.



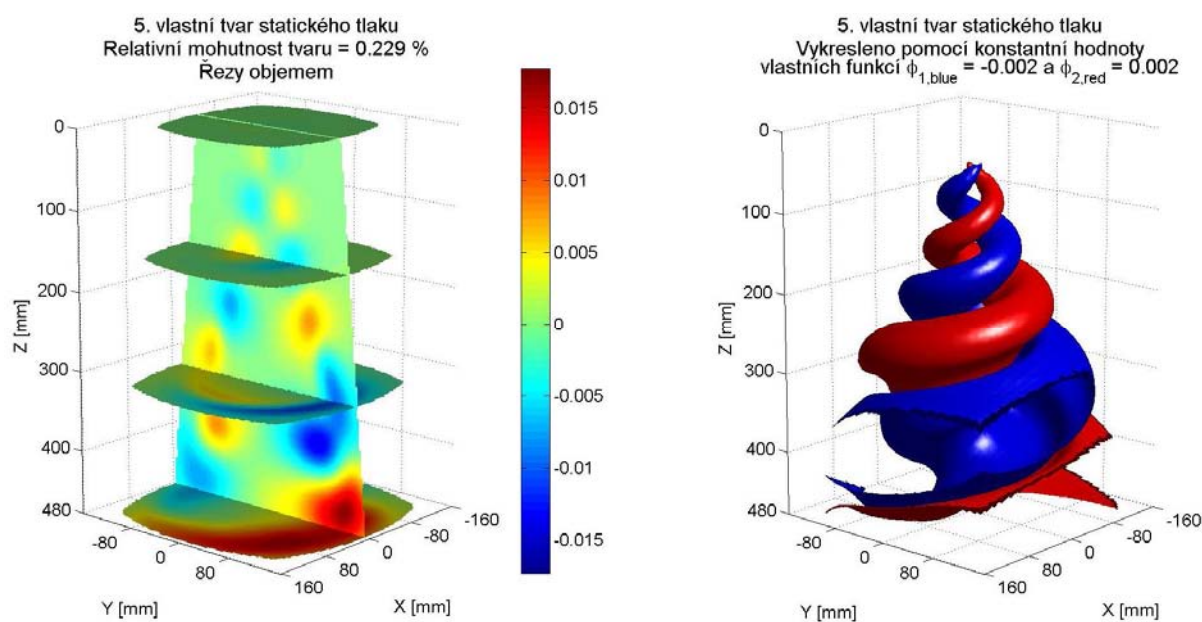
Obr. 7.16 První vlastní tvar tlakového pole, **vlevo:** řezy objemem, **vpravo:** vykreslení pomocí dvou konstantních hodnot vlastní funkce ϕ (červený a modrý tvar v čase kmitají a mění vzájemně velikost vlastní funkce z kladných hodnot do záporných a zpět)



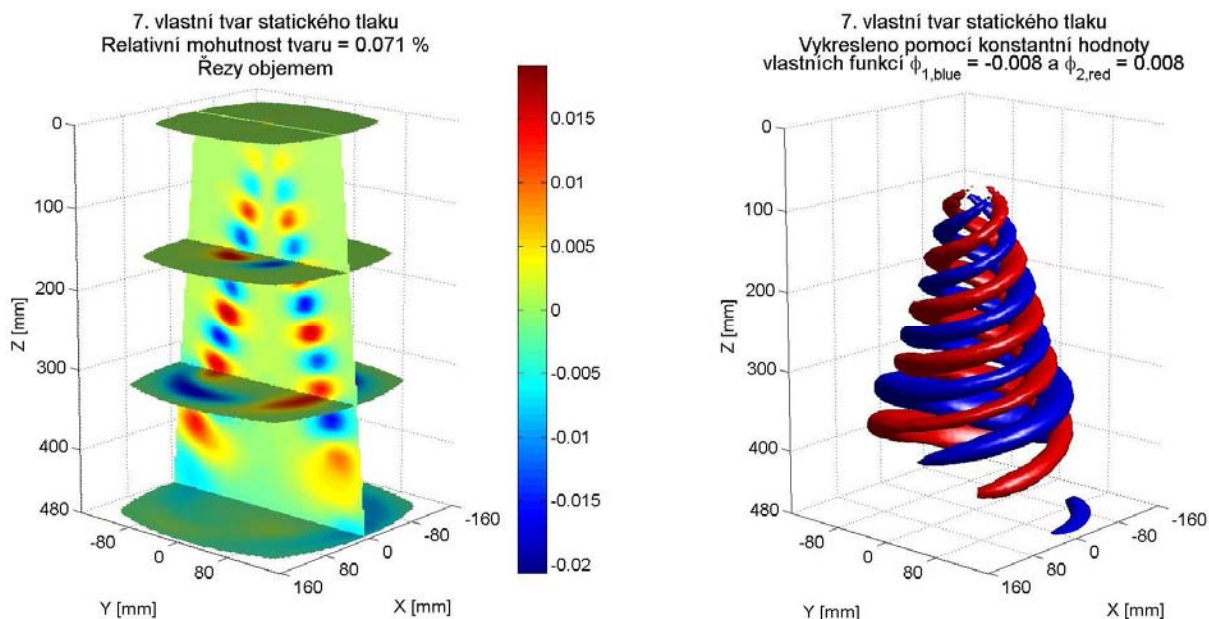
Obr. 7.17 Druhý vlastní tvar tlakového pole, **vlevo:** řezy objemem, **vpravo:** vykreslení pomocí dvou konstantních hodnot vlastní funkce ϕ (červený a modrý tvar v čase kmitají a mění vzájemně velikost vlastní funkce z kladných hodnot do záporných a zpět)



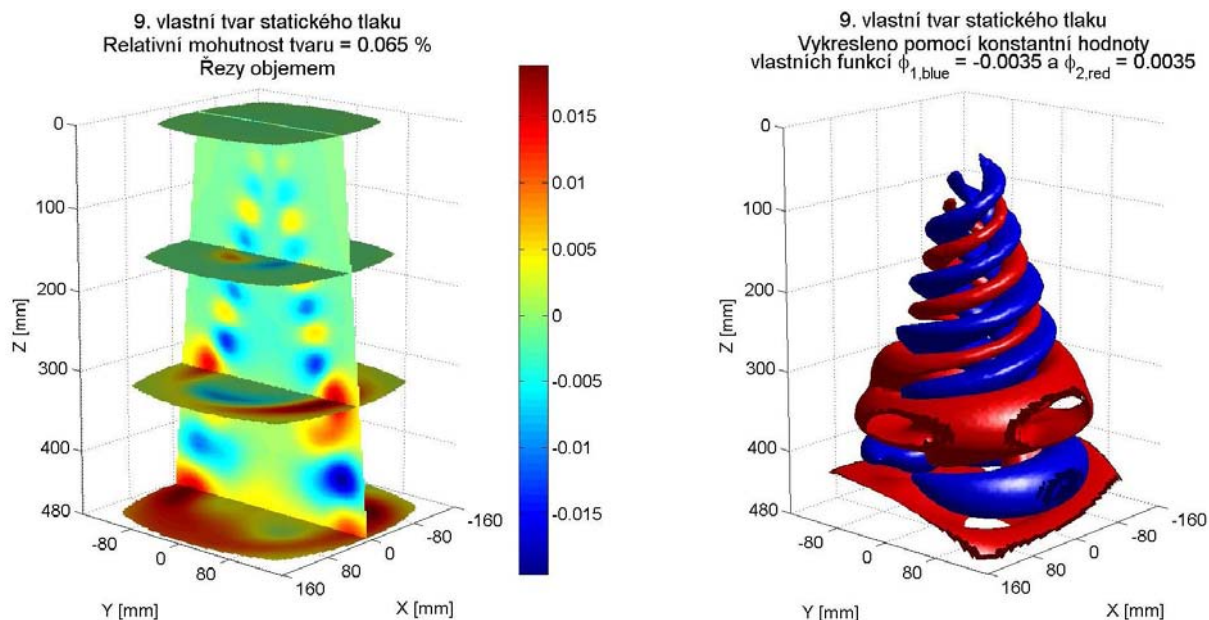
Obr. 7.18 Třetí vlastní tvar tlakového pole, **vlevo:** řezy objemem, **vpravo:** vykreslení pomocí dvou konstantních hodnot vlastní funkce ϕ (červený a modrý tvar v čase kmitají a mění vzájemně velikost vlastní funkce z kladných hodnot do záporných a zpět)



Obr. 7.19 Pátý vlastní tvar tlakového pole, **vlevo:** řezy objemem, **vpravo:** vykreslení pomocí dvou konstantních hodnot vlastní funkce ϕ (červený a modrý tvar v čase kmitají a mění vzájemně velikost vlastní funkce z kladných hodnot do záporných a zpět)



Obr. 7.20 Sedmý vlastní tvar tlakového pole, **vlevo:** řezy objemem, **vpravo:** vykreslení pomocí dvou konstantních hodnot vlastní funkce ϕ (červený a modrý tvar v čase kmitají a mění vzájemně velikost vlastní funkce z kladných hodnot do záporných a zpět)



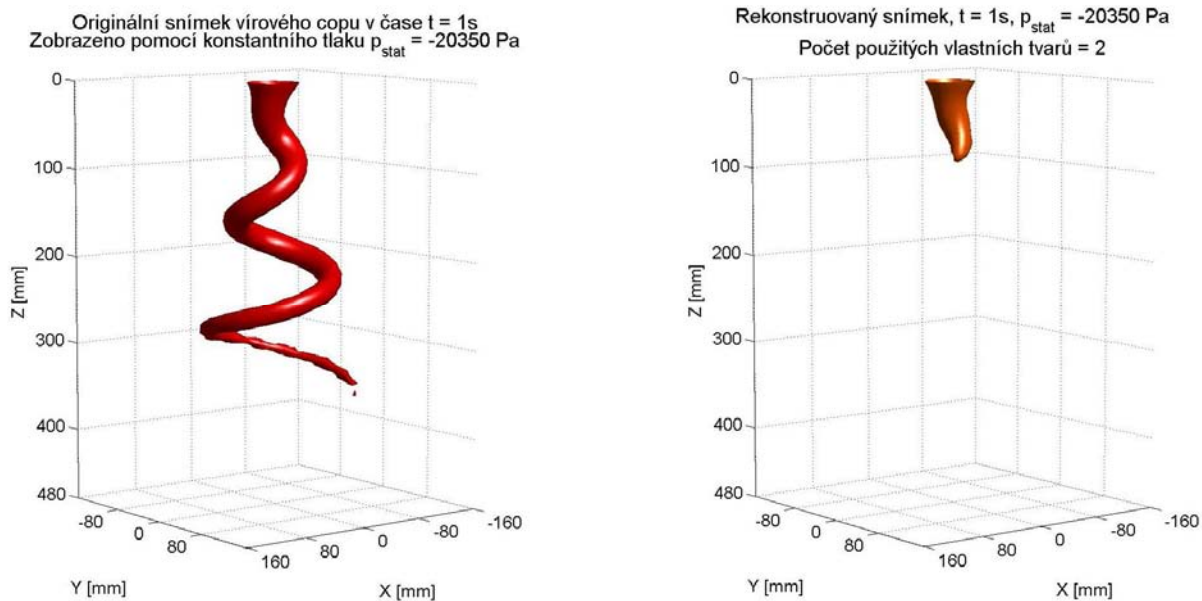
Obr. 7.21 Devátý vlastní tvar tlakového pole, **vlevo:** řezy objemem, **vpravo:** vykreslení pomocí dvou konstantních hodnot vlastní funkce ϕ (červený a modrý tvar v čase kmitají a mění vzájemně velikost vlastní funkce z kladných hodnot do záporných a zpět)

7.3 Rekonstrukce okamžitého snímku

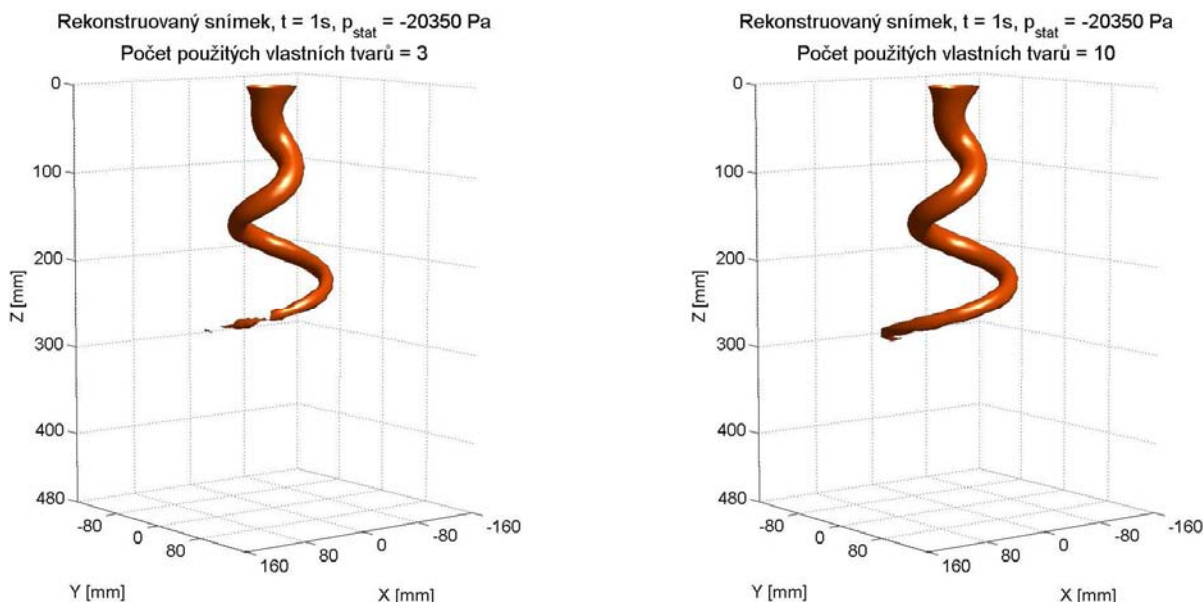
V této kapitole je provedena rekonstrukce okamžitého snímku vírového copu. Metoda, kterou lze tyto okamžité snímky vírového copu získat, je stejná jako v kapitole 6.3, kdy byl rekonstruován okamžitý snímek tlakového pole Kármánovy vírové stezky.

Na následujících obrázcích je ukázáno, jak počet vlastních tvarů použitých pro rekonstrukci ovlivňuje výsledný okamžitý snímek vírového copu. Na *Obr. 7.22* vlevo je originální snímek vírového copu v čase 1 sekunda (vykresleno pomocí konstantní hodnoty statického tlaku $p_{\text{stat}} = -20350 \text{ Pa}$). Na *Obr. 7.22* vpravo a *Obr. 7.23* jsou postupně zobrazeny rekonstruované okamžité snímky vírového copu z prvních dvou, tří a deseti vlastních tvarů (včetně nultého tvaru). Z této postupné rekonstrukce je patrné, že první a druhý vlastní tvar mají podle očekávání největší vliv na okamžitý tvar vírového copu. Z porovnání *Obr. 7.22* a *Obr. 7.23* dále vyplývá, že i vlastní tvary s vyšším pořadovým číslem mají určitý vliv na výsledný tvar rekonstruovaného okamžitého snímku. Postupné zpřesňování rekonstruovaných snímků v závislosti na počtu použitých vlastních tvarů opět koresponduje s přiřazením hodnot relativní mohutnosti jednotlivým vlastním tvarům tlakového pole (*Obr. 7.13*).

Pomocí zpětné rekonstrukce okamžitého snímku vírového copu lze tedy částečně verifikovat správnost prováděných výpočtů.



Obr. 7.22 Rekonstrukce okamžitého snímku vírového copu v čase $t = 1$ s (vykresleno pomocí konstantního statického tlaku $p = -20350$ Pa) **vlevo:** originální snímek vírového copu, **vpravo:** rekonstruovaný okamžitý snímek vytvořený z prvních dvou vlastních tvarů (tj. 0. a 1. tvar)



Obr. 7.23 Rekonstrukce okamžitého snímku vírového copu v čase $t = 1$ s (vykresleno pomocí konstantního statického tlaku $p = -20350$ Pa) **vlevo:** rekonstruovaný okamžitý snímek vytvořený z prvních třech vlastních tvarů (tj. 0. až 2. tvar)., **vpravo:** rekonstruovaný okamžitý snímek vytvořený z prvních deseti vlastních tvarů (tj. 0. až 9. tvar)

8 Závěr

V předložené diplomové práci byla studována dynamika vírového proudění u následujících dvou případů:

- obtékání kvádrů, za kterým vzniká Kármánova vírová stezka (řešeno v rovině),
- vírové proudění v kuželové savce vodní turbíny, ve které vzniká vírový cop (řešeno v prostoru).

Jedním z hlavních výsledků této diplomové práce je identifikace vlastních tvarů u zmíněných dvou typů vírového proudění. Vstupní data do metody vlastní ortogonální dekompozice, pomocí které lze vlastní tvary proudění identifikovat, byla v obou případech získána pomocí numerického modelování proudění (CFD výpočtů). Následně byly vyvinuty dílčí procedury v programu Matlab, které umožňují samotný výpočet a následné zobrazení vlastních tvarů proudění.

V první fázi této práce byla metodika výpočtů vlastních tvarů (a frekvencí) testována na úloze obtékání kvádrů, za kterým vzniká Kármánova vírová stezka. U této úlohy byly známy experimentální výsledky (především velikost frekvence periodicky se odtrhávajících vírů) a bylo tedy možné vůči těmto experimentálním výsledkům verifikovat výsledky získané z numerického modelování proudění. Následně byly verifikovány i samotné výpočty (procedury) použité pro určení vlastních tvarů proudění a to formou porovnání vlastních frekvencí získaných z CFD výpočtů s vlastními frekvencemi jednotlivých vlastních tvarů proudění. Správnost výpočtů, pomocí kterých lze identifikovat vlastní tvary proudění, byla částečně ověřena i ze zdařilé rekonstrukce zvoleného okamžitého snímku tlakového pole.

Metodika pro určení vlastních tvarů proudění byla v případě Kármánovy vírové stezky aplikována na pole rychlostní, tlakové a pole velikosti vířivosti. Pro každé z těchto polí byly identifikovány vlastní tvary, kterým byla přiřazena určitá hodnota relativní energie znázorňující jejich důležitost. Ve všech případech byla nultému vlastnímu tvaru proudění přiřazena většina relativní energie proudění. Tento tvar má význam časově střední hodnoty, a není tedy z dynamického pohledu příliš zajímavý.

Dynamicky zajímavé jsou však ostatní vlastní tvary odhalující skryté koherentní (vírové) struktury Kármánovy vírové stezky. Tyto vlastní tvary kmitají na frekvencích, které jsou vždy násobkem základní frekvence periodicky se odtrhávajících vírů. V případě vlastních tvarů rychlostního a tlakového pole je možné identifikovat základní frekvenci odtrhávání vírů (2,063 Hz) u prvních dvou vlastních tvarů, což odpovídá teoretickým poznatkům o metodě vlastní ortogonální dekompozice. Kmitání vybraných vlastních tvarů rychlostního a tlakového pole je zachyceno i na videích umístěných v příloze této práce. Ze všech vlastních tvarů je na základě hodnot relativní energie vždy nejvýznamnější první a druhý vlastní tvar daného pole a až poté tvary další (tento výsledek je předurčen samotným použitím metody vlastní ortogonální dekompozice). Z nalezených vlastních tvarů Kármánovy vírové stezky také vyplývá, že složitost identifikovaných koherentních (vírových) struktur se s narůstajícím pořadovým číslem vlastních tvarů postupně zvětšuje.

Z porovnání nalezených vlastních tvarů rychlosti, tlaku a velikosti vířivosti vyplynulo několik závislostí, které by mohly mít určitý fyzikální význam. Mezi tyto závislosti patří především rozdílnost v symetrii odpovídajících si vlastních tvarů rychlosti a tlaku, která je

inverzního charakteru (symetrickému vlastnímu tvaru rychlosti odpovídá nesymetrický vlastní tvar tlakového pole a opačně). Dále dochází u vlastních tvarů rychlosti a tlaku ke střídání symetrických a antisymetrických tvarů vždy po párech, což by také mohlo mít určitý hlubší fyzikální význam. Z porovnání vlastních tvarů rychlosti a velikosti vířivosti (resp. jejich vlastních frekvencí) dále vyplývá, že vlastní tvary velikosti vířivosti jsou vůči vlastním tvarům rychlosti (i tlaku) posunuty právě o jeden vlastní tvar. Nalezení příčiny tohoto posunutí stejně jako nalezení možných fyzikálních významů u ostatních uvedených závislostí mezi vlastními tvary rychlosti, tlaku a vířivosti nebylo v rámci této diplomové práce provedeno. Studium těchto závislostí by však mohlo být předmětem některé další práce zabývající se vlastními tvary proudění a metodou vlastní ortogonální dekompozice.

V závěrečné části této práce byla použita již otestovaná metodika pro identifikaci prostorových vlastních tvarů proudění v kuželové savce vodní turbíny, ve které vzniká vírový cop. Prostorové vlastní tvary byly v tomto případě nalezeny pro rychlostní pole (resp. pro velikost rychlosti) a pro pole tlakové. Z dynamického pohledu je opět nejvýznamnější především první a druhý vlastní tvar proudění. Obzvláště u vlastních tvarů tlakového pole je zřejmé, že vlastní tvary s vyšším pořadovým číslem jsou tvořeny složitějšími koherentními strukturami skládajícími se z více tvarů geometrických (z více spirálových útvarů). U některých vlastních tvarů tlakového pole (především třetí, pátý a devátý vlastní tvar) je navíc patrné, že přispívají k celkovému obrazu proudění především ve spodní části sledovaného objemu, tj. v oblasti, kde dochází k rozpadu víru.

Všechny prostorové vlastní tvary opět kmitají na určité frekvenci v podobném smyslu, jako tomu bylo u Kármánovy vírové stezky. Amplitudo-frekvenční charakteristiky jednotlivých vlastních tvarů mají poměrně složitý průběh, nicméně je u nich možné identifikovat násobky základní frekvence rotace vírového copu (18,07 Hz). Tuto základní frekvenci lze zřetelně identifikovat u prvního a druhého vlastního tvaru tlaku a velikosti rychlosti, což je opět v souladu s teoretickými poznatky o POD. Z nalezených vlastních tvarů tlakového pole byla na závěr úspěšně provedena rekonstrukce okamžitého snímku tlakového pole, čímž lze výpočty prostorových vlastních tvarů vírového copu částečně verifikovat.

Hlavním přínosem této části práce je především samotná identifikace prostorových vlastních tvarů vírového copu.

Studium vírového pohybu včetně jeho dynamických vlastností je bezesporu důležitým odvětvím lidského poznání a jeho výsledky je možné aplikovat ke zdokonalení mnoha technických zařízení nebo k predikci různých nebezpečných jevů vznikajících v přírodě (tornáda, hurikány apod.). Z tohoto důvodu jsou poznatky o vírovém pohybu důležité a má smysl se tímto specifickým pohybem zabývat.

9 Seznam použitých zdrojů

- [1] BERKOOZ, G., HOLMES, P., LUMLEY, J. L. The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 1993, 25, s. 539-575.
- [2] BRDIČKA, M., SAMEK, L., SOPKO, B. *Mechanika kontinua*. Praha : Academia, 2005. 799 s. ISBN 80-200-1344-X.
- [3] DRAZIN, P. G., REID, W. H. *Hydrodynamic stability*. Cambridge (GB) : Cambridge University Press, 2004. 605 s. ISBN 0-521-52541-1.
- [4] DURÃO, D. F. G., HEITOR, M. V., PEREIRA, J. C. F. Measurement of turbulent and periodic flows around a square cross-section cylinder. *Experiments in Fluids*. 1988, no. 6, s. 298-304.
- [5] CHATTERJEE, A. An introduction to the proper orthogonal decomposition. *Current Science* [online]. 2000, vol. 78, no. 7, [cit. 2011-03-05]. Dostupné z WWW: <<http://www.ias.ac.in/currsci/apr102000/tutorial2.pdf>>.
- [6] KUNDU, P. K., COHEN, I. M. *Fluid Mechanics*. United States : Elsevier, 2008. 872 s. ISBN 978-0-12-373735-9.
- [7] KUO, S. M., LEE, B. H., TIAN, W. *Real-time digital signal processing : Implementations and applications*. 2nd edition. Chippingham (England) : John Wiley, 2006. 646 s. ISBN 978-0-470-01495-0.
- [8] LUGT, H. J. *Vortex flow in nature and technology*. John Wiley & Sons, 1983. 297 s. ISBN 0-471-86925-2.
- [9] LYN, D. A., RODI, W. The flapping shear layer formed by flow separation from the forward corner of a square cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*. 1994, vol. 267, s. 353-376.
- [10] MEYER, K. E. Identify flow structures with proper orthogonal decomposition (POD). In *Proceedings of the DANSIS seminar on visualization* (2008), Denmark.
- [11] Orthonormality. In *Wikipedia : the free encyclopedia* [online]. St. Petersburg (Florida) : Wikipedia Foundation, 11 March 2003, last modified on 8 April 2011 [cit. 2011-04-30]. Dostupné z WWW: <<http://en.wikipedia.org/wiki/Orthonormality>>.
- [12] Plateau-Rayleigh instability. In *Wikipedia : the free encyclopedia* [online]. St. Petersburg (Florida) : Wikipedia Foundation, 27 December 2008, last modified on 21 February 2010 [cit. 2011-04-23]. Dostupné z WWW: <http://en.wikipedia.org/wiki/Plateau-Rayleigh_instability>.

- [13] Rayleigh-Taylor instability. In *Wikipedia : the free encyclopedia* [online]. St. Petersburg (Florida) : Wikipedia Foundation, 16 April 2005, last modified on 7 April 2011 [cit. 2011-04-23]. Dostupné z WWW: <http://en.wikipedia.org/wiki/Rayleigh-Taylor_instability>.
- [14] REKTORYS, K. *Přehled užité matematiky*. Vydání páté. Praha : SNTL Nakladatelství technické literatury, 1988. 1144 s.
- [15] RUDOLF, P. *A contribution to study of the swirling flow*. Brno, 2010. 114 s. Habilitační práce. Vysoké učení technické, Fakulta strojního inženýrství, Energetický ústav.
- [16] SARIOGLU, M., YAVUZ, T. Vortex shedding from circular and rectangular cylinders placed horizontally in a turbulent flow. *Turkey Journal of Engineering and Enviromental Science* [online]. 2000, no. 24, [cit. 2011-01-24]. s. 217-228. Dostupné z WWW: <<http://journals.tubitak.gov.tr/engineering/issues/muh-00-24-4/muh-24-4-2-98076.pdf>>.
- [17] SKOTÁK, A. *Vírové struktury v savce vodní turbíny*. Brno, 2004. 68 s. Dizertační práce. Vysoké učení technické, Fakulta strojního inženýrství, Energetický ústav. Vedoucí práce Prof. Ing. František Pochylý, CSc.
- [18] SUSAN-RESIGA, R. *et al.* Analysis of the swirling flow downstream a Francis turbine runner. *Journal of Fluids Engineering*. 2006, Vol. 128, s. 177-189.
- [19] ŠOB, F. *Hydromechanika*. Vydání druhé. Brno : Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., 2008. 238 s. ISBN 978-80-214-3578-0.
- [20] Taylor-Couette flow. In *Wikipedia : the free encyclopedia* [online]. St. Petersburg (Florida) : Wikipedia Foundation, 5 August 2005, last modified on 22 April 2011 [cit. 2011-04-23]. Dostupné z WWW: <http://en.wikipedia.org/wiki/Taylor-Couette_flow>.
- [21] Vlastní číslo. In *Wikipedia : the free encyclopedia* [online]. St. Petersburg (Florida) : Wikipedia Foundation, 9. 8. 2006, last modified on 7. 3. 2011 [cit. 2011-04-30]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Vlastn%C3%AD_%C4%8D%C3%ADslo>.
- [22] WILCOX, D. C. *Basic fluid mechanics*. La Canada (California) : DCW Industries, 2000. 783 s. ISBN 1-928729-03-7.
- [23] ZAPLATÍLEK, K., DOŇAR, B. *Matlab : Začínáme se signály*. 1. vydání. Praha : BEN-technická literatura, 2006. 272 s. ISBN 80-7300-200-0.

Zdroje obrázků:

- [24] CARDOSO, V. *Multidisciplinary Center for Astrophysics* [online]. c2004 [cit. 2011-04-27]. Vitor Cardoso's website. Dostupné z WWW: <<http://gamow.ist.utl.pt/~vitor/stability.html>>.

- [25] *École Polytechnique Fédérale de Lausanne* [online]. c2011 [cit. 2011-04-30]. Electricity and Electrical Mobility. Dostupné z WWW: <http://energycenter.epfl.ch/electricity_mobility>.
- [26] Kelvin-Helmholtz instability. In *Wikipedia : the free encyclopedia* [online]. St. Petersburg (Florida) : Wikipedia Foundation, 31 March 2004, last modified on 17 February 2011 [cit. 2011-04-23]. Dostupné z WWW: <http://en.wikipedia.org/wiki/Kelvin-Helmholtz_instability>.
- [27] LIENHARD, J. H. *Engines of Our Ingenuity : No. 1653: Aeolian Vibration* [online]. c1988-2001 [cit. 2011-04-29]. Dostupné z WWW: <<http://www.uh.edu/engines/epi1653.htm>>.
- [28] LIM, T. T. *National University of Singapore* [online]. 1st August, 2001 [cit. 2011-04-27]. Department of mechanical engineering. Dostupné z WWW: <<http://serve.me.nus.edu.sg/limtt/>>.
- [29] LIM, T. T. *eFluids* [online]. c2005 [cit. 2011-04-25]. eFluids Image Gallery. Dostupné z WWW: <http://www.efluids.com/efluids/gallery/gallery_pages/Lim_hairpin.jsp>.
- [30] *Massachusetts Institute of Technology : Department of Aeronautics and Astronautics* [online]. February 11, 1996 [cit. 2011-04-25]. Transition to Turbulence Pictures. Dostupné z WWW: <<http://web.mit.edu/aeroastro/www/labs/FDRL/trans2turb.html>>.
- [31] URUBA, V. *Personal web - Václav Uruba* [online]. c2004 [cit. 2011-04-25]. 5 ročník. Dostupné z WWW: <http://www.it.cas.cz/~uruba/5_r.htm#Turbulence>.
- [32] *Wired* [online]. c2010 [cit. 2011-04-29]. Wired science. Dostupné z WWW: <<http://www.wired.com/wiredscience/2010/05/gallery-clouds/>>.

10 Seznam použitých zkratek a symbolů

Seznam zkratek:

CFD	výpočtové modelování proudění (Computational Fluid Dynamics)
FFT	rychlá Fourierova transformace (Fast Fourier Transform)
PIV	metoda měření rychlosti proudění (Particle Image Velocimetry)
POD	vlastní ortogonální dekompozice (Proper Orthogonal Decomposition)

Seznam symbolů:

A	obecná matice	
a_0	koeficient Fourierovy posloupnosti	
a_i	i-tý časový koeficient (metoda POD)	
a_k	koeficient Fourierovy posloupnosti	
b_k	koeficient Fourierovy posloupnosti	
c_k	Fourierův koeficient	
D	strana obtékaného čtverce	
E_k	relativní energie k-tého vlastního tvaru	
E_C	celková energie vlastních tvarů	
f	frekvence	[Hz]
h	vlastní vektor	
j	imaginární jednotka	
K	konstanta	[1]
L	charakteristický rozměr	[m]
M	počet okamžitých snímků (snapshotů)	[1]
N	počet diskrétních hodnot (počet snímaných bodů)	[1]
n	normálový vektor	
P	výkon	[W]
p	statický tlak	[Pa]
Q	průtok	[m ³ /s]
R	korelační matice (metoda POD)	
R	poloměr jádra víru	[m]
Re	Reynoldsovo číslo	[1]
r	vzdálenost od osy rotace víru	[m]
S	plocha	[m ²]
Sh	Strouhalovo číslo	[1]
T_0	perioda	[s]
t	čas	[s]
u	obecná skalární funkce (metoda POD)	
v	rychlost	[m/s]
v_{ax}	axiální rychlost	[m/s]
v_r	radiální rychlost	[m/s]
v_x	složka rychlosti ve směru osy x	[m/s]
v_y	složka rychlosti ve směru osy y	[m/s]
v_θ	tangenciální rychlost	[m/s]

$\mathbf{x}$	polohový vektor	
Γ	cirkulace rychlosti	$[\text{m}^2/\text{s}]$
ΔT	časový krok CFD výpočtu	$[\text{s}]$
ε_{ijk}	Levi-Civitaův tenzor	
η	účinnost	$[\%]$
λ	vlastní číslo	
μ	intenzita víru	$[\text{m}^2/\text{s}]$
ν	kinematická viskozita	$[\text{m}^2/\text{s}]$
ϕ_i	i-tá vlastní funkce (funkce vlastních tvarů)	
Ω	úhlová rychlost víru	$[\text{rad}/\text{s}]$
Ω_0	kruhová frekvence	$[\text{Hz}]$
ω	vířivost	$[\text{rad}/\text{s}]$

Index

CFD	výpočtové modelování proudění (Computational Fluid Dynamics)
exp	experiment
max	maximální
opt	optimální
POD	vlastní ortogonální dekompozice (Proper Orthogonal Decomposition)
vz	vzorkovací

$\mathbf{x}$	označení vektoru $\mathbf{x}$ (malé a tučné písmo)
$\mathbf{Y}$	označení matice $\mathbf{Y}$ (velké a tučné písmo)
$\mathbf{Z}'$	označení transpozice matice $\mathbf{Z}$ (příp. vektoru)

11 Seznam příloh

1. CD-ROM, kde jsou umístěna videa znázorňující kmitání vybraných vlastních tvarů Kármánovy vírové stezky